Carlos Ivorra Castillo

TEORÍA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS

Mais la question beaucoup plus intéressante: peut-on nommer un ensemble non mesurable? reste entière.

H. Lebesgue

Índice General

Introducción

La teoría descriptiva de conjuntos consiste esencialmente en el estudio de conjuntos (subconjuntos de espacios topológicos, para ser más precisos) que resultan de aplicar un proceso de construcción a partir de conjuntos sencillos o que satisfacen una definición más o menos explícita, de modo que, en un sentido no muy preciso, pueden considerarse conjuntos "definibles", por oposición a conjuntos "arbitrarios" de los que no tenemos *a priori* información alguna sobre su estructura.

Los precedentes de la teoría descriptiva de conjuntos se remontan a finales del siglo XIX, cuando Cantor trataba de demostrar (o, en su caso, refutar) la hipótesis del continuo. En la práctica, todo se reducía a demostrar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es numerable o bien tiene el cardinal del continuo, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Cantor abordó el problema de formas muy diversas, y una de ellas fue estudiar primero los subconjuntos de $\mathbb{R}$ más sencillos para ir analizando progresivamente conjuntos más complejos.

Los subconjuntos más sencillos son sin duda los conjuntos abiertos, especialmente a la hora de calcular cardinales, pues todo abierto no vacío contiene un intervalo abierto, y es fácil ver que todo intervalo abierto se puede biyectar con $\mathbb{R}$ (mediante una aplicación continua, de hecho).

Cantor se propuso entonces estudiar los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Ya no es cierto que todos tengan cardinal $\mathfrak{c}$, pues, por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es un subconjunto cerrado numerable. No obstante, sucede que todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ es numerable o tiene cardinal $\mathfrak{c}$. Para llegar a esta conclusión estudió primero los cerrados que llamó *perfectos,* que en lenguaje moderno son los cerrados no vacíos sin puntos aislados, y demostró que todo cerrado perfecto contiene una copia del que ahora conocemos como conjunto (ternario) de Cantor, y esto a su vez implica que tiene cardinal $\mathfrak{c}$.

El caso de un cerrado arbitrario fue resuelto por un joven estudiante sueco llamado Ivar Otto Bendixson, que se lo comunicó a Cantor en una carta, en la que demostraba, basándose en ideas de Cantor, que todo cerrado puede descomponerse como unión de un cerrado perfecto (o vacío) y de un conjunto numerable. Por lo tanto, ningún cerrado podía servir de contraejemplo a la hipótesis del continuo.

Es en la demostración de este hecho, que hoy se conoce como teorema de Cantor-Bendixson, (publicada en 1883) donde podemos encontrar un argumento que nos aparecerá más adelante en este libro y que, por consiguiente, puede verse como uno de los primeros precedentes de la teoría descriptiva de conjuntos. Veamos un esbozo:

Dado un cerrado $C \subset \mathbb{R}$, consideramos su *conjunto derivado* C' (un concepto que había sido introducido por Cantor unos años atrás), que en términos modernos no es sino el conjunto de los puntos de acumulación de C. El hecho de que C sea cerrado se traduce en que $C' \subset C$. También había sido Cantor quien había observado que era posible definir una sucesión decreciente de conjuntos:

$$C = C^{(0)} \supset C^{(1)} \supset C^{(2)} \supset C^{(3)} \supset \cdots,$$

donde cada conjunto es el derivado del anterior, al igual que fue Cantor quien observó que a continuación se podía calcular

$$C^{(\infty)} = \bigcap_{n=0} C^{(n)},$$

y que a su vez esto permitía continuar la sucesión de conjuntos derivados:

$$C = C^{(0)} \supset C^{(1)} \supset C^{(2)} \supset \cdots \supset C^{(\infty)} \supset C^{(\infty+1)} \supset C^{(\infty+2)} \supset \cdots$$

Similarmente, se podía calcular

$$C^{(\infty+\infty)} = C^{(2\cdot\infty)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^{(\infty+n)},$$

lo que a su vez permitía continuar de nuevo la sucesión con los derivados sucesivos de este conjunto, etc.

Ésta es la notación que usó Cantor en un principio para los conjuntos derivados (aunque la notación para la intersección es posterior), pero fue precisamente la generación de esta sucesión transfinita de conjuntos derivados la que le había llevado a introducir los números ordinales, y Bendixson conocía bien la teoría de ordinales, sobre la que Cantor ya había publicado varios trabajos en los que la exponía sistemáticamente. En particular, la notación "moderna" para el ordinal que Cantor había representado por ∞ era ω, y los convenios de la aritmética ordinal requerían escribir $\omega \cdot 2$ en lugar de $2 \cdot \infty$.

Así pues, el punto de partida de Bendixson fue la sucesión transfinita definida recurrentemente por

$$C^{(0)} = C, \qquad C^{(\alpha+1)} = C^{(\alpha)\prime}, \qquad C^{(\lambda)} = \bigcap_{\delta<\lambda} C^{(\delta)}.$$

Bendixson demostró que tiene que existir un ordinal numerable α tal que $C^{(\alpha+1)} = C^{(\alpha)}$. Entonces, $C^{(\alpha)}$ (un conjunto igual a su derivado) ha de ser un cerrado perfecto (o el conjunto vacío), mientras que cada diferencia $C^{(\beta+1)} \setminus C^{(\beta)}$, para $\beta < \alpha$ es un conjunto de puntos aislados, y la topología de $\mathbb{R}$ obliga a que sea numerable, al igual que la unión de todos ellos (puesto que α es numerable). Esto nos da la descomposición de Cantor-Bendixson.

Baire Cantor celebró el resultado, pero lo cierto es que no lo aprovechó. Para encontrar otro precedente de la teoría descriptiva de conjuntos hemos de dejar pasar 16 años y trasladarnos a Francia, donde, en 1899, René-Louis Baire defendió su tesis doctoral. Es conocido que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua, así como que esto no es cierto en general para límites puntuales. Por ello Baire introdujo las que hoy se conocen como *funciones de Baire* a través de una recursión transfinita: Para $X \subset \mathbb{R}^n$, definió el conjunto de las funciones (de Baire) de clase 0 como el conjunto $B_0(X)$ de las funciones continuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y, para cada ordinal numerable α, definió el conjunto de las funciones (de Baire) de clase α como el conjunto $B_\alpha(X)$ de las funciones que pueden obtenerse como límite puntual de una sucesión de funciones de las clases precedentes: $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta(X)$. Las funciones de Baire en X son los elementos de

$$B(X) = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha(X).$$

De este modo, la clase de las funciones de Baire en X es la menor familia de funciones reales definidas sobre X que contiene a las funciones continuas y es cerrada para límites puntuales. Como Cantor, Baire avistó un camino, pero no se decidió a seguirlo, pues en su tesis estudia únicamente las funciones de Baire de clase 0 y 1.

Lebesgue El primer trabajo que puede considerarse propiamente como "teoría descriptiva de conjuntos" en el sentido moderno es el titulado *"Sur les fonctions représentables analytiquement",* publicado por Lebesgue[1] en 1905. Lebesgue define la clase de las funciones representables analíticamente como la menor familia de funciones (en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$) cerrada para proyecciones, sumas, productos y límites puntuales. No es difícil probar que se trata simplemente de la clase de las funciones de Baire. Sin embargo, Lebesgue emprendió un estudio sistemático de estas funciones. Definió esencialmente la misma jerarquía que Baire y demostró, por ejemplo, que es estrictamente creciente, es decir, que si $\alpha < \beta$ son dos ordinales numerables, entonces $B_\alpha(X) \subsetneq B_\beta(X)$. En el artículo de Lebesgue encontramos el uso sistemático de varias técnicas que aparecerán en este libro: conjuntos universales, el empleo del método diagonal de Cantor, etc.

Lebesgue estudió a su vez una clase de conjuntos introducida de forma más o menos vaga por Emile Borel en el curso de sus investigaciones sobre teoría de la medida y teoría de la probabilidad. En términos modernos, la σ-álgebra de Borel de un espacio topológico es la menor familia de subconjuntos $\mathcal{B}$ que contiene a los abiertos y que es cerrada para uniones e intersecciones numerables y para complementos. Siempre con notación moderna, $\mathcal{B}$ también puede describirse en términos de una jerarquía transfinita:

En la base tenemos la clase $\mathbf{\Sigma}^0_1$ de los conjuntos abiertos y la clase $\mathbf{\Pi}^0_1$ de los conjuntos cerrados (sus complementarios). En segundo lugar tenemos las clases $\mathbf{\Sigma}^0_2$ y $\mathbf{\Pi}^0_2$, la primera de las cuales contiene a las uniones numerables

[1]La frase citada en la página iii es la frase con la que Lebesgue termina este tratado.

de cerrados (los conjuntos que los topólogos llaman F_σ) y la segunda a sus complementarios, que son también las intersecciones numerables de abiertos (o conjuntos G_δ). En general, para cada ordinal numerable α, las clases $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ y $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$ constan, respectivamente, de las uniones e intersecciones numerables de conjuntos de las clases precedentes $\boldsymbol{\Pi}^0_\beta$ y $\boldsymbol{\Sigma}^0_\beta$, respectivamente. Puede probarse que en todo espacio métrico X se tienen las inclusiones siguientes:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \boldsymbol{\Sigma}^0_1 & & & & \boldsymbol{\Sigma}^0_2 & & & & \boldsymbol{\Sigma}^0_3 & & & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
\boldsymbol{\Delta}^0_1 & & & & \boldsymbol{\Delta}^0_2 & & & & \boldsymbol{\Delta}^0_3 & & & & \boldsymbol{\Delta}^0_4 & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
 & & \boldsymbol{\Pi}^0_1 & & & & \boldsymbol{\Pi}^0_2 & & & & \boldsymbol{\Pi}^0_3 & & & &
\end{array}$$

donde $\boldsymbol{\Delta}^0_n = \boldsymbol{\Sigma}^0_n \cap \boldsymbol{\Pi}^0_n$, de modo que, por ejemplo, $\boldsymbol{\Delta}^0_1$ es el álgebra de los subconjuntos abiertos cerrados del espacio X. La σ-álgebra de Borel es entonces

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \boldsymbol{\Delta}^0_\alpha.$$

Lebesgue demostró que la clase $B_\alpha(X)$ coincide con la clase de las funciones $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medibles en X, es decir, la clase de las funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que si A es abierto en $\mathbb{R}$ entonces $f^{-1}[A]$ está en la clase $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\alpha+1}$.

Lusin, Suslin, Alexandroff En 1914, un joven profesor ruso de 21 años, Nikolai Nikolaevich Lusin, a instancias de uno de sus maestros, Dimitri Dedorovich Egorov, se puso al frente de un grupo de investigación integrado por algunos estudiantes, entre los que destacaban Mikhail Yakovlevich Suslin (de 20 años) y Pavel Sergeevich Alexandroff (de 18 años). Dirigidos por el carismático Lusin, los miembros de "la Lusitania" —como pronto fue conocido jocosamente el grupo— promovieron la investigación en una de las ramas más recientes de la matemática: la teoría de conjuntos y funciones. Así, en 1915, Alexandroff demostró que todo conjunto de Borel (o B-conjunto, como lo solían llamar) puede construirse a partir de conjuntos cerrados de una forma mucho más simple que la descrita por Lebesgue, sin necesidad de recurrir a sucesiones transfinitas (hasta entonces consideradas como inevitables). A saber, dado un conjunto de Borel B, existe una familia de cerrados $\{C_s\}_{s\in\omega^{<\omega}}$, donde s recorre las sucesiones finitas de números naturales, de modo que

$$B = \bigcup_{x\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} C_{x|_n},$$

donde ω es el conjunto de los números naturales y ω^ω el conjunto de las sucesiones de números naturales.

Suslin propuso que los conjuntos de esta forma se llamaran A-conjuntos, en honor de Alexandroff, al igual que los conjuntos de Borel se llamaban B-conjuntos en honor a Borel. Cuando Alexandroff comunicó a Lusin su descubrimiento, éste lo animó a investigar el recíproco, es decir, si todo A-conjunto es un B-conjunto. Mientras tanto, Suslin abordaba el problema de la cardinalidad de los conjuntos de Borel. Su propósito era generalizar el teorema de Cantor-Bendixson y probar que todo conjunto de Borel no numerable tiene cardinal $\mathfrak{c}$. Alexandroff pasó el invierno con el problema de si los A-conjuntos son B-conjuntos, pero no llegó a ninguna conclusión.

Por otra parte, Lusin había sugerido a Suslin que se estudiara el trabajo original de Lebesgue de 1905, y el joven ruso no tardó en detectar un error. Lebesgue demostraba que toda función definida implícitamente por una ecuación analíticamente representable es analíticamente representable, y para ello se apoyaba en un lema que presentaba sin demostración, como algo evidente. Según dicho lema, la proyección de un conjunto de Borel es también un conjunto de Borel. Al tratar de justificar esta afirmación, Suslin terminó convenciéndose de que era falsa, y en el verano de 1916 encontró un ejemplo de proyección de un conjunto de Borel que no era a su vez un conjunto de Borel. Pero lo más significativo del caso era que dicho ejemplo lo había construido a partir de intervalos cerrados con la operación de Alexandroff, es decir, Suslin había encontrado un ejemplo de A-conjunto que no era un B-conjunto. Rápidamente puso sus conclusiones por escrito y se las presentó a Lusin. Ese momento fue presenciado por Waclaw Sierpinski, un matemático polaco que estaba asistiendo a los seminarios de Lusin en Moscú. Lusin analizó con mucho interés el escrito de Suslin y confirmó que era correcto. Los A-conjuntos terminaron siendo conocidos como conjuntos *analíticos,* y los primeros resultados sobre ellos fueron obtenidos por Suslin y Lusin en los meses siguientes.

Paralelamente, mientras Suslin había resuelto el problema que Alexandroff no había sido capaz de resolver, éste (al mismo tiempo, pero independientemente del alemán Felix Hausdorff) resolvió el problema de aquél: probó que todo conjunto de Borel no numerable posee un subconjunto perfecto, por lo que tiene cardinal $\mathfrak{c}$ y, consecuentemente, ningún conjunto de Borel puede ser un contraejemplo a la hipótesis del continuo. (Cantor se habría ilusionado si no fuera porque tenía entonces 71 años y ya estaba retirado. Vivía en la pobreza, pasando hambre a causa de la Primera Guerra Mundial, y moriría dos años después.)

En 1917 Suslin publicó un artículo en el que, entre otras cosas, probaba una elegante caracterización de los conjuntos de Borel: Un conjunto es de Borel si y sólo si es a la vez analítico y *coanalítico* (es decir, si tanto él como su complementario son analíticos). Por su parte, Suslin anunció ese mismo año otro resultado básico que demostraba que el teorema de Lebesgue era correcto a pesar del error en su prueba.

Durante ese año Rusia cambió traumáticamente un dictador de sangre demasiado azul por otro de sangre demasiado roja, y muchos universitarios consideraron prudente abandonar Moscú. Alexandroff fue encarcelado por un tiempo y Suslin y Lusin aceptaron sendos puestos en el Instituto Politécnico de Ivanovo, donde pasaron hambre, frío y otras penurias. La salud de Suslin nunca había sido muy buena. El 14 de junio de 1919, por prescripción médica, solicitó un permiso para retirarse hasta después del invierno a la casa de sus padres en Krasavka. Las autoridades le respondieron que le concedían como máximo un mes de vacaciones, por lo que el 20 de junio presentó su renuncia y marchó a Krasavka de todos modos. Allí murió de tifus en diciembre, con 24 años.

Sierpinski y los matemáticos polacos Al término de la Primera Guerra Mundial, Sierpinski regresó a Varsovia, donde en 1920 fundó junto con Stefan Mazurkiewicz la revista *Fundamenta Mathematicæ,* en cuyo primer número apareció un artículo póstumo de Suslin (en el que planteaba la famosa hipótesis de Suslin[2]). Durante los años siguientes, Lusin en Moscú y Sierpinski en Varsovia dirigieron los avances en la teoría descriptiva de conjuntos, a la que posteriormente se sumarían varios matemáticos rusos y, sobre todo, polacos (Banach, Kuratowski, Ulam, Tarski, etc.). Entre las contribuciones de la escuela de topólogos polacos cabe destacar el hecho de que, en lugar de trabajar en $\mathbb{R}^n$, desarrollaron la teoría descriptiva de conjuntos en una familia de espacios más generales (espacios topológicos completamente metrizables y separables). Las malas relaciones de la Unión Soviética con la Europa "capitalista" hicieron que su trabajo permaneciera prácticamente desconocido en Occidente y, cuando fue "descubierto" (gracias principalmente a los numerosos polacos que abandonaron su patria para huir primero de los nazis y luego de los comunistas), los espacios topológicos completamente metrizables y separables recibieron el nombre que aún conservan: *espacios polacos.*

La introducción de los espacios polacos confirió gran flexibilidad a la teoría. Por ejemplo, el más simple de los espacios polacos no triviales es el *espacio de Baire* $\mathcal{N} = \omega^\omega$ formado por las sucesiones de números naturales, considerado como producto de infinitas copias del espacio discreto ω con la topología producto usual. Así, el estudio de $\mathcal{N}$ es especialmente simple en comparación con el de otros espacios polacos y, al mismo tiempo, los resultados obtenidos para $\mathcal{N}$ pueden generalizarse a espacios polacos arbitrarios gracias a ciertos resultados generales, como que todo espacio polaco es imagen continua de $\mathcal{N}$, o que dos espacios polacos cualesquiera no numerables X e Y son Borel-isomorfos, es decir, existe una biyección $f : X \longrightarrow Y$ que hace corresponder las respectivas σ-álgebras de Borel. Otra conexión destacable entre $\mathcal{N}$ y $\mathbb{R}$ es que existe un homeomorfismo canónico entre $\mathcal{N}$ y el espacio de los números irracionales.

Conjuntos proyectivos En 1925 Lusin y Sierpinski dieron un gran paso al introducir la noción de *conjunto proyectivo.* Esta noción surge de forma natural tras haber demostrado que los conjuntos analíticos son precisamente las imágenes continuas de los conjuntos de Borel, de modo que toda imagen continua de un conjunto analítico es obviamente analítica (porque toda imagen continua de una imagen continua de un conjunto de Borel es obviamente una imagen continua de un conjunto de Borel). Con la notación moderna, la clase de los conjuntos analíticos (en un espacio polaco) se representa por $\mathbf{\Sigma}^1_1$, mientras que $\mathbf{\Pi}^1_1$ es la clase de sus complementarios, los conjuntos coanalíticos. A su vez, se define $\mathbf{\Delta}^1_1 = \mathbf{\Sigma}^1_1 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$, que, según el teorema demostrado por Suslin, no es sino la σ-álgebra de Borel.

[2]Véase el capítulo VIII de mi libro de Pruebas de Consistencia.

Notemos que existen conjuntos $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ que no son analíticos, pues en caso contrario todo conjunto analítico tendría complementario analítico y sería de Borel. Por lo tanto, en principio, las imágenes continuas de los conjuntos coanalíticos no son necesariamente analíticas ni coanalíticas, sino que determinan una nueva clase de conjuntos, que hoy representamos por $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$. La clase $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ es trivialmente cerrada para imágenes continuas, pero no así la clase $\boldsymbol{\Pi}^1_2$ de sus complementos, cuyas imágenes continuas determinan una nueva clase $\boldsymbol{\Sigma}^1_3$, y así sucesivamente. La clase de los conjuntos proyectivos es

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\Sigma}^1_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}^1_n.$$

Los conjuntos proyectivos reciben este nombre porque puede probarse que, en realidad, los conjuntos $\boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}$ de un espacio polaco X pueden obtenerse como proyecciones de conjuntos $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ de un producto $X \times Y$, o incluso del producto concreto $X \times \mathcal{N}$. Las técnicas que Lebesgue había introducido para obtener los hechos básicos sobre la jerarquía de Borel se adaptaban fácilmente para la jerarquía proyectiva, de modo que Lusin no tuvo dificultades en demostrar que es estricta, es decir, que cada nueva clase contiene conjuntos "nuevos", que no están en la clase precedente, así como que, si definimos $\boldsymbol{\Delta}^1_n = \boldsymbol{\Sigma}^1_n \cap \boldsymbol{\Pi}^1_n$, tenemos las inclusiones

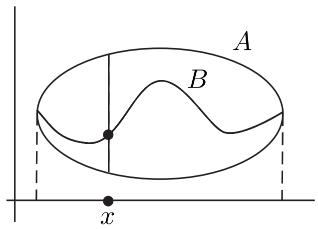
$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \subset & \boldsymbol{\Sigma}^1_1 & \subset & & \subset & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 & \subset & & \subset & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 & \subset & & \subset & \cdots \\
\boldsymbol{\Delta}^1_1 & & & & \boldsymbol{\Delta}^1_2 & & & & \boldsymbol{\Delta}^1_3 & & & & \boldsymbol{\Delta}^1_4 & & \\
 & \subset & \boldsymbol{\Pi}^1_1 & \subset & & \subset & \boldsymbol{\Pi}^1_2 & \subset & & \subset & \boldsymbol{\Pi}^1_3 & \subset & & \subset & \cdots
\end{array}$$

Sin embargo, Lusin no tardó en experimentar cierto escepticismo frente a la teoría descriptiva. Por ejemplo, él mismo había demostrado que todo conjunto analítico (y, por lo tanto, también todo conjunto coanalítico) es medible Lebesgue, pero el problema de si los conjuntos $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ eran medibles Lebesgue resistía todo ataque (lo más cerca a lo que pudo llegar es a demostrar que todo conjunto $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, en particular, medibles Lebesgue, pero no pudo demostrar que la unión de $\aleph_1$ conjuntos medibles fuera necesariamente medible). Más aún, incluso el problema de si todo conjunto coanalítico no numerable contiene un subconjunto perfecto parecía inabordable.

En 1930 Lusin publicó el primer libro en que exponía de forma sistemática la teoría sobre los conjuntos analíticos: *"Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications"*. El propio Lebesgue aceptó la invitación para escribir el prólogo, en el que dijo:

> *El origen de todos los problemas descritos aquí ha resultado ser un burdo error en mi memoria sobre funciones representables analíticamente. ¡Simplemente estuve inspirado a la hora de cometerlo!*

Uniformización Pese a todo, aunque cada vez más lentamente, la teoría descriptiva seguía produciendo frutos. Por ejemplo, uno de los problemas que a la sazón se consideraban más complejos era el de la *uniformización.* Consideremos, por ejemplo, el caso de un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$. Se dice que un conjunto $B \subset A$ *uniformiza* A (respecto de la primera componente) si B tiene la misma proyección que A, pero, cada $x \in \mathbb{R}$ que sea proyección de un elemento de A es la proyección de un *único* elemento de B.



El axioma de elección implica que todo conjunto A es uniformizable por un subconjunto B, pero la cuestión era si, en caso de que A es un conjunto de Borel, o analítico, o coanalítico, etc., existe una uniformización del mismo tipo. Lusin había dado condiciones bajo las cuales un conjunto analítico puede ser uniformizado por otro conjunto analítico, pero dio por imposible probar algo parecido para conjuntos coanalíticos. Sin embargo, más optimista, Sierpinski planteaba ese mismo año el problema de si un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ (coanalítico) podía ser uniformizado por un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_2$ o, al menos, por un conjunto proyectivo de la clase que fuera.

En 1831 el matemático ruso Petr Novikov encontró un conjunto cerrado (en particular, analítico) que no puede ser uniformizado por ningún conjunto analítico, y en 1935 probó que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ puede ser uniformizado por un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_2$. Contra todo pronóstico, en 1937 apareció publicada una prueba de que, en realidad, todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ admite una uniformización $\mathbf{\Pi}^1_1$. La sorpresa fue doble: por una parte porque a la sazón parecía imposible obtener algún resultado positivo sobre conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$, y por otra porque la demostración vino del lejano oriente: se debe al matemático japonés Motokiti Kondô (1906-1980).

Gödel En 1938 el matemático austriaco[3] Kurt Gödel visitó por segunda vez el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, y allí anunció su demostración de la consistencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizada (basada en la construcción de la clase L de los conjuntos constructibles). En el mismo comunicado en que esbozaba la demostración, anunciaba también que el axioma de constructibilidad implica la existencia de un conjunto $\mathbf{\Delta}^1_2$ no medible Lebesgue, así como la de un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable sin subconjuntos perfectos. De este modo, todo apuntaba a que las dificultades que presentaba el estudio de los conjuntos proyectivos más allá de la clase de los conjuntos analíticos eran de la misma naturaleza que las que habían frustrado todos los

[3]Gödel había nacido en lo que actualmente es territorio checo, pero entonces era parte del Imperio Austro-Húngaro.

intentos de Cantor por demostrar o refutar la hipótesis del continuo. Decimos “todo apuntaba” porque los argumentos de Gödel eran sólo la mitad de la solución. El trabajo de Gödel probaba que no se puede demostrar que $\mathfrak{c} > \aleph_0$ o que todo conjunto $\mathbf{\Pi}_1^1$ no numerable tiene un subconjunto perfecto, pero faltaba probar que tampoco podía demostrarse lo contrario. No se disponía de ninguna justificación de que así tenía que ser, pero “todo apuntaba” a que así tenía que ser.

Kleene Era la segunda vez que Gödel revolucionaba el mundo de las matemáticas. Habían pasado siete años desde la publicación de sus celebérrimos teoremas de incompletitud, que habían creado una escuela de lógicos interesados en la teoría de la recursión, especialmente Alonzo Church, Alan Turing y Stephen C. Kleene. Mientras los primeros “mantuvieron los pies en la tierra” y se ocuparon estrictamente de cuestiones de computación, Kleene empezó a desarrollar una teoría mucho más abstracta, rica y sutil.

El concepto de partida era la noción de *función recursiva,* que informalmente es una función $f : \omega \longrightarrow \omega$ que puede ser calculada mediante un algoritmo o programa de ordenador. A su vez, un conjunto $A \subset \omega$ es *recursivo* si su función característica es recursiva, es decir, si existe un procedimiento efectivo para determinar si un número natural es o no un elemento de A. Una clase un poco más general es la de los conjuntos *recursivamente numerables,* que son los conjuntos para los que existe un procedimiento efectivo para enumerar sus elementos, lo cual no significa necesariamente que se pueda saber de antemano si un número dado aparecerá tarde o temprano en la enumeración. Con notación moderna, los subconjuntos de ω recursivamente numerables forman la clase Σ_1^0, sus complementarios la clase Π_1^0 y los conjuntos recursivos forman entonces la clase $\Delta_1^0 = \Sigma_1^0 \cap \Pi_1^0$, es decir, un conjunto es recursivo si y sólo si tanto él como su complementario son recursivamente numerables.

Kleene fue más allá y, tras generalizar trivialmente estas definiciones a subconjuntos de ω^r, definió los conjuntos Σ_{n+1}^0 de ω^r como las proyecciones de los complementarios de los conjuntos Σ_n^0 de $\omega^r \times \omega$, y llamó Π_n^0 a dichos complementarios (aunque la notación que estamos empleando es posterior). Así obtuvo una jerarquía de subconjuntos de ω^r que satisface las inclusiones

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \Sigma_1^0 & & & & \Sigma_2^0 & & & & \Sigma_3^0 & & & & \\
 & \subset & & \supset & & \subset & & \supset & & \subset & & \supset & & \subset & \cdots \\
\Delta_1^0 & & & & \Delta_2^0 & & & & \Delta_3^0 & & & & \Delta_4^0 & & \\
 & \supset & & \subset & & \supset & & \subset & & \supset & & \subset & & \supset & \cdots \\
 & & \Pi_1^0 & & & & \Pi_2^0 & & & & \Pi_3^0 & & & &
\end{array}$$

donde, como es habitual, $\Delta_n^0 = \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$. A la clase

$$\mathrm{Ar} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n^0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n^0$$

le dio el nombre de clase de los *conjuntos aritméticos.* Su primer trabajo significativo en esta dirección apareció en 1943. Cualquiera diría que Kleene estaba "traduciendo" al contexto de los números naturales los resultados de la teoría descriptiva de conjuntos, pero lo cierto es que desconocía por completo esta teoría. Kleene era un "lógico" y la teoría descriptiva de conjuntos era "topología". Recíprocamente, publicado en plena Segunda Guerra Mundial, el artículo de Kleene no llegó a manos de ningún matemático del este. De hecho, ese mismo año un matemático polaco llamado Andrej Mostowski obtenía independientemente, siguiendo otros métodos y otras motivaciones, varios de sus resultados. En 1944 Mostowski se graduó en una universidad clandestina que Sierpinski dirigía en Varsovia.

Paralelamente, Kleene llevó mucho más lejos su "teoría efectiva". Para ello extendió el concepto de función recursiva a funciones definidas sobre espacios de la forma $X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$ (donde, para él, $\mathcal{N}$ no era "el espacio de Baire", sino simplemente el conjunto de las funciones $f : \omega \longrightarrow \omega$). La idea básica es que una función definida en dicho espacio es recursiva si $f(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$ puede calcularse mediante un algoritmo efectivo a partir de los valores $n_1, \ldots, n_r$ y de las restricciones $x_1|_N, \ldots, x_x|_N$ para un número natural N suficientemente grande. A partir de aquí generalizó la definición de las clases Σ^0_n y Π^0_n para abarcar no sólo subconjuntos de los espacios ω^r, sino subconjuntos de los espacios $X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$. Esto le permitió a su vez definir una nueva clase de subconjuntos de X, que en notación moderna es Σ^1_1, formada por las proyecciones de los conjuntos aritméticos de $X \times \mathcal{N}$. A su vez, esto permite definir los conjuntos Π^1_1 como los complementarios de los conjuntos Σ^1_1 y, en general, los conjuntos Σ^1_{n+1} de X como las proyecciones de los complementarios de los conjuntos Σ^1_n de $X \times \mathcal{N}$. Definiendo Π^1_n y Δ^1_n de la forma habitual, Kleene obtuvo así la clase de los conjuntos que llamó *analíticos,*

$$\mathrm{An} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^1_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi^1_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta^1_n,$$

donde el nombre se opone a los conjuntos aritméticos definidos previamente, aunque entra en conflicto con la definición de "conjunto analítico" de la teoría descriptiva de conjuntos "clásica". La nueva jerarquía de conjuntos analíticos satisface las consabidas inclusiones

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \subset & \Sigma^1_1 & \supset & & \subset & \Sigma^1_2 & \supset & & \subset & \Sigma^1_3 & \supset & & \subset & \cdots \\
\Delta^1_1 & & & & \Delta^1_2 & & & & \Delta^1_3 & & & & \Delta^1_4 & & \\
 & \subset & \Pi^1_1 & \supset & & \subset & \Pi^1_2 & \supset & & \subset & \Pi^1_3 & \supset & & \subset & \cdots
\end{array}$$

De este modo, Kleene acercaba aún más, sin ser consciente de ello, su teoría efectiva con la teoría de los conjuntos proyectivos, pues los espacios $\omega^r \times \mathcal{N}^s$ son espacios polacos[4] y, de hecho, cada clase de Kleene está contenida en la clase correspondiente de Borel o de Lusin. No obstante, para Kleene el uso del espacio $\mathcal{N}$ era algo auxiliar, como medio para definir los subconjuntos analíticos de ω, que eran los que realmente le interesaban.

[4]Los espacios ω^r que había estudiado previamente también son espacios polacos, pero como tales son triviales, porque son discretos.

Addison El primero en poner de manifiesto explícitamente la analogía entre la teoría efectiva de Kleene y la teoría clásica sobre los conjuntos proyectivos fue John W. Addison jr., que preparó su tesis doctoral bajo la dirección de Kleene y la defendió en 1954. En dicha tesis presenta la siguiente tabla de analogías:

Teoría clásica	**Teoría efectiva**
$\mathbb{R}$, $\mathcal{N}$	ω
funciones continuas	funciones recursivas
conjuntos de Borel	conjuntos hiperaritméticos
conjuntos analíticos	conjuntos Σ^1_1
conjuntos proyectivos	conjuntos analíticos

Los *conjuntos hiperaritméticos* eran la última incorporación de Kleene a su teoría efectiva. En efecto, Kleene se dio cuenta de que sus conjuntos aritméticos son Δ^1_1, pero el recíproco no es cierto. No obstante, demostró que la jerarquía de los conjuntos aritméticos puede prolongarse a una jerarquía transfinita de clases de conjuntos (análoga a la jerarquía transfinita de las clases de Borel), y los conjuntos que aparecían en cualquier nivel de esta nueva jerarquía eran los que llamó hiperaritméticos, y así pudo demostrar que los conjuntos hiperaritméticos eran precisamente los conjuntos Δ^1_1, en perfecta analogía con el teorema que Suslin había demostrado en su día por el que identificaba los conjuntos de Borel y los conjuntos $\boldsymbol{\Delta}^1_1$. De este modo, en la analogía expuesta por Addison se puede precisar que los conjuntos aritméticos de Kleene se corresponden con los conjuntos de Borel de rango finito. Kleene publicó estos nuevos resultados en dos artículos que aparecieron en 1955. Por su parte, Mostowski había descubierto independientemente los conjuntos hiperaritméticos en 1951. La notación Σ, Π, Δ que venimos empleando (tanto para la teoría clásica como para la efectiva) fue introducida por Addison en 1959, en un trabajo en el que presentó las primeras demostraciones publicadas de los resultados que Gödel había anunciado once años atrás sobre la existencia de conjuntos $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ no medibles Lebesgue y de conjuntos $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ no numerables sin subconjuntos perfectos. De hecho, demostró que el axioma de constructibilidad permite resolver (de forma positiva o negativa según los casos) prácticamente todos los problemas clásicos que se habían resistido a los padres de la teoría clásica, generalizados sin restricciones a todas las clases de la jerarquía proyectiva.

Pero Addison demostró además que la relación entre la teoría efectiva y la teoría clásica no era una mera "analogía", sino que la primera era un refinamiento de la segunda: de los resultados de la teoría efectiva se podía deducir de forma inmediata resultados análogos para la teoría clásica. Para ello definió relativizaciones de las clases de Kleene: para cada $a \in \mathcal{N}$, Addison definió clases $\Sigma^0_n(a)$, $\Pi^0_n(a)$, $\Delta^0_n(a)$, $\Sigma^1_n(a)$, $\Pi^1_n(a)$, $\Delta^1_n(a)$, de modo que toda la teoría efectiva era válida con modificaciones triviales para las clases efectivas relativas y además

$$\boldsymbol{\Sigma}^1_n = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Sigma^1_n(a),$$

e igualmente para las otras clases.

Solovay Como no podía ser de otro modo, la conexión entre la teoría clásica y la teoría efectiva resultó enriquecedora para ambas, pero especialmente la teoría efectiva realizó una contribución a la teoría clásica que iba a ser decisiva: permitió reducir problemas esencialmente topológicos a enunciados casi exclusivamente conjuntistas, en los que la topología quedaba relegada a un segundo plano, si no era eliminada totalmente. Esto posibilitó la aplicación de las técnicas conjuntistas sobre pruebas de consistencia a los problemas de la teoría descriptiva.

En 1963–1964 Paul Cohen publicó su prueba de la independencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo de los axiomas de la teoría de conjuntos, es decir, demostró que la razón por la que Cantor no había logrado demostrar ni refutar su conjetura de que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ era que tal afirmación no puede demostrarse ni refutarse a partir de los axiomas de ZFC (supuesto que éstos sean consistentes). Su demostración se basaba en la sofisticada técnica de las extensiones genéricas, ideada por él mismo a tal efecto, y que supuso una revolución en la lógica matemática mucho mayor que la iniciada por Gödel. En una conferencia impartida por Cohen en 1963 sugirió la posibilidad de que con su método pudiera probarse la consistencia de que, sin suponer el axioma de elección, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ fuera medible Lebesgue. Entre los oyentes se encontraba un joven Robert Solovay, que al año siguiente había encontrado una demostración de este hecho. No obstante, la teoría de las extensiones genéricas se encontraba todavía en estado embrionario e incluso era algo confusa en algunos aspectos. Durante los años siguientes diversos matemáticos fueron depurándola y aplicándola a problemas relacionados principalmente con la aritmética cardinal. En 1966 Cohen publicó el libro *Set theory and the continuum hypothesis,* redactado a partir de un curso que había impartido en Harvard el año anterior, que fue la primera exposición sistemática de la teoría, y no fue hasta 1970 que Solovay publicó la versión definitiva de su demostración, que para entonces había crecido mucho.

En efecto, Solovay demostraba –entre otras cosas— la consistencia de ZF (sin el axioma de elección) más las afirmaciones siguientes:

a) El *principio de elecciones dependientes* (ED) (una versión débil del axioma de elección que basta para construir la medida de Lebesgue y desarrollar prácticamente toda la teoría descriptiva clásica).

b) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue.

c) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no numerable tiene un subconjunto perfecto.

Más aún, si en lugar de a) queremos el axioma de elección completo (AE), sólo tenemos que particularizar b) y c) a subconjuntos de $\mathbb{R}$ con una propiedad técnica, a saber, los "subconjuntos hereditariamente definibles mediante sucesiones de ordinales", propiedad que, en cualquier caso, poseen todos los conjuntos proyectivos. En definitiva, Solovay había demostrado la consistencia de ZFC con que todo subconjunto proyectivo de $\mathbb{R}$ sea medible Lebesgue y, en caso de ser no numerable, contenga un subconjunto perfecto.

Cardinales inaccesibles En realidad el teorema de Solovay que acabamos de discutir suponía una hipótesis crucial que no hemos mencionado y que ahora vamos a comentar. Entre las implicaciones del teorema de incompletitud de Gödel se encuentra que es imposible demostrar que la teoría de conjuntos es consistente. Más aún, si en ZFC pudiera demostrarse que ZFC es consistente, esto implicaría automáticamente que ZFC es contradictoria.

Por ello, toda prueba de consistencia es necesariamente una prueba de consistencia relativa. Por ejemplo, Gödel y Addison no demostraron la consistencia de que exista un conjunto $\mathbf{\Delta}_2^1$ no medible Lebesgue, sino que, si ZFC es consistente, también lo es ZFC + "existe un conjunto $\mathbf{\Delta}_2^1$ no medible Lebesgue", es decir, demostraron la consistencia de esta afirmación *relativa a* la consistencia de ZFC, que es lo máximo a lo que se puede aspirar. Por el mismo motivo, a lo máximo a lo que Solovay podía aspirar era a demostrar lo siguiente:

> *Si* ZFC *es consistente, entonces también lo es* ZFC + *" todo subconjunto proyectivo de* $\mathbb{R}$ *es medible Lebesgue y, si no es numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

Combinando ambos resultados, esto supondría que si ZFC es consistente es imposible demostrar o refutar que todo conjunto proyectivo es medible Lebesgue etc., como Lusin ya había intuido.

Y sin embargo, no fue esto realmente lo que Solovay demostró, sino esto otro:

> *Si* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible" es consistente, también lo es* ZFC + *"todo subconjunto proyectivo de* $\mathbb{R}$ *es medible Lebesgue y, si no es numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

Los cardinales inaccesibles son los menores de los llamados "cardinales grandes" y su característica principal en lo que aquí nos ocupa es

> (1) *En* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible" se puede demostrar la consistencia de* ZFC.

Esto no contradice al teorema de incompletitud, pero sí tendríamos una contradicción (o, mejor dicho, tendríamos que ZFC es contradictorio) si pudiéramos demostrar

> (2) *La consistencia de* ZFC *implica la consistencia de* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible".*

pues entonces uniendo (1) y (2) tendríamos

> (3) *En* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible" se puede demostrar la consistencia de* ZFC + *"existe un cardinal inaccesible".*

Entonces, por el teorema de incompletitud, tendríamos que ZFC + "existe un cardinal inaccesible" sería contradictoria y por (2) lo mismo le sucedería a ZFC.

En suma: si ZFC es consistente, (2) es falso, de modo que la hipótesis del teorema de Solovay, es decir, la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible" no puede demostrarse ni siquiera suponiendo la consistencia de ZFC o, dicho con otras palabras: Solovay demostró su teorema a partir de una hipótesis estrictamente más fuerte que la consistencia de ZFC.

Naturalmente, esto lleva a plantearse si la hipótesis es realmente necesaria, es decir, si no se podría encontrar un argumento mejor que el de Solovay que permitiera llegar a la misma conclusión suponiendo únicamente la consistencia de ZFC.

Para el caso de los conjuntos sin subconjuntos perfectos la respuesta es relativamente simple. No es difícil demostrar que

> *Si todo subconjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ de $\mathbb{R}$ no numerable posee un subconjunto perfecto, entonces $\aleph_1$ es inaccesible en L.*

Así pues, la consistencia de que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ —no ya todo conjunto proyectivo— no numerable posea un subconjunto perfecto implica la consistencia de que exista un cardinal inaccesible. Por lo tanto, si el teorema de Solovay (al menos, la parte concerniente a subconjuntos perfectos) pudiera demostrarse a partir de la mera consistencia de ZFC, entonces a partir de ésta podríamos demostrar la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible", lo cual, como ya hemos explicado, implicaría que ZFC es contradictorio. En suma, la hipótesis del teorema de Solovay no se puede rebajar.

En cuanto a la medibilidad, combinando un hecho demostrado por Lusin (a saber, que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel) con el hecho de que AM($\aleph_1$) implica que la unión de $\aleph_1$ conjuntos medibles Lebesgue es medible Lebesgue, podemos concluir:

> *La consistencia de* ZFC *implica la consistencia de* ZFC + *"todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue".*

Sin embargo, Shelah demostró en 1984 que

> *Si todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue, entonces $\aleph_1$ es inaccesible en L.*

con lo que todo lo dicho para la propiedad de los subconjuntos perfectos se aplica igualmente a este caso.

El axioma de Determinación Desde principios del siglo XX, diversos matemáticos habían abordado algunos problemas en términos de "juegos", es decir, de planteamientos en los que dos o más jugadores realizan por turnos una sucesión de "jugadas" respetando unas "reglas de juego" con el objetivo de "ganar" una "partida". La cuestión principal que plantean este tipo de juegos es el estudio de posibles estrategias ganadoras para alguno de los jugadores. Un análisis de este tipo puede aplicarse a un "juego" propiamente dicho (desde casos triviales como el tres en raya hasta casos matemáticamente inabordables como el ajedrez) o bien puede ser una forma alegórica de abordar determinados problemas o situaciones. (Por ejemplo, en 1944 von Neumann y Morgensten usaron la teoría de juegos para modelizar determinados comportamientos de agentes económicos.)

En 1953 el matemático y economista David Gale, junto con Frank Stewart, estudió las conexiones con la lógica y la teoría de conjuntos de un juego infinito que llamaremos $J_X(A)$, donde X es un conjunto arbitrario (con al menos dos elementos, para evitar casos triviales) y $A \subset X^\omega$ (el "conjunto de apuesta") es un conjunto de sucesiones en X. El juego consiste en que dos jugadores I y II juegan por turnos un elemento de X: empieza I jugando x_0, luego II juega un x_1, y así sucesivamente. La partida se prolonga hasta "completar" una sucesión infinita $x \in X^\omega$. Si $x \in A$ el jugador I gana la partida, mientras que si $x \in X^\omega \setminus A$ el ganador es II.

Se dice que el juego $J_X(A)$ está *determinado* si uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, es decir, si cuenta con un criterio para determinar cada jugada en función de las jugadas anteriores de modo que, sean cuales sean las jugadas del adversario, acaba ganando la partida.

Gale y Stewart demostraron que, (considerando a X como espacio topológico discreto y a X^ω como espacio topológico con la topología producto) cuando el conjunto de apuesta es abierto o cerrado, el juego $J_X(A)$ está determinado. Por otro lado, demostraron que existen conjuntos A tales que el juego $J_\omega(A)$ no está determinado, si bien la prueba depende esencialmente del axioma de elección. Gale y Stewart dejaron abierto el problema de si todos los juegos cuyo conjunto de apuesta es de Borel están determinados.

Previamente, Mazur y Banach habían observado la conexión con cierto problema sobre la topología de los espacios polacos de que cierto juego infinito (que puede reducirse a un juego $J_\omega(A)$ estuviera determinado.

En 1955 Philip Wolfe demostró que los juegos $J_X(A)$ cuyo conjunto de apuestas es $\mathbf{\Sigma}^0_2(A)$ están determinados. Ciertamente, como paso para probar la conjetura de Gale-Stewart sobre la determinación de los juegos de Borel, era un paso minúsculo y, a pesar de que en los años siguientes no hubo ningún avance significativo en este problema, en 1962 los matemáticos polacos Jan Mycielski y Hugo Steinhaus tuvieron la audacia de proponer un axioma alternativo para la teoría de conjuntos:

> **Axioma de determinación (AD)** *Para todo $A \subset \mathcal{N}$, el juego $J_\omega(A)$ está determinado.*

Decimos "axioma alternativo" porque AD contradice al axioma de elección (como hemos indicado, éste implica que existen juegos no determinados), luego la teoría de conjuntos ZF + AD viene a ser a la teoría de conjuntos "estándar" dada por ZFC como una geometría no euclídea es a la geometría euclídea.

Ante la falta de motivos para temer lo contrario, Mycielski y otros matemáticos polacos pasaron a estudiar las consecuencias de AD suponiéndolo consistente con el principio de elecciones dependientes (ED) que, según hemos indicado al tratar sobre el teorema de Solovay, es una forma débil del axioma de elección que basta para desarrollar todo el análisis y toda la topología básica y toda la teoría descriptiva de conjuntos clásica. Así, en 1964, Mycielski y Swierczkowski por una parte, y Banach, Mazur y Davis por otra, demostraron que AD + ED implica que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue y que, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto. Por otra parte, Davis demostró la determinación de los juegos $\boldsymbol{\Sigma}_3^0$ (otro paso de pulga).

Durante la década de los 70 el estudio del Axioma de Determinación resultó especialmente fértil. La *guerra fría* afectaba cada vez menos a las comunicaciones internacionales entre matemáticos (al menos en temas tan inofensivos como la teoría de conjuntos) y así, desde Alexander Kechris y Yiannis N. Moschovakis en Grecia hasta Robert Solovay en los Estados Unidos, un amplio abanico de matemáticos fue descubriendo que AD implica una teoría de conjuntos exótica y fascinante, como una geometría no euclídea. Siguiendo esta analogía, el axioma de constructibilidad de Gödel ($V = L$) y el axioma de determinación (AD) son como la afirmación y la negación del axioma de las paralelas, pues determinan los problemas abiertos de la teoría descriptiva de conjuntos de formas mutuamente contradictorias. He aquí algunos ejemplos:[5]

$\boldsymbol{V = L}$	**AD**
Existe un conjunto Δ_2^1 no medible Lebesgue.	Todo conjunto es medible Lebesgue.
Existe un conjunto Π_1^1 no numerable sin subconjuntos perfectos.	Todo conjunto no numerable contiene un subconjunto perfecto.
Las clases $\boldsymbol{\Pi}_1^1$ y $\boldsymbol{\Sigma}_n^1$ para $n \geq 2$ tienen la propiedad de uniformización[6](y las demás no).	Las clases $\boldsymbol{\Pi}_{2n+1}^1$ y $\boldsymbol{\Sigma}_{2n+2}^1$ tienen la propiedad de uniformización (y las demás no).
$2^{\aleph_0} = \aleph_1$	Los cardinales $2^{\aleph_0}$ y $\aleph_1$ no son comparables (ninguno de los dos es menor o igual que el otro).
Todo conjunto es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel	Un conjunto es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel si y sólo si es $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$.

En 1970 Donald A. Martin demostró la determinación de los juegos analíticos, aunque para ello tuvo que suponer la existencia de un cardinal medible, es decir, un cardinal grande que está mucho más arriba en la escala de cardinales grandes que los cardinales inaccesibles.[7] Por otro lado, cabe destacar que Martin

[5]Todas las propiedades se refieren a subconjuntos de un espacio polaco, excepto las relativas a la medida de Lebesgue, que requieren que el conjunto sea un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, si bien son válidas también para medidas de Borel continuas (no nulas) en cualquier espacio polaco.

[6]Esto significa que cada conjunto de la clase correspondiente en un producto de espacios polacos puede uniformizarse por un conjunto de la misma clase.

[7]Esto significa que, por ejemplo, del mismo modo que suponiendo la consistencia de ZFC no podemos probar la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible", ésta no permite probar a su vez la consistencia de que existan dos cardinales inaccesibles, y ésta no permite demostrar a su vez la consistencia de que existan infinitos cardinales inaccesibles, y ésta

no demostró que si existe un cardinal medible es consistente que los juegos $\mathbf{\Sigma}_1^1$ están determinados (lo cual sería un resultado formalmente análogo al teorema de Solovay que hemos discutido anteriormente), sino que demostró algo más fuerte: si existe un cardinal medible, los juegos $\mathbf{\Sigma}_1^1$ *están determinados.*

Finalmente, en 1975 Martin demostró (en ZFC, sin suponer axiomas adicionales sobre cardinales grandes ni de ningún otro tipo) que todos los juegos de Borel están determinados, tal y como Gale y Stewart habían conjeturado.

La consistencia de AD Quizá el lector sienta reticencias a considerar seriamente un axioma que contradice al axioma de elección, y supondrá que muchos matemáticos serán igual de reticentes. Ante esto hay una solución casi evidente, y es que el axioma de determinación se puede debilitar hasta hacerlo compatible con AE. Esto es lo que sucede cuando lo reducimos al

> **Axioma de Determinación Proyectiva (ADP):** *Si $A \subset \mathcal{N}$ es un conjunto proyectivo, entonces el juego $J_\omega(A)$ está determinado.*

En principio, no hay ninguna evidencia de que ADP contradiga al axioma de elección, y suponiendo ADP podemos demostrar gran parte de las consecuencias que hemos comentado sobre AD restringidas a conjuntos proyectivos, es decir, podemos probar que todo conjunto proyectivo es medible Lebesgue y que, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto, o que las clases proyectivas con la propiedad de uniformización son las mismas indicadas en la tabla precedente en la columna AD, etc., todo ello sin menoscabo del axioma de elección. En otras palabras, al suponer ADP estamos garantizando que los ejemplos molestos que pueden construirse con el axioma de elección (conjuntos no medibles Lebesgue, etc.) queden fuera del ámbito de la teoría descriptiva de conjuntos, es decir, no sean conjuntos proyectivos, mientras que AD supone expulsarlos del ámbito de la teoría de conjuntos en general, es decir, supone negar su existencia.

No obstante, hay razones para no escandalizarse de que AD contradiga al axioma de elección y no despreciar, por tanto, los resultados que pueden demostrarse a partir de él. Estas razones ya fueron presentadas por Mycielski y Steinhaus en el trabajo en el que propusieron AD como axioma, a pesar de que entonces, más que razones, eran esperanzas sin mucha evidencia que las soportara.

Siguiendo el paralelismo con las geometrías no euclídeas, el argumento es el equivalente a que estudiar la geometría Riemanniana (en la que no existen rectas paralelas) no tiene por qué verse como un ataque directo a Euclides, sino más bien como una forma conveniente de estudiar la geometría de una esfera, que es un objeto totalmente euclídeo. Para desarrollar esta idea recordemos en

---

no permite demostrar a su vez la consistencia de que exista un cardinal de Mahlo, y ésta no permite demostrar a su vez la consistencia de que existan dos cardinales de Mahlo, y así sucesivamente con toda una cadena de cardinales que, en un punto intermedio, tiene a los cardinales medibles, pasando previamente por los cardinales débilmente compactos, cardinales de Ramsey, etc.

qué consiste esencialmente la demostración de Gödel de la consistencia de la hipótesis del continuo:

Gödel definió el concepto de "conjunto constructible" y demostró que la clase L de todos los conjuntos constructibles es un modelo de ZFC, es decir, que si eliminamos todos los conjuntos que no son constructibles (o —si no queremos ser tan drásticos— si "sólo miramos" los conjuntos constructibles), los axiomas de ZFC (y todas sus consecuencias) siguen siendo ciertos: seguiremos viendo el conjunto vacío (porque es constructible), dados dos conjuntos constructibles seguiremos viendo a su unión (porque es constructible), etc., de modo que no echaremos en falta ninguno de los conjuntos que hemos "quitado de nuestra vista". Ahora bien, Gödel demostró que si sólo vemos los conjuntos constructibles la hipótesis del continuo es cierta. Así pues, un teorema que suponga la hipótesis del continuo puede ser una afirmación falsa sobre la clase V de todos los conjuntos, pero es, en cualquier caso, una afirmación verdadera (sin suponer la hipótesis del continuo) sobre la clase L de los conjuntos constructibles. (Compárese con el caso de la geometría Riemanniana: un teorema que suponga que no existen rectas paralelas es falso como afirmación sobre el espacio euclídeo, pero es verdadero como afirmación sobre los puntos de una esfera, entendiendo que la palabra "recta" ha de ser interpretada como "círculo máximo"[8], y, entendido así, es un teorema verdadero sobre el espacio euclídeo.)

Similarmente, Mycielski y Steinhaus conjeturaron que "debería de haber" un modelo interno de ZF + ED + AD, y que lo deseable sería que contuviera a todos los números reales. Solovay apuntó como posible candidato a $L(\mathcal{N})$, es decir, a la menor clase propia transitiva que contiene al espacio de Baire $\mathcal{N}$ y es un modelo de ZF. Es fácil demostrar (en ZFC) que los axiomas de ZF son verdaderos en $L(\mathcal{N})$ (es decir, que siguen siendo verdaderos si decidimos que "conjunto" signifique específicamente "conjunto en $L(\mathcal{N})$"), y lo mismo sucede con ED, mientras que AE es verdadero en $L(\mathcal{N})$ si y sólo si $\mathcal{N}$ admite un buen orden que pertenezca a $L(\mathcal{N})$. Así, aunque supongamos AE, con ello podemos demostrar que $\mathcal{N}$ admite un buen orden, pero dicho buen orden no está necesariamente en $\mathcal{N}$. Esto abría la posibilidad de que, suponiendo la existencia de un cardinal grande "suficientemente grande", pudiera demostrarse en ZFC que el axioma de determinación es verdadero en $L(\mathcal{N})$.

La primera demostración de la consistencia de AD la publicó Martin en 1980, suponiendo la existencia de uno de los cardinales grandes más altos en la escala de cardinales grandes (un cardinal I2). En 1984 Woodin, suponiendo la existencia de un cardinal aún mayor (un cardinal I0, el más alto en la escala hoy en día, por cuya consistencia algunos no apostarían mucho) demostró que AD es verdadero en $L(\mathcal{N})$. Finalmente, en 1988 Martin y Steel publicaron una demostración de este mismo resultado cuya hipótesis era algo más débil que la existencia de un cardinal supercompacto (que está algo por arriba de los cardinales medibles en la escala de cardinales grandes, pero que puede considerarse ya una "hipótesis razonable").

[8]En realidad es necesario identificar cada par de puntos antípodas para que no haya pares de puntos por los que pasen infinitas rectas. Este tecnicismo oscurece la analogía, pero es irrelevante para lo que aquí nos ocupa.

Posteriormente, Woodin demostró que la hipótesis de Martin y Steel es necesaria, en el sentido de que la consistencia de AD implica la consistencia de dicha hipótesis, con lo que tenemos realmente una equivalencia.

El modelo $L(\mathcal{N})$ Según lo dicho en el párrafo anterior, $L(\mathcal{N})$ resulta ser (supuesta la existencia de los cardinales grandes adecuados) el "modelo natural" de ZF + ED + AD. Este modelo contiene a todos los números reales, así como a todos los subconjuntos proyectivos de $\mathcal{N}$ o $\mathbb{R}$ y muchos más. Así pues, el hecho de que AD implique que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue (en contradicción con el axioma de elección), se puede reinterpretar como que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ que pertenezca a $L(\mathcal{N})$ es medible Lebesgue (lo cual, no sólo no contradice en absoluto al axioma de elección, sino que además nos proporciona una clase muy amplia de conjuntos medibles Lebesgue mayor con diferencia a la de los conjuntos proyectivos). En general, todo teorema demostrado en ZF + ED + AD, aunque contradiga al axioma de elección y muchos matemáticos lo consideren por ello "falso", puede interpretarse como un teorema sobre los conjuntos de $L(\mathcal{N})$ y, visto así ya no contradice al axioma de elección. Otro ejemplo: el hecho de que AD implique que los cardinales $2^{\aleph_0}$ y $\aleph_1$ no son comparables (en contradicción con el axioma de elección) significa simplemente que ninguna de las aplicaciones inyectivas $\aleph_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ —que existen por el axioma de elección— pertenece a $L(\mathcal{N})$, lo cual "no tiene nada de malo", pero hace que alguien que sólo vea los conjuntos de $L(\mathcal{N})$ "piense" que $2^{\aleph_0}$ y $\aleph_1$ no son comparables.

Estas consideraciones hacen que los matemáticos que trabajan en teoría descriptiva de conjuntos y acostumbren a dar AD por supuesto casi sin mencionarlo explícitamente no consideren que están renegando del axioma de elección, sino más bien que están estudiando la clase $L(\mathcal{N})$, al igual que otros matemáticos estudian, por ejemplo, el conjunto $\mathbb{R}^n$.

* * *

Sobre este libro El propósito de este libro es contar los detalles de la historia que hemos resumido en las páginas precedentes. Aunque hemos escrito esta introducción con la intención de que pueda ser entendida por un lector no especialista, esto no debe llamar a engaño: el libro requiere un buen conocimiento de lógica y teoría de conjuntos (lo que incluye no sólo las técnicas usuales empleadas en las pruebas de consistencia, sino también la teoría sobre cardinales grandes), así como de algo de topología y análisis.[9] No obstante, los capítulos de la primera parte requieren casi exclusivamente el conocimiento de la topología conjuntista, la teoría de la medida y los elementos básicos de la teoría de conjuntos (teoría de ordinales, cardinales, relaciones bien fundadas, etc., pero nada relativo a pruebas de consistencia o cardinales grandes).

[9]Concretamente, todos los requisitos necesarios están incluidos en mis libros de *Lógica y teoría de conjuntos* (citado como [LTC]), *Pruebas de consistencia* ([PC]) y *Análisis matemático* ([AM]).

Primera parte

Teoría descriptiva de conjuntos en ZF+ED

Capítulo I

Espacios polacos

Aunque los problemas que dieron origen a la teoría descriptiva de conjuntos pueden plantearse de forma natural como problemas relativos a la topología usual de la recta real y, en su caso, generalizables trivialmente a $\mathbb{R}^n$, al tratarlos no tarda en hacerse patente la conveniencia de extender el objeto de estudio a una familia más amplia de espacios topológicos, los llamados espacios polacos, y a su vez, al realizar esta extensión, pronto se concluye que es mucho más conveniente convertir en protagonistas del estudio a otros espacios polacos conjuntistamente más simples (como el espacio de Baire o el espacio de Cantor), de tal forma que las conclusiones obtenidas sobre éstos se transportan fácilmente a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$.

En este primer capítulo presentaremos los espacios polacos y demostraremos sus propiedades básicas, para a continuación estudiar más detalladamente los espacios de Baire y de Cantor, junto con los teoremas que los conectan con los espacios polacos arbitrarios.

1.1 El principio de elecciones dependientes

Tal y como hemos explicado en la introducción, la teoría descriptiva de conjuntos (al igual que buena parte del análisis y la topología elemental y muchas otras ramas de la matemática) sólo requiere una versión débil del axioma de elección conocida como *principio de elecciones dependientes* (ED), que es la sentencia siguiente:

Para todo conjunto $A \neq \varnothing$ y toda relación $R \subset A \times A$ tal que

$$\bigwedge a \in A \bigvee b \in A \; b \, R \, a,$$

existe $f : \omega \longrightarrow A$ tal que $\bigwedge n \in \omega \; f(n+1) \, R \, f(n)$.

De este modo, ED garantiza que podemos realizar una sucesión numerable de elecciones, pero no necesariamente de una familia numerable de conjuntos dada *a priori,* sino que el conjunto en el que realizamos la elección $n+1$-ésima depende de la elección n-sima. La familia total de conjuntos en los que podemos realizar las elecciones, a saber, $\{A_a\}_{a\in A}$, donde $A_a = \{b \in A \mid b\,R\,a\}$, puede ser no numerable.

Evidentemente, AE $\rightarrow$ ED. En lo sucesivo trabajaremos en ZF + ED, de modo que usaremos ED en las demostraciones sin mencionarlo explícitamente, mientras que destacaremos cada uso que hagamos del axioma de elección completo AE. Un sano ejercicio para el lector es ir comprobando a medida que vaya leyendo las secciones y capítulos siguientes que, en efecto, todos los usos que hacemos del axioma de elección son (salvo que indiquemos lo contrario) casos particulares de los teoremas que vamos a demostrar aquí a continuación a partir de ED.

El teorema siguiente, junto con, por ejemplo, [PC 6.22] demuestra que —si ZF es consistente— ED no es un teorema de ZF:

Teorema 1.1 *Todo conjunto numerable tiene una función de elección.*

Demostración: Sea $X = \{x_n\}_{n<\omega}$ un conjunto numerable y sea A el conjunto de las funciones de elección sobre conjuntos de la forma $X_m = \{x_n\}_{n<m}$, es decir, $f \in A$ si y sólo si existe un $m \in \omega$ tal que $f : \{x_n\}_{n<m} \longrightarrow V$ y $\bigwedge n < m(x_n \neq \varnothing \rightarrow f(x_n) \in x_n)$.

Claramente $A \neq \varnothing$ y podemos definir en A la relación dada por $f\,R\,g$ si y sólo si $g \subsetneq f$. Así A y R cumplen las hipótesis de ED, luego existe una sucesión $\{f_n\}_{n<\omega}$ de elementos de A de modo que

$$\bigwedge n < \omega(f_n \in A \wedge f_n \subsetneq f_{n+1}).$$

Es claro entonces que $f = \bigcup\limits_{n\in\omega} f_n : X \longrightarrow V$ y es una función de elección sobre X. ■

Teorema 1.2 *Todo conjunto infinito tiene un subconjunto (infinito) numerable.*

Demostración: Puesto que no suponemos AE, es importante precisar que, cuando decimos que un conjunto X es infinito, queremos decir que no existen aplicaciones biyectivas de X en un número natural. Consideremos el conjunto

$$A = \{f \mid \bigvee n \in \omega\ f : n \longrightarrow X \text{ inyectiva}\} \neq \varnothing$$

y definimos en A la relación dada por $f\,R\,g \leftrightarrow g \subsetneq f$. Es inmediato que, si X es infinito, A y R cumplen las hipótesis de ED, luego existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\bigwedge n \in \omega f_n : n \longrightarrow X$ inyectiva $\wedge\ f_n \subsetneq f_{n+1}$. Es claro entonces que $f = \bigcup\limits_{n\in\omega} f_n : \omega \longrightarrow X$ inyectiva, luego $f[\omega]$ es un subconjunto numerable de X. ■

Que un conjunto posea un subconjunto numerable es equivalente (en ZF) a que se pueda biyectar con un subconjunto propio, luego también tenemos que un conjunto es infinito si y sólo si puede biyectarse con un subconjunto propio.

Teorema 1.3 *Toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable. En particular, $\aleph_1$ es un cardinal regular.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ un conjunto numerable de conjuntos numerables. Por 1.1 podemos elegir una aplicación biyectiva $f_n : \omega \longrightarrow A_n$ para cada $n \in \omega$. Con ellas podemos definir $f : \omega \times \omega \longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$ mediante $f(m,n) = f_n(m)$, y claramente f es suprayectiva.

Puesto que existe $h : \omega \longrightarrow \omega\times\omega$ biyectiva, tenemos que $h\circ f : \omega \longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$ es suprayectiva, de donde (tomando la menor antiimagen de cada elemento de la unión), obtenemos una aplicación $g : \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \longrightarrow \omega$ inyectiva. ■

Observemos ahora que ED puede reformularse diciendo que si R es una relación en un conjunto A tal que A no tiene ningún elemento R-minimal, entonces existe una sucesión de elementos de A decreciente para R. Por otra parte, una relación R está bien fundada en un conjunto A si todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento R-minimal. Teniendo esto en cuenta es fácil reformular ED en términos de relaciones bien fundadas. El teorema siguiente es, de hecho, equivalente a ED.

Teorema 1.4 *Si A es un conjunto y $R \subset A \times A$ una relación en A, entonces R está bien fundada si y sólo si no existe ninguna $f : \omega \longrightarrow A$ para la que se cumpla $\bigwedge n \in \omega\ f(n+1)\, R\, f(n)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si existe una f en las condiciones indicadas, obviamente $f[\omega]$ es un subconjunto de A que no tiene un elemento R-minimal. Recíprocamente, si existe un conjunto no vacío $B \subset A$ sin elemento R-minimal, entonces B y $R\cap(B\times B)$ satisfacen la hipótesis de ED, luego existe una función $f : \omega \longrightarrow B$ en las condiciones indicadas. ■

1.2 Espacios polacos, subespacios y productos

Como ya hemos comentado, los espacios polacos constituyen el contexto natural para desarrollar la teoría descriptiva de conjuntos en su grado de generalidad más conveniente. La definición es la siguiente:

Definición 1.5 Un *espacio polaco* es un espacio topológico completamente metrizable y separable.

Recordemos que un espacio topológico X es *separable* si posee un subconjunto denso numerable, y es *completamente metrizable* si su topología está inducida por una distancia $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ con la cual X es un espacio métrico completo (es decir, que toda sucesión de Cauchy en X es convergente).

Así pues, $\mathbb{R}^n$ es un espacio polaco ([AM, 2.31, 2.32]).

En realidad, los espacios polacos cumplen una propiedad más fuerte que la separabilidad:

Se dice que un espacio topológico cumple el *segundo axioma de numerabilidad*[1] (2AN) si tiene una base numerable.

Todo espacio topológico 2AN es separable, pues basta elegir un punto de cada elemento de una base numerable para obtener un subconjunto denso numerable. El recíproco no es cierto en general, pero todo espacio métrico separable cumple 2AN. La razón es que si D es un subconjunto denso numerable de un espacio métrico X, entonces $\mathcal{B} = \{B_{1/n}(d) \mid n \in \omega \setminus \{0\} \land d \in D\}$ es una base numerable de X. Por consiguiente:

Teorema 1.6 *Todo espacio polaco tiene una base numerable.*

En general, un subespacio de un espacio topológico separable no tiene por qué ser separable, pero de la definición de la topología relativa se sigue inmediatamente que todo subespacio de un espacio que cumple 2AN cumple también 2AN y, en particular, todo subespacio de un espacio polaco es separable.

Uniendo esto a que todo subespacio cerrado de un espacio métrico completo es completo, concluimos que todo subespacio cerrado de un espacio polaco es también un espacio polaco. El lector podría pensar que se trata de una equivalencia, pues para que un subespacio de un espacio métrico completo sea completo es necesario que sea cerrado. Sin embargo, en este punto hemos de recordar que no hemos definido un espacio polaco como un espacio métrico completo, sino como un espacio topológico completamente metrizable. Esto significa que, aunque la topología de un espacio X venga inducida por una métrica no completa, eso no significa que no pueda existir otra métrica completa que induzca la misma topología, en cuyo caso X, a pesar de no ser un espacio métrico completo con la métrica dada, sí que será un espacio topológico completamente metrizable con la topología dada.

Vemos pues, que la posibilidad de cambiar de métricas hace que el problema de qué subespacios de un espacio polaco son espacios polacos sea más delicado de lo que podría pensarse en un principio. Vamos a estudiarlo detenidamente. Empezamos con una observación sencilla:

Teorema 1.7 *Si (X, d) es un espacio métrico y $r > 0$. Entonces la aplicación $d' : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d'(x, y) = \min\{d(x, y), r\}$ es una distancia en X que induce la misma topología. Además (X, d) es completo si y sólo si lo es (X, d').*

DEMOSTRACIÓN: Lo único que requiere cierto cálculo es comprobar que d' satisface la desigualdad triangular. Dados $x, y, z \in X$ tenemos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

[1]El primer axioma de numerabilidad (1AN) afirma que cada punto del espacio tiene una base de entornos numerable ([AM 1.79] y es una condición suficiente para que se cumplan las caracterizaciones por sucesiones de los conceptos topológicos (abierto, cerrado, interior, clausura, punto de acumulación, etc.). Es evidente que 2AN $\rightarrow$ 1AN, pues los elementos de una base numerable que contienen a un punto x constituyen una base numerable de entornos de x.

Si $d(x,z) > r$, entonces, o bien $d(x,y) \leq r$ y $d(y,z) \leq r$, en cuyo caso

$$d'(x,z) = r < d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = d'(x,y) + d'(y,z),$$

o bien $d(x,y) > r$ o $d(y,z) > r$, en cuyo caso

$$d'(x,z) = r \leq d'(x,y) + d'(y,z),$$

pues uno de los sumandos es r.

Consideramos ahora el caso en que $d(x,z) \leq r$, de modo que, como antes, o bien $d(x,y) \leq r$ y $d(y,z) \leq r$, en cuyo caso la desigualdad para d' es la misma que para d, o bien $d(x,y) > r$ o $d(y,z) > r$, en cuyo caso

$$d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z),$$

porque el término izquierdo es $\leq r$ y el derecho $\geq r$.

El resto del teorema es trivial, pues d y d' determinan las mismas bolas abiertas de radios $0 < \epsilon < r$, que forman una base para las topologías inducidas, luego son la misma. Igualmente, las sucesiones de Cauchy son las mismas para ambas métricas, luego una es completa si y sólo si lo es la otra. ■

Con esto ya podemos probar que un subespacio de un espacio polaco no necesita ser cerrado para ser polaco:

Teorema 1.8 *Todo subespacio abierto de un espacio polaco es un espacio polaco (con la topología relativa).*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio polaco y $U \subset X$ un abierto (podemos suponer que $\varnothing \neq U \neq X$). Por el teorema anterior la topología de X viene inducida por una distancia completa d que sólo toma valores ≤ 1. Definimos $d' : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$d'(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right|.$$

Notemos que, como $X \setminus U$ es cerrado, los denominadores no se anulan. Se comprueba fácilmente que d' es una distancia en U. Como $d(x,y) \leq d'(x,y)$ todo abierto para d es abierto para d'. Fijemos ahora $x \in U$ y sea $r = d(x, X \setminus U) > 0$. Si $y \in U$ cumple que $d(x,y) < \delta < r$, es fácil ver que

$$r - \delta \leq d(y, X \setminus U) \leq r + \delta.$$

Según que esta distancia sea $\geq r$ o $\leq r$ tenemos

$$\left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right| = \frac{1}{r} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)}$$

$$\leq \frac{1}{r} - \frac{1}{r+\delta} = \frac{\delta}{r(r+\delta)} < \frac{\delta}{r(r-\delta)}$$

o bien

$$\left|\frac{1}{d(x, X\setminus U)} - \frac{1}{d(y, X\setminus U)}\right| = \frac{1}{d(y, X\setminus U)} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r-\delta} - \frac{1}{r} = \frac{\delta}{r(r-\delta)}.$$

En cualquier caso,

$$d'(x, y) \leq \delta + \frac{\delta}{r(r-\delta)}.$$

Como el miembro derecho tiende a 0 cuando $\delta \to 0$, concluimos que, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta^d(x) \subset B_\epsilon^{d'}(x)$, luego todo abierto para d' es abierto para d. Así pues, d' induce la misma topología que d sobre U. Si probamos que d' es una métrica completa, tendremos que U es un espacio polaco.

Sea $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy para la distancia d'. Como $d \leq d'$, también es de Cauchy para d y, como d es completa, existe un $x \in X$ tal que $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ converge a x respecto de d.

Por otra parte, la sucesión $d(x_n, X\setminus U)^{-1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego converge a un cierto $r > 0$. En particular existe un $M > 0$ tal que $d(x_n, X\setminus U)^{-1} \leq M$ para todo $n \in \omega$, luego $d(x_n, X\setminus U) \geq 1/M$ y, como $d(\ , X\setminus U)$ es una función continua (para la métrica d), concluimos que $d(x, X\setminus U) \geq 1/M > 0$, luego $x \in U$.

Ahora es inmediato que $d'(x_n, x)$ converge a 0 en $\mathbb{R}$, luego $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ converge a x respecto de d'. ■

Del teorema anterior se sigue fácilmente una generalización. Recordemos que un subconjunto de un espacio topológico es G_δ si es intersección numerable de abiertos.

Teorema 1.9 *Todo subconjunto G_δ de un espacio polaco es un espacio polaco (con la topología relativa).*

Demostración: Sea X un espacio polaco y sea $G = \bigcap\limits_{n<\omega} U_n$ una intersección numerable de conjuntos abiertos.

Sustituyendo cada U_n por $\bigcap\limits_{i\leq n} U_i$ no perdemos generalidad si suponemos que $U_{n+1} \subset U_n$.

Por el teorema anterior existe una métrica completa d_n en U_n que induce la topología relativa. Podemos suponer que d_n no toma valores mayores que 1. Definimos $d' : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$d'(x, y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y).$$

Es fácil ver que d' es una distancia en G. Si $x \in G$, también es claro que $B_{\epsilon/2}^{d'}(x) \subset B_\epsilon^{d_0}(x) \cap G$, y esto implica que todo abierto para la topología relativa en G es abierto para d'. Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \omega$ tal que

$$\sum_{n=n_0}^\infty \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otro lado, existe un $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $n < n_0$, si $d_n(x, y) < \delta_0$ entonces

$$\sum_{n<n_0} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y) < \frac{\epsilon}{2},$$

luego también $d'(x, y) < \epsilon$.

Como cada métrica d_n induce en U_n la topología relativa, existe $0 < \delta_1 < \delta_0$ tal que $B^{d_1}_{\delta_1}(x) \subset B^{d_0}_{\delta_0}(x)$. Igualmente, existe $0 < \delta_2 < \delta_0$ de manera que $B^{d_2}_{\delta_2}(x) \subset B^{d_1}_{\delta_1}(x)$ y, tras un número finito de pasos, llegamos a un $0 < \delta_{n-1} < \delta_0$ tal que

$$B^{d_{n-1}}_{\delta_{n-1}}(x) \subset B^{d_{n-2}}_{\delta_{n-2}}(x) \subset \cdots \subset B_{\delta_0}(x).$$

Así, $B^{d_{n-1}}_{\delta_{n-1}}(x) \cap G \subset B_\epsilon(x)$, luego todo abierto para d' es abierto para la topología relativa.

Por último, si $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en G para d', entonces es una sucesión de Cauchy en cada U_n para la métrica d', luego la sucesión converge a un $c_n \in U_n$ respecto a la distancia d_n, pero, como la topología de cada U_{n+1} es la inducida desde U_n, en U_n la sucesión converge a c_n y a c_{n+1}, luego $c_n = c_{n+1}$ y todos los límites son iguales a un mismo $c \in G$. Además la sucesión converge a x en G (respecto a la topología relativa, luego respecto a la métrica d' que la induce). Esto prueba que d' es completa y que G es un espacio polaco. ■

Notemos que el teorema anterior incluye al caso obvio de los subespacios cerrados:

Teorema 1.10 *En un espacio metrizable, todo cerrado es un conjunto G_δ.*

Demostración: Si X es un espacio métrico y $C \subset X$ es cerrado (que podemos suponer no vacío), el conjunto

$$B_\epsilon(C) = \{x \in X \mid d(x, C) < \epsilon\}$$

es abierto en X, porque la aplicación $d(\ \ , C) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. Además

$$C = \{x \in X \mid d(x, C) = 0\} = \textstyle\bigcap_{n=1}^\infty B_{1/n}(C).$$

■

Por último probamos que el teorema 1.9 no puede generalizarse más:

Teorema 1.11 *Un subespacio de un espacio polaco es polaco (con la topología relativa) si y sólo si es G_δ.*

Demostración: Una implicación es el teorema anterior. Supongamos ahora que X es un espacio polaco y que $Y \subset X$ es un subespacio polaco. Sea $\{U_n\}_{n=0}^\infty$ una base de la topología de X y sea d una métrica completa que induzca la topología de Y. Definimos

$$G = \overline{Y} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup \{U_m \mid d(Y \cap U_m) < 1/n\},$$

donde $d(Y \cap U_m)$ representa el diámetro del conjunto $Y \cap U_m$ respecto de la distancia d. Obviamente G es un subconjunto G_δ de X (es intersección de dos conjuntos G_δ). Vamos a probar que $Y = G$.

Si $x \in Y$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$, tenemos que $B^d_{1/4n}(x)$ es abierto en Y, luego existe un $m \in \omega$ tal que $x \in Y \cap U_m \subset B^d_{1/4n}(x)$ y $d(Y \cap U_m) \leq 1/2n < 1/n$. Esto prueba que $x \in G$, luego $Y \subset G$.

Supongamos ahora que $x \in G$. Para cada $n \in \omega - \{0\}$, sea $m_n \in \omega$ tal que $x \in U_{m_n}$ y $d(Y \cap U_{m_n}) < 1/n$. Como Y es denso en G, existe[2]

$$y_n \in Y \cap U_{m_1} \cap \cdots \cap U_{m_n} \cap B^{d'}_{1/n}(x),$$

donde d' es una métrica que induzca la topología de X.

Así, si $n < n'$, se cumple que $y_n, y_{n'} \in Y \cap U_{m_n}$, luego $d(y_n, y_{n'}) \leq 1/n$, y esto implica que la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ de de Cauchy en Y, luego converge a un $y \in Y$, pero, por otra parte, es claro que la sucesión converge a x, luego ha de ser $x = y \in Y$. ∎

Otro resultado básico para reconocer espacios polacos es el siguiente:

Teorema 1.12 *Todo producto finito o numerable de espacios polacos es un espacio polaco (con la topología producto).*

Demostración: Sea $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ una familia numerable de espacios polacos y sea $X = \prod\limits_{n=0}^\infty X_n$. Vamos a probar que también es polaco. Ciertamente tiene una base numerable, la formada por los abiertos de la forma

$$U_1 \times \cdots \times U_m \times \prod_{n=m+1}^\infty X_n,$$

donde $m \in \omega$ y cada U_i recorre una base numerable de X_i.

Consideramos ahora una métrica d_n que induzca la topología de X_n. Podemos suponer que no toma valores mayores que 1. Esto nos permite definir, para $x, y \in X$, la distancia

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n).$$

Es inmediato comprobar que realmente se trata de una distancia en X. Además induce la topología producto pues, una base de entornos de un punto $x \in X$ en dicha topología está formada por los abiertos de la forma

$$B^m_\epsilon(x) = B_\epsilon(x_1) \times \cdots \times B_\epsilon(x_m) \times \prod_{n=m+1}^\infty X_n,$$

[2] Éste es un uso "típico" del principio de elecciones dependientes, más concretamente del teorema 1.1. En general, todos los resultados topológicos elementales que suponemos conocidos se demuestran sin necesidad de usar AE o usando a lo sumo ED en situaciones similares a ésta.

para $m \in \omega$ y $\epsilon > 0$, de modo que $B_{\epsilon/2^{m+1}}(x) \subset B^m_\epsilon(x)$, luego los abiertos métricos son abiertos para el producto. Recíprocamente, dado $\epsilon > 0$, existe un $m \in \omega$ tal que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$$

y existe un $\delta > 0$ tal que si $d_n(x_n, y_n) < \delta$ para todo $n \leq m$, entonces

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) < \frac{\epsilon}{2},$$

luego también $d(x, y) < \epsilon$. Esto significa que $B^m_\delta(x) \subset B_\epsilon(x)$, luego la topología métrica coincide con la topología producto.

Por otra parte, si $\{x^i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el producto, es claro que cada sucesión $\{x^i_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en X_n, luego converge a un cierto $x_n \in X_n$. Estos x_n determinan un $x \in X$ y es claro que la sucesión dada converge a x. Así pues, la distancia d es completa y X es un espacio polaco.

Dejamos al lector el caso con un número finito de factores, que es mucho más sencillo que el caso numerable que acabamos de tratar. ■

Definición 1.13 El *cubo de Hilbert* es el espacio $\mathbb{H} = \mathbb{I}^\omega$, donde $\mathbb{I} = [0, 1]$ es el intervalo unitario en $\mathbb{R}$.

Acabamos de probar que es un espacio polaco[3] y resulta tener la siguiente propiedad universal: los espacios polacos son, salvo homeomorfismo, los subespacios G_δ del cubo de Hilbert. Esto es consecuencia inmediata del teorema siguiente:

Teorema 1.14 *Todo espacio métrico separable es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio métrico separable y sea $D = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ un subconjunto denso en X. Definimos $f : X \longrightarrow \mathbb{H}$ mediante $f(x) = \{d(x, x_i)\}_{i\in\omega}$. Como las aplicaciones $d(\ , x_i)$ son continuas, es claro que f es continua. Además es inyectiva, pues si $x, y \in X$ son dos puntos distintos, podemos tomar bolas abiertas disjuntas del mismo radio centradas en cada uno de ellos, y un punto de D que esté en una de dichas bolas no puede estar a la misma distancia de ambos puntos.

Falta probar que f es un homeomorfismo en su imagen, es decir, que la aplicación $f^{-1} : f[X] \longrightarrow X$ es continua. Para ello tomamos una sucesión en $f[X]$ que converja a un punto de $f[X]$. La sucesión será de la forma $\{f(x^i)\}_{i=0}^{\infty}$ y el límite de la forma $f(x)$, donde $x^i, x \in X$. Vamos a demostrar que $\{x^i\}_{i=0}^{\infty}$ converge a x.

Lo que sabemos es que $\lim\limits_i d(x^i, x_n) = d(x, x_n)$ para todo $n \in \omega$. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos un $n \in \omega$ tal que $d(x, x_n) < \epsilon/2$. Entonces existe un $i_0 \in \omega$ tal que si

[3]En la prueba del teorema 1.34 demostraremos que $\mathbb{H}$ es compacto sin hacer referencia al teorema de Tychonoff, que depende del axioma de elección.

$i \geq i_0$ se cumple que $d(x^i, x_n) < \epsilon/2$, pero entonces $d(x^i, x) < \epsilon$, lo que prueba la convergencia. ■

Así, si el espacio métrico considerado es un espacio polaco, su imagen en $\mathbb{H}$ ha de ser un G_δ, por el teorema 1.11 y, recíprocamente, todo G_δ en $\mathbb{H}$ es un espacio polaco.

Cabe destacar el caso de los espacios métricos compactos:

Teorema 1.15 *Todo espacio métrico compacto es un espacio polaco y es homeomorfo a un subespacio cerrado del cubo de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN: Sea K un espacio métrico compacto. Se cumple que es completo porque toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, y esto implica que la sucesión completa es convergente. Para obtener un conjunto denso numerable en K consideramos el cubrimiento de K por las bolas abiertas de radio $1/n$. Por compacidad tiene un subcubrimiento finito, de modo que existe un conjunto finito $D_n \subset K$ tal que $K = \bigcup\limits_{x \in D_n} B_{1/n}(x)$.

Entonces, el conjunto $D = \bigcup\limits_{n \in \omega \setminus \{0\}} D_n$ es un subconjunto denso numerable de K.

Así pues, K es un espacio polaco y, por el teorema anterior, es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert. Por compacidad el subespacio ha de ser cerrado. ■

En particular hemos probado que todo espacio métrico compacto es 2AN. Vamos a probar también el recíproco, para lo cual necesitamos un hecho previo:

Teorema 1.16 *Si X es un espacio* 2AN*, toda base de X contiene una base numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X y sea $\mathcal{B}'$ una base arbitraria. Fijemos $B \in \mathcal{B}$ y sea

$$\mathcal{F}_B = \{U \in \mathcal{B} \mid \bigvee V \in \mathcal{B}'(U \subset V \subset B)\}.$$

Para cada $U \in \mathcal{F}_B$, elegimos un $V \in \mathcal{B}'$ tal que $U \subset V \subset B$, con lo que formamos una familia numerable $\mathcal{F}'_B \subset \mathcal{B}'$. Claramente $B = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{F}'_B} V$, luego $\mathcal{B}'_0 = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{F}'_B \subset \mathcal{B}'$ es una base numerable de X. ■

Teorema 1.17 *Un espacio compacto es metrizable si y sólo si es* 2AN.

DEMOSTRACIÓN: Una implicación se debe al teorema 1.15. Para probar la otra consideramos un espacio compacto 2AN K y aplicamos el Lema de Urysohn:[4] Si $x \in K$ y U es un abierto, existe una función continua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $f|_{K \setminus V} = 0$. Por lo tanto, los conjuntos $f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$, donde

[4] Véase [AM 7.26]. Es fácil comprobar que si K tiene una base numerable la prueba no requiere AE.

f recorre las funciones reales continuas en K, forman una base de K. Por el teorema anterior existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\omega}$ tal que los conjuntos $C_n = f_n^{-1}[\mathbb{R}\setminus\{0\}]$ forman una base de K.

Ahora consideramos la aplicación $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ dada por $f(x) = \{f_n(x)\}_{n\in\omega}$, que claramente es continua. Además es inyectiva, pues si $x, y \in K$ son puntos distintos, existe un abierto básico C_n tal que $x \in C_n$, $y \notin C_n$, con lo que $f_n(x) \neq 0$, $f_n(y) = 0$, luego $f(x) \neq f(y)$.

Como K es compacto, f es un homeomorfismo en su imagen y, como $\mathbb{R}^\omega$ es metrizable, K también lo es. ∎

Terminaremos esta sección demostrando que el producto de una cantidad no numerable de espacios polacos no puede ser un espacio polaco salvo en casos triviales:

Teorema 1.18 *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y supongamos que*[5] $X = \prod\limits_{i\in I} X_i \neq \varnothing$. *Entonces X cumple* 2AN *si y sólo si lo cumple cada factor y todos salvo a lo sumo una cantidad numerable de ellos tienen la topología trivial (en la que los únicos abiertos son $\varnothing$ y X_i).*

Demostración: Si X cumple 2AN, por el teorema 1.16 tenemos una base numerable formada por abiertos de la forma

$$U_n = \prod_{i\in I} G_{i,n},$$

donde $G_{i,n}$ es abierto en X_i y el conjunto $I_n = \{i \in I \mid G_{i,n} \neq X_i\}$ es finito.

Es claro entonces[6] que la familia $\{G_{i,n}\}_{n\in\omega}$ es una base de X_i. Por lo tanto, X_i cumple 2AN.

Además, $I_0 = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} I_B$ es un subconjunto numerable de I y si $i \in I\setminus I_0$ tenemos que $\{X_i\}$ es una base de X_i, luego la topología de X_i es la trivial.

Recíprocamente, si cada espacio X_i tiene una base numerable $\mathcal{B}_i$ y todos ellos salvo una cantidad numerable tienen la topología trivial (con lo que $\mathcal{B}_i = \{X_i\}$), es claro que la base de X formada por todos los productos básicos en los que todos los factores salvo un número finito de ellos son iguales a X_i es numerable, luego X cumple 2AN. ∎

1.3 Espacios de sucesiones

En las dos secciones siguientes estudiaremos dos espacios polacos que representan un papel protagonista en la teoría descriptiva de conjuntos (el espacio de Baire y el espacio de Cantor), pero antes conviene hacer unas consideraciones generales sobre una clase más amplia de espacios de la que los espacios que acabamos de mencionar son casos particulares.

[5] Para justificar que el producto no es vacío necesitaríamos AE.

[6] Aquí usamos la hipótesis de que $X \neq \varnothing$, pues, dado $p \in x_i$, necesitamos que exista un $x \in X$ tal que $x_i = p$.

Si X es un conjunto arbitrario, lo podemos considerar como espacio topológico con la topología discreta. Ésta es completamente metrizable, pues viene inducida por la métrica discreta:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

que claramente es completa. Además X es separable —y, por consiguiente, un espacio polaco— si y sólo si X es finito o numerable. El producto de un número finito de copias de X tiene la topología discreta, por lo que no es muy interesante, pero esto ya no es así para el producto de una cantidad numerable de copias de X (al menos si X tiene como mínimo dos puntos). Notemos que este producto no es sino el espacio X^ω de todas las sucesiones en X. Teniendo en cuenta que una base de X la forman los subconjuntos con un punto, resulta que una base de X^ω la forman los conjuntos

$$B_s = \{x \in X \mid x|_n = s\},$$

para cada $n \in \omega$ y cada $s \in X^n$.

Observemos que estos abiertos básicos son también cerrados, pues

$$X^\omega \setminus B_s = \bigcup_{t \in X^n \setminus \{s\}} B_t.$$

Por lo tanto X^ω es lo que se llama un espacio topológico *cero-dimensional* (es decir, un espacio con una base formada por abiertos-cerrados).

Según lo dicho, para que X^ω sea un espacio polaco necesitamos que X sea finito o numerable, pero en esta sección trabajaremos en el caso general, sin esta hipótesis de numerabilidad.

Llamaremos $X^{<\omega} = \bigcup\limits_{n \in \omega} X^n$ al conjunto de sucesiones finitas en X. Para cada sucesión $s \in X^{<\omega}$ llamaremos *longitud* de s a su dominio, y lo representaremos por $\ell(s)$.

Un *árbol* A en un conjunto X es un conjunto $A \subset X^{<\omega}$ tal que si $s \in A$ y $n < \ell(s)$, entonces $x|_n \in A$. A veces llamaremos *nodos* a los elementos de un árbol. Consideraremos a todo árbol como conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, de modo que $s \leq t$ será equivalente a $s \subset t$. Diremos también en este caso que t *extiende* a s.

Un *camino* en un árbol A en un conjunto X es una sucesión $x \in X^\omega$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ x|_n \in A$. Representaremos por $[A]$ el conjunto de todos los caminos en el árbol A.

Una *rama* de un árbol A es un subconjunto totalmente ordenado de A maximal respecto de la inclusión. Es claro que una rama r no puede tener más de un elemento de cada longitud n, así como que si contiene a un nodo s ha de contener a sus restricciones. Por ello, las ramas finitas de un árbol A son de la forma $\{s_n\}_{n<m+1}$, donde $\ell(s_n) = n$ y s_m es un *nodo terminal* de A, es

decir, un nodo que no puede extenderse propiamente a otro nodo de longitud mayor. Puesto que, para cada $n < m$, se ha de cumplir que $s_n = s_m|_n$, resulta que las ramas finitas de un árbol se corresponden biunívocamente con sus nodos terminales.

Similarmente, las ramas infinitas de un árbol A se corresponden biunívocamente con los caminos en A, pues cualquier de ellas es necesariamente de la forma $\{s_n\}_{n\in\omega}$, con $\ell(s_n) = n$, y determina el camino

$$x = \bigcup_{n\in\omega} s_n \in [A],$$

que cumple $\bigwedge n \in \omega\ x|_n = s_n$. Recíprocamente, cada camino $x \in [A]$ determina la rama infinita $\{x|_n\}_{n\in\omega}$. Por este motivo a los caminos de un árbol los llamaremos habitualmente ramas infinitas.

Un árbol A está *bien podado* si no tiene nodos terminales, es decir, si todos sus nodos se pueden extender a otros de altura mayor, lo cual equivale a su vez a que todo nodo esté contenido en una rama infinita.

Un árbol A es *perfecto* si todo nodo $s \in A$ admite dos extensiones incompatibles s_1 y s_2, es decir, extensiones tales que $s_1(n) \neq s_2(n)$ para cierto n en su dominio común.

Un árbol A está *finitamente ramificado* si cada uno de sus nodos tiene un número finito de extensiones inmediatamente posteriores (es decir, de longitud una unidad mayor).

Diremos que un subconjunto de un espacio topológico es *perfecto* si es cerrado, no vacío y no tiene puntos aislados. (En particular, diremos que un espacio topológico es *perfecto* si no tiene puntos aislados.)

Teorema 1.19 *Sea X un conjunto.*

a) Los cerrados en X^ω son los conjuntos de la forma $[A]$, donde A es un árbol en X que podemos tomar bien podado.

b) Sea $A \neq \varnothing$ un árbol bien podado en X. Entonces

1. El cerrado $[A]$ es perfecto si y sólo si el árbol A lo es.

2. $[A]$ es compacto si y sólo si A está finitamente ramificado.

Demostración: a) Si A es un árbol en X, tenemos que $[A]$ es cerrado en X^ω, pues si $x \in X^\omega \setminus [A]$, existe un $n \in \omega$ tal que $x|_n \notin A$, de manera que $x \in B_{x|_n} \subset X^\omega \setminus A$, luego $X^\omega \setminus A$ es abierto.

Consideremos ahora un cerrado $C \subset X^\omega$ y llamemos

$$A = \{x|_n \mid x \in C \land n \in \omega\}.$$

Claramente A es un árbol bien podado y $C \subset [A]$. Tomemos ahora $x \in [A]$ y veamos que está en C. Para cada $n \in \omega$, sabemos que $x|_n \in A$, luego existe un

$y \in C$ tal que $x|_n = y|_n$, luego $y \in B_{x|_n} \cap C \neq \varnothing$. Como los abiertos $\{B_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ forman una base de entornos de x en X^ω, esto implica que $x \in \overline{C} = C$.

b) 1. Si $x \in [A]$ es un punto aislado, entonces existe un entorno básico $B_{x|_n}$ tal que $B_{x|_n} \cap [A] = \{x\}$, pero entonces $x|_n$ no puede tener extensiones incompatibles en A, ya que se extenderían a dos ramas infinitas distintas en $B_{x|_n} \cap [A]$, luego A no es perfecto.

Recíprocamente, si $[A]$ es perfecto y $s \in A$ de longitud n, vamos a probar que s admite extensiones incompatibles. Sea $x \in [A]$ una extensión de s (que existe porque A está bien podado). Como x no es un punto aislado de $[A]$, no puede ocurrir que $B_{x|_n} \cap [A] = \{x\}$, luego podemos tomar $y \in B_{x|_n} \cap [A]$ tal que $y \neq x$, pero $x|_n = y|_n = s$, luego existe un $m > n$ tal que $x|_m, y|_m \in A$ son extensiones incompatibles de s.

b) 2. Supongamos que A es finitamente ramificado pero que $[A]$ tiene un cubrimiento abierto que no admite un subcubrimiento finito. Llamemos $s_1, \ldots, s_n \in X^1$ a los sucesores de $\varnothing$ en A. Entonces

$$[A] = \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in [A] \mid x|_1 = s_i\}.$$

Si cada uno de estos conjuntos pudiera cubrirse por un número finito de abiertos del cubrimiento, lo mismo valdría para $[A]$, luego existe un s_1 de longitud 1 tal que $A_{s_1} = \{x \in [A] \mid x|_1 = s_1\}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos del cubrimiento dado. Similarmente

$$A_{s_1} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in [A] \mid x|_2 = t_i\},$$

donde $t_1, \ldots, t_n$ son los sucesores de s_1 en A (el número n no tiene por qué ser el mismo que el anterior). Nuevamente razonamos que ha de haber un $s_2 \supset s_1$ tal que $A_{s_2} = \{x \in [A] \mid x|_2 = s_2\}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos del cubrimiento dado. Repitiendo el argumento obtenemos[7] una rama infinita $\{s_n\}_{n\in\omega}$ en A tal que $A_{s_i} = \{x \in [A] \mid x|_i = s_i\}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos del cubrimiento. Sea

$$x = \bigcup_{i\in\omega} s_i \in [A].$$

Podemos tomar un abierto V en el cubrimiento dado tal que $x \in V$. Sea $n \in \omega$ tal que $x \in B_{x|_n} \subset V$. Entonces $A_{x|_n} \subset B_{x|_n} \subset V$ y tenemos una contradicción.

Recíprocamente, sea $s \in A$ un nodo de longitud m. Si s tuviera infinitos sucesores inmediatos, digamos[8] $\{s_n\}_{n\in\omega}$, podemos tomar caminos $x_n \in [A]$ tales que $s_n \subset x_n$. Así $x_n \in B_{s_n}$ y $x_n \notin B_t$ para cualquier $t \in X^{m+1}$ distinto de los s_n. Por lo tanto,

$$\{B_{s_n} \mid n \in \omega\} \cup \{B_t \mid t \in X^{m+1} \land \bigwedge n \in \omega\ t \neq s_n\}$$

[7] Esto es una aplicación directa de ED, tal cual lo hemos definido.

[8] Aquí usamos que todo conjunto infinito posee un subconjunto numerable.

es un cubrimiento abierto de $[A]$ del que no puede extraerse ningún subcubrimiento finito, luego $[A]$ no es compacto. ■

En particular vemos que el espacio de Cantor $\mathcal{C} = [2^{<\omega}]$ es un subespacio compacto perfecto del espacio de Baire $\mathcal{N}$.

Veamos ahora que las aplicaciones entre árboles inducen aplicaciones continuas entre sus cerrados asociados.

Definición 1.20 Sean A y B dos árboles en un conjunto X. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es *monótona* si $s \subset t$ implica $\phi(s) \subset \phi(t)$. Si ϕ es monótona definimos

$$Z(\phi) = \{x \in [A] \mid \lim_n \ell(\phi(x|_n)) = \infty\}.$$

Para cada $x \in Z(\phi)$ definimos

$$\phi^*(x) = \bigcup_{n\in\omega} \phi(x|_n) \in [B].$$

Diremos que ϕ es *propia* si $Z(\phi) = [A]$.

Teorema 1.21 *En las condiciones anteriores, $Z(\phi)$ es un G_δ en $[A]$, la aplicación $\phi^* : Z(\phi) \longrightarrow [B]$ es continua.*

Demostración: Tenemos que

$$x \in Z(\phi) \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee m \in \omega\ \ell(\phi(x|_m)) \geq n,$$

luego $Z(\phi) = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$, donde U_n es el abierto

$$U_n = \{x \in [A] \mid \bigvee m \in \omega\ \ell(\phi(x|_m)) \geq n\}.$$

Por lo tanto, $Z(\phi)$ es un G_δ. Para probar que ϕ^* es continua tomamos un abierto básico en $[B]$, que será de la forma $V_t = [B] \cap B_t$, y observamos que

$$\phi^{*-1}[V_t] = \bigcup\{B_s \cap [A] \mid s \in A \wedge t \subset \phi(s)\}$$

es abierto en $[A]$. ■

Veamos una aplicación:

Teorema 1.22 *Sea X un conjunto que admite un buen orden y $S \subset T \subset X^\omega$ dos cerrados no vacíos en X^ω. Entonces existe una retracción $r : T \longrightarrow S$, es decir, una aplicación continua que restringida a S es la identidad.*

Demostración: Sea $T = [A]$ y $S = [B]$, donde A y B son árboles bien podados en X. Concretamente,

$$A = \{x|_n \mid x \in T \wedge n \in \omega\}, \qquad B = \{x|_n \mid x \in S \wedge n \in \omega\},$$

con lo que $B \subset A$. Vamos a construir una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ monótona y propia tal que $\phi(t) = t$ para todo $t \in B$. Es claro entonces que $r = \phi^*$ será la retracción que buscamos.

Definimos $\phi(s)$ por recursión sobre la longitud de s. Tomamos $\phi(\varnothing) = \varnothing$ y, si está definido $\phi(s) \in B$, para cada $x \in X$ tal que $s^\frown x \in A$, definimos $\phi(s^\frown x) = s^\frown x$ si $s^\frown x \in B$ y $\phi(s^\frown x) = \phi(s)^\frown y$, donde $y \in X$ es cualquier elemento[9] que cumpla que $\phi(s)^\frown y \in B$, que existe porque B está bien podado. ■

Terminamos esta sección introduciendo unas biyecciones canónicas que usaremos con frecuencia en adelante.

Definición 1.23 (Biyecciones canónicas) Si consideramos en $\omega\times\omega$ el *orden canónico* dado por

$$(m, n) \leq (m', n') \leftrightarrow \text{máx}\{m, n\} < \text{máx}\{m', n'\} \vee$$

$$(\text{máx}\{m, n\} = \text{máx}\{m', n'\} \wedge (n < n' \vee (n = n' \wedge m \leq m'))),$$

con esta ordenación, $\omega \times \omega$ es semejante a ω, y la semejanza es única. La representaremos por $\langle\ ,\ \rangle_2 : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$.

A su vez, podemos definir $\langle n_0, n_1, n_2\rangle_3 = \langle\langle n_0, n_1\rangle_2\,, n_2\rangle_2$, con lo que tenemos una biyección canónica $\langle\ \rangle_3 : \omega^3 \longrightarrow \omega$.

En general, definiendo inductivamente

$$\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle_k = \big\langle\langle n_0, \ldots, n_{k-2}\rangle_{k-1}\,, n_{k-1}\big\rangle_2$$

obtenemos biyecciones canónicas $\langle\ \rangle_k : \omega^k \longrightarrow \omega$.

De este modo, un mismo número natural codifica unívocamente un par de números naturales, o una terna, etc. Más aún, podemos definir una biyección $\langle\ \rangle_\infty : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$ del modo siguiente: si $s \in \omega^k$ con $k \neq 0$, definimos

$$\langle s\rangle_\infty = \langle k - 1, \langle s\rangle_k\rangle_2 + 1,$$

y completamos la definición con $\langle\varnothing\rangle_\infty = 0$.

Salvo que haya posibilidades de confusión suprimiremos el subíndice en las biyecciones canónicas $\langle\ \rangle$.

Dado un conjunto X, tenemos biyecciones canónicas $\langle\ \rangle_k : (X^\omega)^k \to X^\omega$ dadas por $\langle x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle_k\,(kc + i) = x_i(c)$, donde $0 \leq i < k$. Así, $\langle x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle_k$ es la sucesión que intercala las k sucesiones dadas. Recíprocamente, para cada $x \in X^\omega$, representaremos por $(x^k_0, \ldots, x^k_{k-1})$ a la antiimagen de x por la biyección canónica.

Más aún, podemos definir $\langle\ \rangle_\infty : (X^\omega)^\omega \longrightarrow X^\omega$ como la biyección cuya inversa $x \mapsto \{x^\infty_i\}_{i\in\omega}$ viene dada por $x^\infty_i(k) = x(\langle i, k\rangle)$.

Habitualmente suprimiremos los superíndices.

[9] Aquí usamos el buen orden de X para tomar concretamente el mínimo y que cumpla lo exigido.

1.4 El espacio de Baire

Definición 1.24 Llamaremos *espacio de Baire* al espacio $\mathcal{N} = \omega^\omega$ de todas las sucesiones de números naturales, donde consideramos a ω como espacio discreto y tomamos en $\mathcal{N}$ la topología producto.

Por las consideraciones de la sección precedente sabemos que $\mathcal{N}$ es un espacio polaco perfecto. Sucede que el espacio de Baire es mucho más "representativo" de lo que podría parecer. Para probarlo conviene introducir el concepto siguiente:

Un *esquema de Suslin* en un conjunto X es una aplicación $A : \omega^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X$.

La *operación de Suslin* es la aplicación S que a cada esquema de Suslin A en X le asigna el conjunto

$$S(A) = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) \subset X.$$

Si X es un espacio métrico, diremos que un esquema de Suslin A es abierto, cerrado, etc. si lo son todos los conjuntos $A(s)$. Diremos que A cumple la *condición de los diámetros* si para todo $x \in \mathcal{N}$ se cumple que

$$\lim_n d(A(x|_n)) = 0,$$

donde d denota al diámetro de un conjunto y convenimos en que $d(\varnothing) = 0$. Si A cumple esta condición es claro que $\bigcap\limits_n A(x|_n)$ contiene como máximo un punto. Definimos

$$Z(A) = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) \neq \varnothing\},$$

de modo que existe una única aplicación $\phi : Z(A) \longrightarrow X$ tal que, para todo $x \in Z(A)$,

$$\bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) = \{\phi(x)\}.$$

Claramente, la imagen de ϕ es $S(A)$. Veamos además que ϕ es continua.

En efecto: tomamos un abierto $U \subset X$ y un $x \in \phi^{-1}[U]$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\phi(x)) \subset U$ y sea $n \in \omega$ tal que $d(A(x|_n)) < \epsilon$. Entonces tenemos que $A(x|_n) \subset B_\epsilon(\phi(x)) \subset U$, luego $x \in B_{x|_n} \subset \phi^{-1}[U]$, ya que todo $y \in B_{x|_n}$ cumple que $\phi(y) \in A(y|_n) = A(x|_n) \subset U$. Esto prueba que $\phi^{-1}[U]$ es abierto, luego ϕ es continua.

Teorema 1.25 *Todo espacio polaco no vacío es imagen continua del espacio de Baire.*

Demostración: Sea X un espacio polaco no vacío. Veamos en primer lugar que si $U \subset X$ es un abierto no vacío, dado $\epsilon > 0$, existen abiertos no vacíos $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de diámetro $< \epsilon$ tales que

$$U = \bigcup_{n\in\omega} U_n = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U}_n.$$

En efecto, sea D un subconjunto denso numerable de X y sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de las bolas abiertas $B_{1/n}(d)$ tales que $d \in D$, $1/n < \epsilon/2$ y $\overline{B_{1/n}(d)} \subset U$. Dado $x \in U$, existe un $n > 0$ tal que $1/n < \epsilon$, $B_{1/n}(x) \subset U$. Existe un $d \in D \cap B_{1/2n}(x)$. Entonces $x \in B_{1/2n}(d)$ y $\overline{B_{1/2n}(d)} \subset U$. Por lo tanto, $B_{1/2n}(d)$ es uno de los abiertos U_i y así x está en la unión de todos ellos.

Con esto podemos construir recurrentemente un esquema de Suslin abierto A tal que, para todo $s \in \omega^n$, los abiertos $\{A(s^\frown n)\}_{n\in\omega}$ son los que resultan de aplicar el resultado que acabamos de probar al abierto $A(s)$ con $\epsilon = \frac{1}{n+1}$. (Aquí $s^\frown n$ representa la sucesión que resulta de prolongar s con n.) Esto hace que el esquema A cumpla las propiedades siguientes:

a) $A(\varnothing) = X$.

b) $d(A(s)) < 1/\ell(s)$ (donde $\ell(s)$ representa la longitud de la sucesión s, es decir, su dominio).

c) Si $s \subset t$, entonces $\overline{A(t)} \subset A(s)$.

d) $A(s) = \bigcup\limits_{n\in\omega} A(s^\frown n)$.

Dado $x \in \mathcal{N}$, podemos tomar puntos $p_n \in A(x|_n)$. La condición sobre los diámetros hace que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ sea de Cauchy en X, luego converge a un punto $p \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{A(x|_n)} = \bigcap\limits_{n\in\omega} A(x|_n)$.

La última igualdad se debe a la propiedad c): $p \in \overline{A(x|_{n+1})} \subset A(x|_n)$, para todo $n \in \omega$. Esto prueba que la aplicación

$$\phi : \mathcal{N} \longrightarrow X$$

asociada al esquema de Suslin está definida sobre todo $\mathcal{N}$. Sabemos que es continua. Falta probar que es suprayectiva, y esto es consecuencia de la propiedad d). Dado $p \in X$, tomamos $s_0 = \varnothing$, de modo que $A(s_0) = X$. Por d) existe un $s_1 \supset s_0$ tal que $p \in A(s_1)$, y existe un $s_2 \supset s_1$ tal que $p \in A(s_2)$ y, repitiendo el proceso, obtenemos un $x \in \mathcal{N}$ tal que $p \in \bigcap\limits_{n\in\omega} A(x|_n)$, pero esto implica que $p = \phi(x)$. ■

Una modificación de la prueba del teorema anterior nos da un resultado más fino:

Teorema 1.26 *Si X es un espacio polaco, existe un cerrado $C \subset \mathcal{N}$ y una biyección continua $f : C \longrightarrow X$.*

Demostración: Vamos a probar que si $F \subset X$ es un conjunto F_σ (es decir, una unión numerable de cerrados) y $\epsilon > 0$, entonces F se descompone en unión disjunta $F = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$, donde F_n es un F_σ y $\overline{F}_n \subset F$.

En efecto, sea $F = \bigcup\limits_{n\in\omega} C_n$, donde cada C_n es cerrado. Por el teorema 1.16, el espacio X tiene una base numerable formada por bolas de diámetro $< \epsilon$. Las correspondientes bolas cerradas también tienen diámetro $< \epsilon$ y cubren todo el espacio X. Sean $\{B_m\}_{m\in\omega}$ estas bolas cerradas. Entonces $F = \bigcup\limits_{n,m} (C_n \cap B_m)$, donde cada conjunto $C_n \cap B_m$ es un cerrado de diámetro $< \epsilon$. Equivalentemente, podemos suponer que cada C_n tiene diámetro $< \epsilon$.

Llamemos $G_n = C_n \setminus \bigcup\limits_{k<n} C_k$, de modo que $F = \bigcup\limits_{n\in\omega} G_n$, donde ahora la unión es disjunta y cada G_n tiene diámetro $< \epsilon$. Además, G_n es la intersección de un cerrado y un abierto, pero el teorema 1.10 implica que todo abierto es un conjunto F_σ, luego G_n es también F_σ. Pongamos, pues, que $G_n = \bigcup\limits_{m\in\omega} D^n_m$, donde cada D^n_m es cerrado. Podemos suponer que $D^n_m \subset D^n_{m+1}$. Nuevamente, $G_n = \bigcup\limits_{m\in\omega} D^n_m \setminus D^n_{m-1}$, con el convenio de que $D^n_{-1} = \varnothing$, y los conjuntos $D^n_m \setminus D^n_{m-1}$ son F_σ, disjuntos dos a dos (para todo m y n), de diámetro $< \epsilon$ y además $\overline{D^n_m \setminus D^n_{m-1}} \subset D^n_m \subset F$. Basta definir $\{F_n\}_{n\in\omega}$ como una ordenación de $\{D^n_m \setminus D^n_{m+1}\}_{m,n\in\omega}$.

Usando este hecho que acabamos de probar, construimos un esquema de Suslin A con las características siguientes:

a) $A(\varnothing) = X$.

b) $d(A(s)) < 1/\ell(s)$.

c) Si $s \subset t$, entonces $\overline{A(t)} \subset A(s)$ y $A(s)$ es un conjunto $F(\sigma)$.

d) $A(s) = \bigcup\limits_{n\in\omega} A(s^\frown n)$, donde la unión es disjunta.

Veamos que la aplicación continua $\phi : Z(A) \longrightarrow X$ cumple lo pedido. La suprayectividad se prueba igual que en el teorema anterior, como consecuencia de la propiedad d).

Ahora tenemos además que ϕ es inyectiva, pues si $x, y \in Z(A)$ son distintos y n es el primer natural en el que difieren, de modo que $x|_n = y|_n = s$, tenemos que $\phi(x) \in A(s^\frown x(n))$, mientras que $\phi(y) \in A(s^\frown y(n))$, y ambos conjuntos son disjuntos, luego $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Sólo falta probar que $Z(A)$ es cerrado. Ahora bien, si $x \in \mathcal{N} \setminus Z(A)$, tenemos que $\bigcap\limits_{n\in\omega} A(x|_n) = \varnothing$. Basta probar que existe un $n \in \omega$ tal que $A(x|_n) = \varnothing$, pues entonces $x \in B_{x|_n} \subset X \setminus Z(A)$. En caso contrario, podríamos tomar $p_n \in A(x|_n)$, y por las propiedades b) y c), la sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ es de Cauchy en X, luego converge a un $p \in \overline{A(x|_{n+1})} \subset A(x|_n)$ para todo n, luego $p \in \bigcap\limits_{n\in\omega} A(x|_n)$, lo que equivale a que $p = \phi(x)$, luego $x \in Z(A)$, contradicción. ■

Observemos que 1.25 se deduce del teorema anterior usando 1.22.

Si el espacio polaco es cero-dimensional, obtenemos un homeomorfismo:

Teorema 1.27 *Todo espacio polaco cero-dimensional es homeomorfo a un subespacio cerrado de* $\mathcal{N}$.

Demostración: Sea X un espacio polaco en las condiciones del enunciado. Por el teorema 1.16, dado $\epsilon > 0$, sabemos que X posee una base numerable formada por abiertos cerrados de diámetro menor que ϵ. En particular, dado un abierto U, podemos expresarlo como unión disjunta

$$U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$$

de abiertos cerrados de diámetro menor que ϵ. Cambiando U_n por $U_n \setminus \bigcup\limits_{i<n} U_i$ podemos suponer que la unión es disjunta.

Ahora construimos un esquema de Suslin en las mismas condiciones que el del teorema anterior, con la única diferencia de que los conjuntos $A(s)$ son abiertos cerrados. La aplicación $\phi : Z(A) \longrightarrow X$ sigue siendo biyectiva y continua, y $Z(A)$ sigue siendo cerrado, pero como $\phi[Z(A) \cap B_s] = A(s)$, ahora tenemos que las imágenes de los abiertos en $Z(A)$ son abiertos en X, y así ϕ es un homeomorfismo. ∎

Para obtener un homeomorfismo definido sobre todo $\mathcal{N}$ nos falta imponer una condición que nos asegure que cada abierto de X se puede descomponer en unión disjunta de una cantidad numerable de abiertos cerrados no vacíos de diámetro arbitrariamente pequeño.

Teorema 1.28 (Alexandrov-Urysohn) *Todo espacio polaco cero-dimensional no vacío cuyos compactos tengan todos interior vacío es homeomorfo al espacio de Baire.*

Demostración: Notemos en primer lugar que $\mathcal{N}$ cumple la propiedad que estamos exigiendo: Si $K \subset \mathcal{N}$ es compacto y tiene interior no vacío, contiene un abierto básico B_s, que será compacto porque también es cerrado. Ahora bien, B_s no puede ser compacto, porque puede cubrirse por una familia numerable de abiertos disjuntos dos a dos (la formada por $\{B_{s^\frown n}\}_{n\in\omega}$), luego no es posible extraer un subcubrimiento finito.

Recíprocamente, si X es un espacio en las condiciones del enunciado y U es un abierto cerrado no vacío, por hipótesis no puede ser compacto, por lo que tiene un cubrimiento del que no se puede extraer un subcubrimiento finito. Cada abierto de dicho cubrimiento puede descomponerse en unión de abiertos cerrados de diámetro $< \epsilon$ pertenecientes a una base numerable de X, y es claro que estos abiertos cerrados determinan otro cubrimiento (pero ahora formado por una cantidad numerable de abiertos cerrados $U = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$) del que tampoco puede extraerse un subcubrimiento finito.

Por lo tanto, al cambiar U_n por $U_n \setminus \bigcup\limits_{i<n} U_i$, sigue sin ser posible obtener un cubrimiento finito, luego, si eliminamos los U_n que puedan ser vacíos, seguimos teniendo una descomposición en una cantidad numerable de abiertos cerrados disjuntos dos a dos, y no vacíos. Toda la prueba del teorema anterior es válida, sólo que ahora podemos asegurar que $Z = \mathcal{N}$. ∎

Como caso particular:

Teorema 1.29 $\mathcal{N} \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

DEMOSTRACIÓN: Ante todo, observemos que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es un espacio polaco, pues $\mathbb{Q}$ es una unión numerable de cerrados (sus puntos), luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es intersección numerable de abiertos, es decir, es un G_δ.

Los intervalos abiertos de extremos racionales son una base de $\mathbb{R}$, luego sus intersecciones con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son una base de este espacio, pero es claro que dichas intersecciones son abiertas y cerradas (el complementario de una de ellas es la intersección con $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de dos intervalos abiertos no acotados con extremos racionales). Por consiguiente $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es cero-dimensional.

Finalmente, si un compacto $K \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tuviera interior no vacío, podríamos tomarlo abierto y cerrado, luego habría un intervalo I en $\mathbb{R}$ con extremos racionales tal que $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sería compacto, pero entonces tendría que ser cerrado en $\mathbb{R}$, y claramente no lo es. Ahora basta aplicar el teorema anterior. ■

Nota El mismo argumento del teorema anterior prueba que $\mathcal{N}$ es homeomorfo al espacio de los números irracionales comprendidos entre 0 y 1. Sin embargo, en este caso el homeomorfismo puede ser descrito de forma explícita y elegante al mismo tiempo. Un posible homeomorfismo es la aplicación $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ que a cada $x \in \mathcal{N}$ le asigna la fracción continua

$$\phi(x) = [x_0 + 1, x_1 + 1, x_2 + 1, \ldots]$$

En efecto, es conocido que ϕ es una biyección[10] y también es claro que se trata de la aplicación asociada al esquema de Suslin A en el que $A(s)$ es el conjunto de los números irracionales cuyo desarrollo en fracción continua empieza por $[s(0) + 1, \ldots, s(\ell(s) - 1) + 1]$, que es un intervalo de extremos racionales. Para entender la idea pensemos por ejemplo en los números irracionales cuyo desarrollo en fracción continua empieza por $[a_0, a_1, a_2]$. Son los de la forma

$$\xi = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\alpha,}}}}$$

donde α puede tomar cualquier valor irracional $0 < \alpha < 1$. La expresión que determina ξ en función de α es monótona en α (creciente o decreciente en función de si el número de fracciones es par o impar), de modo que ξ recorre el intervalo de extremos (racionales) $[a_0, a_1, a_2]$ y $[a_0, a_1, a_2 + 1]$. Por ello, los conjuntos $A(s)$ son abiertos y cerrados en $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ y, cuando s recorre las sucesiones de una misma longitud, son disjuntos dos a dos, pues un mismo número irracional no puede tener dos desarrollos distintos en fracción continua. Es fácil ver entonces que A cumple todos los requisitos para que la construcción del teorema 1.28 nos dé un homeomorfismo, que en este caso es ϕ. ■

[10]Véase la sección 5.1 de mi *Teoría de números.*

En particular, en todas aquellas situaciones (relativamente frecuentes) en las que los números racionales resulten despreciables, el espacio $\mathcal{N}$ nos proporciona una descripción alternativa topológicamente muy simple de "casi todo" $\mathbb{R}$.

Nota Observemos que los mismos razonamientos empleados en el teorema 1.29 demuestran que $\mathbb{Q}$ es un espacio métrico separable cero-dimensional cuyos compactos tienen todos interior vacío. Sin embargo, es obvio que $\mathbb{Q}$ no puede ser homeomorfo a $\mathcal{N}$, luego tiene que fallar la única hipótesis que falta para que el teorema 1.28 sea aplicable a $\mathbb{Q}$: no puede ser completamente metrizable. Así pues, hemos demostrado que $\mathbb{Q}$ no es un espacio polaco. En particular no es un G_δ en $\mathbb{R}$. ■

De la caracterización que hemos obtenido de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ podemos obtener a su vez una caracterización de $\mathbb{Q}$ como espacio métrico. Se basa a su vez en la caracterización de $\mathbb{Q}$ como conjunto ordenado dada en [PC 8.1] que reproducimos aquí por completitud:

Teorema 1.30 (Cantor) *Un conjunto totalmente ordenado D es semejante al conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales si y sólo si cumple las propiedades siguientes:*

a) D es numerable.

b) D no tiene máximo ni mínimo.

c) D es denso en sí mismo, es decir, entre cada par de sus elementos hay un tercero.

Demostración: Sean $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \omega\}$ y $D = \{d_n \mid n \in \omega\}$. Definimos por recurrencia una sucesión de pares $\{(i_k, j_k)\}_{k\in\omega}$ de números naturales de modo que

$$f_n = \{(q_{i_k}, d_{j_k}) \mid k < n\}$$

sea una semejanza entre $\{q_{i_k} \mid k < n\}$ y $\{d_{j_k} \mid k < n\}$. Para ello tomamos $i_0 = j_0 = 0$, de modo que $f_1(q_0) = d_0$. Supuesta definida la sucesión $\{(i_k, j_k)\}_{k<n}$, distinguimos dos casos, según que n sea par o impar.

Si n es par definimos i_n como el mínimo natural que no esté en $\{i_k \mid k < n\}$ y definimos j_n como el mínimo natural tal que d_{j_n} está respecto de $\{d_{j_k} \mid k < n\}$ en la misma posición que q_{i_n} está respecto de $\{q_{i_k} \mid k < n\}$. Las hipótesis del teorema aseguran que siempre existe tal j_n.

Si n es impar definimos j_n como el mínimo natural que no esté en $\{j_k \mid k < n\}$ y definimos i_n como el mínimo natural tal que q_{i_n} está respecto de $\{q_{i_k} \mid k < n\}$ en la misma posición que d_{j_n} está respecto de $\{d_{j_k} \mid k < n\}$. Como $\mathbb{Q}$ también cumple las hipótesis exigidas a D, la existencia de i_n está garantizada.

Llamamos $f = \{(q_{i_k}, d_{j_k}) \mid k \in \omega\}$. Por construcción es claro que f es una semejanza de un cierto subconjunto de $\mathbb{Q}$ en un cierto subconjunto de D. Basta probar que $\mathcal{D}f = \mathbb{Q}$ y $\mathcal{R}f = D$. La simetría de la construcción hace que las dos pruebas sean análogas. Veamos, por ejemplo, la primera. Si $\mathcal{D}f \neq \mathbb{Q}$, existe un mínimo i que no aparece nunca en la sucesión $\{i_k\}_{k\in\omega}$. Sea $m \in \omega$ tal que todos los números menores que i aparecen en la sucesión $\{i_k\}_{k<2m}$, entonces i_{2m} es por definición el menor número natural que no aparece en dicha sucesión, con lo que debería ser $i_{2m} = i$, contradicción. ■

De aquí obtenemos a su vez:

Teorema 1.31 (Sierpiński) *Todo espacio métrico perfecto numerable y cero-dimensional es homeomorfo a* $\mathbb{Q}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio en las condiciones del enunciado. La condición de que no tenga puntos aislados se traduce en que si U es un abierto cerrado no trivial (es decir, distinto de $\varnothing$ y de X), entonces hay infinitos puntos de X dentro de U e infinitos puntos de X fuera de U. Esto nos asegura que cada abierto cerrado no trivial U se puede expresar como unión disjunta de una familia numerable de abiertos cerrados no vacíos de diámetro menor que cualquier ϵ prefijado.

En efecto, sea $U = \{q_i\}_{i\in\omega}$. Tomamos un abierto cerrado $U_0 \subsetneq U$ de diámetro $< \epsilon$ y tal que $q_0 \in U_0$, luego tomamos un abierto cerrado U_1, siempre de diámetro $< \epsilon$, tal que $\varnothing \neq U_1 \subset U \setminus U_0$ y de modo que $q_1 \in U_0 \cup U_1$. De este modo llegamos a obtener una sucesión $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos cerrados disjuntos dos a dos, de diámetro $< \epsilon$ y cuya unión contiene a todos los q_n, luego es igual a todo U.

Así podemos construir un esquema de Suslin A que nos proporciona un homeomorfismo $\phi : Z \longrightarrow X$. (por el mismo argumento que en 1.27). No podemos probar que Z sea cerrado en $\mathcal{N}$, ni mucho menos que sea todo $\mathcal{N}$, porque en los teoremas anteriores esta parte de la prueba se basaba en la completitud de X. No obstante, podemos afirmar que Z es denso en $\mathcal{N}$. En efecto, si tomamos $x \in \mathcal{N}$ y un entorno básico $B_{x|_n}$ de n, sabemos que $A(x|_n) \neq \varnothing$, y que, fijado $q \in A(x|_n)$, tiene una antiimagen $y \in Z$ que ha de cumplir $y \in B_{x|_n}$, pues $\phi(y) \in A(x|_n) \cap A(y|_n)$, y estos abiertos son disjuntos salvo si $x|_n = y|_n$.

Por consiguiente, tenemos que X es homeomorfo a un subconjunto denso $D \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Naturalmente, D es numerable y, respecto al orden usual en $\mathbb{R}$, no puede tener máximo ni mínimo elemento, ya que entonces habría números irracionales más allá de su máximo o su mínimo que no estarían en su clausura y, por el mismo motivo, ha de ser denso en sí mismo, pues si existieran $d_1 < d_2$ en D sin ningún punto de D entre ambos, un irracional $d_1 < \xi < d_2$ no estaría en la clausura de D.

Ahora basta aplicar 1.30 para concluir que D y, por consiguiente X, es homeomorfo a $\mathbb{Q}$. ■

El teorema siguiente es elemental, pero da una primera muestra de la flexibilidad del espacio de Baire:

Teorema 1.32 *Se tienen los homeomorfismos siguientes:*

a) $\mathcal{N}^k \cong \mathcal{N}$

b) $\mathcal{N}^\omega \cong \mathcal{N}$.

c) $\omega \times \mathcal{N} \cong \mathcal{N}$.

d) $2 \times \mathcal{N} \cong \mathcal{N}$.

Demostración: a) Más en general, si X es un conjunto arbitrario se cumple que $(X^\omega)^k \cong X^\omega$, y un homeomorfismo es simplemente la biyección canónica ϕ definida en 1.23. Para probarlo basta observar con que, en general, para que una aplicación de la forma

$$f : X = X_1^\omega \times \cdots \times X_u^\omega \longrightarrow Y = Y_1^\omega \times \cdots \times Y_v^\omega$$

sea continua basta ver que, para cada punto $x \in X$ y cada abierto básico $V = B_{s_1} \times \cdots \times B_{s_v}$ tal que $f(x) \in V$, existe un abierto básico $U = B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_u}$ tal que $x \in U$ y $f[U] \subset V$. Más aún, podemos tomar todos los s_i de la misma longitud n y todos los t_j de la misma longitud m, con lo que la condición puede reformularse, más llanamente, de esta forma:

> *f es continua si y sólo si para todo $x \in X$ y todo $n \in \omega$ existe un $m \in \omega$ tal que todo $x' \in X$ cuyas sucesiones coincidan hasta m con las de x cumple que las sucesiones de $f(x')$ coinciden hasta n con las de $f(x)$.*

Es claro que tanto ϕ como ϕ^{-1} cumplen esta formulación de la continuidad.

b) Nuevamente, un homeomorfismo $\phi : X^\omega \longrightarrow (X^\omega)^\omega$ es la biyección canónica definida en 1.23, dada por $\phi(x)_n(m) = x(\langle n, m\rangle)$. Para comprobar que es continua en un $x \in X^\omega$, tomamos un entorno básico de $\phi(x)$, que será un conjunto de la forma

$$U = B_{s_0} \times \cdots \times B_{s_{v-1}} \times (X^\omega)^{\omega \setminus v},$$

donde podemos suponer que todas las sucesiones s_i tienen la misma longitud n. Tomamos entonces $m \in \omega$ tal que la imagen de $v \times n$ por la semejanza canónica esté contenida en m. Es claro entonces que $B_{x|_m} \subset \phi^{-1}[U]$. Esto prueba que ϕ es continua, y análogamente se demuestra la continuidad de ϕ^{-1}.

c) La versión general de este resultado es $X \times X^\omega \cong X^\omega$, y un homeomorfismo $\phi : X^\omega \longrightarrow X \times X^\omega$ es, por ejemplo, el dado por $\phi(x) = (x(0), x^*)$, donde $x^*(n) = x(n + 1)$. Claramente se trata de una biyección y la comprobación de que es un homeomorfismo no presenta ninguna dificultad.

d) Definimos $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times 2$ mediante $\phi(x) = (x^*, i)$, donde x^* e i vienen dados por:

$$x^*(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \neq 0, \\ c & \text{si } n = 0 \text{ y } x(0) = 2c + i,\ i \in 2. \end{cases}$$

Dejamos las comprobaciones al lector. ■

Notemos que los apartados c) y d) del teorema anterior afirman que la unión disjunta de infinitas copias (resp. dos copias) de $\mathcal{N}$ con la topología que tiene por abiertos las uniones de un abierto de cada copia, es homeomorfa a $\mathcal{N}$. Los homeomorfismos construidos pueden verse como “codificaciones”. Por ejemplo, el apartado b) afirma que cada elemento de $\mathcal{N}$ puede codificar una sucesión de elementos de $\mathcal{N}$.

Observemos que hemos probado que $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2 \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y, por otra parte, el teorema 1.31 implica que $\mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}$, mientras que, evidentemente, $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}$.

1.5 El espacio de Cantor

Consideramos ahora el producto de infinitas copias de un espacio finito:

Definición 1.33 Llamaremos *espacio de Cantor* al subespacio $\mathcal{C} = 2^\omega$ de $\mathcal{N}$ formado por todas las sucesiones de ceros y unos.

El teorema 1.19 implica que $\mathcal{C}$ es un espacio polaco perfecto y compacto. Además cumple un teorema análogo al teorema 1.25:

Teorema 1.34 (Alexandrov-Hausdorff) *Todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor.*

Demostración: En primer lugar observamos que existe una aplicación continua y suprayectiva $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{I} = [0, 1]$. Por ejemplo, la dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)2^{-n-1}.$$

La suprayectividad se debe a que todo número real admite un desarrollo decimal en base dos. La continuidad se debe a que si $x, y \in B_s$, donde $\ell(s) = n$, entonces $f(x)$ y $f(y)$ son dos números reales cuyos desarrollos binarios tienen iguales las n primeras cifras, lo que implica que $|f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}$. Por lo tanto, si una sucesión en $\mathcal{C}$ tiende a x, la sucesión de sus imágenes tiende a $f(x)$.

En segundo lugar, observamos que f permite definir una aplicación continua y suprayectiva $\mathcal{C}^\omega \longrightarrow \mathbb{H} = \mathbb{I}^\omega$ y que, según la demostración (más general que el enunciado) del teorema 1.32, $\mathcal{C}^\omega$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$. Con esto hemos probado que existe una aplicación continua y suprayectiva[11] $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{H}$.

En tercer lugar observamos que, por 1.15, todo espacio métrico compacto X es homeomorfo a un cerrado K del cubo de Hilbert $\mathbb{H}$. Sea $K' = \phi^{-1}[K] \subset \mathcal{C}$. Notemos que K' es cerrado en $\mathcal{C}$, pues $\mathcal{C} \setminus K' = \phi^{-1}[\mathbb{H} \setminus K]$ es abierto. Así tenemos una aplicación $K' \longrightarrow X$ continua y suprayectiva, y el teorema 1.22 nos da una aplicación $\mathcal{C} \longrightarrow X$ continua y suprayectiva. ■

Aunque el teorema anterior no se prestaba a ello, los restantes resultados que hemos obtenido para el espacio de Baire pueden adaptarse a resultados análogos

[11] Incidentalmente, así hemos demostrado que $\mathbb{H}$ es compacto sin hacer referencia al teorema de Tychonoff, que se apoya en el axioma de elección.

para el espacio de Cantor sustituyendo los esquemas de Suslin por *esquemas de Hausdorff,* que no son sino aplicaciones

$$A : 2^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X,$$

para un conjunto arbitrario X. Todas las definiciones que hemos dado para esquemas de Suslin (como la propiedad de los diámetros, etc.) se adaptan de forma obvia a esquemas de Hausdorff. En particular, cada esquema de Hausdorff con la propiedad de los diámetros en un espacio métrico X define una aplicación continua $\phi : Z \longrightarrow X$, para cierto $Z \subset \mathcal{C}$.

Teorema 1.35 (Brouwer) *Todo espacio métrico compacto cero-dimensional y perfecto es homeomorfo al espacio de Cantor.*

Demostración: Sea X un espacio en las condiciones indicadas. Recordemos que todo espacio métrico compacto es completo.

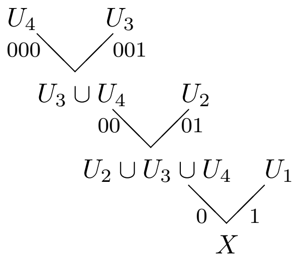
Si U es un abierto cerrado no vacío de X, no puede contener un único punto (porque sería aislado), luego podemos dividirlo en unión disjunta de dos abiertos cerrados no vacíos. Cada uno de ellos podemos cubrirlo por abiertos cerrados de diámetro $< \epsilon$ (para un ϵ prefijado) y, como ambos son compactos, podemos extraer un subcubrimiento finito. Ordenando los abiertos, restando a cada uno los precedentes y eliminando los vacíos, podemos exigir que sean no vacíos y disjuntos dos a dos, y el hecho de que los abiertos del cubrimiento original estuvieran contenidos en uno de dos abiertos disjuntos implica que el subcubrimiento al que hemos llegado ha de contener al menos dos abiertos. En resumen:

> *Todo abierto cerrado no vacío de X puede descomponerse en una unión finita de al menos dos abiertos cerrados disjuntos dos a dos de diámetro menor que ϵ.*

Si cada descomposición tuviera exactamente dos abiertos sería fácil construir a partir de aquí un esquema de Hausdorff sobre X. En el caso general hemos de hacer algunos arreglos. Partimos de $A(\varnothing) = X$, luego descomponemos X en abiertos cerrados $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ de diámetro < 1 (con $n \geq 2$) y definimos

$$\begin{array}{rlrl}
A(0) = & \displaystyle\bigcup_{i=2}^{n} U_i, & A(1) = & U_1, \\
A(00) = & \displaystyle\bigcup_{i=3}^{n} U_i, & A(01) = & U_2, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A(0\cdots 0) = & U_n, & A(0\cdots 01) = & U_{n-1},
\end{array}$$

es decir, en cada ramificación "desgajamos" un abierto de la unión hasta que todos quedan separados. La figura muestra la estructura del esquema para el caso de cuatro abiertos:



A continuación prolongamos este esquema descomponiendo cada uno de los abiertos U_i en abiertos cerrados de diámetro menor que $1/2$. Procediendo de este modo obtenemos un esquema de Hausdorff abierto y cerrado A con la propiedad de los diámetros tal que:

a) $A(\varnothing) = \varnothing$.

b) Para cada $s \in 2^{<\omega}$, $A(s) = A(s^\frown 0) \cup A(s^\frown 1)$, $A(s^\frown 0) \cap A(s^\frown 1) = \varnothing$.

Es inmediato que la aplicación continua asociada a este esquema es un homeomorfismo $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow X$. ■

Observemos que si X es cualquier espacio topológico finito discreto con al menos dos puntos, X^ω cumple las hipótesis del teorema anterior, luego es homeomorfo a $\mathcal{C}$. En particular, $2^\omega \cong 3^\omega \cong 4^\omega, \ldots$ Por eso los únicos espacios polacos que pueden obtenerse como productos de espacios discretos son $\mathcal{N}$ y $\mathcal{C}$.

Sólo con la condición de que el espacio sea perfecto conseguimos una inmersión:

Teorema 1.36 *Todo espacio polaco perfecto no vacío contiene un subespacio homeomorfo al espacio de Cantor.*

Demostración: Sea X un espacio polaco perfecto no vacío. Vamos a definir un esquema de Hausdorff A en X con la propiedad de los diámetros y que además cumpla lo siguiente:

a) Cada $A(s)$ es un cerrado de interior no vacío en X.

b) Para cada $s \in 2^{<\omega}$, se cumple que $A(s^\frown 0) \cap A(s^\frown 1) = \varnothing$.

c) Para cada $s \in 2^{<\omega}$ y cada $i \in 2$, se cumple que $A(s^\frown i) \subset A(s)$.

Estas condiciones aseguran que la aplicación asociada ϕ es un homeomorfismo de $\mathcal{C}$ es un subespacio (necesariamente cerrado) de X. En efecto, si $x \in \mathcal{C}$, tenemos una sucesión decreciente $\{A(x|_n)\}_{n\in\omega}$ de cerrados no vacíos en X. Si tomamos un punto p_n en cada uno de ellos, la condición de los diámetros asegura que es de Cauchy, luego converge a un punto que ha de estar en $\bigcap\limits_{n\in\omega} A(x|_n)$, luego está definido $\phi(x)$.

La propiedad b) asegura que ϕ es una aplicación inyectiva y, como $\mathcal{C}$ es compacto, una aplicación $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow X$ biyectiva y continua es un homeomorfismo en la imagen.

Para construir el esquema partimos de cualquier cerrado de interior no vacío, por ejemplo $A(\varnothing) = X$ y, supuesto definido $A(s)$, tomamos dos puntos distintos x, y en su interior (que existen, pues X no tiene puntos aislados) y tomamos como $A(s^\frown 0)$ y $A(s^\frown 1)$ dos bolas cerradas disjuntas de centros x e y contenidas en $A(s)$ con el diámetro suficientemente pequeño para garantizar la condición de los diámetros. ■

El teorema siguiente implica que tener un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$ es equivalente a tener un subespacio homeomorfo a $\mathcal{N}$:

Teorema 1.37 *La aplicación $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{C}$ dada por*

$$f(x) = 0^{x_0\frown}1^\frown 0^{x_1\frown}1^\frown 0^{x_2} {}^\frown 1 {}^\frown \cdots,$$

donde 0^x representa una sucesión de x ceros, es un homeomorfismo en su imagen, que es el conjunto de las sucesiones no finalmente constantes.

Demostración: Obviamente, f es inyectiva y su imagen $\mathcal{C}_0$ es la que dice el enunciado. Una base de $\mathcal{C}_0$ la forman los abiertos $B_s \cap \mathcal{C}_0$, donde $s \in 2^{<\omega}$ termina en 1, y es claro que la antiimagen de uno de estos abiertos es de la forma B_t, donde $t \in \omega^{<\omega}$ es la sucesión que cuenta la longitud de cada bloque de ceros consecutivos de s. Por lo tanto, f es continua. Similarmente, la imagen de cada abierto básico B_t es de la forma $B_s \cap \mathcal{C}_0$, donde s se define a partir de t de forma análoga a f. Concluimos que f es un homeomorfismo en su imagen. ■

1.6 El conjunto de Cantor

Existe una inmersión famosa de $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}$, que es la que obtenemos según el proceso de la demostración del teorema 1.36 eligiendo intervalos cerrados del modo siguiente:

Definición 1.38 Definimos $A(\varnothing) = [0, 1]$ y, supuesto definido $A(s) = [u, v]$, definimos

$$A(s^\frown 0) = [u, u + (v - u)/3)], \qquad A(s^\frown 1) = [v - (v - u)/3, v].$$

Así, lo que estamos haciendo es dividir cada intervalo en tres subintervalos iguales y quedarnos con los dos de los extremos. Evidentemente, con esta construcción particular se cumplen todas las condiciones del teorema 1.36, y la imagen del homeomorfismo construido de este modo es el llamado *conjunto ternario de Cantor,* que es, pues, un conjunto compacto perfecto $C \subset \mathbb{I}$ homeomorfo al espacio de Cantor. Explícitamente:

$$C = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \bigcap_{n \in \omega} A(x|_n) = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{s \in 2^n} A(s).$$

La segunda igualdad se debe a que, por la construcción de A, si se cumple $A(s) \cap A(t) \neq \varnothing$ necesariamente $s \subset t$ o $t \subset s$, luego un $u \in \mathbb{I}$ que esté en el miembro derecho pertenece a una sucesión de intervalos $A(s_n)$ con $\ell(s_n) = n$ y estos nodos han de ser compatibles, por lo que determinan un $x \in \mathcal{C}$ que justifica la pertenencia de u al miembro izquierdo.

Llamamos $C_n = \bigcup\limits_{s \in 2^n} A(s)$, de modo que C_n es un subconjunto cerrado de $\mathbb{I}$ (es unión de un número finito de cerrados disjuntos dos a dos), la sucesión $\{C_n\}_{n\in\omega}$ es decreciente y $C = \bigcap\limits_{n\in\omega} C_n$.

Los conjuntos C_n admiten una definición recurrente más simple:

Teorema 1.39 *Se cumplen las relaciones:*

$$C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right), \qquad C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right).$$

Demostración: Probamos primero las relaciones siguientes:

$$A(0^\frown s) = \frac{1}{3}A(s), \qquad A(1^\frown s) = \frac{2}{3} + A(0^\frown s) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}A(s).$$

Vamos a probar la primera, pues el razonamiento para la segunda es completamente análogo. Teniendo en cuenta que $A(0) = [0, 1/3]$, $A(1) = [2/3, 1]$, es inmediato comprobar que la igualdad se cumple cuando $\ell(s) = 0$. Si se cumple cuando $\ell(s) = n$, tenemos que $A(s) = [u, v]$ y $A(0^\frown s) = [u/3, v/3]$. Entonces

$$A(0^\frown s^\frown 0) = \left[\frac{u}{3}, \frac{u}{3} + \frac{v-u}{9}\right] = \frac{1}{3}\left[u, u + \frac{v-u}{3}\right] = \frac{1}{3}A(s^\frown 0),$$

$$A(0^\frown s^\frown 1) = \left[\frac{v}{3} - \frac{v-u}{9}, \frac{v}{3}\right] = \frac{1}{3}\left[v - \frac{v-u}{3}, v\right] = \frac{1}{3}A(s^\frown 1),$$

luego la igualdad se cumple para todas las sucesiones de longitud $n+1$.

Ahora:

$$C_{n+1} = \bigcup_{s\in 2^n} (A(0^\frown s) \cup A(1^\frown s)) = \bigcup_{s\in 2^n} \tfrac{1}{3}A(s) \cup \big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}A(s)\big) = \tfrac{1}{3}C_n \cup \big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_n\big).$$

Tomemos ahora $x \in C$. Entonces, para cada número natural n, tenemos que $x \in C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\big)$. En particular $x \in C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, luego si $x \in [0, \frac{1}{3}]$ necesariamente $x \in \frac{1}{3}C_n$ para todo n, mientras que si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ necesariamente $x \in \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n$ para todo n, luego

$$x \in \big(\bigcap_{n\in\omega} \tfrac{1}{3}C_n\big) \cup \bigcap_{n\in\omega} \big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_n\big) = \tfrac{1}{3}C \cup \big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C\big).$$

La inclusión contraria es más sencilla. Por ejemplo, si $x \in \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C$, entonces $x \in \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n \subset C_{n+1}$ para todo n, luego $x \in C$. ■

La relación dada por el teorema anterior se interpreta como que C es la unión de dos cerrados (luego también abiertos) disjuntos: $\frac{1}{3}C$ y $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C$, cada uno de los cuales es homeomorfo a C (pues el primero es una homotecia y el segundo una homotecia seguida de una traslación). Más explícitamente, C es la unión de dos copias a escala de sí mismo tres veces más pequeñas.

El teorema anterior nos permite probar un resultado que tendrá interés más adelante:

Teorema 1.40 *Se cumple que* $C + C = [0, 2]$.

Demostración: Aquí hay que entender que la suma de dos conjuntos A, $B \subset \mathbb{R}$ se define como $A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Probamos en primer lugar que $C_n + C_n = [0, 2]$ para todo $n \in \omega$. Para $C_0 = [0, 1]$ es inmediato. Si vale para C_n, entonces

$$C_{n+1} + C_{n+1} = (\tfrac{1}{3}C_n \cup \big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_n\big)) + (\tfrac{1}{3}C_n \cup \big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_n\big))$$
$$= (\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{1}{3}C_n) \cup (\tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_n) \cup (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_n + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_n)$$
$$= \tfrac{1}{3}[0, 2] \cup (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}[0, 2]) + \cup(\tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}[0, 2]) = [0, \tfrac{2}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}] \cup [\tfrac{4}{3}, 2] = [0, 2].$$

Es claro que $C + C \subset [0, 2]$. Para probar la inclusión opuesta tomamos $a \in [0, 2]$. Acabamos de probar que se puede expresar como $a = x_n + y_n$, con $x_n, y_n \in C_n$. Como $\mathbb{I}$ es un espacio métrico compacto, toda sucesión contiene una subsucesión convergente, luego podemos tomar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a un cierto $x \in \mathbb{I}$, con lo que la subsucesión $\{y_{n_k}\}$ converge necesariamente a $a - x$, luego tenemos que $a = x + y$. Sólo falta probar que $x, y \in C$.

Ahora bien, fijado un $m \in \omega$, tenemos que $n_k \geq m$ para todo k suficientemente grande, luego $x_{n_k} \in C_m$ y, como C_m es cerrado, resulta que $x \in C_m$, para todo m, luego $x \in C$, e igualmente se argumenta con y. ■

1.7 El teorema de Cantor-Bendixson

Demostramos ahora el teorema de Cantor-Bendixson, del que hemos hablado en la introducción, si bien no daremos la demostración original de Bendixson que hemos esbozado allí (que, no obstante, es válida para cualquier espacio polaco), sino otra más concisa.

Teorema 1.41 (Cantor-Bendixson) *Todo espacio polaco X se descompone de forma única como $X = P \cup N$, conde P es un cerrado perfecto o vacío y N es un abierto numerable. Además la unión es disjunta.*

Demostración: Diremos que un punto $x \in X$ es un *punto de condensación* si todos sus entornos abiertos son no numerables. En general, para cualquier espacio topológico X, representaremos por X^* al conjunto de sus puntos de condensación. Evidentemente, X^* es cerrado en X, pues si $x \in X \setminus X^*$, entonces existe un abierto numerable U tal que $x \in U$, y $U \subset X \setminus X^*$.

En nuestro caso, tomamos $P = X^*$ y $N = X \setminus P$. Así P es cerrado y N es abierto. Además, si $\{U_n\}_{n\in\omega}$ es una base numerable de X, es claro que N

es la unión de los U_n que son numerables, luego N es numerable. Falta probar que (salvo que sea vacío) P es perfecto, es decir, que no tiene puntos aislados. Si $x \in P$ fuera un punto aislado, existiría un abierto U tal que $U \cap P = \{x\}$, pero entonces $U \setminus \{x\} \subset N$, luego $U \setminus \{x\}$ sería numerable y U también, lo que contradice a que $x \in P$.

Supongamos ahora que $X = P' \cup N'$ es otra descomposición en las condiciones del enunciado. Veamos en primer lugar que $P' \subset P$. Esto se debe a que si $x \in P'$ y U es un entorno abierto en X, tenemos que $x \in U \cap P' \neq \varnothing$ y $U \cap P'$ es un espacio polaco (es un G_δ en X porque todo cerrado lo es) perfecto, pues un punto aislado de $U \cap P'$ es también un punto aislado de P'. Por el teorema 1.36 resulta que $U \cap P'$ contiene una copia del espacio de Cantor, luego es no numerable, luego U también lo es y $x \in P'$.

Por otra parte, si $x \in N'$, como N' es abierto numerable, resulta que $x \in N$, es decir, que $N' \subset N$. Esto implica que $P = P'$ y esto a su vez que $N = N'$. ■

Hay que tener presente que cualquiera de los dos conjuntos P o N puede ser vacío. Como consecuencia:

Teorema 1.42 *Todo espacio polaco es numerable o tiene cardinal* $2^{\aleph_0}$.

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta el teorema anterior, si un espacio polaco no tiene subconjuntos cerrados perfectos (no vacíos) es numerable, y en caso contrario tiene cardinal $2^{\aleph_0}$ por el teorema 1.36. Notemos que, en general, el cardinal de un espacio polaco no puede ser mayor que $2^{\aleph_0}$ por el teorema 1.14. (El cardinal del cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$ es $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.) ■

Capítulo II

Conjuntos de Borel

Si X es un espacio topológico, su σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ es la menor σ-álgebra en $\mathcal{P}X$ que contiene a los conjuntos abiertos, es decir, el menor subconjunto de $\mathcal{P}X$ que contiene a los abiertos y que es cerrado para uniones numerables, intersecciones numerables y complementos. Este concepto surge de forma natural en la teoría de la medida, es decir, al plantearse la forma de asignar razonablemente un "tamaño" a los subconjuntos de un espacio topológico. En este capítulo estudiaremos los subconjuntos de Borel de un espacio polaco.

2.1 La jerarquía de Borel

En esta primera sección mostramos que la σ-álgebra de Borel de cualquier espacio topológico metrizable se puede descomponer en una jerarquía de $\aleph_1$ niveles de conjuntos de complejidad creciente.

Definición 2.1 Si X es un espacio metrizable, definimos

$$\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \{A \mid A \text{ es abierto en } X\}, \qquad \mathbf{\Pi}^0_1(X) = \{A \mid A \text{ es cerrado en } X\}$$

y, para cada ordinal $\alpha > 1$, definimos recurrentemente

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \{\bigcup_{n\in\omega} A_n \mid \bigwedge n \in \omega\ A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta(X)\},$$

$$\mathbf{\Pi}^0_\alpha = \{X \setminus A \mid A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)\} = \{\bigcap_{n\in\omega} A_n \mid \bigwedge n \in \omega\ A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X)\}.$$

Finalmente, para cada $\alpha > 0$ definimos

$$\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X).$$

Cuando no haya confusión posible escribiremos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Delta}^0_\alpha$, sin indicar explícitamente el espacio X.

En particular tenemos que $\mathbf{\Delta}^0_1$ es la familia de los subconjuntos abiertos y cerrados de X, $\mathbf{\Sigma}^0_1$ es la familia de los abiertos, $\mathbf{\Pi}^0_1$ la de los cerrados, $\mathbf{\Sigma}^0_2$

es la familia de las uniones numerables de cerrados, es decir, los conjuntos que también son conocidos como F_σ, y $\mathbf{\Pi}^0_2$ es la familia de las intersecciones numerables de abiertos, es decir, los conjuntos G_δ.

Teorema 2.2 *Si X es un espacio metrizable, se dan las inclusiones siguientes:*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & & & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
\mathbf{\Delta}^0_1 & & & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & & & \mathbf{\Delta}^0_3 & & & & \mathbf{\Delta}^0_4 & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
 & & \mathbf{\Pi}^0_1 & & & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & & & \mathbf{\Pi}^0_3 & & & &
\end{array}$$

Es decir, si $0 < \alpha < \beta$, entonces $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha \subset \mathbf{\Delta}^0_\beta$.

Demostración: Empezamos observando que $\mathbf{\Pi}^0_2$ es la familia de las intersecciones numerables de abiertos, es decir, la familia de los conjuntos G_δ, por lo que la inclusión $\mathbf{\Pi}^0_1 \subset \mathbf{\Pi}^0_2$ es el teorema 1.10. De ésta se sigue inmediatamente que $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subset \mathbf{\Sigma}^0_2$.

Ahora es inmediato que si $1 \leq \alpha \leq \beta$ entonces $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subset \mathbf{\Sigma}^0_\beta$. En efecto, si $\beta = 2$ ya lo tenemos probado y, si $\beta > 2$, podemos suponer que $\alpha > 1$, pues si probamos que $\mathbf{\Sigma}^0_2 \subset \mathbf{\Sigma}^0_\beta$ tendremos también la inclusión para $\alpha = 1$. Así pues, si $1 < \alpha \leq \beta$ y $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, entonces A es unión numerable de elementos de

$$\bigcup_{0<\delta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\delta \subset \bigcup_{0<\delta<\beta} \mathbf{\Pi}^0_\delta,$$

luego $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\beta$.

A su vez, ahora es inmediato que si $0 < \alpha \leq \beta$ entonces $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \subset \mathbf{\Pi}^0_\beta$. Por otra parte, si $0 < \alpha < \beta$, de la propia definición se sigue que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subset \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1} \subset \mathbf{\Pi}^0_\beta$, así como que $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \subset \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1} \subset \mathbf{\Sigma}^0_\beta$, luego $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha \subset \mathbf{\Delta}^0_\beta$. ■

Aunque hemos definido las clases anteriores para ordinales cualesquiera, a continuación probamos que sólo tienen interés para ordinales menores que $\aleph_1$:

Teorema 2.3 *Si X es un espacio metrizable y $\alpha \geq \aleph_1$, entonces*

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \mathbf{\Delta}^0_\alpha = \mathbf{\Delta}^0_{\aleph_1} = \mathbf{\Sigma}^0_{\aleph_1} = \mathbf{\Pi}^0_{\aleph_1} = \bigcup_{0<\delta<\aleph_1} \mathbf{\Delta}^0_\delta$$

es la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$.

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{0<\delta<\aleph_1} \mathbf{\Delta}^0_\delta = \bigcup\limits_{0<\delta<\aleph_1} \mathbf{\Sigma}^0_\delta = \bigcup\limits_{0<\delta<\aleph_1} \mathbf{\Pi}^0_\delta$.

Notemos que si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de elementos de $\mathcal{B}$, entonces su unión está en $\mathcal{B}$. En efecto, en principio existe un $\delta_n < \aleph_1$ tal que $A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\delta_n}$ y, como $\aleph_1$ es regular, $\delta = \sup\{\delta_n \mid n \in \omega\} < \aleph_1$, luego

$$\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\delta+1} \subset \mathcal{B}.$$

También es evidente que $\mathcal{B}$ contiene a los complementarios de sus elementos, luego es una σ-álgebra de subconjuntos de X. Como contiene a los abiertos, $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}$.

Por otro lado, una simple inducción demuestra que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha \subset \mathcal{B}(X)$, pues esto es trivial para $\alpha = 0$ y $\mathcal{B}$ está cerrada para complementos y uniones numerables. Por lo tanto $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(X)$ y tenemos la igualdad.

Por definición, $\mathbf{\Sigma}^0_{\aleph_1}$ es la familia de uniones numerables de elementos de $\mathcal{B}$, pero, como $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra, resulta que $\mathbf{\Sigma}^0_{\aleph_1} = \mathcal{B}$, luego también $\mathbf{\Pi}^0_{\aleph_1} = \mathcal{B}$. A partir de aquí, una simple inducción sobre α demuestra que si $\alpha \geq \aleph_1$ se cumple que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \mathbf{\Pi}^0_\alpha = \mathcal{B}$. ■

Veamos algunas propiedades elementales:

Teorema 2.4 *Si X es un espacio metrizable y $0 < \alpha < \aleph_1$, entonces $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ es cerrado para uniones numerables, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ es cerrado para intersecciones numerables, $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ son ambos cerrados para uniones e intersecciones finitas y, por consiguiente, $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ es un álgebra de subconjuntos de X.*

DEMOSTRACIÓN: La primera parte del teorema es inmediata. Para la segunda, observamos que se cumple si $\alpha = 1$, pues toda intersección finita de abiertos es abierta y toda unión finita de cerrados es cerrada.

Supongamos que se cumple para $\beta < \alpha$ y sean $A, B \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. Entonces

$$A = \bigcup_{n\in\omega} A_n, \qquad B = \bigcup_{n\in\omega} B_n,$$

donde $A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha_n}$, $B_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\beta_n}$, con $\alpha_n, \beta_n < \alpha$. Entonces

$$A \cap B = \bigcup_{m,n\in\omega} (A_m \cap B_n) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha,$$

pues $A_m \cap B_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha_m \cup \beta_n}$.

El hecho de que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ esté cerrada para intersecciones finitas implica inmediatamente que $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ lo está para uniones finitas. La propiedad de las clases $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ también es inmediata. ■

Los dos teoremas siguientes se demuestran sin la menor dificultad por inducción sobre α. Omitimos la prueba.

Teorema 2.5 *Sean X e Y espacios topológicos metrizables y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si un conjunto cumple $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y)$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(Y), \mathbf{\Delta}^0_\alpha(Y)$), entonces $f^{-1}[A] \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X), \mathbf{\Delta}^0_\alpha(Y)$).*

Nota El teorema anterior se enuncia diciendo que las clases de Borel son cerradas para *sustituciones continuas.* En general, si $\mathbf{\Gamma}$ es una clase de conjuntos con la propiedad de que para toda función continua (de Borel, etc.) $f : X \longrightarrow Y$ y todo $A \in \mathbf{\Gamma}(Y)$ se cumple que $f^{-1}[A] \in \mathbf{\Gamma}(X)$, se dice que $\mathbf{\Gamma}$ es *cerrada para sustituciones continuas, de Borel,* etc.

Teorema 2.6 *Sea Y un espacio metrizable y X un subespacio. Entonces los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$) son los de la forma $A \cap X$, donde $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y)$ (resp. $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(Y)$).*

(En particular, $\mathcal{B}(X) = \{B \in \mathcal{B}(Y) \mid B \subset X\}$.)

Nota En general, no es cierto que todo $A \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ sea de la forma $A = B \cap X$, para cierto $B \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(Y)$. Basta pensar en el caso en que $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $Y = \mathbb{R}$. Se cumple que $\mathbf{\Delta}^0_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ es infinito, mientras que $\mathbf{\Delta}^0_1(\mathbb{R}) = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$. Si X e Y son espacios polacos, es fácil ver que el resultado es cierto para $\alpha \geq 3$, y no es trivial que también se cumple para $\alpha \geq 2$ (teorema 2.16). ■

Observemos que la jerarquía que hemos definido es trivial en los espacios numerables. En efecto, si X es numerable, hay dos posibilidades: o bien X es discreto, en cuyo caso $\mathbf{\Delta}_1 = \mathcal{P}X$ y todas las clases son iguales, o bien X no es discreto, con lo que no todo punto es abierto y tenemos inclusiones estrictas

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \\ & \subsetneq & & \subsetneq & \\ \mathbf{\Delta}^0_1 & & & & \mathbf{\Delta}^0_2 = \mathcal{P}X \\ & \subsetneq & & \subsetneq & \\ & & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \end{array}$$

pero la jerarquía termina en $\mathbf{\Delta}^0_2$, pues todo subconjunto de X es unión numerable de puntos (cerrados). En particular, si X es numerable tenemos que $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}X$. Vamos a probar que la situación es completamente distinta en el caso de los espacios polacos no numerables. Conviene introducir una notación general para tratar con las clases que hemos introducido:

Definición 2.7 Una *clase de conjuntos* en una clase $\mathcal{X}$ de espacios topológicos es una aplicación $\mathbf{\Gamma}$ que a cada espacio topológico $X \in \mathcal{X}$ le asigna un conjunto $\mathbf{\Gamma}(X) \subset \mathcal{P}X$. Llamaremos *clase dual* de $\mathbf{\Gamma}$ a la clase $\neg\mathbf{\Gamma}$ dada por

$$\neg\mathbf{\Gamma}(X) = \{A \subset X \mid X \setminus A \in \mathbf{\Gamma}(X)\}.$$

La *clase ambigua* de Γ es la clase $\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Gamma} \cap \neg\mathbf{\Gamma}$.

Así, por ejemplo, $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$, $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ o $\mathcal{B}$ son clases de conjuntos sobre los espacios topológicos metrizables. Las dos primeras son mutuamente duales, la tercera es la clase ambigua de cualquiera de las dos, y la cuarta es su propia clase dual y su propia clase ambigua.

Diremos que $U \subset Y \times X$ es Y-*universal* para $\mathbf{\Gamma}(X)$ si $U \in \mathbf{\Gamma}(Y \times X)$ y, llamando $U_y = \{x \in X \mid (y, x) \in U\}$, se cumple que $\mathbf{\Gamma}(X) = \{U_y \mid y \in Y\}$.

Teorema 2.8 *Si X es un espacio metrizable separable, entonces, para cada ordinal $1 \leq \alpha < \aleph_1$ existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ y un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$.*

Demostración: Lo probamos por inducción sobre α. Sea $\{B_n\}_{\in\omega}$ una base numerable de X y definimos

$$U = \{(y, x) \in \mathcal{C} \times X \mid \bigvee n \in \omega (y(n) = 0 \land x \in B_n)\}.$$

Notemos que $U \in \mathbf{\Sigma}^0_1(\mathcal{C} \times X)$ (es decir, es abierto), pues si $(y, x) \in U$ y $n \in \omega$ cumple la definición, entonces $(y, x) \in B_{y|_{n+1}} \times B_n \subset U$. Además, para cada $y \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$U_y = \bigcup \{B_n \mid y(n) = 0\},$$

con lo que es evidente que $\{U_y \mid y \in \mathcal{C}\} = \mathbf{\Sigma}^0_1(X)$, es decir, que U es universal para $\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$.

En general, si U es universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$, es fácil ver que $(\mathcal{C} \times X) \setminus U$ es universal para $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$.

Supongamos construidos conjuntos U_δ universales para $\mathbf{\Pi}^0_\delta(X)$, para todo $\delta < \alpha < \aleph_1$. Podemos tomar ordinales $\delta_n < \alpha$ tales que $\delta_n \leq \delta_{n+1}$ y $\alpha = \sup\{\delta_n + 1 \mid n \in \omega\}$. Fijamos un homeomorfismo $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}^\omega$ que a cada $y \in \mathcal{C}$ le hace corresponder una sucesión $\{y_n\}_{n\in\omega}$. Definimos

$$U = \{(y, x) \in \mathcal{C} \times X \mid \bigvee n \in \omega \ (y_n, x) \in U_{\delta_n}\}.$$

Consideramos la proyección n-sima $p_n : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ que cumple $p_n(y) = y_n$ y la identidad I en X, de modo que, por 2.5.

$$U = \bigcup_{n\in\omega} (p_n \times I)^{-1}[U_{\delta_n}] \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C} \times X).$$

Para cada $y \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$U_y = \bigcup_{n\in\omega} (U_{\delta_n})_{y_n},$$

y, como cada conjunto $\mathbf{\Pi}^0_\delta$ con $\delta < \alpha$ es de la forma $(U_{\delta_n})_{y_n}$ para un n suficientemente grande, es claro que U_y recorre todos los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$, luego U es universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$. ■

Ahora podemos probar que la jerarquía de Borel no es trivial:

Teorema 2.9 *Si X es un espacio polaco no numerable, para cada $1 \leq \alpha < \aleph_1$ se cumple que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \neq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ y, por consiguiente, $\mathbf{\Delta}^0_\alpha \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$, e igualmente con $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$.*

Demostración: Por los teoremas 1.36 y 1.41, tenemos que X contiene un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$. Si $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$, entonces, por 2.6, tenemos que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C}) = \mathbf{\Pi}^0_\alpha(\mathcal{C})$. Vamos a ver que esto es imposible. Para ello tomamos un conjunto U $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C})$. Definimos $A = \{y \in \mathcal{C} \mid (y, y) \notin U\}$, que es la antiimagen de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \setminus U$ por la aplicación diagonal $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, luego $A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha(\mathcal{C}) = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C})$, pero entonces debería existir un $y \in \mathcal{C}$ tal que $A = U_y$, pero esto es imposible.

Si fuera $\mathbf{\Delta}^0_\alpha = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, tendríamos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subset \mathbf{\Pi}^0_\alpha$ y, recíprocamente, si $A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$, entonces $X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subset \mathbf{\Pi}^0_\alpha$, luego $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y tendríamos $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \mathbf{\Pi}^0_\alpha$.

Similarmente, si $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$, entonces $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y la inclusión opuesta se razona igual que antes. ■

Nota Observemos que si $\lambda < \aleph_1$ es un ordinal límite, se cumple

$$\bigcup_{\delta<\lambda} \mathbf{\Sigma}^0_\delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \mathbf{\Pi}^0_\delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \mathbf{\Delta}^0_\delta,$$

y ahora podemos probar que esta unión está estrictamente contenida en $\mathbf{\Delta}^0_\lambda$. En efecto, sea X un espacio polaco y sea $\{X_n\}_{n\in\omega}$ una familia de abiertos en X disjuntos dos a dos. Sea $\{\delta_n\}_{n<\omega}$ una sucesión cofinal en λ y sea $A_n \subset X_n$ tal que $A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\delta_n+1} \setminus \mathbf{\Sigma}^0_{\delta_n}$. Entonces $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \in \mathbf{\Delta}^0_\lambda \setminus \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \mathbf{\Delta}^0_\delta$. ■

Teorema 2.10 *Si $\mathbf{\Gamma}$ es una clase de conjuntos cerrada para sustituciones continuas y que sea autodual, es decir, que coincida con su clase dual, entonces, para todo espacio X, no existe un conjunto X-universal para $\mathbf{\Gamma}(X)$.*

Demostración: Si U fuera un conjunto U-universal para $\mathbf{\Gamma}(X)$ definimos $A = \{x \in X \mid (x,x) \notin U\}$, que está en $\mathbf{\Gamma}(X)$ porque $\mathbf{\Gamma}$ es cerrada para sustituciones continuas y $(X \times X) \setminus U \in \mathbf{\Gamma}(X \times X)$ porque $\mathbf{\Gamma}$ es autodual. Pero entonces debería existir un $x \in X$ tal que $U_x = A$, lo cual es absurdo. ■

Terminamos esta sección contando los conjuntos de Borel (con la ayuda del axioma de elección):

Teorema 2.11 (AE) *Si X es un espacio polaco infinito, entonces tiene exactamente $2^{\aleph_0}$ subconjuntos de Borel.*

Demostración: Si X es numerable entonces $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}X$ y el resultado es trivial. Si X es no numerable, entonces tiene exactamente $2^{\aleph_0}$ abiertos, pues, por una parte, fijada una base numerable $\mathcal{B}$, a cada abierto le podemos asignar el conjunto de abiertos básicos que contiene, y esto es una aplicación inyectiva de $\mathbf{\Sigma}^0_1(X) \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{B}$, lo que nos da una desigualdad.

Por otra parte, el número de abiertos es igual al número de cerrados y éste es mayor o igual que el número de puntos, que es $2^{\aleph_0}$.

A partir de aquí, un simple razonamiento inductivo muestra que todas las clases de la jerarquía de Borel tienen exactamente $2^{\aleph_0}$ elementos, luego concluimos que $|\mathcal{B}(X)| = \aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. ■

2.2 Propiedades estructurales

Vamos a demostrar algunas propiedades de las clases de la jerarquía de Borel. Para ello introducimos algunas definiciones.

Definición 2.12 Sea $\mathbf{\Gamma}$ una clase de conjuntos.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de separación* si cuando $A, B \in \mathbf{\Gamma}(X)$, $A \cap B = \varnothing$, existe un $C \in \mathbf{\Delta}(X)$ tal que $A \subset C$ y $B \cap C = \varnothing$.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de separación generalizada* si para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos en $\mathbf{\Gamma}(X)$ tal que $\bigcap\limits_{n\in\omega} A_n = \varnothing$, existe una sucesión $\{C_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos de $\mathbf{\Delta}(X)$ tal que $A_n \subset C_n$ y $\bigcap\limits_{n\in\omega} C_n = \varnothing$.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de reducción* si cuando $A, B \in \mathbf{\Gamma}(X)$ existen conjuntos $A^*, B^* \in \mathbf{\Gamma}(X)$ tales que $A^* \subset A$, $B^* \subset B$, $A^* \cup B^* = A \cup B$ y $A^* \cap B^* = \varnothing$.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de reducción generalizada* si cuando $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathbf{\Gamma}(X)$ existe una sucesión $\{A_n^*\}_{n\in\omega}$ de conjuntos en $\mathbf{\Gamma}(X)$ disjuntos dos a dos tales que $A_n^* \subset A_n$ y $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n^*$.

- $\mathbf{\Gamma}$ tiene la *propiedad de uniformización numérica* si para todo $R \in \mathbf{\Gamma}(X\times\omega)$ existe $R^* \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$ tal que $R^* \subset R$ y $\bigwedge x \in p_X[R] \overset{1}{\bigvee} n \in \omega \ (x, n) \in R^*$.

Observemos que la propiedad de separación se deduce de la propiedad de separación generalizada sin más que completar una sucesión A_1, A_2 de dos conjuntos disjuntos con $A_n = X$ para $n > 2$, mientras que la propiedad de reducción se deduce de la propiedad de reducción generalizada sin más que completar una sucesión A_1, A_2 con $A_n = \varnothing$ para $n > 2$.

Para estudiar estas propiedades sobre las clases de la jerarquía de Borel conviene observar que éstas cumplen la propiedad siguiente:

Diremos que una clase $\mathbf{\Gamma}$ es *razonable* si una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ tiene todos sus elementos en $\mathbf{\Gamma}(X)$ si y sólo si $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \times \{n\} \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$.

Teorema 2.13 *Sea $\mathbf{\Gamma}$ una clase de subconjuntos definida sobre espacios topológicos metrizables de modo que cada $\mathbf{\Gamma}(X)$ contenga a los abiertos cerrados de X, sea cerrada para sustituciones continuas y uniones e intersecciones finitas y para uniones o intersecciones numerables. Entonces $\mathbf{\Gamma}$ es razonable.*

Demostración: Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos de un espacio X y sea $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \times \{n\}$.

Si cada A_n está en $\mathbf{\Gamma}(X)$, entonces $B_n = A_n \times \omega \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$ por ser una antiimagen continua de A_n. Igualmente, $C_n = X \times \{n\} \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$ porque $\{n\}$ es abierto cerrado en ω y C_n es una antiimagen continua, luego $A_n \times \{n\} = B_n \cap C_n \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. Si $\mathbf{\Gamma}$ es cerrado para uniones numerables, entonces concluimos que $A \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. En caso contrario usamos que

$$(X \times \omega) \setminus A = \bigcup_{n\in\omega} (X \setminus A_n) \times \{n\}.$$

Como en este caso $\mathbf{\Gamma}$ es cerrado para intersecciones numerables, resulta que $\neg\mathbf{\Gamma}$ es cerrado para sustituciones continuas, para uniones numerables y para intersecciones finitas, luego el mismo razonamiento anterior nos permite concluir que $(X \times \omega) \setminus A \in \neg\mathbf{\Gamma}$, luego $A \in \mathbf{\Gamma}$ igualmente.

Recíprocamente, si $A \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$, usamos que la inclusión $i_n : X \longrightarrow X \times \omega$ dada por $i_n(x) = (x, n)$ es continua, y $A_n = i_n^{-1}[A]$. ■

En particular, todas las clases $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ son razonables y esto a su vez implica que $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ también lo es.

Teorema 2.14 *Sea $\mathbf{\Gamma}$ una clase de conjuntos definida sobre los espacios polacos.*

a) Si $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de reducción, entonces $\neg\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de separación.

b) Si $\mathbf{\Gamma}$ es cerrada para uniones numerables y tiene la propiedad de reducción generalizada, entonces $\neg\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de separación generalizada.

c) Si $\mathbf{\Gamma}$ es razonable, entonces $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de reducción generalizada si y sólo si tiene la propiedad de uniformización numérica.

d) Si $\mathbf{\Gamma}$ es cerrada para sustituciones continuas y existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{C})$, entonces $\mathbf{\Gamma}$ no puede tener a la vez la propiedad de reducción y separación.

Demostración: a) Dados $A, B \in \neg\mathbf{\Gamma}$ disjuntos, existen $A^* \subset X \setminus A$, $B^* \subset X \setminus B$ tales que A^*, $B^* \in \mathbf{\Gamma}$, $A^* \cup B^* = X$ y $A^* \cap B^* = \varnothing$. Así, $B^* = X \setminus A^* \in \mathbf{\Delta}$ separa A y B.

b) Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $\neg\mathbf{\Gamma}$ con intersección vacía. Entonces existen conjuntos $B_n^* \subset X \setminus A_n$ en $\mathbf{\Gamma}$ disjuntos dos a dos tales que $\bigcup\limits_{n\in\omega} B_n^* = X$. Es claro que los conjuntos $C_n = X \setminus B_n^* \in \mathbf{\Gamma}$ separan la sucesión dada.

c) Supongamos que $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de uniformización numérica, sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $\mathbf{\Gamma}(X)$ y sea $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \times \{n\} \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. Sea $A^* \subset A$ una uniformización en $\mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. Sea

$$A_n^* = \{x \in X \mid (x, n) \in A^*\},$$

de modo que $A^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n^* \times \{n\}$. Como $\mathbf{\Gamma}$ es razonable, $A_n^* \in \mathbf{\Gamma}(X)$ y estos conjuntos reducen la sucesión dada.

Supongamos ahora que $\mathbf{\Gamma}$ cumple la propiedad de reducción generalizada y sea $A \in \mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$. Sea $A_n = \{x \in X \mid (x, n) \in A\}$, de modo que se cumple $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \times \{x\}$. Como $\mathbf{\Gamma}$ es razonable, $A_n \in \mathbf{\Gamma}(X)$.

Por la propiedad de reducción generalizada, existen $A_n^* \subset A_n$ en $\mathbf{\Gamma}(X)$ disjuntos dos a dos y tales que $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$. Entonces $A^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n^* \times \{n\}$ está en $\mathbf{\Gamma}(X \times \omega)$ y uniformiza a A.

d) Sea $U \subset \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Gamma}$. Fijemos un homeomorfismo $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}^2$, que a cada $x \in \mathcal{C}$ le haga corresponder un par (x_0, x_1). Definimos

$$U^0 = \{(x, y) \in \mathcal{C}^2 \mid (x_0, y) \in U\}, \quad U^1 = \{(x, y) \in \mathcal{C}^2 \mid (x_1, y) \in U\}.$$

Así $U^0, U^1 \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{C}\times\mathcal{C})$ (pues son antiimágenes continuas de U) y forman un *par universal,* es decir, dados $A, B \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{C})$, existe un $x \in \mathcal{C}$ tal que $U^0_x = A$ y $U^1_x = B$.

Si $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de reducción, sean $U^{0*} \subset U^0$, $U^{1*} \subset U^1$ reducciones del par U^0, U^1. Si además $\mathbf{\Gamma}$ tiene la propiedad de separación, podemos separar las reducciones por un $V \in \mathbf{\Delta}$. Veamos ahora que V es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Delta}(\mathcal{C})$, con lo que tendremos una contradicción con el teorema 2.10.

En efecto, dado un $A \in \mathbf{\Delta}(\mathcal{C})$, existe un $x \in \mathcal{C}$ tal que $U^0_x = A$, $U^1_x = \mathcal{C}\setminus A$. Veamos que $V_x = A$. Para ello observamos que

$$U^{0*}_x \subset U^0_x = A, \qquad U^{1*}_x \subset U^1_x = \mathcal{C}\setminus A, \qquad U^{0*}_x \cup U^{1^*}_x = U^0_x \cup U^1_x = \mathcal{C},$$

luego también $U^{0*}_x = A$, $U^{1*}_x = \mathcal{C}\setminus A$. Por otra parte, $U^{0*}_x \subset V_x$, $U^{1^*}_x \cap V_x = \varnothing$, luego $V_x = A$. Además, todo $V_x \in \mathbf{\Delta}(\mathcal{C})$ porque $\mathbf{\Gamma}$ es cerrada para sustituciones continuas. ■

Teorema 2.15 *Sobre la clase de los espacios metrizables, para todo $\alpha > 1$, la clase $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ tiene la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción generalizada, pero no la propiedad de separación; la clase $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ tiene la propiedad de separación generalizada, pero no la propiedad de reducción. En espacios cero-dimensionales esto es cierto también para $\alpha = 1$.*

Demostración: Por el teorema anterior, basta probar que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ tiene la propiedad de uniformización numérica. Sea, pues, $R \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X\times\omega)$ con $\alpha > 1$. Entonces $R = \bigcup\limits_{n\in\omega} R_n$, donde $R_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\delta_n}(X\times\omega)$, para cierto $\delta_n < \alpha$. Sea $\langle\ ,\ \rangle : \omega\times\omega \longrightarrow \omega$ la biyección canónica dada por 1.23, representaremos su inversa por $k \mapsto (k_0, k_1)$. Definimos

$$Q = \{(x,k) \in X\times\omega \mid (x,k_1) \in R_{k_0}\}, \qquad Q^* = \{(x,k) \in Q \mid \bigwedge l < k\ (x,l) \notin Q\}.$$

Finalmente, sea $R^* = \{(x,n) \in X\times\omega \mid \bigvee i \in \omega\ (x, \langle i,n\rangle) \in Q^*)\}$. Es fácil ver que R^* uniformiza a R. Sólo hemos de probar que $R^* \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X\times\omega)$. Para ello observamos en primer lugar que

$$R^* = \bigcup_{i\in\omega} \{(x,n) \in X\times\omega \mid (x, \langle i,n\rangle) \in Q^*)\},$$

luego basta probar que cada conjunto de la unión está en $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X\times\omega)$, pero cada uno de ellos es una antiimagen continua de Q^*, luego basta comprobar que $Q^* \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X\times\omega)$. A su vez,

$$Q^* = \bigcup_{k\in\omega} \{x \in X \mid (x,k) \in Q^*\} \times \{k\}$$

y, como $\mathbf{\Sigma}^1_\alpha$ es razonable, basta probar que cada $Q^{*k} = \{x \in X \mid (x,k) \in Q^*\}$ está en $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$. A su vez,

$$Q^{*k} = Q^k \cap \bigcap_{l<k} (X \setminus Q^l),$$

donde $Q^k = \{x \in X \mid (x,k) \in Q\}$, y basta probar que $Q^k, X \setminus Q^k \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$. Ahora bien, Q^k es una antiimagen continua de R_{k_0}, luego

$$Q^k \in \mathbf{\Pi}^0_{\delta_{k_0}}(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X), \qquad X \setminus Q^k \in \mathbf{\Sigma}^0_{\delta_{k_0}}(X) \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X).$$

Si X es cero-dimensional y $\alpha = 1$, entonces $X \times \omega$ es cero-dimensional, podemos descomponer R en unión numerable de abiertos cerrados R_n y toda la demostración vale igualmente. ■

Veamos algunas aplicaciones:

Teorema 2.16 *Sean $X \subset Y$ espacios metrizables. Si $1 < \alpha < \aleph_1$, los conjuntos de $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ son los de la forma $A \cap X$, donde $A \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(Y)$. Si Y es cero-dimensional, también es cierto para $\alpha = 1$.*

Demostración: Sea $B \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$. Entonces existen conjuntos $S \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y)$ y $T \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha(Y)$ tales que $B = S \cap X = T \cap X$. Como S, $Y \setminus T \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y)$, podemos reducirlos a $S^* \subset S$, $T^* \subset Y \setminus T$ de modo que S^* y T^* son disjuntos y $X \subset S \cup (Y \setminus T) = S^* \cup T^*$. Se cumple que

$$B \subset S^* \cap X \subset (Y \setminus T^*) \cap X \subset T \cap X = B,$$

luego $B = S^* \cap X$. ■

Definición 2.17 Dada una familia $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos de un conjunto X, definimos

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{m\geq n} A_m, \qquad \operatorname{lím\,sup}_n = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{m\geq n} A_m.$$

Así, el límite inferior contiene a los elementos que pertenecen a casi todos los A_n y el límite superior a los elementos que pertenecen a infinitos A_n. Claramente

$$\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n.$$

Si se da la igualdad, definimos $\lim_n A_n = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Notemos que esto equivale a que $\chi_A = \lim_n \chi_{A_n}$.

Teorema 2.18 *Si X es un espacio metrizable y $A \subset X$, entonces para todo ordinal $1 < \alpha < \aleph_1$, se cumple que $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$ si y sólo si $A = \lim_n A_n$ para cierta sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$. Si X es cero-dimensional, también se cumple para $\alpha = 1$. Si α es un ordinal límite, la sucesión puede tomarse en $\bigcup_{\delta<\alpha} \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$.*

Demostración: Si $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$, entonces $A = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, $X \setminus A = \bigcup_{n\in\omega} G_n$, donde F_n, $G_n \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. Podemos suponer que $F_n \subset F_{n+1}$, $G_n \subset G_{n+1}$. Por la propiedad de separación, existe $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha$ tal que $F_n \subset A_n$ y $G_n \cap A_n = \varnothing$. Es fácil ver que

$$A \subset \liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n \subset A.$$

Recíprocamente, si $A = \lim\limits_n A_n$ con $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha$, entonces $A_n \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$, luego

$$\bigcup_{m\geq n} A_m \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \to \bigcap_{m\geq n} (X \setminus A_n) \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha \to \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{m\geq n} (X \setminus A_n) \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$$

$$\to \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{m\geq n} A_n = A \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$$

e igualmente se prueba que $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$, luego $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$.

Si α es un ordinal límite, sólo hemos de refinar la primera parte de la prueba. Expresamos ahora

$$A = \bigcup_{n\in\omega} B_n = \bigcap_{m\in\omega} C_n, \qquad B_n \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha,\ C_m \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha.$$

Podemos suponer que $B_n \subset B_{n+1}$ y $C_{m+1} \subset C_m$. A su vez,

$$B_n = \bigcap_{k\in\omega} B_{n,k}, \qquad C_m = \bigcup_{k\in\omega} C_{m,k}, \qquad B_{n,k},\ C_{m,k} \in \bigcup_{\delta<\alpha} \mathbf{\Delta}^0_\delta.$$

Podemos suponer que $B_{n,k+1} \subset B_{n,k}$, $C_{m,k} \subset C_{m,k+1}$. Definimos

$$A_k = \bigcup_{n=0}^{k} (B_{n,k} \cap \bigcap_{m=0}^{n} C_{m,k}) \in \bigcup_{\delta<\alpha} \mathbf{\Delta}^0_\delta.$$

Vamos a probar que $A = \lim\limits_k A_k$. Para ello probamos las inclusiones

$$A \subset \liminf_k A_k \subset \limsup_k A_k \subset A.$$

Si $x \in A$, entonces $x \in B_{n_0}$, luego $x \in B_{n_0,k}$ para todo $k \in \omega$. Por otra parte, $x \in C_m$, luego existe un k_0 tal que $x \in C_{m,k}$ para todo $k \geq k_0$. Este k_0 depende de m, pero podemos tomar el mismo para todo $m \leq n_0$ y exigir además que $k_0 \geq n_0$. Así, si $k \geq k_0$, tenemos que $x \in B_{n_0,k} \cap \bigcap\limits_{m=0}^{n_0} C_{m,k}$, luego $x \in \liminf\limits_k A_k$.

Por otra parte, si $x \notin A$, entonces $x \notin C_{m_0}$, luego $x \notin C_{m_0,k}$ para todo $k \in \omega$. Además $x \notin B_n$, luego $x \notin B_{n,k}$ para todo $k \geq k_0$, donde k_0 depende de n, pero podemos tomar el mismo para todo $n \leq m_0$ y exigir que $k_0 \geq m_0$. Así, si $k \geq k_0$ tenemos que, para todo $n \leq k$, se cumple que $x \notin B_{n,k} \cap \bigcap\limits_{m=0}^{n} C_{m,k}$, ya que, o bien $n \leq m_0$, en cuyo caso $x \notin B_{n,k}$, o bien $n \geq m_0$, en cuyo caso $x \notin C_{m_0,k}$. Por lo tanto, $x \notin A_k$ y así $x \notin \limsup\limits_k A_k$. ■

2.3 La jerarquía de Baire

En esta sección presentamos el análisis de Lebesgue de las funciones de Baire, o analíticamente representables (véase la introducción). Recordemos que Baire definió recurrentemente las que hoy se conocen como funciones de Baire de clase α como los límites puntuales de sucesiones de funciones de Baire de clase $< \alpha$, tomando como funciones de clase 0 las funciones continuas, pero, aunque esta definición resulta adecuada si hablamos de funciones con valores en $\mathbb{R}$, para espacios más generales requiere una corrección en el nivel $\alpha = 1$:

Definición 2.19 Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios metrizables es de la *clase de Baire* 1 si para todo abierto U en Y se cumple que $f^{-1}[U]$ es un F_σ en X. Llamaremos $B_1(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones de Baire de clase 1 de X en Y.

De este modo:

Teorema 2.20 *Sea $\{f_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de funciones continuas $f_n : X \longrightarrow Y$ entre espacios metrizables separables que converja puntualmente a una función $f = \lim\limits_n f_n$. Entonces $f \in B_1(X, Y)$.*

Demostración: Como la clase $\boldsymbol{\Sigma}^1_2(X)$ de los subconjuntos F_σ de X es cerrada para uniones numerables e intersecciones finitas, basta probar que las antiimágenes de los intervalos $]-\infty, a[$ y $]a, +\infty[$ son F_σ en X. Ahora bien, los conjuntos

$$f^{-1}[]-\infty, a[] = \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{m\geq n} \{x \in X \mid f_m(x) \leq a - \tfrac{1}{n}\},$$

$$f^{-1}[]a, +\infty[] = \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{m\geq n} \{x \in X \mid f_m(x) \geq a + \tfrac{1}{n}\},$$

son claramente F_σ. ■

El recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, $Y = \{0, 1\}$ y $f = \chi_{[0,1]}$, es fácil ver que $f \in B_1(X, Y)$, pero no es límite puntual de funciones continuas. No obstante:

Teorema 2.21 (Lebesgue-Hausdorff-Banach) *Si X es un espacio metrizable separable y $f \in B_1(X, \mathbb{R})$, entonces f es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas.*

Demostración: Fijemos un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \longrightarrow]0, 1[$. Es evidente que $f \circ h \in B_1(X, \mathbb{R})$. Veamos que basta probar que $f \circ h = \lim\limits_n g_n$, donde cada $g_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

No pedimos que la imagen de g_n esté contenida en $]0, 1[$, pero basta tomar

$$g'_n = (g_n \vee \frac{1}{n}) \wedge (1 - \frac{1}{n}),$$

que es también una función continua con imagen en $]0, 1[$ y $\lim\limits_n g'_n = f \circ h$. Entonces, $f = \lim\limits_n (g'_n \circ h^{-1})$ y las funciones $g'_n \circ h^{-1}$ son continuas.

Así pues, podemos suponer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0,1[$. Para cada $n \geq 2$ y para $i = 0, \ldots, n-2$, definimos $A_i^n = f^{-1}\left[\left]\frac{i}{n}, \frac{i+2}{n}\right[\right] \in \mathbf{\Sigma}_2^0(X)$, de modo que

$$\bigcup_{i=0}^{n-2} A_i^n = X.$$

Como $\mathbf{\Sigma}_2^1(X)$ tiene la propiedad de reducción generalizada, existen $B_i^n \subset A_i^n$ disjuntos dos a dos en $\mathbf{\Delta}_2^0(X)$ cuya unión es X. Es claro entonces que

$$g_n = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{i}{n}\, \chi_{B_i^n} \in B_1(X, \mathbb{R}),$$

y $f = \lim_n g_n$, donde el límite es uniforme. En efecto, dado $x \in X$, existe un único i tal que $x \in B_i^n$, en cuyo caso $i/n < f(x) < (i+2)/n$, mientras que $g_n(x) = i/n$, luego $|f(x) - g_n(x)| < 2/n$, para todo $x \in X$. La demostración se termina aplicando los dos teoremas siguientes. ■

Teorema 2.22 *Sea X un espacio metrizable separable y $g_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función f. Si cada g_n es límite puntual de funciones continuas, lo mismo le sucede a f.*

DEMOSTRACIÓN: Tomando una subsucesión podemos exigir que

$$\|f - g_n\|_\infty < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Así, llamando $h_n = g_{n+1} - g_n$, tenemos que $\|h_n\|_\infty < 2^{-n}$ y $f = g_0 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n$, donde la serie converge uniformemente, ya que sus sumas parciales son las funciones g_n. Basta probar que la serie es límite puntual de funciones continuas, y sabemos que cada h_n lo es. Sea $h_n = \lim_n u_i^n$, donde cada u_i^n es continua. Cambiando u_i^n por

$$-\frac{1}{2^n} \vee (\frac{1}{2^n} \wedge u_i^n)$$

se sigue cumpliendo que la sucesión converge a h_n y además $\|u_i^n\|_\infty \leq 2^{-n}$, con lo que podemos definir

$$r_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_i^n,$$

que es una función continua por el teorema de mayoración de Weierstrass. Basta probar que $f = \lim_i r_i$. Para ello fijamos un $x \in X$ y un $\epsilon > 0$. Existe un $n_0 \in \omega$ tal que

$$\sum_{n>n_0} 2^{-n} < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sum_{n>n_0} h_n(x) < \frac{\epsilon}{3}.$$

La primera desigualdad implica que, para todo $i \in \omega$,

$$\left|\sum_{n>n_0} u_i^n(x)\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Así,

$$\left|r_i(x) - \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\right| < \frac{2\epsilon}{3} + \sum_{n=0}^{n_0} |u_i^n(x) - h_n(x)|$$

y, tomando i suficientemente grande, el último término se puede hacer también menor que $\epsilon/3$. ■

Teorema 2.23 *Sea X un espacio metrizable y $A \in \mathbf{\Delta}_2^0(X)$. Entonces χ_A puede expresarse como límite puntual de una sucesión de funciones continuas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$, $X \setminus A = \bigcup\limits_{n\in\omega} H_n$, donde F_n y H_n son cerrados. Podemos suponer que $F_n \subset F_{n+1}$ y $H_n \subset H_{n+1}$.

Como $F_n \cap H_n = \varnothing$, el lema de Urysohn[1] nos da una función $h_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h_n|_{F_n} = 1$ y $h_n|_{H_n} = 0$. Claramente $\chi_A = \lim\limits_n h_n$. ■

Ejercicio: Demostrar que 2.21 es válido también para $B_1(X, \mathbb{R}^n)$ y $B_1(X, \mathbb{C}^n)$.

Seguidamente presentamos la jerarquía completa de las funciones de Baire:

Definición 2.24 Sean X e Y espacios topológicos metrizables. Para cada ordinal $1 < \alpha < \aleph_1$, definimos $B_\alpha(X,Y)$ como el conjunto de funciones $f : X \longrightarrow Y$ que se expresan como límite puntual de una sucesión de funciones pertenecientes a $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} B_\delta(X,Y)$.

Las funciones de $B_\alpha(X,Y)$ se llaman *funciones de Baire de clase α.* Las *funciones de Baire* son las funciones de

$$B(X,Y) = \bigcup_{1\leq\alpha<\aleph_1} B_\alpha(X,Y).$$

Claramente, si $1 \leq \alpha < \aleph_1$, se da la inclusión $B_\alpha(X,Y) \subset B_\beta(X,Y)$. Llamaremos $B_0(X,Y)$ al conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y, a las que llamaremos también *funciones de Baire de clase* 0. El teorema 2.20 nos da que

$$B_0(X,Y) \subset B_1(X,Y) \subset \cdots,$$

y, más aún que todo límite puntual de funciones de $B_0(X,Y)$ está en $B_1(X,Y)$, si bien —como hemos visto— el recíproco no es cierto en general. Cuando dicho recíproco es cierto (en particular, si $Y = \mathbb{R}^n$), la clase $B(X,Y)$ de las funciones de Baire resulta ser la menor clase de funciones que contiene a las funciones continuas y que es cerrada para límites puntuales, y entonces reciben también el nombre de *funciones analíticamente representables.*

[1]El lema de Urysohn es trivial para el caso de espacios métricos: afirma que si A y B son cerrados disjuntos, existe una función (real) continua que vale 1 en A y 0 en B. Basta tomar

$$f(x) = \frac{d(x,B)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Ejercicio: Demostrar que cada conjunto $B_\alpha(X,\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^X$, y un subanillo y un retículo (es decir, que si $f, g \in B_\alpha(X,\mathbb{R})$ también $f \wedge g$, $f \vee g \in B_\alpha(X,\mathbb{R})$).

A continuación introducimos una serie de definiciones convenientes para presentar el teorema de Lebesgue:

Definición 2.25 Diremos que una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de un conjunto X es una σ-*topología* en X si cumple las propiedades siguientes:

a) $\varnothing$, $X \in \mathcal{T}$,

b) Si A, $B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$,

c) Si $\{A_n\}_{n\in\omega} \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{T}$.

Por ejemplo, el teorema 2.4 afirma que si X es un espacio topológico metrizable las familias $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ son σ-topologías en X, al igual que lo es $\mathcal{B}(X)$ y, más en general, cualquier σ-álgebra en X.

Si $\mathcal{T}$ es una σ-topología en un espacio metrizable X y $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación de X en otro espacio metrizable Y, diremos que f es $\mathcal{T}$-*medible* si para todo abierto A en Y se cumple que $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$.

Se comprueba inmediatamente que si B es una base numerable en Y, para que f sea $\mathcal{T}$-medible es suficiente con que $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$ para todo $A \in B$.

Por otra parte, si $\mathcal{T}$ es una σ-álgebra, toda función $\mathcal{T}$-medible cumple, de hecho, que $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$.

En particular, una función $f : X \longrightarrow Y$ es *medible Borel* si $f^{-1}[B] \in \mathcal{B}(X)$ para todo $B \in \mathcal{B}(Y)$.

En el conjunto de funciones $f : X \longrightarrow Y$ tenemos definida una jerarquía de funciones:

$$\mathbf{\Sigma}^0_1\text{-medibles} \subset \mathbf{\Sigma}^0_2\text{-medibles} \subset \cdots \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha\text{-medibles} \subset \cdots \subset \mathcal{B}\text{-medibles},$$

para todo $1 \leq \alpha < \aleph_1$. Las inclusiones son estrictas cuando las inclusiones $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X)$ lo son (en particular si X es un espacio polaco no numerable). En efecto podemos tomar un conjunto $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\beta(X) \setminus \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ y, fijados dos puntos p_0, $p_1 \in Y$, definimos la función

$$\chi_A(x) = \begin{cases} p_1 & \text{si } x \in A, \\ p_0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

de modo que, para todo $C \subset Y$ se cumple que $\chi_A^{-1}[C] \in \{\varnothing, A, X \setminus A, X\}$, luego χ_A es $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible, pero no $\mathbf{\Sigma}^0_\beta$-medible. En cuanto a la relación con las funciones medibles Borel, se cumple lo siguiente:

Teorema 2.26 *Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios metrizables con Y separable es medible Borel si y sólo si es $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible para un $1 \leq \alpha < \aleph_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es inmediata. Para la otra, tomamos una base $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de la topología de Y. Para cada $n \in \omega$, se cumple que $f^{-1}[U_n] \in \mathcal{B}(X)$, luego existe un $\alpha_n < \aleph_1$ tal que $f^{-1}[U_n] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha_n}(X)$. Como $\aleph_1$ es regular, existe $\alpha < \aleph_1$ tal que $f^{-1}[U_n] \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, para todo $n \in \omega$, luego f es $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible. ■

Si comparamos con la jerarquía de Baire, observamos que $B_0(X,Y)$ es la clase de las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_1$-medibles y que $B_1(X,Y)$ es la clase de las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_2$-medibles. En general:

Teorema 2.27 (Lebesgue-Hausdorff-Banach) *Sean X, Y espacios metrizables con Y separable. Para todo ordinal $\alpha < \aleph_1$, la clase $B_\alpha(X,Y)$ coincide con la clase de las funciones $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medibles. En particular, las funciones de Baire son las funciones medibles Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que toda función de $B_\alpha(X,Y)$ es $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible por inducción sobre α. Para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ es cierto por definición. Si el resultado es cierto para todo $\delta < \alpha$, tomemos $f \in B_\alpha(X,Y)$, de modo que existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\omega}$ de funciones en $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} B_\delta(X,Y)$ que converge puntualmente a f.

Fijemos una base numerable B de Y. Si $U \subset Y$ es abierto y $x \in X$, entonces

$$f(x) \in U \leftrightarrow \bigvee V \in B(\overline{V} \subset U \land \bigvee k \in \omega \bigwedge n \in \omega(n \geq k \to f_n(x) \in \overline{V})).$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}[U] = \bigcup_{V\in B,\overline{V}\subset U}\ \bigcup_{k\in\omega}\ \bigcap_{n\geq k}(X\setminus f_n^{-1}[Y\setminus\overline{V}]) = \bigcup_{V\in B,\overline{V}\subset U}\ \bigcup_{k\in\omega} X\setminus \bigcup_{n\geq k} f_n^{-1}[Y\setminus\overline{V}].$$

Por hipótesis de inducción, para cada $n \in \omega$ existe un $\delta_n < \alpha$ tal que f_n es $\mathbf{\Sigma}^0_{\delta_n+1}$-medible, luego

$$f_n^{-1}[Y\setminus\overline{V}] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\delta_n+1}(X), \quad X\setminus\bigcup_{n\geq k} f_n^{-1}[Y\setminus\overline{V}] \in \mathbf{\Pi}^0_{\delta_n+1}(X)$$

y $f^{-1}[U] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X)$. Por lo tanto, f es $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible.[2]

Ahora demostramos que toda función $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible es una función de Baire de clase α, también por inducción sobre α. En principio, el resultado es cierto por definición para $\alpha = 0, 1$. Así pues, podemos suponer que $\alpha > 1$ y hemos de probar que si f es $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible, entonces es límite puntual de una sucesión de funciones de Baire de clase menor que α.

Sin embargo, vamos a demostrar algo mas general. En el supuesto de que el espacio X sea cero-dimensional el argumento que presentamos es válido incluso cuando $\alpha = 1$, de modo que vamos a probar de paso que el teorema 2.21 es válido

[2]Más aún, en la prueba se ve que si α es un ordinal límite podemos concluir que f es, de hecho, $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible. El mismo argumento muestra que las funciones medibles respecto de una σ-álgebra son cerradas para límites puntuales.

para $B_1(X,Y)$ cuando X es cero-dimensional e Y es separable. En definitiva, suponemos que $\alpha > 1$ o bien que $\alpha \geq 1$ y X es cero-dimensional.

Empezamos suponiendo que $Y = \{0,1\}$, de modo que $f = \chi_A$, para cierto conjunto A. Que f sea $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible equivale entonces a que $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$. Por 2.18 tenemos que existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de funciones de $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ tales que $\chi_A = \lim\limits_n \chi_{A_n}$.

Si $\alpha = \beta+1$, entonces, como χ_{A_n} es $\mathbf{\Sigma}^0_{\beta+1}$-medible, por hipótesis de inducción está en $B_\beta(X,Y)$, luego $\chi_A \in B_\alpha(X,Y)$. Si α es un ordinal límite, entonces 2.18 nos asegura que podemos tomar cada A_n en $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} \mathbf{\Delta}^0_\delta(X)$, con lo que χ_{A_n} es $\mathbf{\Sigma}^0_{\delta+1}$-medible, luego está en $B_\delta(X,Y)$ y también $\chi_A \in B_\alpha(X,Y)$.

El argumento precedente se generaliza al caso en que Y es finito, digamos $Y = k$. Llamemos $A^i = f^{-1}[i]$, de modo que los conjuntos A^i son disjuntos dos a dos, su unión es X y están en $\mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$. Como en el caso anterior, $A^i = \lim\limits_n A^i_n$, para ciertos conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ (o $\mathbf{\Delta}^0_\delta(X)$ con $\delta < \alpha$ si α es un ordinal límite). Observamos entonces que si definimos

$$\tilde{A}^i_n = A^i_n \setminus \bigcup_{j<i} A^j_n,$$

se sigue cumpliendo que $A^i = \lim\limits_n \tilde{A}^i_n$, los conjuntos $\tilde{A}^i_n$ siguen estando en $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$ (o por debajo, si α es límite) y además $\tilde{A}^0_n, \ldots, \tilde{A}^{k-1}_n$ son disjuntos dos a dos. Por ello podemos definir $f_n : X \longrightarrow Y$ como la función que toma el valor i en $\tilde{A}^i_n$, de modo que, claramente, $f = \lim\limits_n f_n$ y, como en el caso anterior, se razona que $f \in B_\alpha(X,Y)$.

Notemos que si Y es finito, d es una distancia en Y y $f, g : X \longrightarrow Y$ cumplen que $d(f(x), g(x)) \leq a$ para todo $x \in X$, si $f = \lim\limits_n f_n$, $g = \lim\limits_n g_n$ y las funciones f_n, g_n son $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medibles, existen funciones g'_n que son también $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medibles, de modo que $g = \lim\limits_n g'_n$ y además $d(f_n(x), g'_n(x)) \leq a$ para todo $x \in X$.

En efecto, basta definir

$$g'_n(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{si } d(f_n(x), g_n(x)) \leq a, \\ f_n(x) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se cumple que g'_n es $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-medible, pues

$$F = \{x \in X \mid d(f_n(x), g_n(x)) \leq a\} \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X),$$

luego también $g'^{-1}_n[i] = (g^{-1}_n[i] \cap F) \cup (f^{-1}_n[i] \cap (X \setminus F)) \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$.

Consideremos finalmente el caso general en que Y es un espacio métrico separable arbitrario. Por el teorema 1.14 tenemos que Y es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert $\mathbb{H}$, que es compacto[3] Podemos considerar en Y

[3]Véase la nota al pie en la demostración del teorema 1.34.

la restricción de la distancia de $\mathbb{H}$, y de este modo Y es precompacto, es decir, se puede cubrir con un número finito de bolas abiertas de radio arbitrariamente pequeño. Concretamente, para cada $k \in \omega$, sea $Y^k \subset Y$ finito tal que

$$Y = \bigcup_{y \in Y^k} B_{2^{-k}}(y).$$

Podemos suponer que $Y^k \subset Y^{k+1}$. Como $f^{-1}[B_{2^{-k}}(y)] \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}(X)$ (para $y \in Y^k$) y estos conjuntos cubren X, por la propiedad de reducción existen conjuntos $A^k_y \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$, disjuntos dos a dos, tales que $A^k_y \subset B_{2^{-k}}(y)$ y $X = \bigcup\limits_{y \in Y^k} A^k_y$.

Así la función $f^k : X \longrightarrow Y^k$ que vale y sobre A^k_y es $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-medible, luego, por el caso finito ya probado, existen funciones $f^k_n : X \longrightarrow Y^k$ en $B_{\delta_{n,k}}(X, Y^k)$, para ciertos $\delta_{n,k} < \alpha$, tales que $f^k = \lim\limits_n f^k_n$.

Como $d(f(x), f^k(x)) \leq 2^{-k}$, se cumple que $d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \leq 2 \cdot 2^{-k}$, luego, por la observación hecha anteriormente, podemos exigir que

$$d(f^k_n(x), f^{k+1}_n(x)) \leq 2 \cdot 2^{-k},$$

con lo que $d(f^k_n(x), f^{k'}_n(x)) \leq 2 \sum\limits_{i=k}^{\infty} 2^{-i}$, para $k \leq k'$.

Finalmente, definimos $f_k = f^k_k \in B_{\delta_k}(X, Y)$, para cierto $\delta_k < \alpha$, y es fácil ver que $f = \lim\limits_k f_k$, luego $f \in B_\alpha(X, Y)$. ■

2.4 Cambio de topología

En esta sección demostramos que la topología de un espacio polaco puede modificarse de modo que siga siendo un espacio polaco con los mismos conjuntos de Borel pero un conjunto de Borel prefijado pase a ser abierto y cerrado. Empezamos con un hecho elemental:

Teorema 2.28 *Sean X e Y dos espacios polacos disjuntos. Entonces $X \cup Y$ admite una topología de espacio polaco que restringida a cada uno de los dos conjuntos es su topología original y en la que ambos son abiertos y cerrados.*

Demostración: Fijemos métricas completas d_X y d_Y en X y en Y. Podemos suponer que ninguna de ellas toma valores mayores que 1. Basta definir la distancia en $X \cup Y$ dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} d_X(x, y) & \text{si } x, y \in X, \\ d_Y(x, y) & \text{si } x, y \in Y, \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que d es ciertamente una distancia y que la unión, con la topología inducida, cumple lo requerido. ■

Teorema 2.29 *Sea X un espacio polaco y $F \subset X$ un subespacio cerrado. Entonces existe una topología en X, más fina que la dada, con la que X es un espacio polaco, sus conjuntos de Borel son los mismos y F es abierto y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Tanto F como $X \setminus F$ son subconjuntos G_δ, luego ambos son espacios polacos. Llamemos X^* al mismo conjunto X pero con la topología dada por el teorema anterior. Así F es abierto y cerrado en X^*. Si U es abierto en X, entonces $U \cap F$ y $U \cap (X \setminus F)$ son abiertos en F y $X \setminus F$ tanto para la topología inducida por X como para la d X^* (pues son las mismas), luego $U = (U \cap F) \cup (U \cap (X \setminus F))$ es abierto en X^*, es decir, la topología de X^* es más fina que la de X. En particular, $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(X^*)$.

Por último, si U es abierto en X^*, entonces $U = (U \cap F) \cup (U \cap (X \setminus F))$ y los dos términos de la unión son conjuntos de Borel en X, luego $U \in \mathcal{B}(X)$ y esto implica que $\mathcal{B}(X^*) \subset \mathcal{B}(X)$. En definitiva, $\mathcal{B}(X^*) = \mathcal{B}(X)$. ■

Teorema 2.30 *Sea X un espacio polaco y $B \subset X$ un conjunto de Borel. Entonces existe una topología más fina en X con la que éste sigue siendo un espacio polaco con los mismos conjuntos de Borel y en la que B es abierto y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los conjuntos $B \subset X$ que cumplen el teorema. Por el teorema anterior contiene a los cerrados, y también a los abiertos pues, más en general, es claro que $\mathcal{B}$ es cerrado para complementos.

Vamos a probar que $\mathcal{B}$ es cerrado para intersecciones numerables, con lo que será una σ-álgebra y tendremos que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}$ y así el teorema quedará demostrado.

Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión en $\mathcal{B}$ y sea $A = \bigcap\limits_{n\in\omega} A_n$. Llamemos X_n al mismo conjunto X con una topología en las condiciones del enunciado para A_n. El producto $P = \prod\limits_{n\in\omega} X_n$ es también un espacio polaco. Sea $j : X \longrightarrow P$ la aplicación diagonal, es decir, la dada por $j(x) = \{x\}_{n\in\omega}$.

Notemos que $j[X]$ es cerrado en P, pues si $x \in P \setminus j[X]$, existen índices i, j tales que $x_i \neq x_j$ y existen abiertos U_i, U_j en X tales que $x_i \in U_i$, $x_j \in U_j$, $U_i \cap U_j = \varnothing$. En principio U_i y U_j son abiertos en la topología original de X, pero también lo son en X_i y en X_j porque sus topologías son más finas. Entonces $x \in p_i^{-1}[U_i] \cap p_j^{-1}[U_j]$ y este conjunto es un abierto en P disjunto de $j[X]$.

Sea X^* el conjunto X con la topología que tiene por abiertos las antiimágenes por j de los abiertos de P, es decir, la topología que hace a X^* homeomorfo a $j[X]$ cuando en éste consideramos la topología inducida desde P. Como $j[X]$ es cerrado en un espacio polaco, $j[X]$ es un espacio polaco, y X^* también.

Observemos ahora que una base de P la forman las intersecciones finitas de abiertos $p_i^{-1}[U_i]$, donde U_i es abierto en X_i, luego una base de $j[X]$ la forman las intersecciones finitas de abiertos $p_i^{-1}[U_i] \cap j[X]$, luego una base de X^* la forman las intersecciones finitas de los abiertos $j^{-1}[p_i^{-1}[U_i] \cap j[X]] = U_i$.

En particular, todo abierto de X es abierto en cualquier X_i, luego es abierto en X^*. Esto significa que la topología de X^* es más fina que la de X y, por consiguiente, $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(X^*)$. Por otra parte, los abiertos básicos de X^* son conjuntos de Borel de X, luego $\mathcal{B}(X^*) \subset \mathcal{B}(X)$ y tenemos la igualdad.

Finalmente, cada A_i es abierto y cerrado en X_i, luego es abierto y cerrado en X^*, luego A es cerrado en X^*. El teorema anterior nos permite refinar aún más la topología de X^* para obtener un nuevo espacio polaco X^{**} en las condiciones del enunciado y en el que A es abierto y cerrado. ■

Como primera aplicación podemos "ayudar" a Cantor a demostrar la hipótesis del continuo:

Teorema 2.31 (Alexandroff) *Todo conjunto de Borel no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto y, por tanto, tiene cardinal* $2^{\aleph_0}$.

Demostración: Sea X un espacio polaco y B un subconjunto de Borel no numerable. Sea X^* el propio X con otra topología más fina en la que B es abierto y cerrado. En particular B^* (es decir, el conjunto B con la topología relativa inducida por X^*) es un espacio polaco no numerable. Por el teorema de Cantor-Bendixson 1.41 y 1.36 sabemos que existe un homeomorfismo en la imagen $f : \mathcal{C} \longrightarrow B^*$. Ahora bien, la topología de B^* es más fina que la de B, luego f sigue siendo una biyección continua como aplicación $f : \mathcal{C} \longrightarrow B$ y, como $\mathcal{C}$ es compacto, f es un homeomorfismo en su imagen. ■

Así pues, para encontrar un contraejemplo a la hipótesis del continuo, Cantor necesitaba buscar mucho más allá de los abiertos y cerrados: ningún conjunto de Borel puede contradecir la hipótesis del continuo.

2.5 Isomorfismos de Borel

Seguidamente demostraremos que todos los espacios polacos del mismo cardinal tienen la misma σ-álgebra de Borel. Para el caso de espacios numerables es inmediato: se cumple que $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X)$, luego las álgebras de dos espacios son isomorfas si y sólo si ambos son finitos del mismo cardinal o ambos son infinitos numerables. Sólo hemos de analizar el caso no numerable. Conviene introducir algunos conceptos:

Definición 2.32 Una biyección $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios polacos es un *isomorfismo de Borel* si la aplicación $F : \mathcal{B}(Y) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ dada por $F(A) = f^{-1}[A]$ es biyectiva (y, por consiguiente, un isomorfismo de σ-álgebras).

Teorema 2.33 *Existe un isomorfismo de Borel entre el espacio de Cantor* $\mathcal{C}$ *y el intervalo unidad* $\mathbb{I}$.

Demostración: Sea C el conjunto de las sucesiones $x \in \mathcal{C}$ que son finalmente constantes y sea $f : \mathcal{C} \setminus C \longrightarrow \mathbb{I}$ la aplicación dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) 2^{-n+1}.$$

Se cumple que f es inyectiva (pues los únicos números reales que admiten dos desarrollos binarios distintos son los que admiten desarrollos finalmente constantes). Más aún, f es un homeomorfismo en su imagen, pues una sucesión de números reales converge a un número real x si y sólo si la sucesión de sus cifras binarias converge en $\mathcal{C}$ a la de x (habiendo excluido los números que admiten dos desarrollos distintos).

Si llamamos $G = f[\mathcal{C} \setminus C]$ y $C' = \mathbb{I} \setminus G$, tenemos que $C' \subset \mathbb{Q}$, luego C' es numerable, y C también lo es, luego existe una biyección $g : C \longrightarrow C'$. Así pues, f y g determinan entre ambas una biyección $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{I}$ tal que $h|_{\mathcal{C}\setminus C} = f$ y $h|_C = g$. Observemos además que, al ser numerables, C y C' son conjuntos de Borel (ambos son $\mathbf{\Sigma}^0_2$).

Así, si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$, tenemos que $B \cap G \in \mathcal{B}[G]$ y $B \cap C' \in \mathcal{B}[C']$, luego $f^{-1}[B\cap G] \in \mathcal{B}(\mathcal{C}\setminus C')$ (porque f es continua) y $g^{-1}[B\cap C'] \in \mathcal{B}(C)$ (porque es numerable). Ahora bien, $\mathcal{B}(\mathcal{C}\setminus C') \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{B}(C) \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$ (por 2.6), y entonces $h^{-1}[B] = f^{-1}[B \cap G] \cup g^{-1}[B \cap C'] \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$.

Exactamente igual se prueba que si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ entonces $h[B] \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$, luego h es un isomorfismo de Borel. ■

Teorema 2.34 *Si X es un espacio polaco, existe un conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ y un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow B$.*

Demostración: El isomorfismo de Borel del teorema anterior induce un isomorfismo de Borel $\bar{h} : \mathcal{C}^\omega \longrightarrow \mathbb{H}$.

En efecto, si $\bar{h}$ es la aplicación definida de forma natural (coordenada a coordenada) y $A \in \mathcal{C}^\omega$ es abierto, entonces $A = U_0 \times \cdots U_{n-1} \times 2^{\omega\setminus n}$, para ciertos abiertos U_i en $\mathcal{C}$. Sea $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$ tal que $h^{-1}[B_i] = U_i$. Entonces $B = B_0 \times \cdots \times B_{n-1} \times \mathbb{I}^{\omega\setminus n} \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$ (porque es la intersección de los n conjuntos de Borel $p_i^{-1}[B_i]$) y claramente $\bar{h}^{-1}[B] = A$.

Así pues, $\mathcal{B}' = \{\bar{h}^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$ es una σ-álgebra en $\mathcal{C}^\omega$ que contiene a los abiertos, luego $\mathcal{B}(\mathcal{C}^\omega) \subset \mathcal{B}'$, es decir, que todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^\omega)$ se expresa en la forma $\bar{h}^{-1}[B']$, para cierto $B' \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, que necesariamente es $\bar{h}[B]$. En definitiva, hemos probado que si $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^\omega)$, entonces $\bar{h}[B] \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, e igualmente se prueba la implicación inversa.

Como $\mathcal{C}^\omega$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$ (y un homeomorfismo es un isomorfismo de Borel), componiendo obtenemos un isomorfismo de Borel $i : \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Por el teorema 1.14 existe un conjunto de Borel $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ y un homeomorfismo $g : X \longrightarrow A$. Sea $B = i[A] \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$. Claramente, i se restringe a un isomorfismo de Borel $i|_A : A \longrightarrow B$, con lo que al componer obtenemos un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow B$. ■

Por otra parte, si X es un espacio polaco no numerable, existe un homeomorfismo de $\mathcal{C}$ en un subespacio C de X, que, en particular, es un isomorfismo de Borel $g : \mathcal{C} \longrightarrow C$. Ahora sólo necesitamos la siguiente adaptación del teorema de Cantor-Bernstein:

Teorema 2.35 *Sean X e Y espacios polacos y $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ isomorfismos de Borel en sus imágenes respectivas (es decir, f es un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow f[X] \in \mathcal{B}(Y)$, y análogamente con g). Entonces existe un isomorfismo de Borel entre X e Y.*

Demostración: Definimos $F : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ mediante

$$F(A) = X \setminus g[Y \setminus f[A]].$$

Se comprueba inmediatamente que si $A \subset B$ entonces $F(A) \subset F(B)$. Definimos $X_0 = X$, $X_{n+1} = F(X_n)$. Se cumple que $X_{n+1} \subset X_n$, pues obviamente $X_1 \subset X_0$ y basta aplicar la monotonía de F. Definimos $X_\infty = \bigcap\limits_{n\in\omega} X_n \in \mathcal{B}(X)$. Se comprueba a partir de la definición de F que

$$F(X_\infty) = \bigcap_{n\in\omega} F(X_n) = \bigcap_{n\in\omega} X_{n+1} = X_\infty.$$

Esto significa que $X \setminus X_\infty = g[Y \setminus f[X_\infty]]$. Por lo tanto, tenemos dos isomorfismos de Borel

$$f|_{X_\infty} : X_\infty \longrightarrow f[X_\infty], \qquad g|_{Y\setminus f[X_\infty]} : Y \setminus f[X_\infty] \longrightarrow X \setminus X_\infty$$

que se combinan para formar un isomorfismo de Borel $h : X \longrightarrow Y$. ■

Así ya podemos concluir:

Teorema 2.36 *Dados dos espacios polacos X e Y, existe un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow Y$ si y sólo si X e Y tienen el mismo cardinal.*

Demostración: La condición es obviamente necesaria. Antes de la definición 2.32 hemos razonado el caso de espacios numerables. Sólo falta probar que si X es un espacio polaco no numerable existe un isomorfismo de Borel $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$, pero los teoremas 1.36 y 1.41 prueban que existe una aplicación continua $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ que es un homeomorfismo en la imagen y, en particular, un isomorfismo de Borel en la imagen, y el teorema 2.34 prueba que existe un isomorfismo de Borel en la imagen $g : X \longrightarrow \mathcal{C}$. El teorema anterior nos da entonces la conclusión. ■

En particular, todos los espacios polacos no numerables tienen la misma σ-álgebra de Borel.

En la próxima sección necesitaremos el refinamiento siguiente del teorema anterior:

Teorema 2.37 *Sean X e Y dos espacios polacos, $B \in \mathcal{B}(X)$ y $B' \in \mathcal{B}(Y)$. Existe un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f[B] = B'$ si y sólo si B tiene el mismo cardinal que B' y $X \setminus B$ tiene el mismo cardinal que $Y \setminus B'$.*

Demostración: La condición es obviamente necesaria. Sean X^* e Y^* los mismos espacios X e Y con topologías en las que B y B' sean abiertos cerrados, según el teorema 2.30. Por el teorema anterior, existen isomorfismos de Borel $B \longrightarrow B'$ y $X \setminus B \longrightarrow Y \setminus B'$, que claramente pueden combinarse para formar un isomorfismo de Borel f que cumple el teorema. ■

2.6 Medidas de Borel

Estudiamos ahora las medidas de Borel en un espacio polaco X. Un poco más en general, si X es cualquier espacio topológico metrizable, recordamos que una *medida de Borel* en X es una medida σ-finita $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, +\infty[$, de acuerdo con la definición [AM 7.1]. Una medida es *finita* si $\mu(X) < +\infty$ y es *unitaria* si, más precisamente, $\mu(X) = 1$. Diremos que una medida es *continua* si los puntos tienen medida nula (con lo que todo conjunto numerable es nulo).

Toda medida de Borel μ se extiende ([AM 7.3]) a otra medida en la σ-álgebra $\mathcal{M}_\mu$ formada por los conjuntos de la forma $B \cup N$ tales que $B \in \mathcal{B}(X)$ existe un $C \in \mathcal{B}(X)$ de modo que $N \subset C$ y $\mu(C) = 0$ (de modo que $\mu(B \cup N) = \mu(B)$). Esta extensión es la llamada *compleción* de μ y normalmente la identificaremos con μ (es decir, consideraremos que toda medida de Borel μ está en realidad definida sobre el álgebra $\mathcal{M}_\mu$). La compleción es *completa* en el sentido de que todo subconjunto de un conjunto nulo es nulo. A los conjuntos de $\mathcal{M}_\mu$ los llamaremos conjuntos μ-medibles.

Llamaremos m a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, que es la medida de Borel determinada por la propiedad[4] ([AM 7.34]) de que $m([a, b]) = b - a$, para todo par de números reales $a < b$.

Demostramos en primer lugar que todas las medidas de Borel satisfacen algunas propiedades topológicas adicionales:

Teorema 2.38 *Sea X un espacio metrizable y μ una medida de Borel finita en X. Entonces, para todo conjunto μ-medible A,*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \subset A \text{ es cerrado}\} = \text{ínf}\{\mu(U) \mid A \subset U \text{ es abierto}\}.$$

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los conjuntos $A \in \mathcal{B}(X)$ que cumplen la propiedad del enunciado. Observamos que contiene a todos los cerrados, pues la primera igualdad es inmediata y, para la segunda, usamos que, en un espacio metrizable, todo cerrado F es G_δ, luego $F = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$, para ciertos conjuntos abiertos U_n.

Reemplazando U_n por su intersección con los abiertos precedentes podemos suponer que $U_{n+1} \subset U_n$, y entonces las propiedades elementales de las medidas implican que $\mu(F) = \text{ínf}_{n\in\omega}\, \mu(U_n)$, de donde se sigue que $F \in \mathcal{B}$.

Ahora observamos que si $A \in \mathcal{B}$, también $X \setminus A \in \mathcal{B}$. En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe un cerrado $F \subset A$ tal que $\mu(A) - \mu(F) < \epsilon$, y entonces $X \setminus A \subset X \setminus F$ y

$$\mu(X \setminus F) - \mu(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(F) - \mu(X) + \mu(A) < \epsilon,$$

luego $X \setminus A$ cumple la segunda igualdad del enunciado. Similarmente, usando que A cumple esta igualdad se razona que $X \setminus A$ cumple la primera.

[4]Como la construcción presentada en [AM] se basa en el teorema de representación de Riesz, al final de este capítulo incluimos un apéndice con una construcción alternativa más "descriptiva" en la que puede comprobarse fácilmente que no usa AE (sino únicamente ED).

Veamos ahora que si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de elementos de $\mathcal{B}$, entonces $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{B}$.

Dado $\epsilon > 0$, existen cerrados $F_n \subset A_n$ tales que $\mu(A_n) - \mu(F_n) < \epsilon/2^{n+1}$. Entonces, llamando $F = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$, tenemos que

$$\mu(A) - \mu(F) = \mu(A \setminus F) \leq \mu(\bigcup_{n\in\omega} A_n \setminus F_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(A_n \setminus F_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \epsilon,$$

luego A cumple la primera igualdad del enunciado. La segunda se demuestra análogamente.

Así pues, $\mathcal{B}$ es una σ-subálgebra de $\mathcal{B}(X)$ que contiene a los cerrados (luego también a los abiertos), luego ha de ser $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$. En otras palabras, todos los conjuntos de Borel cumplen el teorema. Si $A \in \mathcal{M}_\mu$, entonces $A = B \cup N$, donde $B \in \mathcal{B}(X)$ y $N \subset C \in \mathcal{B}(X)$ con $\mu(C) = 0$. Así

$$\mu(A) = \mu(B) = \sup\{\mu(F) \mid F \subset B \text{ es cerrado}\}$$

$$\leq \sup\{\mu(F) \mid F \subset A \text{ es cerrado}\} \leq \mu(A).$$

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar abiertos U_1 y U_2 tales que $B \subset U_1$, $C \subset U_2$, $\mu(U_1) - \mu(B) < \epsilon/2$, $\mu(U_2) < \epsilon/2$, con lo que $U = U_1 \cup U_2$ cumple que $A \subset U$ y

$$\mu(U) - \mu(A) = \mu(U \setminus A) \leq \mu(U_1 \setminus B) + \mu(U_2 \setminus C) < \epsilon,$$

luego A cumple el enunciado. ■

En particular, vemos que si dos medidas de Borel coinciden sobre los abiertos, entonces son iguales. En un espacio polaco podemos refinar el resultado:

Teorema 2.39 *Sea X un espacio polaco y μ una medida de Borel finita en X. Entonces, para cada conjunto μ-medible $A \subset X$ se cumple que*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \textit{ es compacto}\}.$$

Demostración: Por el teorema anterior, la medida de A puede aproximarse por la de un cerrado, luego basta aproximar la de este cerrado por la de un compacto. Equivalentemente, podemos suponer que A es cerrado. Entonces A es él mismo un espacio polaco. Si $\mu(A) = 0$ no hay nada que probar y, en caso contrario, restringiendo la medida a $\mathcal{B}(A)$, podemos suponer que $A = X$, es decir, hay que probar que

$$\mu(X) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset X \text{ es compacto}\}.$$

Para cada $n \in \omega$, la familia de bolas abiertas de radio 2^{-n} forma una base de X, luego por 1.16 podemos extraer una subbase numerable. Sean $\{B_i^n\}_{i\in\omega}$ las bolas cerradas correspondientes. Como

$$\mu\Big(\bigcup_{i\leq k} B_i^n\Big) \to \mu(X),$$

podemos tomar un $k_n \in \omega$ tal que $\mu(\Big(X \setminus \bigcup\limits_{i\leq k_n} B_i^n\Big) < \epsilon/2^{n+1}$. Sea

$$K = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{i\leq k_n} B_i^n.$$

Entonces K es cerrado, luego es un espacio métrico completo, y es precompacto, pues, dado $\epsilon > 0$ tomamos un n tal que $2^{-n} < \epsilon$ y K puede cubrirse por las bolas abiertas de radio ϵ y centros en los centros de las bolas cerradas B_i^n. Por lo tanto K es compacto. Además,

$$\mu(X) - \mu(K) = \mu(X \setminus K) \leq \sum_{n\in\omega} \mu\Big(X \setminus \bigcup_{i\leq k_n} B_i^n\Big) < \epsilon.$$

■

Finalmente suprimimos la hipótesis de finitud:

Teorema 2.40 *Toda medida de Borel μ en un espacio polaco X es regular, es decir, para todo conjunto μ-medible A, se cumple que*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid K \subset A \text{ es compacto}\} = \text{ínf}\{\mu(U) \mid A \subset U \text{ es abierto}\}.$$

Demostración: Tenemos el teorema probado para el caso de medidas finitas. En general, una medida de Borel es σ-finita, es decir, existen conjuntos μ-medibles $\{A_n\}_{n\in\omega}$ con $\mu(A_n) < +\infty$ y $X = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$. Uniendo cada A_n a los precedentes podemos suponer que la sucesión es creciente, y eliminando los términos nulos si los hay, podemos suponer que $\mu(A_n) > 0$ para todo n. Definimos $\mu' : \mathcal{M}_\mu \longrightarrow [0, 1]$ mediante

$$\mu'(A) = \sum_{n\in\omega} \frac{\mu(A \cap A_n)}{\mu(A_n)} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Se comprueba sin dificultad que μ' es una medida de Borel finita en X. Dado un conjunto μ-medible A, tenemos que $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} (A_n \cap A)$ y la unión es creciente, luego

$$\mu(A) = \sup_{n\in\omega} \mu(A_n \cap A).$$

Si se cumple $\mu(A) < +\infty$, fijamos $0 < \epsilon < 1$ y tomamos un $n_0 \in \omega$ tal que $\mu(A) - \mu(A \cap A_{n_0}) < \epsilon/2$; si $\mu(A) = +\infty$, fijamos $N \in \omega$ y tomamos $n_0 \in \omega$ tal que $\mu(A \cap A_{n_0}) > N + 1$.

Por el teorema anterior aplicado a la medida μ' existe un compacto $K \subset A$ tal que

$$\mu'(A) - \mu'(K) < \frac{\epsilon}{\mu(A_{n_0})2^{n_0+2}}.$$

Esto implica, en particular, que

$$\frac{\mu(A \cap A_{n_0}) - \mu(K \cap A_{n_0})}{\mu(A_{n_0})} \frac{1}{2^{n_0+1}} < \frac{\epsilon}{\mu(A_{n_0})2^{n_0+2}},$$

luego $\mu(A \cap A_{n_0}) - \mu(K \cap A_{n_0}) < \epsilon/2$. En el caso en que A tiene medida finita, de aquí deducimos que $\mu(A) - \mu(K \cap A_{n_0}) < \epsilon$, luego también $\mu(A) - \mu(K) < \epsilon$. En el caso de medida infinita queda que $\mu(K) \geq \mu(K \cap A_{n_0}) > N$, luego en ambos casos se cumple la primera igualdad del enunciado.

La segunda es trivial si $\mu(A) = +\infty$, y en caso contrario se razona análogamente a como acabamos de hacer. ■

Como consecuencia tenemos que los conjuntos de medida positiva han de tener cardinal grande:

Teorema 2.41 *Sea X un espacio polaco y μ una medida de Borel continua en X. Si $A \in \mathcal{M}_\mu$ cumple que $\mu(A) > 0$, entonces $|A| = 2^{\aleph_0}$.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que A contiene un cerrado F de medida positiva, luego F no puede ser numerable, luego por 2.31 tiene cardinal $2^{\aleph_0}$ y A también. ■

En cambio, el recíproco no es cierto: un conjunto de cardinal $2^{\aleph_0}$ puede ser nulo:

Teorema 2.42 *El conjunto ternario de Cantor $C \subset \mathbb{I}$ es nulo para la medida de Lebesgue.*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que el conjunto ternario de Cantor, definido en 1.38, es de la forma

$$C = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in 2^n} A(s).$$

Cada $A(s)$ es un intervalo cerrado de longitud $3^{-\ell(s)}$. Por lo tanto,

$$m(C) \leq \sum_{s\in 2^n} 3^{-n} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

para todo $n \in \omega$, luego $m(C) = 0$. ■

Una primera consecuencia de este ejemplo es que, como todos los subconjuntos de un conjunto nulo son nulos (y, en particular, medibles), hay $2^{2^{\aleph_0}}$ conjuntos medibles Lebesgue, muchos más que conjuntos de Borel, que (admitiendo AE) son sólo $2^{\aleph_0}$. Aprovechamos también que el conjunto de Cantor tiene medida nula para demostrar lo siguiente:

Teorema 2.43 *Sea X un espacio polaco y μ una medida de Borel unitaria y continua en X. Entonces existe un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow \mathbb{I}$ tal que, para todo $A \in \mathcal{M}_\mu$, $\mu(A) = m(f[A])$, donde m es la medida de Lebesgue.*

DEMOSTRACIÓN: Para que X pueda tener una medida no trivial no puede ser numerable, luego por el teorema 2.36 tenemos que existe un isomorfismo de Borel $g : X \longrightarrow \mathbb{I}$. Podemos definir una medida de Borel en $\mathbb{I}$ mediante $\mu'(B) = \mu(g^{-1}[B])$. Se cumple entonces que si $A \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A) = \mu'(g[A])$. De hecho, lo mismo vale para $A \in \mathcal{M}_\mu$, pues en tal caso $A = B \cup N$, donde

$N \subset C \in \mathcal{B}(X)$ y C es nulo. Por lo tanto, $g[A] = g[B] \cup g[N]$ con $g[B] \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$ y $g[N] \subset g[C] \in \mathcal{B}(\mathbb{I})$ y $\mu'(g[C]) = 0$. Esto prueba que $g[A] \in \mathcal{M}_{\mu'}$ y

$$\mu'(g[A]) = \mu'(g[B]) = \mu(B) = \mu(A).$$

Es claro entonces que basta demostrar el teorema para la medida μ' o, lo que es lo mismo, podemos suponer que $X = \mathbb{I}$.

Sea $g : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ la función dada por $g(x) = \mu([0, x])$. Claramente g es continua, monótona creciente y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

Definimos ahora otra medida de Borel en $\mathbb{I}$ mediante $m(B) = \mu(g^{-1}[B])$. La hemos llamado m porque, como vemos a continuación, es la medida de Lebesgue. En efecto,

$$m([0, x]) = \mu(g^{-1}[0, x]) = \mu([0, y]) = g(y) = x,$$

donde y es el máximo del intervalo cerrado $g^{-1}[x]$. De aquí se sigue a su vez que $m([x, y]) = y - x$, y esto caracteriza a la medida de Lebesgue.

Aún no tenemos probado el teorema porque la aplicación g no tiene por qué ser biyectiva, luego no es un isomorfismo de Borel. Para arreglarlo observamos que, para cada $x \in \mathbb{I}$, como ya hemos observado, $g^{-1}[x]$ es un intervalo que puede reducirse a un punto. De hecho, el conjunto N formado por los puntos $x \in \mathbb{I}$ tales que $g^{-1}[x]$ contiene más de un punto ha de ser numerable, pues los intervalos serán disjuntos dos a dos, y cada uno de ellos tendrá que contener un número racional distinto.

Llamemos $M = g^{-1}[N]$. Así, la aplicación g se restringe a un homeomorfismo $g : \mathbb{I} \setminus M \longrightarrow \mathbb{I} \setminus N$. Sea C el conjunto ternario de Cantor y $Q = C \setminus N$, que es no numerable y nulo para la medida de Lebesgue. Sea $P = g^{-1}[Q] \subset \mathbb{I} \setminus M$, que cumple $\mu(P) = \mu(g^{-1}[Q]) = m(Q) = 0$. Restringiendo aún más g, obtenemos un homeomorfismo

$$g : \mathbb{I} \setminus (P \cup M) \longrightarrow \mathbb{I} \setminus (Q \cup N).$$

Notemos que si $A \subset \mathbb{I} \setminus (P \cup M)$ es un conjunto de Borel, entonces $g[A]$ es un conjunto de Borel (porque g es un homeomorfismo en este dominio) y $g^{-1}[g[A]] = A$, luego $m(g[A]) = \mu(A)$.

Por otra parte, $P \cup M$ y $Q \cup N$ son conjuntos de Borel no numerables, y sus complementarios respectivos también son no numerables (pues g es una biyección entre ellos y el del segundo conjunto es $(\mathbb{I} \setminus C) \cup N$, donde $\mathbb{I} \setminus C$ es abierto, luego no numerable). El teorema 2.37 nos da un isomorfismo de Borel de $\mathbb{I}$ en sí mismo que se restringe a un isomorfismo de Borel $h : P \cup M \longrightarrow Q \cup N$. Combinando g y h obtenemos un isomorfismo de Borel $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ que cumple el enunciado para subconjuntos de Borel $A \subset \mathbb{I} \setminus (P \cup M)$ (porque g tiene esta propiedad) y también para $A \subset P \cup M$ (porque en tal caso A es nulo para μ y su imagen por f es nula para m). De aquí se sigue inmediatamente que f cumple el teorema para todo conjunto de Borel, y de aquí a su vez se sigue sin dificultad que se cumple para todo conjunto medible. ■

Así pues, no sólo es posible encontrar un isomorfismo de Borel que transforme los conjuntos de Borel de un espacio dado en otro, sino que es posible hacerlo de modo que transforme cualquier medida de Borel dada (unitaria y continua) en cualquier otra.

Si tenemos dos medidas de Borel (unitarias y continuas) μ y ν en un mismo espacio polaco X, las σ-álgebras $\mathcal{M}_\mu$ y $\mathcal{M}_\nu$ no tienen por qué ser la misma, pero un isomorfismo de Borel $F : X \longrightarrow X$ en las condiciones del teorema anterior induce un isomorfismo de álgebras entre ellas. Si lo restringimos a $\mathcal{B}(X)$, tenemos un automorfismo de $\mathcal{B}(X)$ que transforma una medida en la otra. Así, no sólo sucede que todos los espacios polacos no numerables tienen (salvo isomorfismo) la misma σ-álgebra de Borel, sino que ésta tiene (salvo automorfismo) una única medida unitaria continua.

Definición 2.44 Sea X un espacio polaco y μ una medida de Borel unitaria y continua en X. Llamaremos *álgebra de medida* al álgebra de Boole cociente $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}(X)/I_\mu$, donde I_μ es el ideal de los conjuntos de Borel nulos.

Hemos probado que el álgebra de medida es, salvo isomorfismo, independiente del espacio concreto X y de la medida concreta μ con que se construya.[5]

Observemos que también obtenemos la misma álgebra si en lugar de considerar la σ-álgebra $\mathcal{B}(X)$ consideramos $\mathcal{M}_\mu$. Para ello recordemos que, en general, en un álgebra cociente de un álgebra de Boole B respecto de un ideal I, dos elementos $a, b \in B$ determinan la misma clase si y sólo si

$$a - b = (a' \wedge b) \vee (a \wedge b') \in I.$$

Cuando el álgebra es un álgebra de conjuntos, la diferencia $a - b$ se corresponde con la *diferencia simétrica* $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

En nuestro caso, dos conjuntos (de Borel o medibles) A y B determinan la misma clase en el álgebra de medida ($\mathcal{B}(X)/I_\mu$ o $\mathcal{M}_\mu/I_\mu$) si y sólo si $A \,\Delta\, B$ es un conjunto nulo.

Es claro entonces que la inclusión $\mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{M}_\mu$ induce un monomorfismo de álgebras $\mathcal{B}(X)/I_\mu \longrightarrow \mathcal{M}_\mu/I_\mu$. Para ver que se trata de un isomorfismo observamos que el teorema 2.38 implica que si $A \in \mathcal{M}_\mu$ existen conjuntos F_σ y G_δ, digamos F y G, tales que $F \subset A \subset G$ y $\mu(G \setminus A) = \mu(A \setminus F) = 0$. Por consiguiente, tanto $A \,\Delta\, F$ como $A \,\Delta\, G$ son nulos, luego toda clase de $\mathcal{M}_\mu/I_\mu$ tiene un representante en $\mathcal{B}(X)$. En definitiva:

Teorema 2.45 *Si X es un espacio polaco y μ una medida de Borel continua en X, entonces la inclusión induce un isomorfismo de álgebras de Boole $\mathcal{B}_m = \mathcal{B}(X)/I_\mu \cong \mathcal{M}_\mu/I_\mu$. Más aún, toda clase del álgebra de medida tiene un representante F_σ y un representante G_δ.*

Así pues, añadiendo o quitando conjuntos nulos, todo conjunto medible puede convertirse en un F_σ o en un G_δ.

[5](AE) Esta álgebra es completa, no atómica y cumple la condición de cadena numerable, por [PC], sección 7.4 y teorema 10.2.

Nota Para comparar con lo que veremos en la sección siguiente, conviene señalar que no es cierto que toda clase del álgebra de medida contenga un representante abierto. En efecto, tomemos, por ejemplo, el espacio $\mathbb{I}$ con la medida de Lebesgue. Sea $\{q_n\}_{n\in\omega}$ un conjunto denso y, para cada $n \in \omega$, llamemos I_n a un intervalo abierto de centro q_n y diámetro (o sea, medida) menor que $1/2^{n+2}$. Llamemos A a la unión de los intervalos I_n y sea $C = \mathbb{I} \setminus A$. Entonces A es denso en $\mathbb{I}$ y $m(A) < 1/2$, luego C tiene interior vacío en $\mathbb{I}$ y $m(C) > 1/2$. Esto implica que no existe ningún abierto U en $\mathbb{I}$ tal que $U \,\Delta\, C$ sea nulo, pues esto implicaría que el abierto $U \setminus C$ sería nulo, pero un abierto sólo puede ser nulo si es vacío, luego $U \subset C$, pero C tiene interior vacío, luego $U = \varnothing$, luego $C = \varnothing \,\Delta\, C$ es nulo, y esto es falso. ■

2.7 La propiedad de Baire

Hay otra forma más topológica de marcar diferencias entre "conjuntos grandes", "conjuntos no tan grandes" y "conjuntos despreciables" sin recurrir a la teoría de la medida. (Por ejemplo, una medida unitaria en un conjunto permite distinguir entre conjuntos de medida 1 o "grandes", conjuntos de medida intermedia o "no tan grandes" y conjuntos de medida 0 o "despreciables"). La alternativa consiste en emplear el concepto de categoría. Desde este punto de vista, un conjunto en un espacio topológico es:

- "muy grande" si contiene a un abierto denso (un conjunto grande globalmente en el sentido de que ha de estar repartido por todo el espacio y a la vez grande localmente en el sentido de que, allí donde está, tiene interior no vacío).

- "muy pequeño" si su complementario es muy grande, es decir, si está contenido en un cerrado de interior vacío (se dice entonces que el conjunto es *diseminado.*

- "pequeño" si es *de primera categoría,* es decir, unión numerable de conjuntos diseminados.

- "grande" si es *de segunda categoría,* es decir, si no es de primera categoría.

Estos conceptos funcionan adecuadamente en los espacios topológicos completamente metrizables gracias al teorema de Baire, que afirma que todo conjunto de primera categoría tiene interior vacío. (Véase [AM, sección 2.7].)

Conviene tener presente que medida y categoría son realmente dos formas *muy distintas* de clasificar los conjuntos en grandes y pequeños:

Teorema 2.46 *Se puede descomponer $\mathbb{R} = A \cup B$ con $A \cap B = \varnothing$, A nulo (para la medida de Lebesgue) y B de primera categoría.*

DEMOSTRACIÓN: Como $m(\mathbb{Q}) = 0$ (por ser numerable), tenemos que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ existe un abierto A_n tal que $\mathbb{Q} \subset A_n$ y $m(A_n) < 1/n$. Como $\mathbb{Q} \subset A_n$, resulta que A_n es un abierto denso, luego, llamando

$$A = \bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} A_n \qquad B = \mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} \mathbb{R} \setminus A_n,$$

tenemos que B es de primera categoría (es unión de cerrados de interior vacío) y $\mu(A) \leq \mu(A_n) \leq 1/n$ para todo n, luego A es nulo. ■

Los conjuntos de Borel primera categoría forman un ideal de $\mathcal{B}(X)$, por lo que podemos considerar el álgebra cociente:

Definición 2.47 Si X es un espacio polaco, llamaremos *álgebra de categoría* de X al álgebra cociente $\mathcal{B}_c = \mathcal{B}(X)/I_c$, donde I_c es el ideal de los conjuntos de Borel de primera categoría.

Vamos a demostrar que, al contrario de lo que sucede con el álgebra de medida, toda clase del álgebra de categoría admite un representante abierto. Para ello conviene introducir el concepto siguiente:

Definición 2.48 Un subconjunto A de un espacio polaco X tiene la *propiedad de Baire* si existe un abierto U en X tal que $A \,\Delta\, U$ es de primera categoría. Llamaremos $\mathrm{Ba}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos de X con la propiedad de Baire.

Teorema 2.49 *Si X es un espacio polaco,* $\mathrm{Ba}(X)$ *es una σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos de Borel y a todos los conjuntos de primera categoría. Por consiguiente, la inclusión* $\mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathrm{Ba}(X)$ *induce un isomorfismo de álgebras* $\mathcal{B}_c = \mathcal{B}(X)/I_c \cong \mathrm{Ba}(X)/I_c$.

DEMOSTRACIÓN: Obviamente, todo abierto A tiene la propiedad de Baire (pues $A \,\Delta\, A = \varnothing$) y lo mismo le sucede a todo conjunto de primera categoría (pues $\varnothing \,\Delta\, A = A$).

Si A es abierto, entonces $(X \setminus A) \,\Delta\, (X \setminus \overline{A}) = \overline{A} \setminus A$ es un cerrado de interior vacío,[6] luego de primera categoría. Esto prueba que $X \setminus A \in \mathrm{Ba}(X)$. Más en general, si $B \in \mathrm{Ba}(X)$ y A es un abierto tal que $[B] = [A]$, entonces $[X \setminus B] = [X \setminus A] = [X \setminus \overline{A}]$, luego $X \setminus B \in \mathrm{Ba}(X)$.

Por último, si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de conjuntos en $\mathrm{Ba}(X)$, entonces existen abiertos U_n tales que $A_n \,\Delta\, U_n \in I_c$, luego

$$\Big(\bigcup_{n\in\omega} A_n\Big) \,\Delta\, \Big(\bigcup_{n\in\omega} U_n\Big) \subset \bigcup_{n\in\omega} (A_n \,\Delta\, U_n) \in I_c,$$

luego $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \in \mathrm{Ba}(X)$.

[6]En este punto fallaría un intento de demostrar este mismo teorema para el álgebra de medida: $\overline{A} \setminus A = \partial A$ y no es cierto en general que la frontera de un abierto tenga medida nula. La construcción de la nota final de la sección anterior proporciona un contraejemplo.

Esto prueba que $\mathrm{Ba}(X)$ es una σ-álgebra y, como contiene a los abiertos, contiene a todos los conjuntos de Borel. El resto del enunciado es inmediato. ■

El hecho de que toda clase del álgebra $\mathcal{B}_c$ contenga un representante abierto se puede precisar más. Recordemos ([PC 7.8]) que un abierto A en un espacio topológico X es *regular* si cumple $A = \mathring{\overline{A}}$. El teorema [PC 7.10] afirma que el conjunto $R(X)$ de los abiertos regulares en X admite una estructura de álgebra de Boole completa (que en general no es un álgebra de conjuntos).

Teorema 2.50 *Si X es un espacio polaco y $R(X)$ es su álgebra de abiertos regulares, la aplicación $R(X) \longrightarrow \mathcal{B}_c$ dada por $A \mapsto [A]$ es un isomorfismo de álgebras de Boole. En particular, $\mathcal{B}_c$ es un álgebra de Boole completa.*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos ([PC 7.9]) que si A es un abierto, entonces $\mathring{\overline{A}}$ es siempre un abierto regular. Como $A \subset \mathring{\overline{A}} \subset \overline{A}$ y $\overline{A} \setminus A$ tiene interior vacío (luego es de primera categoría), $\mathring{\overline{A}} \setminus A$ también es de primera categoría. Esto significa que A y $\mathring{\overline{A}}$ determinan la misma clase en el álgebra $\mathcal{B}_c$, luego la aplicación considerada en el enunciado es suprayectiva.

Supongamos ahora que A y B son abiertos regulares cuyas clases en $\mathcal{B}_c$ cumplen $[A] \leq [B]$. Esto significa que $A \setminus B$ es de primera categoría. Ahora bien, entonces $A \setminus \overline{B} \subset A \setminus B$ también es de primera categoría, pero $A \setminus \overline{B}$ es abierto, y el único abierto de primera categoría es $\varnothing$. Por consiguiente, $A \subset \overline{B}$, luego también $A \subset \mathring{\overline{B}} = B$. El recíproco es trivial. En definitiva, tenemos que

$$A \subset B \leftrightarrow [A] \leq [B].$$

En particular, esto implica que la aplicación del enunciado es biyectiva y que además es una semejanza para las relaciones de orden de las álgebras respectivas (pues, aunque las operaciones booleanas de $R(X)$ no sean las conjuntistas, el ínfimo sí que coincide con la intersección de conjuntos y la relación de orden es la inclusión). Por consiguiente, se trata de un isomorfismo de álgebras. ■

Veamos ahora que, al igual que sucede con el álgebra de medida, el álgebra de categoría es única (salvo isomorfismo) para todos los espacios polacos perfectos. (La condición de que no haya puntos aislados es la correspondiente a la condición de considerar medidas continuas.)

Teorema 2.51 *Si X e Y son espacios polacos perfectos, sus álgebras de categoría respectivas son isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, basta demostrar que las álgebras $R(X)$ y $R(Y)$ de abiertos regulares son isomorfas. Vamos a construir un esquema de Suslin en X a partir del resultado siguiente:

> Si U es un abierto regular no vacío en X y $\epsilon > 0$, existe una familia $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos regulares en X contenidos en U y disjuntos dos a dos cuya unión es densa en X.

En efecto, sea $\{d_n\}_{n\in\omega}$ un subconjunto denso de U (que ha de ser infinito, porque X no tiene puntos aislados). Tomamos una bola abierta de centro d_0 contenida en U, de diámetro $< \epsilon$ y cuya clausura no contenga a algún punto de U, y llamamos U_0 al interior de dicha clausura. Entonces $U \setminus \overline{U_0}$ es un abierto regular no vacío. Del mismo modo, podemos obtener un abierto regular $U_1 \subset U \setminus \overline{U_0}$ de diámetro $< \epsilon$ y tal que $d_2 \in U_0 \cup U_1$. Procediendo de este modo obtenemos la sucesión buscada.

Esto nos permite construir un esquema de Suslin $A : \omega^{<\omega} \longrightarrow R(X)$ con las propiedades siguientes:

a) $A(\varnothing) = X$.

b) La unión $\bigcup\limits_{n\in\omega} A(s^\frown n)$ es disjunta y densa en $A(s)$.

c) $A(s)$ tiene diámetro menor que $1/\ell(s)$.

Observemos ahora que si $U \subset X$ es cualquier abierto regular no vacío, existe un $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $A(s) \subset U$. En efecto, U contendrá una bola abierta $B_{1/n}(x)$, para cierto $x \in U$ y cierto $n \in \omega$. Sea $B = B_{1/2n}(x)$. Por la propiedad b), para $s = \varnothing$, existe un $s_1 \in \omega^1$ tal que $B \cap A(s_1) \neq \varnothing$, luego existe un $s_2 \in \omega^2$ (necesariamente $s_1 \subset s_2$) tal que $B \cap A(s_2) \neq \varnothing$ y, razonando de este modo, llegamos a un $s_{2n} \in \omega^{2n}$ tal que $B \cap A(s_{2n}) \neq \varnothing$ y, como el diámetro de $A(s_{2n})$ es menor que $1/2n$, ha de ser $A(s_{2n}) \subset B_{1/n}(x) \subset U$.

Ahora es inmediato que A es una inmersión densa en el sentido de [PC 6.1], luego $R(X) \cong R(\omega^{<\omega})$, en el sentido de [PC 7.15], y esto es válido para cualquier espacio polaco perfecto, luego, si Y es otro cualquiera, tenemos el isomorfismo $R(X) \cong R(Y)$. ■

Podría conjeturarse que el álgebra de medida es isomorfa al álgebra de categoría, pero no es así. Un argumento sencillo que lo demuestra es el siguiente:

Teorema 2.52 $\mathcal{B}_m \ncong \mathcal{B}_c$.

Acabamos de ver que el álgebra de categoría tiene un subconjunto denso numerable. Basta probar que no le sucede lo mismo al álgebra de medida. En efecto, sea $\{[D_n]\}_{n\in\omega}$ un subconjunto numerable (de elementos no nulos) de $\mathcal{B}_m$.Vamos a probar que no es denso. (No importa el espacio polaco X ni la medida unitaria μ con la que construyamos el álgebra.) Como $\mu(D_n) > 0$ podemos tomar un cerrado $E_n \subset D_n$ tal que $0 < \mu(E_n) < 2^{-n-2}$. Tomemos $E = \bigcup\limits_{n\in\omega} E_n$. Así $0 < \mu(E) < 1$, luego $\mu(X \setminus E) > 0$, luego $[X \setminus E] \neq 0$.

Además, $E_n \subset D_n \setminus (X \setminus E)$, luego $0 < [D_n] \wedge [X \setminus E]'$, luego resulta que $[D_n] \not\leq [X \setminus E]$ para todo $n \in \omega$. Esto prueba que el conjunto dado no es denso. ■

Sin embargo, podemos mostrar una diferencia más notable entre ambas álgebras: si construimos $\mathcal{B}_m$ a partir de una medida unitaria μ, es claro que μ induce a su vez una medida $\mu : \mathcal{B}_m \longrightarrow [0,1]$ que es *estrictamente positiva,* es decir, que cumple $\mu(x) = 0$ si y sólo si $x = \mathbb{0}$. Por el contrario:

Teorema 2.53 *No existen medidas estrictamente positivas sobre el álgebra* $\mathcal{B}_c$.

DEMOSTRACIÓN: Para ello introducimos los conceptos siguientes:

Un subconjunto D de un álgebra de Boole $\mathbb{B}$ es *predenso* si su supremo es $\mathbb{1}$.

Notemos que si D es denso, entonces es predenso, pues, si $\bigvee D = b < \mathbb{1}$, no habría elementos de D por debajo de b'.

Un álgebra $\mathbb{B}$ es *débilmente* $\aleph_0$*-distributiva* si para toda sucesión $\{D_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos predensos numerables existe un subconjunto predenso A tal que para todo $a \in A$ y todo $n \in \omega$ existe $C_n \subset A_n$ finito tal que $a \leq \bigvee C_n$.

Ahora demostramos que si un álgebra $\mathbb{B}$ admite una medida estrictamente positiva μ, entonces es débilmente $\aleph_0$-distributiva.

En efecto, sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia de subconjuntos predensos numerables. Si $A_n = \{d_i^n\}_{i\in\omega}$ y llamamos

$$e_i^n = d_i^n \wedge \Big(\bigvee_{j<i} d_j^n\Big)',$$

se cumple que $\bigvee\limits_{j<i} d_j^n = \bigvee\limits_{j<i} e_j^n$, por lo que los conjuntos $A_n' = \{e_i^n\}_{i\in\omega}$ son predensos y sus elementos son incompatibles dos a dos. Además, basta probar que se cumple con ellos la definición de distributividad débil, ya que si $C_n' \subset A_n'$ es finito, existe un i tal que $\bigvee C_n' \leq \bigvee\limits_{j<i} e_j^n = \bigvee\limits_{j<i} d_j^n$, luego los A_n cumplen la definición con $C_n = \{d_j^n\}_{j<i}$.

Equivalentemente, podemos suponer que los elementos de A_n son incompatibles dos a dos. Vamos a probar que

$$A = \{b \in \mathbb{B} \mid \bigwedge n \in \omega \bigvee C \subset A_n (C \text{ finito} \wedge b \leq \bigvee C)\}$$

es denso en $\mathbb{B}$ y, por consiguiente, predenso.

Sea $a \in \mathbb{B}$, $a \neq \mathbb{0}$. Tenemos que $\bigvee\limits_{x\in A_n} x = \mathbb{1}$, luego $\bigvee\limits_{x\in A_n} x \wedge a = a$, luego, teniendo en cuenta que los elementos de A_n son disjuntos dos a dos, $0 < \mu(a) = \sum\limits_{x\in A_n} \mu(x \wedge a)$, luego existe $C_n \subset A_n$ finito tal que

$$\mu(a \wedge \bigvee C_n) = \mu\Big(\bigvee_{x\in C_n} (x \wedge a)\Big) = \sum_{x\in C_n} \mu(x \wedge a) \geq (1 - \frac{1}{2^{n+2}})\mu(a).$$

Así

$$\mu(\bigvee_{n\in\omega} (a \wedge (\bigvee C_n)')) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(a \wedge (\bigvee C_n)') = \sum_{n\in\omega} (\mu(a) - \mu(a \wedge \bigvee C_n))$$

$$\leq \sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+2}}\mu(a) = \frac{1}{2}\mu(a),$$

luego, llamando $b = a \wedge \bigwedge_{n\in\omega} \bigvee C_n$, tenemos que $\mu(b) \geq \mu(a) - \frac{1}{2}\mu(a) > 0$, luego $b \neq \mathbb{O}$ y cumple $b \leq a$ y $b \in A$.

Finalmente probamos que $\mathcal{B}_c$ no es débilmente $\aleph_1$-distributiva. No perdemos generalidad si consideramos, concretamente, el álgebra de categoría del espacio de Baire. Consideramos los abiertos cerrados (luego regulares)

$$D_i^n = \{x \in \mathcal{N} \mid x(n) = i\},$$

de modo que el conjunto $A_n = \{[D_i^n]\}_{i\in\omega}$ es predenso en $\mathcal{B}_c$, pues la unión de los D_i^n (para un n fijo) es $\mathcal{N}$. Vamos a probar que ningún $a \in \mathcal{B}_c$ no nulo cumple la definición de álgebra $\aleph_1$-distributiva, es decir, que si $a = [A]$, donde A es un abierto no vacío en $\mathcal{N}$, no pueden existir conjuntos finitos $C_n \subset \omega$ tales que $A \setminus \bigcup_{i\in C_n} D_i^n$ sea de primera categoría.

En tal caso, $A \setminus \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{i\in C_n} D_i^n$ también sería de primera categoría, luego el conjunto $C = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{i\in C_n} D_i^n$ sería de segunda categoría, pero en realidad es un cerrado de interior vacío. En efecto, si contuviera un abierto, contendría un abierto básico B_s, para un cierto $s \in \omega^n$, luego $B_s \subset \bigcup_{i\in C_n} D_i^n$, pero esto es imposible, pues un $x \in \mathcal{N}$ que esté en el conjunto de la derecha sólo puede tomar un número finito de valores en n, mientras que B_s contiene puntos que toman en n cualquier valor. ■

La regularidad de las medidas de Borel hace que, si A es un conjunto μ-medible, existan conjuntos F y G tales que $F \subset A \subset G$, donde F es F_σ y G es G_δ, y $\mu(G \setminus F) = 0$. Para la propiedad de Baire sucede algo similar, pero con las inclusiones invertidas:

Teorema 2.54 *Si X es un espacio polaco y $B \subset X$ tiene la propiedad de Baire, existen conjuntos $G \subset B \subset F$ tales que G es G_δ y F es F_σ, y además $F \setminus G$ es de primera categoría.*

Demostración: Si P es un conjunto diseminado (está contenido en un cerrado de interior vacío), entonces su clausura es un cerrado de interior vacío, luego es de primera categoría. Un conjunto de primera categoría es unión numerable de conjuntos diseminados, luego está contenido en un F_σ de primera categoría (la unión de las clausuras de los diseminados).

Un conjunto con la propiedad de Baire es de la forma $B = A \,\Delta\, P$, donde A es abierto y P es de primera categoría. Si F es un F_σ de primera categoría que contenga a P, tenemos que

$$B = A \,\Delta\, P = (A \setminus F) \cup (A \cap (F \setminus P) \cup (P \setminus A),$$

donde el primer conjunto es un G_δ y los otros dos son de primera categoría. En definitiva, hemos encontrado un $G \subset B$ tal que G es G_δ y $B \setminus G$ es de primera categoría.

Igualmente $X \setminus B$ contiene un G_δ en estas condiciones, luego $B \subset F$, para un cierto F_σ F tal que $F \setminus B$ es de primera categoría. ■

Terminamos demostrando el análogo al teorema de Fubini para la propiedad de Baire:

Teorema 2.55 (Kuratowski-Ulam) *Sean X, Y dos espacios polacos y sea $A \subset X \times Y$ un conjunto con la propiedad de Baire. Entonces:*

a) El conjunto $A_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$ tiene la propiedad de Baire para todo $x \in X$ salvo un conjunto de primera categoría.

b) A es de primera categoría si y sólo si A_x es de primera categoría para todo $x \in X$ salvo un conjunto de primera categoría.

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que si A es diseminado, entonces A_x es diseminado para "casi todo" $x \in X$.

En efecto, como $\overline{A}$ también es diseminado y $A_x \subset \overline{A}_x$, no perdemos generalidad si suponemos que A es cerrado (con interior vacío). Sea $U = (X \times Y) \setminus A$, que es un abierto denso. Basta probar que U_x es denso para casi todo $x \in X$. Sea $\{V_n\}_{n\in\omega}$ una base de Y formada por abiertos no vacíos. Entonces $U_n = \pi_X[U \cap (X \times V_n)]$ es abierto en X, y es denso, pues si $G \subset X$ es un abierto no vacío, $U \cap (G \times V_n) \neq \varnothing$, luego $U_n \neq \varnothing$. El conjunto $E = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$ tiene complementario de primera categoría, y si $x \in E$ entonces $U_x \cap V_n \neq \varnothing$ para todo n, luego U_x es denso.

De aquí se sigue inmediatamente la implicación $\Rightarrow$ de b). Por otra parte, tenemos que $A = U \,\Delta\, C$, donde U es abierto y C es de primera categoría, pero entonces $A_x = U_x \,\Delta\, C_x$, donde U_x es abierto y C_x es de primera categoría para casi todo $x \in X$, luego A_x tiene la propiedad de Baire para casi todo $x \in X$. Esto prueba a).

Por último, si A_x es de primera categoría para casi todo $x \in X$ pero A no es de primera categoría, entonces $A = U \,\Delta\, C$, con U abierto y C de primera categoría, y U no puede ser vacío, luego contiene un abierto básico $G \times H \subset U$ no vacío. Como G es de segunda categoría, existe $x \in G$ tal que A_x y C_x son de primera categoría. Entonces

$$H \setminus C_x \subset U_x \setminus C_x \subset U_x \,\Delta\, C_x = A_x,$$

luego el abierto no vacío H es de primera categoría, lo cual es absurdo. ■

2.8 Apéndice: La medida de Lebesgue

En este apéndice construiremos la medida de Lebesgue de modo que podamos constatar que toda la construcción no requiere usar el axioma de elección más que en la forma ED. Se trata de la construcción habitual, basada en el teorema de Caratheodory.

Definición 2.56 Un *anillo* $\mathcal{A}$ en un conjunto X es un subconjunto de $\mathcal{P}X$ que cumpla las propiedades siguientes:

a) $\varnothing \in \mathcal{A}$,

b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Notemos que estas propiedades implican que $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$.

En estos términos, un álgebra de Boole en X es un anillo que contiene a X.

Llamaremos $I \subset \mathcal{P}\mathbb{R}$ al conjunto de uniones finitas de intervalos de la forma $]a, b]$, donde $a \leq b$.

El tomar intervalos semiabiertos es un truco para que I sea un anillo:

Teorema 2.57 *I es un anillo en $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN: $\varnothing =]a, a] \in I$. Tomemos $A = \bigcup\limits_{i\in n}]a_i, b_i]$, $B = \bigcup\limits_{j\in m}]c_j, d_j]$ en I.

Evidentemente, $A \cup B \in I$. Aunque en principio no lo requiere la definición de anillo, veamos que $A \cap B \in I$. Para ello observamos que

$$]a, b] \cap]c, d] =]\text{máx}\{a, c\}, \text{mín}\{b, d\}] \in I,$$

luego $A \cap B = \bigcup\limits_{i,j}(]a_i, b_i] \cap]c_j, d_j]) \in I$.

Podemos tomar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $A \cup B \subset]a, b]$. Así

$$A \setminus B = A \cap (]a, b] \setminus B) = A \cap \bigcap_{j\in m} (]a, b] \setminus]c_j, d_j]) = A \cap \bigcap_{j\in m} (]a, c_j] \cup]d_j, b]) \in I.$$

■

Sobre el anillo I podemos definir el "esqueleto" de la medida de Lebesgue:

Teorema 2.58 *Todo $A \in I$ se expresa como unión disjunta de intervalos semiabiertos $A = \bigcup\limits_{j\in n}]a_j, b_j]$ y $\lambda(A) = \sum\limits_{j\in n} (b_j - a_j)$ no depende de la descomposición elegida.*

DEMOSTRACIÓN: Dada una expresión de A como unión de intervalos no necesariamente disjuntos, ordenamos sus extremos:

$$\{a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}\} = \{m_0 < \cdots < m_r\}.$$

Es fácil ver que A es la unión disjunta de todos los intervalos $]m_i, m_{i+1}]$ cuya intersección con A no es vacía. Si tenemos dos expresiones distintas, digamos

$$A = \bigcup_{i\in n}]a_i, b_i] = \bigcup_{j\in m}]c_j, d_j]\,,$$

ordenamos los extremos de ambas expresiones en una sucesión $m_0 < \cdots < m_r$ y nuevamente si $J = \{j \in r \mid]m_j, m_{j+1}] \cap A \neq \varnothing\}$, tenemos que

$$\sum_{i\in n} (b_i - a_i) = \sum_{j\in J} (m_{j+1} - m_j) = \sum_{j\in m} (d_j - c_j).$$

■

Teorema 2.59 $\lambda : I \longrightarrow [0, +\infty[$ *es una medida finitamente aditiva en I, es decir, cumple que $\lambda(\varnothing) = 0$ y si $A, B \in I$ son disjuntos entonces $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.*

DEMOSTRACIÓN: $\lambda(\varnothing) = \lambda(]a, a]) = a - a = 0$. Si $A = \bigcup\limits_{i \in n}]a_i, b_i]$, $B = \bigcup\limits_{j \in m}]c_j, d_j]$ son disjuntos (y las uniones son disjuntas)

$$A \cup B = \bigcup_{i \in n}]a_i, b_i] \bigcup_{j \in m}]c_j, d_j]$$

es una unión disjunta, luego

$$\lambda(A \cup B) = \sum_{i \in n} (b_i - a_i) + \sum_{j \in m} (d_j - c_j) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

■

Nota: En general, es inmediato que toda medida finitamente aditiva λ definida en cualquier anillo $\mathcal{A}$ cumple además que si $A \subset B$, entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ y si $A, B \in \mathcal{A}$ no son necesariamente disjuntos, entonces $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$.

Teorema 2.60 *Si $A \in I$ y $\epsilon > 0$, existe un $B \in I$ tal que $A \subset \mathring{B}$ y $\lambda(B \setminus A) < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A = \varnothing$, entonces $B = \varnothing$ cumple lo pedido. En caso contrario, sea $A = \bigcup\limits_{i \in n}]a_i, b_i]$, donde la unión es disjunta y sea

$$B = \bigcup_{i \in n} \left]a_i, b_i + \tfrac{\epsilon}{n}\right].$$

Así $B \setminus A \subset \bigcup\limits_{i \in n} \left]b_i, b_i + \frac{\epsilon}{n}\right]$, luego $\lambda(B \setminus A) \leq \epsilon$. Además es claro que

$$A \subset \bigcup_{i \in n} \left]a_i, b_i + \tfrac{\epsilon}{n}\right[\subset \mathring{B}.$$

■

Teorema 2.61 *Si $A \in I$ y $\epsilon > 0$, existe un $B \in I$ tal que $\overline{B} \subset A$, $\overline{B}$ es compacto y $\lambda(A \setminus B) < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A = \varnothing$, entonces $B = \varnothing$ cumple lo pedido. En otro caso sea $A = \bigcup\limits_{i \in n}]a_i, b_i]$, donde la unión es disjunta y sea

$$B = \bigcup_{i \in n}]m_i, b_i],$$

donde $a_i < m_i < b_i$ se elige de modo que $m_i - a_i < \epsilon/n$. Así

$$B \setminus A \subset \bigcup_{i \in n}]a_i, m_i], \quad \text{luego } \lambda(B \setminus A) < \epsilon.$$

Además $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{i \in n} [m_i, b_i] \subset A$ y $\overline{B}$ es compacto. ■

Teorema 2.62 *Si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de elementos de I disjuntos dos a dos tales que $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \in I$, entonces*

$$\lambda(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \lambda(A_n).$$

Demostración: Tenemos que

$$\lambda(\bigcup_{n\in\omega} A_n) \geq \lambda(\bigcup_{n\leq m} A_n) = \sum_{n\leq m} \lambda(A_n),$$

luego la serie converge y $\sum\limits_{n\in\omega} \lambda(A_n) \leq \lambda(\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n)$.

Tomemos ahora $\epsilon > 0$. Por el teorema anterior existe $B \in I$ con clausura compacta tal que $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$ y $\lambda(\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \setminus B) < \epsilon/2$.

Similarmente, para cada $n \in \omega$ existe un $C_n \in I$ de manera que $A_n \subset \mathring{C}_n$ y $\lambda(C_n \setminus A_n) < \epsilon/2^{n+2}$. Así

$$\overline{B} \subset \bigcup_{n\in\omega} A_n \subset \bigcup_{n\in\omega} \mathring{C}_n\ .$$

Por compacidad existe un $k \in \omega$ tal que $\overline{B} \subset \bigcup\limits_{n\in k} \mathring{C}_n$. Así

$$\lambda(\bigcup_{n\in\omega} A_n) \leq \lambda(\bigcup_{n\in\omega} (A_n \setminus B)) + \lambda(B) < \frac{\epsilon}{2} + \lambda(\bigcup_{n\in k} C_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n\in k} \lambda(C_n)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n\in k} (\lambda(C_n \setminus A_n) + \lambda(A_n)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n\in k} \frac{\epsilon}{2^{n+2}} + \sum_{n\in k} \lambda(A_n)$$

$$< \sum_{n\in\omega} \lambda(A_n) + \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$, luego

$$\lambda(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \lambda(A_n).$$

■

A partir de aquí podemos razonar en un contexto general:

Definición 2.63 *Una medida en un anillo $\mathcal{A}$ en un conjunto X es una aplicación $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty[$ que cumple $\lambda(\varnothing) = 0$ y, para toda familia $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tal que $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{A}$, se cumple que*

$$\lambda(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \lambda(A_n).$$

Una *medida exterior* en un conjunto X es una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}X \longrightarrow [0, +\infty]$ que cumple:

a) $\mu^*(\varnothing) = 0$.

b) Si $A \subset B \subset X$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

c) Si $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en $\mathcal{P}X$, entonces $\mu^*(\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n) \leq \sum\limits_{n\in\omega} \mu^*(A_n)$.

Teorema 2.64 *Si λ es una medida en un anillo $\mathcal{A}$ en un conjunto X, entonces la aplicación $\mu^* : \mathcal{P}X \longrightarrow [0, +\infty]$ dada por*

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{n\in\omega} \lambda(A_n) \mid A_n \in \mathcal{A},\ A \subset \bigcup_{n\in\omega} A_n\}$$

(con el convenio de que $\text{ínf}\,\varnothing = +\infty$*) es una medida exterior en X que extiende a λ.*

Demostración: Claramente $\mu^*(\varnothing) = 0$ y si $A \subset B \subset X$ se cumple que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos de X tales que $\mu^*(A_n) < +\infty$. Dado $\epsilon > 0$ podemos tomar una sucesión $\{A_m^n\}_{m\in\omega}$ en $\mathcal{A}$ tal que $A_n \subset \bigcup\limits_{m\in\omega} A_m^n$ y

$$\sum_{m\in\omega} \lambda(A_m^n) < \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Al unir estas sucesiones para todo n obtenemos un cubrimiento de $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$ del que deducimos que

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\omega} A_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu^*(A_n) + \epsilon,$$

para todo $\epsilon > 0$, luego se cumple la desigualdad si ϵ y μ^* es una medida exterior. (Para sucesiones con algún n tal que $\mu^*(A_n) = +\infty$ la desigualdad es trivial.)

Si $A \in \mathcal{A}$, como $A \subset A$, tenemos que $\mu^*(A) \leq \lambda(A)$.

Si $A \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$, con $A_n \in \mathcal{A}$, definimos

$$B_n = (A_n \cap A) \setminus \bigcup_{i<n} (A_i \cap A) \in \mathcal{A}.$$

Claramente, los B_n son disjuntos dos a dos y $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n$. Como λ es una medida,

$$\lambda(A) = \sum_{n\in\omega} \lambda(B_n) \leq \sum_{n\in\omega} \lambda(A_n)$$

y, como esto vale para todo cubrimiento de A, tenemos que $\lambda(A) \leq \mu^*(A)$, luego μ^* extiende a A. ■

Definición 2.65 *Si μ^* es una medida exterior en un conjunto X, llamaremos conjuntos μ^*-medibles a los conjuntos $A \subset X$ tales que, para todo $B \subset X$, se cumple que $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$.*

Notemos que siempre se cumple que

$$\mu^*(B) = \mu^*((B \cap A) \cup (B \setminus A)) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

La medibilidad equivale a la desigualdad opuesta.

Teorema 2.66 *Si μ^* es una medida exterior en un conjunto X, el conjunto $\mathcal{M}$ de todos los subconjuntos de X μ^*-medibles es una σ-álgebra, y la restricción μ de μ^* a $\mathcal{M}$ es una medida completa.*

DEMOSTRACIÓN: Trivialmente $\varnothing$, $X \in \mathcal{M}$. También es claro que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $X \setminus A \in \mathcal{M}$. Sean $A, B \in \mathcal{M}$ y $C \subset X$ arbitrario. Entonces

$$\mu^*(C) = \mu^*(C\cap A)+\mu^*(C\setminus A), \qquad \mu^*(C\setminus A) = \mu^*((C\setminus A)\cap B)+\mu^*(C\setminus(A\cup B)),$$

luego

$$\begin{aligned}\mu^*(C) &= \mu^*(C \cap A) + \mu^*((C \setminus A) \cap B) + \mu^*(C \setminus (A \cup B)) \\ &\geq \mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \setminus (C \cup B)),\end{aligned}$$

donde hemos usado que $C\cap(A\cup B) = (C\cap A)\cup((C\setminus A)\cap B)$. Esto prueba que $A \cup B \in \mathcal{M}$. Hasta aquí tenemos probado que $\mathcal{M}$ es un álgebra de conjuntos.

Supongamos ahora que $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de conjuntos μ^*-medibles disjuntos dos a dos y $S_m = \bigcup\limits_{n\in m} A_n$. Entonces, para todo $A \subset X$, se cumple que

$$\mu^*(A \cap S_m) = \sum_{n\in m} \mu^*(A \cap A_n).$$

En efecto, lo probamos por inducción sobre m. Para $m = 1$ es trivial. Sabemos que $S_{m+1} \in \mathcal{M}$, luego

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap S_{m+1}) &= \mu^*(A \cap S_{m+1} \cap S_n) + \mu^*((A \cap S_{m+1}) \setminus S_m) \\ = \mu^*(A \cap S_m) + \mu^*(A \cap A_m) &= \sum_{n\in m} \mu^*(A \cap A_n) + \mu^*(A \cap A_m) \\ &= \sum_{n\in m+1} \mu^*(A \cap A_n).\end{aligned}$$

De aquí deducimos a su vez que

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \mu^*(A \cap A_n).$$

En efecto, llamando $S = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$, como $S_m \subset S$,

$$\mu^*(A \cap S) \geq \mu^*(A \cap S_m) = \sum_{n\in m} \mu^*(A \cap A_n),$$

luego la serie converge y $\mu^*(A \cap S) \geq \sum\limits_{n\in\omega} \mu^*(A \cap A_n)$. La desigualdad opuesta se da por definición de medida exterior.

A su vez de aquí obtenemos que $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{M}$. En efecto, si $A \subset X$ es arbitrario,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap S_m) + \mu^*(A \setminus S_m) \geq \sum_{n\in m} \mu^*(A \cap A_n) + \mu^*(A \setminus S).$$

Como esto vale para todo $m \in \omega$,

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n\in\omega} \mu^*(A \cap A_n) + \mu^*(A \setminus S) = \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A \setminus S).$$

No hemos probado todavía que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra porque estamos suponiendo que los A_n son disjuntos dos a dos, pero, si no lo son, definimos $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i\in n} A_i \in \mathcal{M}$ y tenemos que

$$\bigcup_{n\in\omega} A_n = \bigcup_{n\in\omega} B_n \in \mathcal{M}$$

por el caso de conjuntos disjuntos, ya demostrado. Haciendo $A = X$ en la igualdad

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \mu^*(A \cap A_n),$$

ya demostrada, concluimos que μ^* se restringe a una medida μ en $\mathcal{M}$.

Que μ sea completa significa que si $A \in \mathcal{M}$, $B \subset A$ y $\mu(A) = 0$, entonces $B \in \mathcal{M}$. En efecto, tenemos que $\mu^*(B) = 0$, y entonces es μ^*-medible, pues, para todo $C \subset X$, tenemos que $\mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \setminus B) \leq \mu^*(B) + \mu^*(C) = \mu^*(C)$. ■

Teorema 2.67 (Caratheodory) *Si $\mathcal{A}$ es un anillo en X y $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty[$ es una medida, entonces λ se extiende a una medida definida sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.*

Demostración: Consideramos la medida exterior μ^* dada por el teorema 2.64, que extiende a λ y sea $\mathcal{M}$ su σ-álgebra de conjuntos medibles. Sólo hemos de probar que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Para ello tomamos $A \in \mathcal{A}$ y $B \subset X$ arbitrario. Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia de elementos de A tales que $A \subset \bigcup_{n\in\omega} A_n$.

Entonces $B \cap A \subset \bigcup_{n\in\omega} (A_n \cap A)$ y $B \setminus A \subset \bigcup_{n\in\omega} (A_n \setminus A)$, luego

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{n\in\omega} \lambda(A_n \cap A) + \sum_{n\in\omega} \lambda(A_n \setminus A) = \sum_{n\in\omega} \lambda(A_n),$$

porque λ es una medida. Como esto vale para todo cubrimiento de A, resulta que

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(A),$$

luego $A \in \mathcal{M}$. ■

Teorema 2.68 *Existe una única medida de Borel m en $\mathbb{R}$ tal que, para todo $a \leq b$, se cumple que $m([a, b]) = b - a$.*

Demostración: Consideramos la medida λ sobre el anillo I definida en el teorema 2.58, sea μ^* la medida exterior definida a partir de λ por el teorema 2.64

y sea m su restricción a la σ-álgebra $\mathcal{M}$ de conjuntos μ^*-medibles. Así m es una medida que extiende a λ. Como

$$]a,b[= \bigcup_{n\geq n_0}]a, b-1/n],$$

resulta que $\mathcal{M}$ contiene a todos los intervalos abiertos acotados, luego también a todos los abiertos, luego también a todos los conjuntos de Borel. Por lo tanto la restricción de m a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es una medida de Borel en $\mathbb{R}$ que cumple $m(]a,b]) = b-a$. De aquí se sigue inmediatamente que m es continua y, por consiguiente, que se cumple la igualdad del enunciado.

Toda medida de Borel μ que cumpla la condición del enunciado es continua y, por tanto, que $\mu(]a,b[) = b-a$ siempre que $a < b$, por lo que coincide con m sobre los intervalos abiertos acotados, luego también sobre todos los abiertos, y entonces es igual a m por el teorema 2.38. ■

Definición 2.69 La *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}$ es la medida m dada por el teorema anterior.

Nota La medida μ^* a partir de la cual hemos construido la medida de Lebesgue recibe el nombre de *medida exterior de Lebesgue.* De acuerdo con las definiciones que hemos dado, los conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$ serían los conjuntos de la σ-álgebra que completa a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ respecto de la medida de Lebesgue, es decir, los conjuntos de la forma $B \cup N$, donde $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $N \subset C$, donde $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $m(C) = 0$. Ahora bien, conviene observar que estos conjuntos son precisamente los conjuntos μ^*-medibles, de modo que al restringir μ^* a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y luego completar la medida recuperamos de nuevo todos los conjuntos μ^*-medibles y así vemos que no estamos restringiendo gratuitamente la σ-álgebra $\mathcal{M}$ sobre la que es posible calcular la medida de Lebesgue.

En efecto, dado $A \in \mathcal{M}$, sea $A_n = A \cap [-n,n]$ y $A'_n = [-n,n] \setminus A$, de modo que ambos conjuntos tienen medida finita. Por la definición de μ^*, dado $\epsilon > 0$, existe $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $A'_n \subset B'_n$ y

$$m(B'_n \setminus A'_n) = \mu^*(B'_n) - \mu^*(A'_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Entonces $B_n = [-n,n] \setminus B'_n \subset A_n$ y $m(A_n \setminus B_n) = m(B'_n \setminus A'_n) < \epsilon/2^{n+1}$. Por lo tanto, si llamamos $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a la unión de los B_n, tenemos que $B \subset A$ y $m(A \setminus B) \leq \epsilon$. Aplicando esto a $\epsilon = 1/n$ obtenemos conjuntos $B_n \subset A$ que cumplen $m(B_n \setminus A) < 1/n$ y, tomando la unión, obtenemos un $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $B \subset A$ y $m(A) = m(B)$. Así $A = B \cup N$, donde $N = A \setminus B$ es nulo. Un razonamiento similar al anterior a partir de la definición de μ^* prueba que existe $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $N \subset C$ y $m(C) = 0$. Así pues, A está en la compleción de $\mathcal{M}$. Como m es completa en $\mathcal{M}$, el recíproco es inmediato. ■

Para la construcción de la integral de Lebesgue o del producto de medidas remitimos a [AM capítulos VII y VIII], pues la exposición es totalmente elemental y permite comprobar sin dificultad que no requiere más usos de AE que los que se derivan de ED.

Capítulo III

El axioma de elección

En el capítulo anterior hemos demostrado que los conjuntos de Borel de un espacio polaco cumplen —entre otras— tres propiedades:

- Son numerables o bien contienen un subconjunto perfecto (y en este caso su cardinal es $2^{\aleph_0}$).
- Son medibles (para cualquier medida de Borel).
- Tienen la propiedad de Baire.

Ciertamente, la segunda propiedad es trivial, pero las tres se prestan a estudiar la cuestión no trivial de si las poseen también otros conjuntos más generales que los conjuntos de Borel.[1] Por ejemplo, Cantor estaba interesado en demostrar que la primera propiedad la cumplen todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Obviamente, esto es imposible si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ (que era precisamente lo que Cantor trataba de refutar), pero a continuación veremos que —sin necesidad de suponer nada sobre el cardinal de $\mathbb{R}$— cualquier espacio polaco no numerable posee subconjuntos que no cumplen estas tres propiedades. Eso sí, todos los ejemplos que vamos a encontrar requieren esencialmente el axioma de elección.

3.1 El ejemplo de Vitali

El ejemplo clásico de conjunto no medible Lebesgue se debe a Vitali, y aprovecha también para la propiedad de Baire:

Teorema 3.1 (AE) *Existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ no medible Lebesgue y sin la propiedad de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos en $\mathbb{I} = [0, 1]$ la relación de equivalencia R dada por $a \, R \, b \leftrightarrow b - a \in \mathbb{Q}$, y sea $V \subset \mathbb{I}$ un conjunto que posea exactamente

[1]No estamos preguntado si existen conjuntos más generales que los de Borel con estas propiedades, pues, eso es trivialmente cierto, sino si podemos “describir” clases más generales de conjuntos que las posean.

un punto en cada clase de equivalencia.[2] Vamos a probar que V no es medible Lebesgue ni tiene la propiedad de Baire.

En realidad demostraremos algo más general: el conjunto de Vitali V no es medible para ninguna medida de Borel $\mu \neq 0$ definida en $\mathbb{R}$ respecto a la que los intervalos acotados tengan medida finita y que sea invariante por traslaciones,[3] es decir, tal que si $A \in \mathcal{M}_\mu$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $a+A \in \mathcal{M}_\mu$ y $\mu(a+A) = \mu(A)$. En particular, no sólo existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ no medible Lebesgue, sino que la medida de Lebesgue no puede extenderse a una medida definida sobre toda el álgebra $\mathcal{P}\mathbb{R}$ de modo que la extensión siga siendo invariante por traslaciones.

Sea $\{r_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}$ y sea $V_n = r_n + V$. La definición de V hace que los conjuntos V_n sean disjuntos dos a dos y además

$$[0,1] \subset \bigcup_{n\in\omega} V_n \subset [-1,2].$$

Si V fuera medible para la medida μ, como suponemos que es invariante por traslaciones, resulta que $\mu(V_n) = \mu(V)$ y, como la unión es disjunta,

$$\mu([0,1]) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(V) \leq \mu([-1,2]) < +\infty.$$

La segunda desigualdad implica que $\mu(V) = 0$, y la primera nos da entonces que $\mu([0,1]) = 0$. La invarianza por traslaciones implica entonces que $\mu = 0$.

Supongamos ahora que V tiene la propiedad de Baire, y sea $A \subset \mathbb{R}$ un abierto tal que $V \Delta A$ sea de primera categoría. Si $A = \varnothing$, entonces $V\Delta A = V$ es de primera categoría. Si, por el contrario $A \neq \varnothing$, tomamos un intervalo no vacío $]a,b[\subset A$. Si $q \in \mathbb{Q}$ es cualquier número racional no nulo, por construcción de V tenemos que $V \cap (q+V) = \varnothing$, luego

$$]a,b[\cap (q+V) \subset]a,b[\setminus V \subset A \setminus V \subset V\Delta A,$$

luego $]a,b[\cap(q+V)$ es de primera categoría y, como la traslación $x \mapsto x-q$ es un homeomorfismo, también lo será su imagen por ésta, es decir, $]a-q, b-q[\cap V$ es de primera categoría.

Ahora bien, es claro que $V = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}}]a,b[\cap (q+V)$, luego concluimos que, en cualquier caso, V es de primera categoría. Ahora bien,

$$[0,1] \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (q+V),$$

y todos los trasladados $q+V$ son de primera categoría, luego $[0,1]$ también lo es, y eso es absurdo. ■

En lugar de un ejemplo que carezca a la vez de las dos propiedades, podemos encontrar ejemplos separados:

[2]Notemos que el conjunto cociente $\mathbb{I}/R$ es no numerable, por lo que esta elección no puede justificarse (o, por lo menos, no es evidente que pueda justificarse —y puede probarse que no se puede—) a partir de ED. Más concretamente, para construirlo basta suponer que $\mathbb{R}$ puede ser bien ordenado.

[3]Notemos que el hecho de que la medida de Lebesgue sea la única medida de Borel en $\mathbb{R}$ que cumple $m([a,b]) = b-a$ implica inmediatamente que es invariante por traslaciones.

Teorema 3.2 (AE) *Existen conjuntos con la propiedad de Baire que no son medibles Lebesgue y conjuntos medibles Lebesgue que no tienen la propiedad de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar el conjunto de Vitali V construido en la demostración del teorema anterior y los conjuntos A y B dados por el teorema 2.46. Así $V = (V \cap A) \cup (V \cap B) = A' \cup B'$, donde A' es nulo y B' es de primera categoría. Como la unión de ambos no es medible ni tiene la propiedad de Baire, A' ha de ser medible sin la propiedad de Baire y B' ha de ser no medible con la propiedad de Baire. ■

3.2 Conjuntos finales

Definición 3.3 Un conjunto $A \subset \mathcal{C}$ es un *conjunto final* si cuando $x \in A$ e $y \in \mathcal{C}$ cumple $x|_n = y|_n$ para cierto $n \in \omega$, entonces $y \in A$.

Consideramos en $\mathcal{C}$ la única medida de Borel m que sobre los abiertos básicos $B_s = \{x \in \mathcal{C} \mid x|_{\ell(s)} = s\}$ (donde $s \in 2^{<\omega}$) viene dada por[4]

$$m(B_s) = 2^{-\ell(s)}. \tag{3.1}$$

La unicidad implica que si $i \in \omega$ y $T_i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es el homeomorfismo dado por

$$T_i(x)(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \neq i, \\ 1 - x(n) & \text{si } n = i, \end{cases}$$

se cumple que $m(T_i[A]) = m(A)$ para todo $A \subset \mathcal{C}$ medible. En efecto, la aplicación dada por $m'(A) = m(T_i[A])$ es una medida de Borel en $\mathcal{C}$ que cumple la condición (3.1), luego es $m' = m$.

Teorema 3.4 *Si $A \subset \mathcal{C}$ es un conjunto final con la propiedad de Baire, o bien A o bien $\mathcal{C} \setminus A$ es de primera categoría.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que A no es de primera categoría. Entonces existe un abierto no vacío U tal que $U \,\Delta\, A$ es de primera categoría. Sea $s \in 2^n$ tal que $B_s \subset U$, con lo que $B_s \setminus A$ es de primera categoría. Para cada $t \in 2^n$, una composición de a lo sumo n homeomorfismos T_i transforma B_s en B_t y, como A es final, resulta invariante por todos ellos, luego existe un homeomorfismo de $\mathcal{C}$ que transforma $T_s \setminus A$ en $T_t \setminus A$, luego este conjunto es de primera categoría. Por consiguiente,

$$\mathcal{C} \setminus A = \bigcup_{t \in 2^n} (B_t \setminus A)$$

también es de primera categoría. ■

[4]Una medida que cumpla esto cumple también que $m(C_J(Y)) = |Y|/2^{|J|}$, donde $C_J(Y) = \{f \in \mathcal{C} \mid f|_J \in Y\}$, para todo $J \subset \omega$ y todo $Y \subset 2^J$, luego es la medida dada por [PC 10.12].

Teorema 3.5 *Si $A \subset \mathcal{C}$ es un conjunto final medible, entonces $m(A) = 0$ o bien $m(A) = 1$.*

Demostración: Al igual que hemos visto en la prueba del teorema anterior, dados $s, t \in 2^n$, existe una composición T de homeomorfismos T_i que transforma B_s en B_t. Dichos homeomorfismos conservan la medida y, como A es final, queda invariante por ellos. Así pues,

$$m(A \cap B_t) = m(T[A \cap B_s]) = m(A \cap B_s).$$

Puesto que $A = \bigcup_{s \in 2^n} (A \cap B_s)$ y la unión es disjunta, tenemos que

$$m(A) = \sum_{t \in 2^n} m(A \cap B_t) = 2^n\, m(A \cap B_s).$$

Así pues, para todo $s \in 2^n$,

$$m(A \cap B_s) = 2^{-n}\, m(A) = m(B_s)\, m(A).$$

Si $m(A) > 0$, la medida en $\mathcal{C}$ dada por

$$m'(X) = \frac{m(X \cap A)}{m(A)}$$

cumple la condición de unicidad (3.1), luego $m(X \cap A) = m(X)\, m(A)$ para todo $X \subset \mathcal{C}$ medible (y esto es cierto igualmente si $m(A) = 0$). Tomando en particular $X = A$ tenemos que $m(A) = m^2(A)$, luego $m(A) = 0, 1$. ■

En particular, si $\mathcal{F}$ es un filtro en ω, podemos considerar el conjunto

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\chi_F \mid F \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{C}$$

y, si $\mathcal{F}$ contiene a los conjuntos cofinitos, $\tilde{\mathcal{F}}$ es claramente final.

Teorema 3.6 *Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro no principal en ω, entonces $\tilde{\mathcal{F}}$ es un subconjunto no medible de $\mathcal{C}$ y sin la propiedad de Baire.*

Demostración: Consideremos el homeomorfismo $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ dado por $T(x)(i) = 1 - x(i)$. Es inmediato que $T[\tilde{\mathcal{F}}] = \mathcal{C} \setminus \tilde{\mathcal{F}}$. Por lo tanto, $\tilde{\mathcal{F}}$ no puede tener la propiedad de Baire, ya que, al ser un conjunto final, o bien $\tilde{\mathcal{F}}$ o bien $T[\tilde{\mathcal{F}}]$ tendría que ser de primera categoría, pero, como T es un homeomorfismo, de hecho ambos tendrían que serlo y $\mathcal{C}$ también lo sería.

Similarmente, si $\tilde{\mathcal{F}}$ fuera medible, $T[\tilde{\mathcal{F}}]$ también lo sería y con la misma medida, pues T conserva la medida (es inmediato que $m'(X) = m(T[X])$ es una medida de Borel en $\mathcal{C}$ que cumple (3.1), luego $m' = m$). Por consiguiente, tendríamos que $m(\tilde{\mathcal{F}}) = m(T[\tilde{\mathcal{F}}]) = 1 - m(\tilde{\mathcal{F}})$, luego $m(\tilde{\mathcal{F}}) = 1/2$, cuando, al ser $\tilde{\mathcal{F}}$ un conjunto final, hemos visto que su medida ha de ser 0 o 1, contradicción. ■

3.3 Conjuntos de Bernstein

En cuanto a la propiedad de poseer subconjuntos perfectos, es evidente que si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ entonces cualquier subconjunto B de un espacio polaco X tal que $|B| = \aleph_1$ es un subconjunto no numerable de X que no tiene subconjuntos perfectos, pero podemos encontrar ejemplos sin necesidad de negar la hipótesis del continuo:

Definición 3.7 Un subconjunto B de un espacio polaco X es un *conjunto de Bernstein* si tanto B como $X \setminus B$ cortan a todo subconjunto perfecto de X y ambos tienen cardinal $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Teorema 3.8 *Todo espacio polaco no numerable que admita un buen orden contiene un conjunto de Bernstein.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio polaco no numerable que pueda ser bien ordenado. Sea $\{P_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ una enumeración (con repeticiones, si es preciso) de los subconjuntos perfectos de X, donde $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ (teorema 2.11). Definimos por recurrencia dos sucesiones $\{p_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ y $\{q_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ de modo que p_α, q_α sean dos elementos de P_α distintos entre sí y distintos de todos los $\{p_\delta\}_{\delta<\alpha}$ y $\{q_\delta\}_{\delta<\alpha}$. Esta elección es posible[5] porque $|P_\alpha| = \mathfrak{c}$. Así, basta tomar $B = \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{c}\}$, de modo que $\{q_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{c}\} \subset X \setminus B$. Es claro que B es un conjunto de Bernstein. ■

Los conjuntos de Bernstein también son ejemplos de conjuntos no medibles Lebesgue y sin la propiedad de Baire. Al contrario de lo que sucede con los ejemplos considerados anteriormente, este hecho es válido en cualquier espacio polaco:

Teorema 3.9 *Sea X un espacio polaco no numerable y sea $\mu \neq 0$ una medida de Borel continua en X. Si $B \subset X$ es un conjunto de Bernstein, entonces todo subconjunto de B que sea μ-medible es nulo, y si tiene la propiedad de Baire es de primera categoría. En particular, los conjuntos de Bernstein no son medibles ni tienen la propiedad de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A \subset B$ es un conjunto medible con medida no nula (resp. con la propiedad de Baire y de segunda categoría), entonces A contiene un subconjunto de Borel también con medida no nula (resp. de segunda categoría, por 2.54), el cual, al ser no numerable (porque la medida es continua), contiene a su vez un subconjunto perfecto, lo cual es imposible.

Así, si B fuera medible, su complementario también lo sería y tendríamos que $\mu(X) = 0$. Igualmente, si B tuviera la propiedad de Baire X sería de primera categoría. ■

La existencia de conjuntos no numerables sin subconjuntos perfectos puede demostrarse a partir de una consecuencia muy concreta de AE:

[5] Aquí es donde usamos que X puede ser bien ordenado.

Teorema 3.10 *Si* $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$*, entonces todo espacio polaco no numerable contiene un subconjunto no numerable sin subconjuntos perfectos.*

Demostración: Si $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$, entonces $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, luego todo espacio polaco no numerable tiene cardinal $\aleph_1$ y, en particular, admite un buen orden. Por lo tanto, la conclusión se sigue de 3.8. Si $2^{\aleph_0} \not\leq \aleph_1$, entonces, por hipótesis, todo espacio polaco no numerable (que tiene cardinal $2^{\aleph_0}$) tiene un subconjunto de cardinal $\aleph_1$, el cual no puede tener un subconjunto perfecto, ya que entonces sería $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$. ■

3.4 Bases de Hamel

Una *base de Hamel*[6] es simplemente una base de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Es bien conocido que el axioma de elección (usualmente a través del lema de Zorn) permite probar que todo espacio vectorial tiene una base. Ahora vamos a probar que la mera existencia de una base de Hamel implica la existencia de un conjunto no medible Lebesgue. Nos basamos en el teorema siguiente:

Teorema 3.11 (Steinhaus) *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *es un conjunto medible Lebesgue de medida no nula, entonces el conjunto* $A - A = \{a - b \mid a, b \in A\}$ *contiene un entorno de* 0*.*

Demostración: Tomando un subconjunto, no perdemos generalidad si suponemos que $0 < m(A) < \infty$. Como $m(A) < 2m(A)$, existen $K \subset A \subset V$ tales que K es compacto, V es abierto y $m(V) < 2m(K)$. La distancia de K a $\mathbb{R}^n \setminus V$ no es nula, luego, tomando una bola U de centro cero y radio dicha distancia, tenemos que $K+U \subset V$. Así, si $u \in U$, no puede ser $K \cap (u+K) = \varnothing$, pues en tal caso $2m(K) = m(K) + m(u + K) \leq m(V)$, contradicción. Por lo tanto, existen $k, k' \in K \subset A$ tales que $k = u + k'$, luego $U \subset A - A$. ■

Teorema 3.12 *Si existe una base de Hamel, entonces existe un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *no medible Lebesgue.*

Demostración: Si $B \subset \mathbb{R}$ es una base de Hamel, sea $b \in B$ y consideremos el subespacio vectorial $A = \langle B \setminus \{b\} \rangle$ generado por $B \setminus \{b\}$ sobre $\mathbb{Q}$. Veamos que A no es medible Lebesgue. Claramente

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (qb + A),$$

luego si A es medible, como $m(qb + A) = m(A)$, tiene que ser $m(A) > 0$. Por el teorema anterior existe un entorno U de 0 tal que $U \subset A - A$. Podemos

[6] En algunos contextos la expresión "base de Hamel" se usa más en general, incluso para referirse a cualquier base de cualquier espacio vectorial, pero aquí la usaremos en este sentido específico.

tomar $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ suficientemente pequeño para que $qb \in U$, y entonces existen $x, y \in A$ tales que $qb = x - y$, luego $b \in A$, lo que contradice la independencia lineal de B. Esto prueba que A no es medible Lebesgue. ■

En contra de lo que podría parecer a la vista del teorema precedente, no es cierto que una base de Hamel B sea necesariamente no medible Lebesgue. Lo que sí podemos decir a partir de la prueba es que si es medible Lebesgue, entonces su medida es nula. En efecto, si $m(B) > 0$ entonces $A_0 = B \setminus \{b\}$ también tiene medida positiva, luego por el teorema de Steinhaus $A_0 - A_0$ contiene un entorno de 0, luego lo mismo le sucede a $A - A \supset A_0 - A_0$ (donde A es el espacio vectorial definido en el teorema anterior), y este hecho es lo único que realmente se usa en el teorema para llegar a una contradicción.

Para probar (AE) que existe una base de Hamel medible Lebesgue basta tener en cuenta el teorema 1.40, según el cual el conjunto de Cantor C cumple $C + C = [0, 2]$. Esto implica que C es un sistema generador de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, pues para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $q \in \mathbb{Q}$ no nulo tal que $\frac{1}{q}x \in [0, 2]$, luego $x = qc_1 + qc_2$, con $c_1, c_2 \in C$. Usando AE podemos afirmar que todo sistema generador de un espacio vectorial contiene una base, luego C contiene una base de Hamel, y como C es medible Lebesgue y tiene medida nula (teorema 2.42), concluimos que lo mismo vale para la base que contiene. Reunimos estos hechos y algunos más en el teorema siguiente:

Teorema 3.13 (AE) *Se cumple:*

a) Existen bases de Hamel, todas ellas tienen cardinal $2^{\aleph_0}$ y, si son medibles Lebesgue, entonces tienen medida nula.

b) Existen bases de Hamel medibles Lebesgue y bases de Hamel no medibles Lebesgue.

DEMOSTRACIÓN: La existencia de bases de Hamel es una aplicación del lema de Zorn que suponemos conocida. Para calcular el cardinal de una base B, llamamos $I = \mathbb{Q}^{<\omega}$ al conjunto de sucesiones finitas de números racionales. Para cada $s \in I$ definimos $f_s : \mathbb{R}^{\ell(s)} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f_s(k) = \sum_i s(i)k(i)$.

Aunque aquí no tiene importancia, conviene señalar que f_s es una aplicación continua. Sea $G_s = f_s[B^{\ell(s)}]$. Entonces, que B sea un sistema generador equivale a que $\bigcup_{s\in I} G_s = \mathbb{R}$.

Así, si B es infinita, $|B| \leq |\mathbb{R}| \leq \sum_{x\in I} |G_s| \leq \sum_{x\in I} |B|^{\ell(s)} \leq \aleph_0|B| = |B|$, luego $|B| = |\mathbb{R}|$. Si B fuera finita el mismo argumento daría que $\mathbb{R}$ es numerable, luego no puede darse el caso.

Sólo falta probar que existen bases de Hamel no medibles Lebesgue. Para ello modificaremos ligeramente la prueba del teorema 3.8. El planteamiento es el mismo: partimos de una enumeración $\{P_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ de los subconjuntos perfectos de $\mathbb{R}$. Definimos por recurrencia una sucesiones $\{p_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ de modo que $p_\alpha \in P_\alpha$ no pertenezca al subespacio vectorial generado (sobre $\mathbb{Q}$) por todos los $\{p_\delta\}_{\delta<\alpha}$.

Esta elección es posible porque $|P_\alpha| = \mathfrak{c}$, mientras que (por el mismo argumento con el que hemos calculado el cardinal de una base de Hamel) el cardinal del espacio generado por las dos sucesiones es $\leq \aleph_0|\alpha| < \mathfrak{c}$.

El conjunto $B_0 = \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{c}\}$ es así un conjunto linealmente independiente que corta a todos los subconjuntos perfectos de $\mathbb{R}$. Ahora usamos que, por el lema de Zorn, todo conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial está contenido en una base. Esto nos da en nuestro caso una base de Hamel B que contiene a B_0, luego sigue cortando a todos los subconjuntos perfectos de $\mathbb{R}$. Esta base B es necesariamente no medible Lebesgue, pues si lo fuera tendría medida 0, luego $\mathbb{R} \setminus B$ sería un conjunto medible no nulo, luego contendría un subconjunto perfecto, contradicción. ■

Nota Con la notación del teorema precedente, el conjunto no medible construido en el teorema 3.12 es de la forma

$$A = \bigcup_{s \in I} f_s[(B \setminus \{b\})^{\ell(s)}],$$

es decir, una unión numerable de imágenes de $(B \setminus \{b\})^{\ell(s)}$ por aplicaciones continuas $f_s : \mathbb{R}^{\ell(s)} \longrightarrow \mathbb{R}$. Este hecho tendrá relevancia más adelante. ■

3.5 Filtros rápidos

El propósito de esta sección es demostrar un teorema análogo a 3.10 para conjuntos medibles, lo cual es mucho más delicado. Para ello demostraremos una versión de 3.6 con una hipótesis más débil. Vamos a necesitar varios resultados técnicos, el primero de los cuales es el siguiente (consideramos en $\mathcal{C}$ la misma medida m que considerábamos en la sección 3.2):

Teorema 3.14 *Sea $A \subset \mathcal{C}$ un cerrado de medida positiva. Entonces existe un cerrado $B \subset A$ de medida positiva y una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\omega}$ de números naturales tal que*

$$\bigwedge s \in 2^{n_k}(B_s \cap B \neq \varnothing \rightarrow m(B_s \cap B) \geq (1 - 2^k)m(B_s)).$$

Demostración: Vamos a construir una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\omega}$ de números naturales y una sucesión decreciente $\{C_k\}_{k\in\omega}$ de cerrados tales que

$$m(C_k \setminus C_{k+1}) \leq m(A)2^{-n_k-k-2} \tag{3.2}$$

y

$$C_k = \bigcup_{s \in T_k} (B_s \cap C_{k-1}), \tag{3.3}$$

donde

$$T_k = \{s \in 2^{n_k} \mid m(B_s \cap C_{k-1}) \geq (1 - 2^{-k-1})\, m(B_s)\}. \tag{3.4}$$

Tomamos $C_0 = A$ y $n_0 = 1$. Supongamos construidos C_ky n_k, y veamos que existe $n_{k+1} > n_k$ tal que

$$N = |\{s \in 2^{n_{k+1}} \mid B_s \cap C_k \neq \varnothing\}| \leq 2^{n_{k+1}}(m(C_k) + m(A)\, 2^{-n_k-2k-4}).$$

Para ello tomamos un abierto G tal que $C_k \subset G$ y

$$m(G) \leq m(C_k) + m(A)\, 2^{-n_k-2k-4}.$$

Como C_k es compacto, podemos exigir que G sea unión de un número finito de abiertos básicos, así como que todos ellos corten a C_k. También podemos suponer que todos ellos son de la forma B_s con $s \in 2^{n_{k+1}}$, para un $n_{k+1} > n_k$. Como los abiertos de este tipo son disjuntos dos a dos, G será, más precisamente, la unión de todos los abiertos básicos B_s con $s \in 2^{n_k+1}$ tales que $B_s \cap C_k \neq \varnothing$, y el numero de tales abiertos es el que hemos llamado N.

Así pues, $m(G) = N/2^{n_{k+1}}$, luego

$$N = 2^{n_{k+1}}\, m(G) \leq 2^{n_{k+1}}(m(C_k) + m(A)\, 2^{-n_k-2k-4}), \tag{3.5}$$

como había que probar. Definimos C_{k+1} mediante (3.3), con lo que claramente es cerrado, $C_{k+1} \subset C_k$ y

$$m(C_{k+1}) \leq |T_{k+1}| 2^{-n_{k+1}}. \tag{3.6}$$

Además

$$C_k \setminus C_{k+1} \subset \bigcup \{B_s \cap C_k \mid s \in 2^{n_{k+1}} \setminus T_{k+1} \wedge B_s \cap C_k \neq \varnothing\}.$$

Entonces

$$m(C_k) = m(C_{k+1}) + m(C_k \setminus C_{k-1}) \leq [\text{por } (3.4)]$$

$$m(C_{k+1}) + \sum\{(1 - 2^{-k-2})2^{-n_{k+1}} \mid s \in 2^{n_{k+1}} \setminus T_{k+1} \wedge B_s \cap C_k \neq \varnothing\}$$
$$\leq m(C_{k+1}) + (1 - 2^{-k-2})2^{-n_{k+1}}(N - |T_{k+1}|) \leq [\text{por } (3.6)]$$
$$m(C_{k+1}) + (1 - 2^{-k-2})2^{-n_{k+1}}(N - 2^{n_{k+1}} m(C_{k+1}))$$
$$= m(C_{k+1}) + (1 - 2^{-k-2})(N 2^{-n_{k+1}} - m(C_{k+1}))$$
$$= 2^{-k-2} m(C_{k+1}) + (1 - 2^{-k-2}) N 2^{-n_{k+1}}.$$

Por lo tanto

$$2^{-k-2} m(C_{k+1}) \geq m(C_k) - N 2^{-n_{k+1}}(1 - 2^{-k-2}) \geq [\text{por } (3.5)]$$

$$m(C_k) - 2^{n_{k+1}}(m(C_k) + m(A)\, 2^{-n_k-2k-4}) 2^{-n_{k+1}}(1 - 2^{-k-2})$$
$$= -m(A)\, 2^{-n_k-2k-4} + 2^{-k-2} m(C_k),$$

luego
$$m(C_{k+1}) \geq m(C_k) - m(A)\, 2^{-n_k-k-2}$$
de donde se sigue (3.2).

Ahora definimos $B = \bigcap\limits_{k\in\omega} C_k$, que obviamente es cerrado. Así

$$C_k \setminus B = \bigcup_{r\geq k}(C_r \setminus C_{r+1}) \rightarrow m(C_k \setminus B) = \sum_{r\geq k} m(C_r \setminus C_{r+1})$$
$$\leq \sum_{r\geq k} m(A)\, 2^{-n_r-r-2} = m(A)\, 2^{-n_k-k-1} \sum_{r\geq k} 2^{-(n_r-n_k)-(r-k)-1}$$
$$= m(A)\, 2^{-n_k-k-1} \sum_{r\geq 0} 2^{-(n_{r+k}-n_k)-r-1} \leq m(A)\, 2^{-n_k-k-1} \sum_{r\geq 0} 2^{-r-1}$$
$$= m(A)\, 2^{-n_k-k-1}.$$

Así pues,
$$m(B) = m(C_k) - m(C_k \setminus B) \geq m(C_k) - m(A)\, 2^{-n_k-k-1}.$$

Para $k = 0$ queda $m(B) \geq m(A) - m(A)2^{-2} > 0$.

Si $s \in 2^{n_k}$ y $B_s \cap B \neq \varnothing$, entonces $B_z \cap C_k \neq \varnothing$, luego $s \in T_k$, luego
$$m(B_s \cap C_k) = m(B_s \cap \bigcup_{s'\in T_k}(B_{s'} \cap C_{k-1})) = m(B_s \cap C_{k-1})$$
$$[\text{por } (3.4)] \geq (1 - 2^{-k-1})\, m(B_s) \geq (1 - 2^{-k})\, m(B_s),$$
como había que probar. ■

Definición 3.15 Un filtro $\mathcal{F}$ en ω es *rápido* si para toda $\phi : \omega \longrightarrow \omega$ creciente existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\bigwedge k \in \omega\ |F \cap \phi(k)| \leq k$.

En primer lugar demostramos que el teorema 3.6 es válido para filtros rápidos en lugar de ultrafiltros no principales:

Teorema 3.16 *Si $\mathcal{F}$ es un filtro rápido, entonces $\tilde{\mathcal{F}}$ no es medible.*

Demostración: Supongamos que $\tilde{\mathcal{F}}$ es medible. Sea $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ el homeomorfismo definido al principio de la prueba del teorema 3.6. Es inmediato que $\tilde{\mathcal{F}} \cap T[\tilde{\mathcal{F}}] = \varnothing$ y, si $\tilde{F}$ es medible, ambos conjuntos tienen la misma medida, luego $m(\tilde{F}) \leq 1/2$.

Existe un abierto G tal que $\tilde{\mathcal{F}} \subset G$ y $m(G) < 1$, luego $A = \mathcal{C} \setminus G$ es un cerrado de medida positiva tal que $\tilde{\mathcal{F}} \cap A = \varnothing$. Sea $B \subset A$ y $\{n_k\}_{k\in\omega}$ según el teorema anterior. Sea $\phi : \omega \longrightarrow \omega$ la aplicación (creciente) dada por $\phi(k) = n_{k+2}$. Como $\mathcal{F}$ es rápido existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\bigwedge k \in \omega\ |F \cap n_{k+2}| \leq k$.

Vamos a construir $s_k \in 2^{n_k}$ tal que, para todo $k \in \omega$,
$$s_k = s_{k+1}|_{s_k}, \qquad \chi_F|_{n_k} \leq s_k, \qquad B_{s_k} \cap B \neq \varnothing.$$

Por la propiedad de F tenemos $|F \cap n_2| \leq 0$, luego $\chi_F|_{n_0} = 0$, luego basta tomar $z_0 \in 2^{n_0}$ tal que $B_{z_0} \cap B \neq \varnothing$ y s_0 cumple lo pedido.

Supongamos construido s_k. Como $B_{s_k} \cap B \neq \varnothing$, tenemos que

$$m(B_{s_k} \cap B) \geq (1 - 2^{-k})m(B_{s_k}).$$

Sea $P = \{s \in 2^{n_{k+1}} \mid s|_{n_k} = s_k \wedge \bigwedge m \in F \cap n_{k+1}\ s(m) = 1\}$. Así

$$|P| = 2^{n_{k+1} - n_k - |(n_{k+1} \setminus n_k) \cap F|}, \qquad \text{luego}$$

$$\begin{aligned} m(\{u \in B_{s_k} \mid \chi_F|_{n_{k+1}} \leq u|_{n_{k+1}}\}) &= m(\{u \in B_{s_k} \mid u|_{n_{k+1}} \in P\}) \\ = 2^{n_{k+1} - n_k - |(n_{k+1} \setminus n_k) \cap F| - n_{k+1}} &= 2^{-n_k - |(n_{k+1} \setminus n_k) \cap F|} \\ = m(B_{s_k}) 2^{-|(n_{k+1} \setminus n_k) \cap F|} &\geq m(B_{s_k})\, 2^{-|n_{k+1} \cap F|} \geq m(B_{s_k})\, 2^{-k+1} \end{aligned}$$

Si este conjunto fuera disjunto con $B_{s_k} \cap B$, su unión tendría medida

$$\geq (1 - 2^{-k})\, m(B_{s_k}) + m(B_{s_k})\, 2^{-k+1} > m(B_{s_k}),$$

pero esto es imposible, pues se trata de un subconjunto de B_{s_k}. Así pues, existe un $u \in B_{s_k} \cap B$ tal que $\chi_F|_{n_{k+1}} \leq u|_{n_{k+1}}$. Tomamos $s_{k+1} = u|_{n_{k+1}}$, con lo que $u \in B_{s_{k+1}} \cap B \neq \varnothing$ y s_{k+1} cumple lo pedido.

Sea $x = \bigcup\limits_{k \in \omega} s_k \in \mathcal{C}$. Como $B_{s_k} \cap B \neq \varnothing$ y $\{B_{s_k}\}_{k \in \omega}$ es una base de entornos de x, tenemos que $x \in \overline{B} = B \subset A$.

Como $\chi_F|_{n_k} \leq s_k$, resulta que $\chi_F \leq x$, luego $F \subset x^{-1}[\{1\}]$, con lo que $x^{-1}[\{1\}] \in \mathcal{F}$, luego $x \in \tilde{\mathcal{F}} \cap A = \varnothing$, contradicción. ■

Ahora vamos a ver cómo construir un filtro rápido. Necesitamos otro hecho técnico:

Teorema 3.17 *Sea $E \subset \mathcal{C}$ un conjunto nulo. Entonces existe un cerrado $B \subset \mathcal{C}$ tal que $B \cap E = \varnothing$, $m(B) > 0$ y para todo $n \in \omega$ y todo $s \in 2^n$, si $B \cap B_s \neq \varnothing$ entonces $m(B \cap B_2) \geq 8^{-n-1}$.*

Demostración: Por regularidad existe un cerrado $C_0 \subset \mathcal{C}$ de manera que $C_0 \cap E = \varnothing$ y $m(C_0) \geq 1/2$. Supuesto definido C_k, sea

$$C_{k+1} = \bigcup \{B_s \cap C_k \mid s \in 2^{k+1} \wedge m(B_s \cap C_k) \geq 1/8^{k+1}\},$$

que claramente es cerrado, al igual que $B = \bigcap\limits_{k \in \omega} C_k$.

Tomemos $n \leq k$ y $s \in 2^n$. Entonces

$$m(B_s \cap (C_k \setminus C_{k+1}) = m(B_s \cap \bigcup \{B_{s'} \cap C_k \mid s' \in 2^{k+1} \wedge m(B_s \cap C_k) < 1/8^{k+1}\})$$

$$= m(\bigcup \{B_{s'} \cap C_k \mid s' \in 2^{k+1} \wedge m(B_s \cap C_k) < 1/8^{k+1} \wedge s'|_n = s\})$$

$$\leq 2^{k+1-n}(1/8^{k+1}).$$

En particular, si $s = \varnothing$, tenemos que $m(C_k \setminus C_{k+1}) \leq 1/4^{k+1}$. Así

$$m(B) = m(C_0) - m(C_0 \setminus B) = \frac{1}{2} - m(\bigcup_{k\in\omega}(C_k \setminus C_{k+1}))$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{k\in\omega} m(C_k \setminus C_{k+1}) \geq \tfrac{1}{2} - \sum_{k\in\omega} \tfrac{1}{4^{k+1}} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} > 0.$$

Ahora, si $s \in 2^n$, con $n > 0$ y $B \cap B_s \neq \varnothing$, entonces $B_s \cap C_n \neq \varnothing$, luego, por definición de C_n ha de ser $m(B_s \cap C_{n-1}) \geq 1/8^n$ y además $B_s \cap C_n = B_s \cap C_{n-1}$, luego $m(B_s \cap C_n) \geq 1/8^n$. Entonces

$$m(B_s \cap B) \geq m(B_s \cap C_n) - \sum_{k\geq n} m(B_s \cap (C_k \setminus C_{k+1}))$$

$$\geq \frac{1}{8^n} - \sum_{k\geq n} \frac{2^{k+1-n}}{8^{k+1}} = \frac{1}{8^n} - \frac{1}{2^n}\sum_{k\geq n}\frac{1}{4^{k+1}} = \frac{2}{3\cdot 8^n} \geq \frac{1}{8^n} \geq \frac{1}{8^{n+1}}.$$

■

Puede probarse que los filtros rápidos tampoco tienen la propiedad de Baire, pero no vamos a necesitar este hecho.

Definición 3.18 Supongamos que existe $X \subset \mathcal{C}$ tal que $|X| = \aleph_1$. Para cada $x, y \in \mathcal{C}$, $x \neq y$, definimos $h(x, y) = \min\{n \in \omega \mid x(n) \neq y(n)\}$. Si $R \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es una relación de equivalencia, definimos

$$Z_R = \{h(x, y) \mid x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y \wedge x\,R\,y\} \subset \omega.$$

Teorema 3.19 *Los conjuntos Z_R, donde R recorre las relaciones de equivalencia en $\mathcal{C}$ que sean de Borel como subconjunto de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ y tales que $|\mathcal{C}/R| \leq \aleph_0$, generan un filtro $\mathcal{F}_X$ en ω que contiene a los conjuntos cofinitos.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que cada Z_R es infinito. Como $|X| = \aleph_1$ y $|C/R| \leq \aleph_0$, alguna clase de equivalencia ha de ser infinita, sea Y una de ellas. Sea $h : [Y]^2 \longrightarrow Z_R$ la aplicación dada por $h(\{x, y\}) = h(x, y)$. Si Z_R fuera finito, por el teorema de Ramsey[7] Y contendría un conjunto infinito homogéneo H y, si $x, y, z \in H$, entonces $h(x, y) = h(x, z) = h(y, z) = n$, pero eso es imposible.

Obviamente $Z_{R_1 \cap R_2} \subset Z_{R_1} \cap Z_{R_2}$, por lo que los conjuntos Z_R generan un filtro $\mathcal{F}_X$. Para probar que contiene a los conjuntos cofinitos tomamos $n \in \omega$ y consideramos la relación de equivalencia en $\mathcal{C}$ dada por

$$x\,R_n\,y \leftrightarrow x|_n = y|_n.$$

Obviamente es de Borel, determina 2^n clases de equivalencia y $Z_R \subset \omega \setminus n$, luego $\omega \setminus n \in \mathcal{F}_X$, lo que implica que $\mathcal{F}_X$ contiene a los conjuntos cofinitos. ■

[7][PC, 12.4].

Definición 3.20 Si $X \subset \mathcal{C}$ cumple $|X| = \aleph_1$, el filtro $\mathcal{F}_X$ dado por el teorema anterior recibe el nombre de *filtro de Raisonnier* asociado a X.

Vamos a dar una condición suficiente para que $\mathcal{F}_X$ sea un filtro rápido.

Para ello, para cada $H \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ llamamos $H_x = \{y \in \mathcal{C} \mid (x, y) \in H\}$ y

$$H(X) = \bigcup_{x \in X} H_x.$$

Teorema 3.21 *Supongamos que se cumple la condición:*

(N) *Si $H \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es un G_δ con secciones nulas, entonces $H(X)$ es nulo.*

Entonces $\mathcal{F}_X$ es un filtro rápido.

Demostración: Consideramos aquí la base de $\mathcal{C}$ formada por los abiertos de la forma

$$B_s = \{x \in \mathcal{C} \mid x|_{\mathcal{D}s} = s\},$$

donde, en lugar de restringir $s \in 2^n$ para $n \in \omega$, consideramos más en general $s \in 2^I$, para cualquier $I \subset \omega$ finito. Diremos que $I = \mathcal{D}s$ es el *soporte* de D_s.

Observemos que podemos construir una sucesión $\{A(s, i, j)\}_{s \in 2^{<\omega}, i, j \in \omega}$ de abiertos básicos tales que $m(A(s, i, j)) = 2^{-i-j}$ y los abiertos $\{A(s, i, j)\}_{s \in 2^{<\omega}}$ tengan soportes disjuntos dos a dos.

En efecto, basta partir ω en infinitos conjuntos disjuntos de cardinal $i + j$ y asignamos uno a cada $s \in 2^{<\omega}$, tomando un abierto básico cualquiera con dicho soporte.

Sea $\phi : \omega \longrightarrow \omega$ creciente y sea $H^\phi \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ la relación dada por

$$x\, H^\phi\, y \leftrightarrow \bigwedge j \in \omega \bigvee j' l \in \omega (j \leq j' \leq l \wedge y \in A(x|_{\phi(l)}, l, j')).$$

Así

$$H^\phi = \bigcap_{j \in \omega} \bigcup_{j \leq j' \leq l} \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid y \in A(x|_{\phi(l)}, l, j')\},$$

y los conjuntos de la izquierda son antiimágenes de abiertos por la proyección en la segunda componente, luego son abiertos en $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, luego H^ϕ es un G_δ.

Para cada $x \in \mathcal{C}$,

$$H_x^\phi = \bigcap_{j \in \omega} \bigcup_{j \leq j' \leq l} A(x|_{\phi(l)}, l, j')$$

y

$$m(\bigcup_{j \leq j' \leq l} A(x|_{\phi(l)}, l, j')) \leq \sum_{j \leq j' \leq l} \frac{1}{2^{l+j'}} = \sum_{j \leq j'} \frac{1}{2^{j'}} \sum_{j' \leq l} \frac{1}{2^l} = \sum_{j \leq j'} \frac{1}{2^{j'}} \frac{1}{2^{j'-1}}$$

$$= \sum_{j \leq j'} \frac{1}{2^{2j'-1}} = \frac{1}{2^{2j-2}} = \frac{1}{4^{j-2}},$$

luego $m(H_x^\phi) = 0$.

Por (N) podemos afirmar que $H^\phi(X)$ es un conjunto nulo. Sea B^ϕ según el teorema 3.17, es decir, B^ϕ es cerrado en $\mathcal{C}$, $B^\phi \cap H^\phi(X) = \varnothing$, $m(B^\phi) > 0$ y, para todo $s \in 2^{<\omega}$, si $B^\phi \cap B_s \neq \varnothing$, entonces $m(B^\phi \cap B_2) \geq 8^{-n-1}$, donde $n = \ell(s)$.

Dado $x \in \mathcal{C}$, sea $O_j^x = \bigcup\limits_{j \leq j' \leq l} A(x|_{\phi(l)}, l, j') \cap B^\phi$, que es un abierto en B^ϕ y, si $x \in X$, entonces $\bigcap\limits_j O_j^x = H_x^\phi \cap B^\phi = \varnothing$, luego, por el teorema de Baire, algún O_j^x no es denso en B^ϕ, es decir, para cierto $j \in \omega$ y $s \in 2^{<\omega}$, se cumple que $B^\phi \cap B_s \neq \varnothing$ y $B^\phi \cap B_s \cap O_j = \varnothing$.

Fijemos una biyección $\langle\ ,\ \rangle : \omega \times 2^{<\omega} \longrightarrow \omega$. Podemos suponer que cumple $\max\{\ell(s), j\} \leq \langle j, s\rangle$.

Para cada $x \in \mathcal{C}$, sea $F(x)$ el mínimo $\langle j_0, s_0\rangle$ tal que $B^\phi \cap B_{s_0} \neq \varnothing$ y $B^\phi \cap B_{s_0} \cap O_{j_0} \neq \varnothing$ si existe algún par (j_0, s_0) en estas condiciones, y $F(x) = \infty$ en otro caso. (Acabamos de probar que $F(x)$ es finito siempre que $x \in X$.) Sea R^ϕ la relación en $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dada por

$$x \, R^\phi \, y \leftrightarrow (F(x) = F(y) = \infty) \vee (F(x) = F(y) \neq \infty \wedge x|_{\phi(F(x))} = y|_{\phi(F(y))}).$$

Claramente R^ϕ es una relación de equivalencia. Vamos a probar que es de Borel. Para ello empezamos descomponiéndola como

$$R^\phi = \{x \in \mathcal{C} \mid F(x) = \infty\} \times \{y \in \mathcal{C} \mid F(y) = \infty\} \cup$$

$$\{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid F(x) = F(y) \neq \infty \wedge x|_{\phi(F(x))} = y|_{\phi(F(y))}\}.$$

Por una parte:

$$\{x \in \mathcal{C} \mid F(x) = \infty\} = \{x \in \mathcal{C} \mid \neg \bigvee js(B^\phi \cap B_s \neq \varnothing \wedge B^\phi \cap B_s \cap O_j^x = \varnothing)\}$$

$$= \mathcal{C} \setminus \bigcup_{(j,s)} \{x \in \mathcal{C} \mid B^\phi \cap B_s \cap O_j^x = \varnothing\},$$

donde en la última unión (j, s) recorren los pares tales que $B^\phi \cap B_s \neq \varnothing$. A su vez,

$$\{x \in \mathcal{C} \mid B^\phi \cap B_s \cap O_j^x = \varnothing\} = \bigcap_{j \leq j' \leq l} \{x \in \mathcal{C} \mid A(x|_{\phi(l)}, l, j') \cap B^\phi \cap B_s = \varnothing\}$$

y el último conjunto es claramente abierto, pues la condición depende únicamente de $x|_{\phi(l)}$. Concluimos que $\{x \in \mathcal{C} \mid F(x) = \infty\}$ es un conjunto de Borel.

Por otra parte:

$$\{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid F(x) = F(y) \neq \infty \wedge x|_{\phi(F(x))} = y|_{\phi(F(y))}\}$$

$$= \bigcup_{n \in \omega} \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid F(x) = F(y) = n \wedge x|_{\phi(n)} = y|_{\phi(n)}\}$$

$$= \bigcup_{n \in \omega} (\{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid F(x) = F(y) = n\} \cap \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid x|_{\phi(n)} = y|_{\phi(n)}\})$$

El conjunto a la derecha de $\cap$ es abierto, luego sólo falta probar que el de la izquierda también lo es. Pongamos que $n = \langle j, s\rangle$. Si $B^\phi \cap B_s = \varnothing$, el conjunto es vacío, luego es de Borel. Supongamos que $B^\phi \cap B_s \neq \varnothing$. Entonces

$$\{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid F(x) = F(y) = \langle j, s\rangle\} =$$

$$\{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid F(x) = \langle j, s\rangle\} \times \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid F(y) = \langle j, s\rangle\},$$

luego basta ver que el conjunto $\{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid F(x) = \langle j, s\rangle\}$ es de Borel. Ahora bien,

$$\{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid F(x) = \langle j, s\rangle\} = \{(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid B^\phi \cap B_s \cap O^x_j = \varnothing\} \cap$$

$$\bigcap_{j',s'} \{x \in \mathcal{C} \mid B^\phi \cap B_{s'} \cap O^x_{j'} \neq \varnothing\}, \tag{3.7}$$

donde la última intersección recorre los j', s' tales que

$$\langle j', s'\rangle < \langle j, s\rangle \quad \text{y} \quad B^\phi \cap B_{s'} \neq \varnothing.$$

El primer conjunto del miembro derecho de (3.7) es de Borel porque así lo hemos demostrado antes, y los que aparecen tras la intersección son de Borel porque son complementarios de conjuntos como el primero. Esto termina la prueba de que R^ϕ es de Borel.

Por otra parte, es evidente que R^ϕ determina una cantidad numerable de clases de equivalencia (una para cada valor posible de F).

Por consiguiente, podemos considerar $Z_\phi = Z_{R^\phi} \in \mathcal{F}_X$. Veamos que

$$\bigwedge k \in \omega\ |Z_\phi \cap \phi(k)| \leq k(3k + 3)^2 2^{4k}.$$

En principio:

$$Z_\phi \cap \phi(k) = \{h(x, y) \mid x, y \in X \wedge x \neq y \wedge x\, R^\phi\, y \wedge h(x, y) < \phi(k)\}.$$

Si $x, y \in X \wedge x\, R^\phi\, y$, existen $j \in \omega$ y $s \in 2^{<\omega}$ tales que $F(x) = F(y) = \langle j, s\rangle$ y $x|_{\phi(\langle j,s\rangle)} = y|_{\phi(\langle j,s\rangle)}$, luego $h(x, y) \geq \phi(\langle j, s\rangle)$.

Si $h(x, y) < \phi(k)$, entonces $\langle j, s\rangle < k$, pues si fuera $k \leq \langle j, s\rangle$, entonces $\phi(k) \leq \phi(\langle j, s\rangle) \leq h(x, y)$.

Por definición de F, tenemos además que $B^\phi \cap B_s \neq \varnothing$ y $B^\phi \cap B_s \cap O^x_j = \varnothing$, luego, como $j < k$, por definición de O^x_j, $B^\phi \cap B_s \cap A(x|_{\phi(k)}, k, j) = \varnothing$, e igualmente para y.

Sea $\Delta(s, j) = \{t \in 2^{\phi(k)} \mid B^\phi \cap B_s \cap A(t, k, j) = \varnothing\}$, $\delta(s, j) = |\Delta(s, j)|$.

Así, si $n \in Z_\phi \cap \phi(k)$, entonces $n = h(x, y)$, para ciertos $x, y \in X$ tales que existen s, j de modo que

$$\langle s, j\rangle < k, \quad B^\phi \cap B_s \neq \varnothing, \quad x|_{\phi(k)} \in \Delta(s, j), \quad y|_{\phi(k)} \in \Delta(s, j).$$

Además, por la definición de h, si $h(x,y) \neq h(x',y') < \phi(k)$ entonces $(x|_{\phi(k)}, y|_{\phi(k)}) \neq (x'|_{\phi(k)}, y'|_{\phi(k)})$, luego $Z_\phi \cap \phi(k)$ está completamente determinado por el conjunto $\bigcup\limits_{s,j} \Delta(s,j) \times \Delta(s,j)$, donde s, j recorre los pares tales que $\langle s,j\rangle < k$ y $B^\phi \cap B_s \neq \varnothing$, luego

$$|Z_\phi \cap \phi(k)| \leq \sum_{s,j} \delta(s,j)^2. \tag{3.8}$$

Por definición de Δ, tenemos que

$$B^\phi \cap B_s \subset \bigcap_{t\in\Delta(s,j)} (\mathcal{C} \setminus A(t,k,j)),$$

luego

$$m(B^\phi \cap B_s) \leq m\Big(\bigcap_{t\in\Delta(s,j)} (\mathcal{C} \setminus A(t,k,j))\Big) \leq (1-2^{-k-j})^{\delta(s,j)}.$$

Vamos a probar la última igualdad. Pongamos que, para cada $t \in \Delta(s,j)$, $A(t,k,j) = B_{s_t}$, donde $s_t \in 2^{I_t}$ y los soportes I_t son conjuntos disjuntos de cardinal $k+j$. Así

$$\bigcap_{t\in\Delta(s,j)} (\mathcal{C} \setminus A(t,k,j)) = \{x \in \mathcal{C} \mid \bigwedge t \in \Delta(s,j)\ x|_{I_t} \neq s_t\}$$

$$= \{x \in \mathcal{C} \mid x|_I \in D\},$$

donde $I = \bigcup\limits_{t\in\Delta(s,j)} I_t$ y $D = \{u \in 2^I \mid \bigwedge t \in \Delta(S,j)\ u|_{I_t} \neq s_t\}$. El hecho de que los soportes sean disjuntos implica que $|D| = (2^{k+j}-1)^{\delta(s,j)}$. Así

$$m\Big(\bigcap_{t\in\Delta(s,j)} (\mathcal{C} \setminus A(t,k,j))\Big) = \frac{(2^{k+j}-1)^{\delta(s,j)}}{2^{(k+j)\delta(s,j)}} = \left(1 - \frac{1}{2^{k+j}}\right)^{\delta(s,j)}.$$

Por otra parte, por construcción de B^ϕ, si $B^\phi \cap B_s \neq \varnothing$, entonces

$$m(B^\phi \cap B_s) \geq 8^{-\ell(s)-1}.$$

Así,

$$2^{-3\ell(s)-3} \leq (1-2^{-k-j})^{\delta(s,j)} \to -(3\ell(s)+3) \leq \delta(s,j)\log_2(1-2^{-k-j})$$

$$\to \delta(s,j) \leq \frac{3n+3}{\log_2(\frac{2^{k+j}}{2^{k+j}-1})} \leq (3\ell(s)+3)\, 2^{k+j}.$$

Para probar la última desigualdad basta ver (llamando $t = 2^{k+j}$) que

$$\frac{1}{\log_2(\frac{t}{t-1})} \leq t \leftrightarrow \frac{1}{t} \leq \log_2(\frac{t}{t-1}) \leftrightarrow 2^{1/t} \leq \frac{t}{t-1} \leftrightarrow 2 \leq \frac{t^t}{(t-1)^t}$$

$$\leftrightarrow t^t \geq 2(t-1)^t,$$

y esto es cierto, pues

$$t^t = ((t-1)+1)^t \geq (t-1)^t + t(t-1)^{t-1} \geq 2(t-1)^t.$$

Así, continuando con (3.8) y teniendo en cuenta que $j \leq \langle s, j\rangle < k$, $\ell(s) \leq k$,

$$|Z_\phi \cap \phi(k)| \leq \sum_{s,j}((3\ell(s)+3)2^{k+j})^2 \leq \sum_{s,j}(3k+3)^2 2^{4k} \leq k(3k+3)^2 2^{4k}.$$

Finalmente, sea $\psi(k) = k(3k+3)^2 2^{4k}$ y consideremos $\phi' : \omega \longrightarrow \omega$ dada por $\phi'(k) = \phi(\psi(k+1))$. Se trata de una aplicación creciente, luego todo lo que hemos probado para ϕ es válido también para ϕ'. Así, está definido $Z_{\phi'}$ y para todo $k \in \omega$

$$|Z_{\phi'} \cap \phi(\psi(k+1))| \leq \psi(k).$$

Si $p \geq \psi(0)$, existe un k tal que $\psi(k) \leq p \leq \psi(k+1)$, con lo que

$$|Z_{\phi'} \cap \phi(p)| \leq |Z_{\phi'} \cap \phi(\psi(k+1))| \leq \psi(k) \leq p.$$

Por lo tanto, si llamamos $A = Z_{\phi'} \setminus \phi(\psi(0)) \in \mathcal{F}_X$ (aquí usamos que $\mathcal{F}_X$ contiene a los conjuntos cofinitos), se cumple que

$$|A \cap \phi(p)| \leq |Z_{\phi'} \cap \phi(p)| \leq p,$$

para todo $p \geq \psi(0)$, pero si $p < \psi(0)$, entonces $\phi(p) < \phi(\psi(0))$, luego también

$$|A \cap \phi(p)| = 0 \leq p.$$

Con esto hemos probado que $\bigwedge p \in \omega\ |A \cap \phi(p)| \leq p$, luego $\mathcal{F}_X$ es un filtro rápido. ■

Finalmente podemos probar:

Teorema 3.22 *Si $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ toda medida de Borel continua en un espacio polaco tiene conjuntos no medibles.*

DEMOSTRACIÓN: En la prueba del teorema 2.40 se ve que para cada medida de Borel continua existe otra medida de Borel unitaria con los mismos conjuntos medibles, y por el teorema 2.43 no perdemos generalidad si consideramos concretamente la medida m en $\mathcal{C}$ que estamos considerando hasta ahora.

Supongamos que todo subconjunto de $\mathcal{C}$ es medible y llegaremos a una contradicción. Por 2.43, podemos suponer también que todo subconjunto de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es medible para la medida producto.

Por hipótesis existe un conjunto $X \subset \mathcal{C}$ de cardinal $\aleph_1$. Sea $\leq_X$ un buen orden en X de ordinal $\aleph_1$.

Vamos a demostrar que X cumple la condición (N) del teorema 3.21, con lo que el teorema anterior nos dará un conjunto no medible y tendremos la contradicción buscada.

Así pues, sea $H \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ un conjunto G_δ con secciones nulas. Hemos de probar que $H(X)$ es nulo.

Para cada $x \in H(X)$, sea $\lambda(x)$ el menor $y \in X$ tal que $x \in H_y$. Sea

$$\tilde{H}(X) = \{(x,y) \in H(X) \times H(X) \mid \lambda(x) <_X \lambda(y)\}.$$

Si $y \in H(X)$, entonces

$$\tilde{H}(X)_y = \{y \in \mathcal{C} \mid (x,y) \in \tilde{H}(X)\} = \{x \in H(X) \mid \lambda(x) <_X \lambda(y)\}$$
$$= \bigcup_{z \in X^<_{\lambda(y)}} \{x \in H(X) \mid \lambda(x) = z\} \subset \bigcup_{z \in X^<_{\lambda(y)}} H_z,$$

luego $\tilde{H}(X)_y$ es nulo por ser unión numerable de conjuntos nulos. Puesto que estamos suponiendo que $\tilde{H}(X)$ es medible, el teorema de Fubini implica que $\tilde{H}(X)$ es nulo. Sea ahora

$$D = (H(X) \times H(X)) \setminus \tilde{H}(X) = \{(x,y) \in H(X) \times H(X) \mid \lambda(y) \leq_X \lambda(x)\}.$$

Exactamente el mismo argumento demuestra que D es nulo, luego el conjunto $H(X) \times H(X)$ es nulo, luego $H(X)$ también. ■

Capítulo IV

Conjuntos Proyectivos

Dedicamos este capítulo a estudiar los conjuntos proyectivos. En la primera sección trataremos los conjuntos analíticos y sus propiedades básicas, a continuación nos ocuparemos de sus complementarios, los conjuntos coanalíticos, y finalmente presentaremos las clases de Lusin que determinan la jerarquía proyectiva. En las secciones siguientes estudiaremos hasta qué punto podemos extender a la jerarquía proyectiva algunas propiedades que hemos estudiado para la jerarquía de Borel y analizaremos algunas cuestiones más que no hemos tratado al estudiar los conjuntos de Borel porque sobre ellos tienen respuesta negativa, como la existencia de buenos órdenes proyectivos y la propiedad de uniformización).

4.1 Conjuntos analíticos

Suslin definió los conjuntos analíticos como los que pueden obtenerse a partir de conjuntos de Borel mediante la operación de Suslin, sin embargo, aquí vamos a dar una definición mucho más práctica. El teorema 4.7 demuestra que la definición que adoptamos aquí es equivalente a la original de Suslin.

Definición 4.1 Sea X un espacio polaco. Un subconjunto $A \subset X$ es *analítico* si existe un espacio polaco Y, una aplicación continua $f : Y \longrightarrow X$ y un conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $f[B] = A$.

En otras palabras, los conjuntos analíticos son las imágenes continuas de los conjuntos de Borel. En particular, vemos que todo conjunto de Borel es analítico.

También es inmediato que si $X \subset Y$ son espacios polacos, entonces los subconjuntos analíticos de X son los subconjuntos analíticos de Y contenidos en X.

Veamos a continuación que la definición de conjunto analítico se puede restringir bastante sin perder generalidad:

Teorema 4.2 *Sea X un espacio polaco y $A \subset X$, A. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) A es analítico.

b) $A = \varnothing$ o bien existe una función continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ tal que $f[\mathcal{N}] = A$.

c) Existe un cerrado $C \subset \mathcal{N} \times X$ tal que $A = \pi[C]$ (donde π es la proyección en el segundo factor).

d) Existe un espacio polaco Y y un subconjunto de Borel $B \subset Y \times X$ tal que $A = \pi[B]$.

Demostración: a) $\rightarrow$ b) Sea $f : Y \longrightarrow X$ una función continua y sea $B \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $f[B] = A$. Por el teorema 2.30 podemos considerar una topología más fina en Y respecto a la cual B es abierto y cerrado. En particular B es un espacio polaco con dicha topología. Por el teorema 1.25 existe una aplicación continua y suprayectiva $g : \mathcal{N} \longrightarrow B$, en principio respecto a la topología refinada de B, pero, evidentemente, g también es continua respecto de la topología original.

b) $\rightarrow$ c) Sea $C = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{N}\}$, que es cerrado en $\mathcal{N} \times X$ porque es la antiimagen de la diagonal por la aplicación continua $\mathcal{N} \times X \longrightarrow X \times X$ inducida por f y la identidad. Evidentemente $A = \pi[C]$.

c) $\rightarrow$ d) $\rightarrow$ a) son triviales. ■

Teorema 4.3 *La intersección numerable y la unión numerable de conjuntos analíticos en un espacio polaco es un conjunto analítico.*

Demostración: Sea X un espacio polaco y $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia de subconjuntos analíticos. Sea $f_n : \mathcal{N} \longrightarrow X$ una aplicación continua tal que $f_n[\mathcal{N}] = A_n$. Con estas aplicaciones podemos formar una aplicación continua $f : \omega \times \mathcal{N} \longrightarrow X$ dada por $f(n, x) = f_n(x)$, cuya imagen es la unión $\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$, que es, por tanto, analítica.

Sea ahora $Z = \{x \in \mathcal{N}^\omega \mid \bigwedge mn \in \omega\ f_m(x_m) = f_n(x_n)\}$. Se cumple que Z es cerrado, pues si $x \in \mathcal{N}^\omega \setminus Z$ existen $m, n \in \omega$ tales que $f_m(x_m) \neq f_n(x_n)$, luego podemos tomar entornos disjuntos U_m y U_n en X de ambos puntos, con lo que $f_m^{-1}[U_m] \times f_n^{-1}[U_n] \times \mathcal{N}^{\omega\setminus\{m,n\}}$ es un entorno de x en $\mathcal{N}^\omega$ disjunto con Z.

Definimos $f : Z \longrightarrow X$ mediante $f(x) = f_0(x_0)$, que claramente es una aplicación continua y $f[Z] = \bigcap\limits_{n\in\omega} A_n$. Por lo tanto, la intersección es analítica. ■

Es evidente que toda imagen continua de un conjunto analítico es analítica. No obstante, podemos probar algo más general:

Teorema 4.4 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación medible Borel entre dos espacios polacos. Si $A \subset X$ es analítico, entonces $f[A]$ es analítico en Y, y si $B \subset Y$ es analítico, entonces $f^{-1}[B]$ es analítico en X.*

Demostración: Tenemos que $f[A]$ es la proyección del conjunto

$$F = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A \wedge f(x) = y\}.$$

Como, evidentemente, las imágenes continuas de los conjuntos analíticos son analíticas, basta probar que F es analítico. Ahora bien, $F = G_f \cap (A \times Y)$, donde

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

es la gráfica de f (conjuntistamente, es la propia aplicación f vista como subconjunto de $X \times Y$).

Se cumple que G_f es un conjunto de Borel, pues se trata de la antiimagen de la diagonal por la aplicación $X \times Y \longrightarrow Y \times Y$ dada por $(x, y) \mapsto (f(x), y)$, y esta aplicación es medible Borel. (La antiimagen de un abierto básico $U \times V$ es $f^{-1}[U] \times V = p_X^{-1}[U] \cap (X \times V)$, que es un conjunto de Borel en $X \times Y$.)

Por otra parte, $A \times Y$ es analítico en $X \times Y$, ya que si $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ es una aplicación continua tal que $f[\mathcal{N}] = A$, entonces f induce una aplicación continua $\mathcal{N} \times Y \longrightarrow X \times Y$ cuya imagen en $A \times Y$. Esto prueba que $f[A]$ es analítico.

El caso de $f^{-1}[B]$ es análogo, pues lo podemos expresar como la proyección del conjunto

$$F' = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in B \wedge f(x) = y\}.$$

■

En particular, todo isomorfismo de Borel entre dos espacios polacos hace corresponder biunívocamente los conjuntos analíticos de ambos espacios.

Según indicábamos al principio de la sección, Suslin definió los conjuntos analíticos como los que pueden obtenerse a partir de los conjuntos de Borel mediante lo que hemos llamado la operación de Suslin (véase 1.24). Más precisamente:

Definición 4.5 *Si X es un conjunto y $\Gamma \subset \mathcal{P}X$, llamaremos $S(\Gamma)(X)$ a la clase de todos los conjuntos de la forma $A = S(F)$, para todo esquema de Suslin $F : \omega^{<\omega} \longrightarrow \Gamma$. Similarmente, si $\boldsymbol{\Gamma}$ es una clase de conjuntos definida sobre una familia de espacios topológicos, tenemos definida la clase $S(\boldsymbol{\Gamma})$.*

En estos términos, vamos a probar que la clase de los conjuntos analíticos es $S(\boldsymbol{\Pi}^0_1) = S(\mathcal{B})$. Antes conviene probar lo siguiente:

Teorema 4.6 *Si X es un conjunto y $\Gamma \subset \mathcal{P}X$, entonces $S(S(\Gamma)) = S(\Gamma)$.*

Demostración: La inclusión $S(\Gamma) \subset S(S(\Gamma))$ es trivial. (Basta considerar esquemas de Suslin constantes.) Supongamos que $A = S(F)$, donde, para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $F_s = S(G_s)$, donde $G_{s,t} \in \Gamma$. Así pues:

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\; x \in F_{y|_n}$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge m \in \omega\; x \in G_{y|_n, z|_m}$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee z \in \mathcal{N}^\omega \bigwedge nm \in \omega\; x \in G_{y|_n, z_n|_m}.$$

Fijamos una biyección $\langle\ ,\ \rangle : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$. Representaremos su inversa por $k \mapsto (k_0, k_1)$. A partir de aquí, definimos una biyección $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\omega$ mediante $f(u) = (x, z)$, donde

$$x(n) = u(2n+1), \qquad z_n(i) = u(2\,\langle n, i\rangle).$$

Entonces

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee u \in \mathcal{N} \bigwedge k \in \omega\ x \in G_{x|_{k_0}, z_{k_0}|_{k_1}}.$$

Ahora bien, por la construcción de f es claro que, para cada $k \in \omega$, existe un $r_k \in \omega$ tal que las sucesiones $x|_{k_0}, z_{k_0}|_{k_1}$ dependen únicamente de $u|_{r_k}$. Podemos tomar la sucesión $\{r_k\}_{k\in\omega}$ creciente con $r(0) = 0$, y entonces podemos definir dos funciones $\phi, \psi : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega}$ tales que si $r_k \leq \ell(s) < r_{k+1}$ entonces $\phi(s)$ y $\psi(s)$ sean las sucesiones $x|_{k_0}, z_{k_0}|_{k_1}$ para cualquier $u \in B_{s|_{r_k}}$. Así, llamando $H_s = G_{\phi(s),\psi(s)}$, tenemos que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee u \in \mathcal{N} \bigwedge k \in \omega\ x \in H_{u|_k}.$$

Por lo tanto, $A = S(H)$, donde H es un esquema de Suslin en Γ. ■

Teorema 4.7 *Sea X un espacio polaco y $A \subset X$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) A es analítico.

b) $A = S(F)$, donde $F : \omega^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X$ es un esquema de Suslin cerrado que cumple la condición de los diámetros, es decreciente (es decir, que si $s \subset t$ entonces $F_t \subset F_s$) y (si $A \neq \varnothing$) tal que $F_s \neq \varnothing$ para todo s.

c) Lo mismo que b), pero con F abierto en lugar de cerrado.

d) $A = S(F)$, donde F es un esquema de Suslin analítico.

e) $A = S(F)$, donde F es un esquema de Suslin analítico decreciente con la propiedad de los diámetros, $F_\varnothing = A$, $F_s = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_{s^\frown n}$ y, para todo $x \in \mathcal{N}$, $\bigcap\limits_{n\in\omega} F_{x|_n} \neq \varnothing$.

Demostración: a) $\rightarrow$ b). Podemos suponer que $A \neq \varnothing$. Existe entonces una aplicación continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ tal que $f[\mathcal{N}] = A$. Definimos $F_s = \overline{f[B_s]}$. Así F es un esquema de Suslin cerrado, decreciente y sus conjuntos son no vacíos. También cumple la condición de los diámetros, pues si $x \in \mathcal{N}$, dado $\epsilon > 0$, existe un s tal que $x \in B_s \subset f^{-1}[B_\epsilon(f(x))]$, luego, si $n_0 = \ell(s)$, $s = x|_{n_0}$ y, para todo $n \geq n_0$, $f[B_{x|_n}] \subset f[B_{x|_{n_0}}] \subset B_\epsilon(f(x))$, luego el diámetro de $F_{x|_n}$ es $\leq \epsilon$.

Sólo falta probar que $A = S(F)$. Ahora bien, si $x \in \mathcal{N}$, entonces claramente $f(x) \in \bigcap\limits_{n\in\omega} F_{x|_n}$, luego $A \subset S(F)$ y recíprocamente, si $y \in S(F)$, existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que $y \in \bigcap\limits_{n\in\omega} F_{x|_n}$, luego, para cada $n \in \omega$, existe un $x_n \in B_{x|_n}$ tal que

$d(f(x_n), y) < 1/n$, con lo que $\lim\limits_n x_n = x$, luego $f(x) = \lim\limits_n f(x_n) = y$, luego $y \in A$.

b) $\rightarrow$ c). Sea d una distancia en X. Para cada $s \in \omega^n$ definimos

$$F'(s) = \{x \in X \mid d(x, F(s)) < 1/n\}.$$

Así F' es un esquema de Suslin abierto que cumple las mismas propiedades que F. Sólo hemos de probar que $S(F) = S(F')$. Dado $x \in \mathcal{N}$, es evidente que

$$\{p\} = \bigcap_{n\in\omega} F(x|_n) \subset \bigcap_{n\in\omega} F'(x|_n).$$

Si la intersección de la derecha contiene un punto q, entonces $p, q \in F'(x|_n)$ para todo n y, como los diámetros tienden a 0, ha de ser $p = q$. Por lo tanto, se da la igualdad y

$$S(F) = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} F(x|_n) = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} F'(x|_n) = S(F').$$

Obviamente c) $\rightarrow$ d) y d) $\rightarrow$ a) se sigue de 4.6.

Por último, e) $\rightarrow$ d) y para probar a) $\rightarrow$ e) consideramos una aplicación continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ como en la prueba de a) $\rightarrow$ b) y definimos $F_s = f[B_s]$ (sin tomar clausuras). Entonces F es un esquema de Suslin analítico, la prueba de que $A = S(F)$ es válida igualmente y el resto es inmediato. ■

Nota Si X es un espacio polaco cero-dimensional, todo subconjunto analítico de X es de la forma $S(F)$, donde F es un esquema de Suslin abierto cerrado. En efecto, basta observar que $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subset S(\mathbf{\Delta}^0_1)$, luego

$$S(\mathbf{\Sigma}^0_1) \subset S(S(\mathbf{\Delta}^0_1)) = S(\mathbf{\Delta}^0_1) \subset S(\mathbf{\Sigma}^0_1),$$

y por el teorema anterior $S(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ es la clase de los conjuntos analíticos. ■

Ahora demostramos un resultado fundamental:

Teorema 4.8 (Teorema de separación de Lusin) *Sea X un espacio polaco y sean P y Q dos subconjuntos analíticos de X disjuntos entre sí. Entonces existe un conjunto de Borel $C \subset X$ tal que $P \subset C$ y $Q \cap C = \varnothing$.*

Demostración: Diremos que dos subconjuntos de X son *separables* si satisfacen el teorema. Es evidente que si $P = \bigcup\limits_{m\in\omega} P_m$ y $Q = \bigcup\limits_{n\in\omega} Q_n$ son disjuntos y cada par P_m, Q_n es separable por un conjunto de Borel $C_{m,n}$, entonces P y Q son separables por $\bigcup\limits_{m\in\omega} \bigcap\limits_{n\in\omega} C_{m,n}$.

Sean $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ y $g : \mathcal{N} \longrightarrow X$ aplicaciones continuas tales que $f[\mathcal{N}] = A$, $g[\mathcal{N}] = B$. Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, llamemos $P_s = f[B_s]$, $Q_s = g[B_s]$. Así

$$P_s = \bigcup_{m\in\omega} P_{s\frown m}, \qquad Q_s = \bigcup_{n\in\omega} Q_{s\frown n}.$$

Por lo tanto, si $P = P_\varnothing$ y $Q = Q_\varnothing$ no son separables, existen $s_1, t_1 \in \omega^1$ tales que P_{s_1} y Q_{t_1} no son separables. A su vez, existen s_2, $t_2 \in \omega^2$ que extienden a s_1 y t_1 respectivamente tales que P_{s_2} y Q_{t_2} no son separables. Procediendo de este modo obtenemos $x, y \in \mathcal{N}$ tales que $P_{x|_n}$ y $Q|_{y|_n}$ no son separables para ningún n.

Como $f(x) \in P$ y $g(y) \in Q$, se cumple que $f(x) \neq g(y)$, luego podemos tomar abiertos disjuntos U y V en X tales que $f(x) \in U$, $g(y) \in V$, pero entonces existe un $n \in \omega$ tal que $P_{x|_n} = f[B_{x|_n}] \subset U$ y $Q_{y|_n} = g[B_{y|_n}] \subset V$, luego U separa a $P_{x|_n}$ y $Q_{y|_n}$, contradicción. ■

Para enunciar más convenientemente las consecuencias de este teorema conviene introducir la notación siguiente:

Definición 4.9 Llamaremos $\mathbf{\Sigma}_1^1$ a la clase de los subconjuntos analíticos de los espacios polacos. Llamaremos $\mathbf{\Pi}_1^1 = \neg\mathbf{\Sigma}_1^1$ a la clase de los conjuntos *coanalíticos,* es decir, los complementarios de los conjuntos analíticos, mientras que $\mathbf{\Delta}_1^1 = \mathbf{\Sigma}_1^1 \cap \mathbf{\Delta}_1^1$ será la clase de los conjuntos que son simultáneamente analíticos y coanalíticos.

Las clases que acabamos de definir son el principio de la jerarquía proyectiva que introduciremos en la sección 4.3. La principal consecuencia del teorema de Lusin es la siguiente:

Teorema 4.10 (Suslin) *Los subconjuntos de un espacio polaco que son a la vez analíticos y coanalíticos son los conjuntos de Borel, es decir,* $\mathbf{\Delta}_1^1 = \mathcal{B}$.

En efecto, si A es $\mathbf{\Delta}_1^1$, basta aplicar el teorema 4.8 a A y $X \setminus A$.

Teniendo esto en cuenta, lo que afirma el teorema de Lusin es que la clase $\mathbf{\Sigma}_1^1$ tiene la propiedad de separación. En realidad satisface una propiedad más fuerte aún que la propiedad de separación generalizada:

Teorema 4.11 *Si* $\mathbf{\Gamma}$ *es una clase conjuntos en espacios polacos cerrada para uniones numerables e intersecciones finitas y tiene la propiedad de separación, entonces tiene la propiedad de* σ*-separación, es decir, si* $\{A_n\}_{n\in\omega}$ *es una familia de conjuntos de* $\mathbf{\Gamma}$ *disjuntos dos a dos, existe una familia* $\{B_n\}_{n\in\omega}$ *de conjuntos de* $\mathbf{\Delta}$ *disjuntos dos a dos tal que* $A_n \subset B_n$*, para todo* n.

Demostración: Llamamos $A_n' = \bigcup\limits_{i\neq n} A_i \in \mathbf{\Gamma}$. Por la propiedad de separación existe $E_n \in \mathbf{\Delta}$ tal que $A_n \subset E_n$ y $A_n' \cap E_n = \varnothing$. Definimos $B_0 = E_0$ y $B_n = E_n \setminus \bigcap\limits_{i<n} B_i$. Claramente los conjuntos B_n cumplen lo pedido. ■

En particular, la clase $\mathbf{\Sigma}_1^1$ tiene la propiedad de σ-separación. Veamos algunas aplicaciones de las propiedades de separación de los conjuntos analíticos:

Teorema 4.12 *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicación entre espacios polacos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) f *es medible Borel.*

b) La gráfica $G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ *es un conjunto de Borel.*

c) G_f *es un conjunto analítico.*

En particular, si f *es biyectiva y medible Borel, es un isomorfismo de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: La implicación a) $\rightarrow$ b) la hemos visto en la demostración de 4.4 y b) $\rightarrow$ c) es evidente. Supongamos c), es decir, que la gráfica G_f es analítica, y sea $A \in \mathcal{B}(Y)$. Entonces

$$x \in f^{-1}[A] \leftrightarrow \bigvee y((x, y) \in G_f \cap (X \times A)) \leftrightarrow \neg \bigvee y((x, y) \in G_f \cap (X \times (Y \setminus A))).$$

La primera equivalencia muestra que $f^{-1}[A]$ es analítico, pues es la proyección de un conjunto analítico de $X \times Y$, mientras que la segunda muestra que es coanalítico, pues es el complementario de la proyección de otro conjunto analítico de $X \times Y$. Por el teorema anterior $f^{-1}[A]$ es un conjunto de Borel, luego f es medible Borel. ■

Notemos que todavía no hemos demostrado que existen conjuntos analíticos que no son de Borel. Posponemos la prueba de este hecho hasta la sección 4.3, donde obtendremos un resultado más general. Sin embargo, aunque —como veremos— las imágenes continuas de conjuntos de Borel no son necesariamente conjuntos de Borel, sí que lo son cuando la aplicación continua es inyectiva:

Teorema 4.13 *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicación continua entre espacios polacos y* $B \subset X$ *un conjunto de Borel tal que* $f|_B$ *sea inyectiva. Entonces* $f[B]$ *es un conjunto de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que podemos suponer que $X = \mathcal{N}$ y que B es cerrado. Para ello aplicamos el teorema 2.30, en virtud del cual X admite una topología más fina de espacio polaco en la que B es abierto cerrado y, en particular, un espacio polaco. Por el teorema 1.26 existe un cerrado $C \subset \mathcal{N}$ y una biyección continua $g : C \longrightarrow B$, que seguirá siendo continua (como aplicación $g : C \longrightarrow X$) si en X consideramos la topología original (menos fina). De este modo, $g \circ f : \mathcal{N} \longrightarrow Y$ es continua, es inyectiva restringida a C y $(g \circ f)[C] = f[B]$.

Por lo tanto, podemos suponer que tenemos $f : \mathcal{N} \longrightarrow Y$ continua y que B es cerrado en $\mathcal{N}$. Por el teorema 1.19 tenemos que $B = [R]$, para un cierto árbol bien podado $R \subset \omega^{<\omega}$. Llamamos $R_n = R \cap \omega^n$, es decir, el conjunto de los nodos de R de altura n.

Vamos a definir una aplicación $A : [R] \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ (como un esquema de Suslin de Borel, pero definido únicamente sobre $[R]$). Tomamos $A(\varnothing) = Y$. Para $n > 0$, consideramos los conjuntos $\{f[B_s \cap B]\}_{s \in R_n}$, que forman una familia numerable de conjuntos analíticos en Y disjuntos dos a dos. Puesto que el teorema 4.11 se aplica a la clase $\mathbf{\Sigma}_1^1$, existen conjuntos de Borel $\{C_s\}_{s \in R_n}$ disjuntos dos a dos tales que $f[B_s \cap B] \subset C_s$. Definimos

$$A(s) = A(s|_{n-1}) \cap C_s \cap \overline{f[B_s \cap B]}.$$

Una simple inducción muestra que $f[B_s \cap B] \subset A(s) \subset \overline{f[B_s \cap B]}$.

Si $x \in B$ y $n \in \omega$, entonces $x|_n \in R_n$ y $x \in B_{x|_n} \cap B$, luego $f(x) \in A(x|_n)$ y así $f(x) \in \bigcap\limits_{n\in\omega} A(x|_n)$. Recíprocamente, si $y \in Y$ está en la intersección, ha de ser $y = f(x)$, pues, en caso contrario, existe un abierto U en Y tal que $y \in U$, $f(x) \notin \overline{U}$. Entonces $x \notin f^{-1}[\overline{U}]$, luego existe un n tal que $B_{x|_n} \cap f^{-1}[\overline{U}] = \varnothing$. A su vez, $f[B_{x|_n} \cap B] \cap U = \varnothing$, luego $\overline{f[B_{x|_n} \cap B]} \cap U = \varnothing$, pero esto es falso, pues $y \in A(x|_n) \cap U \subset \overline{f[B_{x|_n} \cap B]} \cap U$. Así pues,

$$f[B] = \bigcup_{x\in[R]} \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in R_n} A(s),$$

donde la segunda igualdad se debe a que si $s, t \in R_n$ son distintos entre sí, $A(t)$ y, por consiguiente, todos los conjuntos $A(t^\frown n)$, son disjuntos con $A(s)$. La última expresión muestra que $f[B]$ es un conjunto de Borel, ya que cada $A(s)$ lo es y las uniones son numerables. ■

Definición 4.14 Si X es un espacio polaco y $A \subset X$, diremos que A es *universalmente medible* si es medible para toda medida de Borel en X.

Trivialmente, todo conjunto de Borel es universalmente medible, y ahora vamos a probar que los conjuntos analíticos y, por consiguiente, los coanalíticos, son universalmente medibles. Nos basaremos en un resultado general que nos permitirá demostrar también que los conjuntos analíticos y coanalíticos tienen la propiedad de Baire:

Teorema 4.15 *Sea $\mathbb{B}$ una σ-álgebra en un conjunto X y supongamos que para cada $A \in \mathcal{P}X$ existe un $\hat{A} \in \mathbb{B}$ tal que*

a) $A \subset \hat{A}$.

b) Si $A \subset B \in \mathbb{B}$, todo subconjunto de $\hat{A} \setminus B$ está en $\mathbb{B}$.

Entonces $S(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$.

Demostración: Sea $F : \omega^{<\omega} \longrightarrow \mathbb{B}$ un esquema de Suslin. Podemos suponer que es decreciente, pues si definimos $F'_s = \bigcap\limits_{t\subset s} F_t$, obtenemos un nuevo esquema de Suslin en $\mathbb{B}$ que es decreciente y $S(F') = S(F)$.

Definimos

$$F^s = \bigcup_{x\in B_s} \bigcap_{n\in\omega} F_{x|_n} \subset F_s.$$

Claramente, $F^\varnothing = S(F)$ y $F^s = \bigcup\limits_{n\in\omega} F^{s^\frown n}$. Sea $\hat{F}^s$ según el enunciado. Notemos que $\hat{F}^s \cap F_s \in \mathbb{B}$ cumple las mismas propiedades a) y b), luego podemos suponer que $\hat{F}^s \subset F_s$. Definimos $G_s = \hat{F}^s \setminus \bigcup\limits_{n\in\omega} \hat{F}^{s^\frown n}$. Teniendo en cuenta que $F^s = \bigcup\limits_{n\in\omega} F^{s^\frown n} \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} \hat{F}^{s^\frown n} \in \mathbb{B}$, por b), todo subconjunto de G_s está en $\mathbb{B}$, luego todo subconjunto de $G = \bigcup\limits_{s\in\omega^{<\omega}} G_s$ está en $\mathbb{B}$.

Vamos a probar que $\hat{F}^{\varnothing} \setminus F^{\varnothing} \subset G$. Con esto tendremos probado el teorema, pues entonces $\hat{F}^{\varnothing} \setminus F^{\varnothing} \in \mathbb{B}$ y también $S(F) = F^{\varnothing} \in \mathbb{B}$.

Tomamos, pues, $x \in \hat{F}^{\varnothing} \setminus F^{\varnothing}$. Observemos que, en general, si $x \in \hat{F}^s \setminus G$, entonces $x \notin G_s$, luego existe un $n \in \omega$ tal que $x \in \hat{F}^{s^\frown n} \setminus G$.

Así pues, si fuera $x \notin G$, podríamos definir recurrentemente un $y \in \mathcal{N}$ tal que $x \in \hat{F}^{y|_n} \subset F_{y|_n}$, luego $x \in \bigcup\limits_{n\in\omega} F_{y|_n} \subset S(F) = F^{\varnothing}$, contradicción. ■

Como primera aplicación:

Teorema 4.16 *Si X es un espacio polaco, el álgebra* $\mathrm{Ba}(X)$ *de los subconjuntos de X con la propiedad de Baire es cerrada para la operación de Suslin y, en particular, contiene a todos los subconjuntos analíticos de X.*

Demostración: Sólo hemos de probar que $\mathrm{Ba}(X)$ cumple las hipótesis del teorema 4.15. Fijemos una base numerable $\{U_n\}_{n\in\omega}$. Dado $A \subset X$, sea

$$A' = \{x \in X \mid \bigwedge n \in \omega(x \in U_n \rightarrow U_n \cap A \text{ no es de primera categoría})\}.$$

Se cumple que A' es cerrado, pues si $x \notin A'$, existe un $n \in \omega$ tal que $x \in U_n$ y $U_n \cap A$ es de primera categoría, y entonces $x \in U_n \subset X \setminus A'$.

Ahora observamos que $A \setminus A'$ es la unión de todos los conjuntos $U_n \cap A$ que son de primera categoría, luego $A \setminus A'$ es de primera categoría. Por lo tanto, $\hat{A} = A \cup A' = A' \cup (A \setminus A')$ es unión de un cerrado y un conjunto de primera categoría, luego $\hat{A} \in \mathrm{Ba}(X)$ y ciertamente $A \subset \hat{A}$.

Finalmente, si $A \subset B \in \mathrm{Ba}(X)$, tenemos que $P = \hat{A} \setminus B \in \mathrm{Ba}(X)$. Vamos a probar que es de primera categoría. Existe un abierto U tal que $P \,\Delta\, U$ es de primera categoría. Si P no es de primera categoría, entonces $U \neq \varnothing$, y $U \setminus P$ es de primera categoría (en particular, $U_n \cap P \neq \varnothing$). Tomando un abierto menor no vacío, existe un $n \in \omega$ tal que $U_n \setminus P$ es de primera categoría. Como $U_n \cap A \subset U_n \setminus P$, también $U_n \cap A$ es de primera categoría. Por otra parte, existe un $x \in U_n \cap P \subset U_n \cap A'$, pero esto implica que $U_n \cap A$ no es de primera categoría, y tenemos una contradicción.

Finalmente, todos los subconjuntos de $\hat{A} \setminus B$ son de primera categoría, luego tienen la propiedad de Baire. ■

Teorema 4.17 *Sea X un espacio polaco y μ una medida de Borel en X. Entonces, el álgebra $\mathcal{M}_\mu$ de los conjuntos μ-medibles es cerrada para la operación de Suslin, y en particular contiene a todos los subconjuntos analíticos de X.*

Demostración: En la prueba del teorema 2.40 hemos visto que es posible construir una medida unitaria μ' en X con los mismos conjuntos medibles, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que μ es finita. Basta comprobar que $\mathcal{M}_\mu$ cumple las hipótesis del teorema 4.15. Por el teorema 2.64 podemos extender μ (restringida a $\mathcal{B}(X)$) a una medida exterior μ^* sobre $\mathcal{P}X$. Entonces, para todo $A \subset X$, existe un conjunto $A_n \in \mathcal{B}(X)$ tal que $A \subset A_n$ y $\mu(A_n) - \mu^*(A) < 1/n$. De hecho, usando la regularidad de μ, podemos sustituir A_n por un abierto que lo contenga, con lo que A_n puede tomarse abierto. Entonces el G_δ dado por $\hat{A} = \bigcap_{n\in\omega} A_n$ cumple que $\mu(\hat{A}) = \mu^*(A)$.

Ciertamente $A \subset \hat{A}$ y, si $A \subset B \in \mathcal{M}_\mu$, entonces $\mu(\hat{A} \setminus B) = 0$, pues en caso contrario existiría un conjunto de Borel $C \subset \hat{A} \setminus B \subset \hat{A} \setminus A$ con $\mu(C) > 0$, pero esto es imposible, porque entonces $A \subset \hat{A} \setminus C \subset \hat{A}$ y $\mu^*(A) \leq \mu(\hat{A} \setminus C) < \mu(\hat{A})$. Por consiguiente, por la completitud de la medida, todo subconjunto de $\hat{A} \setminus B$ es μ-medible. ■

Así pues, los conjuntos analíticos (y los coanalíticos) son universalmente medibles. Veamos ahora que que los conjuntos analíticos cumplen también la propiedad de los subconjuntos perfectos. Para ello necesitamos un resultado auxiliar:

Teorema 4.18 *Sea X un espacio polaco y $A \subset X$ un conjunto no numerable. Entonces existen abiertos disjuntos U_0 y U_1 tales que $U_i \cap A$ es no numerable, para $i = 0, 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que el resultado es falso. Para cada $n \in \omega$, sea $\{U_{n,m}\}_{m\in\omega}$ una familia de bolas abiertas de radio $1/(n+1)$ que cubra todo el espacio X. No puede ocurrir que $U_{n,m} \cap A$ sea numerable para todo m, pues entonces A sería numerable. Así pues, existe una bola abierta U_n de radio $1/(n+1)$ tal que $U_n \cap A$ es no numerable. Sea $A_n = A \setminus \overline{U}_n$. Si A_n fuera no numerable, entonces $V = X \setminus \overline{U}_n$ sería un abierto disjunto de U_n con $V \cap A$ no numerable, luego, por la hipótesis de reducción al absurdo, A_n ha de ser numerable. Pero

$$A \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n$$

y, como el diámetro de los U_n tiende a 0, la intersección contiene a lo sumo un punto, luego A es numerable, y tenemos una contradicción. ■

Teorema 4.19 *Si X es un espacio polaco y $A \subset X$ es un subconjunto analítico no numerable, entonces A contiene un subconjunto perfecto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ una aplicación continua con $f[\mathcal{N}] = A$.

Observemos en primer lugar que si $V \subset \mathcal{N}$ es abierto y $f[V]$ es no numerable, entonces existen dos abiertos disjuntos W_0 y W_1 contenidos en V tales que $f[W_i]$ es no numerable, para $i = 0, 1$. En efecto, por el teorema anterior existen abiertos disjuntos U_0 y U_1 en X tales que $f[V] \cap U_i \neq \varnothing$, por lo que basta tomar $W_i = f^{-1}[U_i] \cap V$.

Aplicando repetidamente este resultado[1] podemos construir una aplicación $t : 2^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega}$ que cumpla las propiedades siguientes:

[1] Como todo abierto es unión numerable de abiertos básicos, los abiertos U_i pueden tomarse básicos, con lo que no hace falta AE para elegirlos.

a) $t_\varnothing = \varnothing$.

b) $s \subset s' \to t_s \subset t_{s'}$.

c) $f[B_{t_s}]$ es no numerable.

d) $f[B_{t_s\frown 0}] \cap f[B_{t_s\frown 1}] = \varnothing$.

Sea $g : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{N}$ la aplicación dada por $g(x) = \bigcup\limits_{n\in\omega} t_{x|_n}$. Claramente, g es continua, y $g \circ f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ es inyectiva. Como $\mathcal{C}$ es compacto, la imagen de esta aplicación es un cerrado no numerable contenido en A. Como todo cerrado no numerable contiene un subconjunto perfecto, lo mismo le sucede a A. ■

4.2 Conjuntos coanalíticos

Estudiamos ahora los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$, es decir, los conjuntos coanalíticos. De las propiedades que hemos demostrado para la clase $\mathbf{\Sigma}^1_1$ se sigue inmediatamente que $\mathbf{\Pi}^1_1$ es cerrada para uniones e intersecciones numerables y para sustituciones continuas, así como que los conjuntos coanalíticos son universalmente medibles y tienen la propiedad de Baire.

En esta sección daremos demostraciones "clásicas" (topológicas) de algunas propiedades adicionales de los conjuntos coanalíticos que volveremos a demostrar en el capítulo siguiente mediante técnicas "efectivas" (conjuntistas) alternativas.

Empezaremos presentando un concepto similar al de esquema de Suslin que nos será más conveniente para lo que vamos a hacer. La idea básica no usar como índices los elementos de $\omega^{<\omega}$ sino los números diádicos:

Definición 4.20 Llamaremos $\mathcal{D} \subset\,]0,1[$ al conjunto de los *números diádicos,* es decir, los números racionales de la forma $d = m/2^n$, donde $m, n \in \omega$ y $0 < m < 2^n$. Lo consideraremos como conjunto ordenado con el orden $\preceq$ opuesto al orden usual en $\mathbb{Q}$.

Claramente, el conjunto $\mathcal{D}$ cumple las hipótesis del teorema 1.30, por lo que es semejante a $\mathbb{Q}$.

Si $d = m/2^n$ es un número diádico, el número natural m puede expresarse de forma única en base 2 como $m = \sum\limits_{i=0}^{k} 2^{m_i}$, donde $0 \leq m_0 < \cdots < m_k < n$, con lo que todo número diádico se expresa en forma única como

$$d = \sum_{i=0}^{k} 2^{-n_i}, \qquad 0 < n_0 < \cdots < n_k.$$

Definimos $\mathcal{D}_k$ como el conjunto de los números diádicos cuyo desarrollo en serie de esta forma tiene longitud k (empezando en 0). Así, $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{k\in\omega} \mathcal{D}_k$.

Hemos invertido el orden usual en $\mathbb{Q}$ porque, de este modo, cada conjunto $\mathcal{D}_k$ está bien ordenado. En efecto, si $A \subset \mathcal{D}_k$ no es vacío, tomamos un elemento $a = \sum\limits_{i=0}^{k} 2^{-n_i} \in A$ con n_0 mínimo. De entre todos los elementos de A con dicho n_0 mínimo, consideramos los que tienen n_1 mínimo, y así sucesivamente. El único a que tiene todos los exponentes mínimos en este sentido es el mínimo de A (máximo con el orden usual).

Por otro lado, definimos el orden parcial $\sqsubseteq$ en $\mathcal{D}$ mediante

$$\sum_{i=0}^{k} 2^{-n_i} \sqsubseteq \sum_{i=0}^{l} 2^{-m_i} \leftrightarrow k \leq l \land \bigwedge i \leq k\ n_i = m_i.$$

Claramente, si $r \in \mathcal{D}_k$, $s \in \mathcal{D}_l$ y $r \sqsubseteq s$, entonces $k \leq l$ y $r \leq s$. Además, si $s \in \mathcal{D}$, el conjunto $\{r \in \mathcal{D} \mid r \sqsubseteq s\}$ es finito.

Una *criba* en un conjunto X es una aplicación $\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}X$. Para cada $x \in X$, definimos

$$M_x(\Phi) = \{r \in \mathcal{D} \mid x \in \Phi(r)\}$$

y a su vez llamamos

$$C(\Phi) = \{x \in X \mid (M_x(\Phi), \preceq) \text{ no está bien ordenado}\}.$$

Equivalentemente, $x \in C(\Phi)$ si y sólo si existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de $\mathcal{D}$ estrictamente creciente (respecto del orden usual en $\mathbb{Q}$) tal que $\bigwedge n \in \omega\ x \in \Phi(r_n)$.

Una criba es *monótona* si $\bigwedge rs \in \mathcal{D}(r \sqsubseteq s \to \Phi(s) \subset \phi(r))$.

Diremos que una criba Φ en un espacio topológico X es abierta, cerrada, de Borel, etc. si los conjuntos $\Phi(r)$ son abiertos, cerrados, de Borel, etc.

Necesitamos el siguiente resultado auxiliar:

Teorema 4.21 *Sea Φ una criba monótona en un conjunto X. Entonces se cumple que $x \in C(\Phi)$ si y sólo si existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ estrictamente creciente respecto de $\sqsubseteq$ de elementos de $\mathcal{D}$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ x \in \Phi(r_n)$.*

Demostración: Como $r \sqsubset s \to r < s$, una implicación es trivial. Supongamos ahora que existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathcal{D}$ estrictamente creciente para el orden usual en $\mathbb{Q}$ y tal que $x \in \Phi(r_n)$. Llamemos $r = \sup\limits_n r_n \leq 1$. Podemos desarrollarlo en base 2 como

$$r = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-m_i}, \qquad 0 < m_0 < m_1 < \cdots$$

Notemos que si r admite una expresión de este tipo con un número finito de sumandos, siempre podemos desarrollar el último de ellos como suma de una serie geométrica de razón $1/2$, con lo que obtenemos igualmente una expresión infinita.

Definimos $s_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{-m_i}$. De este modo $\{s_n\}_{n\in\omega}$ es estrictamente creciente para $\sqsubseteq$. Basta probar que $x \in \Phi(s_n)$, para lo cual a su vez, por la monotonía de Φ, basta probar que, para cada $n \in \omega$, existe un $k \in \omega$ tal que $s_n \sqsubseteq r_k$.

Como $s_n < r$, existe un k tal que $s_n < r_k < r$. Sea $r_k = \sum_{i=0}^{l} 2^{-j_i}$, donde $0 < j_0 < \cdots < j_l$. Veamos que $j_i = m_i$ para todo $i \leq m = \text{mín}\{n, l\}$. Por reducción al absurdo, suponemos que existe un $p \leq m$ tal que $j_p \neq m_p$. Tomemos el menor p posible. Si $j_p < m_p$, entonces

$$r = \sum_{i<p} 2^{-m_i} + \sum_{i=p}^{\infty} 2^{-m_i} \leq \sum_{i<p} 2^{-j_i} + 2^{-m_p+1} \leq \sum_{i<p} 2^{-j_i} + 2^{-j_p} \leq r_k,$$

contradicción. Si, por el contrario $m_p < j_p$, entonces

$$r_k = \sum_{i<p} 2^{-m_i} + \sum_{i=p}^{l} 2^{-j_i} \leq \sum_{i<p} 2^{-m_i} + 2^{-j_p+1} \leq \sum_{i<p} 2^{-m_i} + 2^{-m_p} = s_p \leq s_n,$$

contradicción. Así pues, hemos probado que $s_n \sqsubseteq r_k$ o bien $r_k \sqsubseteq s_n$, pero, como $s_n < r_k$, se ha de dar el primer caso. ■

Con esto estamos en condiciones de demostrar que las cribas son hasta cierto punto equivalentes a los esquemas de Suslin. Para ello observamos que la aplicación $s : \mathcal{D} \longrightarrow \omega^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$ que a cada $r = \sum_{i=0}^{k} 2^{-n_i}$ (donde $0 < n_0 < \cdots < n_k$) le hace corresponder $s_r = \{n_i - n_{i-1} - 1\}_{i=0}^{k}$ (entendiendo que $n_{-1} = 0$) es biyectiva y, más aún, es una semejanza entre $(\mathcal{D}, \sqsubseteq)$ y $(\omega^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}, \subset)$.

Teorema 4.22 *Sea X un espacio topológico y $Z \subset X$. Entonces, $Z = S(A)$, para un esquema de Suslin decreciente A (abierto, cerrado, de Borel, etc.) si y sólo si $Z = C(\Phi)$ para una criba monótona Φ (abierta, cerrada, de Borel, etc.)*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $Z = S(A)$ y, para cada $r \in \mathcal{D}$ definimos $\Phi(r) = A_{s_r}$. Así Φ es una criba monótona (y es abierta, cerrada, etc. si A lo es). Veamos que $S(A) = C(\Phi)$.

Si $x \in S(A)$, entonces existe un $y \in \mathcal{N}$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ x \in A_{y|_n}$. Llamamos r_n al único número diádico que cumple $y|_n = s_{r_n}$, de modo que la sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ es estrictamente creciente y $x \in \Phi(r_n)$, luego $x \in C(\Phi)$.

Supongamos ahora que $x \in C(\Phi)$. Por el teorema anterior existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathcal{D}$ estrictamente creciente para $\sqsubseteq$ tal que $x \in \Phi(r_n)$. Entonces, s_{r_n} es una sucesión estrictamente creciente en $\omega^{<\omega}$, luego $y = \bigcup_{n\in\omega} s_{r_n} \in \mathcal{N}$ y, como A es decreciente, $\bigwedge n \in \omega\ y \in A_{y|_n}$, es decir, $x \in S(A)$.

Supongamos ahora que $Z = C(\Phi)$, para una cierta criba monótona Φ. Definimos entonces $A_\varnothing = X$ y, para $s \in \omega^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$, será $s = s_r$, para un único $r \in \mathcal{D}$, con lo que podemos definir $A_s = \Phi(r)$. De este modo, A es un esquema de Suslin decreciente (abierto, cerrado, etc. si lo es Φ). Como se cumple que $\Phi(r) = A_{s_r}$, la parte ya probada nos da que $S(A) = C(\Phi)$. ■

En particular, si X es un espacio polaco, los subconjuntos analíticos de X son los de la forma $C(\Phi)$, donde Φ es una criba monótona y cerrada en X. Los conjuntos coanalíticos son de la forma $X \setminus C(\Phi)$.

Más adelante demostraremos que la condición de monotonía puede suprimirse, es decir, que las cribas cerradas no necesariamente monótonas también determinan conjuntos analíticos. No obstante, para probarlo necesitamos algunos resultados previos sobre conjuntos definidos por cribas cerradas. Así pues, a partir de aquí suponemos que Φ es una criba cerrada, pero no necesariamente monótona, en un espacio polaco X y llamamos $C = X \setminus C(\Phi)$. Según estamos advirtiendo, esto equivale a suponer que C es un conjunto coanalítico, pero aún no estamos en condiciones de probarlo. Por definición de $C(\Phi)$ tenemos que

$$x \in C \leftrightarrow (M_x(\Phi), \preceq) \text{ está bien ordenado.}$$

Para cada ordinal $\alpha < \aleph_1$ definimos

$$A_\alpha(\Phi) = \{x \in X \mid \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) = \alpha\},$$

donde $\operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) = \alpha$ ha de entenderse como que $(M_x(\Phi), \preceq)$ está bien ordenado y su ordinal es α. Así, C se descompone como unión disjunta

$$C = \bigcup_{\alpha < \aleph_1} A_\alpha(\Phi).$$

Vamos a probar que cada $A_\alpha(\Phi)$ es un conjunto de Borel. Más aún, si llamamos

$$B_\alpha(\Phi) = \bigcup_{\delta < \alpha} A_\delta(\Phi) = \{x \in X \mid \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) < \alpha\},$$

se cumple que

a) Si $n \in \omega$, entonces $B_n(\Phi)$ es G_δ.

b) Si $\lambda < \aleph_1$ es un ordinal límite, entonces $B_\lambda(\Phi)$ es $\mathbf{\Sigma}^0_\lambda$,

c) Si $\alpha = \lambda + n + 1$, donde λ es un ordinal límite y $n \in \omega$, entonces $B_\alpha(\Phi)$ es $\mathbf{\Pi}^0_{\lambda+1}$.

(Notemos que el hecho de que los conjuntos $B_\alpha(\Phi)$ sean de Borel implica que los $A_\alpha(\Phi)$ también lo son, pues $A_\alpha(\Phi) = B_{\alpha+1}(\Phi) \setminus B_\alpha(\Phi)$.)

En efecto, dado $n \in \omega$, tenemos que $x \in B_n(\Phi)$ si y sólo si x pertenece a menos de n conjuntos $\Phi(r)$, luego $x \notin B_n(\Phi)$ si y sólo si existen $r_1, \ldots, r_n \in \mathcal{D}$ distintos dos a dos tales que $x \in \Phi(r_1) \cap \cdots \cap \Phi(r_n)$. La intersección es cerrada y los subconjuntos de $\mathcal{D}$ con n elementos son una cantidad numerable, luego $X \setminus B_n(\Phi)$ es un F_σ y $B_n(\Phi)$ es un G_δ.

Supongamos ahora que $\alpha < \aleph_1$ es infinito y que, para toda criba cerrada Φ y todo $\delta < \alpha$ se cumple a), b) y c).

Si $\alpha = \lambda$ es un ordinal límite, entonces

$$B_\lambda(\Phi) = \bigcup_{\delta<\lambda} B_\delta(\Phi) \in \mathbf{\Sigma}^0_\lambda.$$

Supongamos finalmente que $\alpha = \lambda + n + 1$. Para cada $r \in \mathcal{D}$, definimos

$$\Phi_r(s) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{si } s \prec r, \\ \varnothing & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así:

$$M_x(\Phi_r) = \{s \in M_x(\Phi) \mid s \prec r\},$$

es decir, que los conjuntos $M_x(\Phi_r)$, para $r \in M_x(\Phi)$ son los segmentos iniciales de $M_x(\Phi)$. Por consiguiente, $x \in B_\alpha(\Phi)$ si y sólo si, para todo $r \in M_x(\Phi)$, el conjunto $M_x(\Phi_r)$ está bien ordenado y su ordinal es menor que $\lambda + n$. Equivalentemente:

$$B_\alpha(\Phi) = \bigcap_{r\in M_x(\Phi)} B_{\lambda+n}(\Phi_r).$$

Por hipótesis de inducción $B_{\lambda+n}(\Phi_r) \in \mathbf{\Pi}^0_{\lambda+1}$, luego también $B_\alpha(\Phi) \in \mathbf{\Pi}^0_{\lambda+1}$.

En particular hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 4.23 *Todo conjunto coanalítico en un espacio polaco es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel.*

En particular:

Teorema 4.24 (AC) *Todo conjunto coanalítico en un espacio polaco tiene cardinal $\leq \aleph_1$ o bien $2^{\aleph_0}$.*

Así pues, mientras un conjunto analítico sólo puede tener cardinal numerable o igual a $2^{\aleph_0}$, para los conjuntos coanalíticos tenemos, en principio, una tercera posibilidad, y es que tengan cardinal $\aleph_1$.

Introducimos ahora un conjunto coanalítico especialmente relevante:

Definición 4.25 Llamamos $\mathbf{BO} = \{A \subset \mathcal{D} \mid (A, \preceq) \text{ está bien ordenado}\}$ y, para cada $\alpha < \aleph_1$, definimos $\mathbf{BO}_\alpha = \{A \in \mathbf{BO} \mid \operatorname{ord}(A, \preceq) = \alpha\}$.

Así, $\mathbf{BO} = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{BO}_\alpha$, la unión es disjunta y, por la nota al pie del teorema 1.30, se cumple que $\mathbf{BO}_\alpha \neq \varnothing$.

Fijando una biyección $d : \omega \longrightarrow \mathcal{D}$ podemos identificar cada subconjunto de $\mathcal{D}$ con un subconjunto de ω y éste a su vez con su función característica en $\mathcal{C} = 2^\omega$. De este modo, podemos considerar que $\mathbf{BO}$, $\mathbf{BO}_\alpha \subset \mathcal{C}$. Más precisamente, cada $x \in \mathcal{C}$ se corresponde con el conjunto

$$A_x = \{r \in \mathcal{D} \mid x(d^{-1}(r)) = 1\}$$

y, en estos términos, $x \in \mathbf{BO}$ si y sólo si $(A_x, \preceq)$ está bien ordenado.

Teorema 4.26 $\mathbf{BO} \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{C})$.

Demostración: Tenemos que $x \notin \mathbf{BO}$ si y sólo si $(A_x, \preceq)$ no está bien ordenado, lo cual equivale a que exista una sucesión decreciente $\{r_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de A_x. Si llamamos $y(n) = d^{-1}(r_n)$, el hecho de que r_n esté en A_x equivale a que $x(y_n)) = 1$. Por lo tanto:

$$x \notin \mathbf{BO} \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega \ (x(y(n)) = 1 \land d(y(n+1)) \prec d(y(n))),$$

luego $\mathcal{C} \setminus \mathbf{BO}$ es la proyección del conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{N} \mid \bigwedge n \in \omega \ (x(y(n)) = 1 \land d(y(n+1)) \prec d(y(n)))\},$$

luego basta ver que C es cerrado. A su vez, C es la intersección de los conjuntos

$$C_n = \{(x,y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{N} \mid x(y(n)) = 1 \land d(y(n+1)) \prec d(y(n))\},$$

que son cerrados, pues, si $(x,y) \notin \mathcal{C} \times \mathcal{N}$, o bien $x(y(n)) = 0$, en cuyo caso

$$(x,y) \in B_{x|_{y(n)+1}} \times B_{y|_{n+1}} \subset C_n,$$

o bien $d(y(n)) \preceq d(y(n+1))$, en cuyo caso $(x,y) \in \mathcal{C} \times B_{y|_{n+1}} \subset C_n$. ■

Definimos la criba abierta cerrada Φ en $\mathcal{C}$ dada por

$$\Phi(r) = \{x \in \mathcal{C} \mid x(d^{-1}(r)) = 1\}.$$

Observamos que

$$M_x(\Phi) = \{r \in \mathcal{D} \mid x \in \Phi(r)\} = \{r \in \mathcal{D} \mid x(d^{-1}(r)) = 1\} = A_x.$$

Por consiguiente, $x \in C(\Phi)$ si y sólo si $M_x(\Phi) = A_x$ no está bien ordenado, si y sólo si $x \notin \mathbf{BO}$. Equivalentemente, $\mathbf{BO} = \mathcal{C} \setminus C(\Phi)$. Además, $A_\alpha(\Phi) = \mathbf{BO}_\alpha$.

Esto implica que los conjuntos $\mathbf{BO}_\alpha$ son de Borel en $\mathcal{C}$, y son disjuntos dos a dos (y no vacíos). Esto nos da cierta información sobre el cardinal de la σ-álgebra de Borel de un espacio polaco (sin suponer el axioma de elección):

Teorema 4.27 *Si X es un espacio polaco no numerable, $|\mathcal{B}(X)| \geq \aleph_1$.*

Demostración: Por el teorema 2.36 basta probarlo para $\mathcal{C}$, y claramente la aplicación $\alpha \mapsto \mathbf{BO}_\alpha$ es una aplicación $\aleph_1 \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C})$ inyectiva. ■

La propiedad más significativa del conjunto $\mathbf{BO}$ es la dada por el teorema siguiente:

Teorema 4.28 *Sea X un espacio polaco, sea Φ una criba de Borel en X y sea $A = C(\Phi)$. Entonces existe una aplicación $f : X \longrightarrow \mathcal{C}$ medible Borel tal que $A_\alpha(\Phi) = f^{-1}[\mathbf{BO}_\alpha]$ para todo $\alpha < \aleph_1$. En particular $X \setminus A = f^{-1}[\mathbf{BO}]$, luego A es analítico.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos $f(x)(n) = 1$ si y sólo si $x \in \Phi(d(n))$. Así

$$A_{f(x)} = \{r \in \mathcal{D} \mid f(x)(d^{-1}(r)) = 1\} = \{r \in \mathcal{D} \mid x \in \Phi(r)\} = M_x(\Phi).$$

Por lo tanto,

$$x \in A_\alpha(\Phi) \leftrightarrow \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) = \alpha \leftrightarrow \operatorname{ord}(A_{f(x)}, \preceq) = \alpha \leftrightarrow f(x) \in \mathbf{BO}_\alpha,$$

es decir, $A_\alpha(\Phi) = f^{-1}[\mathbf{BO}_\alpha]$. Hemos de probar que f es medible Borel. Ahora bien, si $s \in 2^n$, entonces

$$f^{-1}[B_s] = \bigcap_{s(m)=1} \Phi(d(m)) \cap \bigcap_{s(m)=0} (X \setminus \Phi(d(m))) \in \mathcal{B}(X).$$

■

Observemos que si la criba del teorema anterior es abierta cerrada, entonces los conjuntos $f^{-1}[B_s]$ son abiertos cerrados, luego f es, de hecho, una aplicación continua.

Ahora podemos demostrar un hecho que habíamos anunciado más arriba:

Teorema 4.29 *Un subconjunto A de un espacio polaco X es analítico si y sólo si $A = C(\Phi)$, para cierta criba de Borel Φ en X, que puede tomarse monótona y cerrada.*

En la sección siguiente demostraremos (teorema 4.40) que existen conjuntos analíticos que no son de Borel (o, equivalentemente, conjuntos analíticos que no son coanalíticos, y viceversa), si bien los ejemplos que daremos serán un tanto sofisticados. Admitiendo este hecho, podemos demostrar que **BO** proporciona otro ejemplo, sólo que mucho más simple.

Teorema 4.30 *El conjunto* $\mathbf{BO} \subset \mathcal{C}$ *es coanalítico, pero no analítico.*

DEMOSTRACIÓN: Si fuera analítico, sería de Borel, y por el teorema 4.28 todos los conjuntos coanalíticos serían de Borel (y los analíticos también). ■

4.3 La jerarquía proyectiva

Aunque todavía hemos de demostrar más propiedades básicas de los conjuntos analíticos y coanalíticos, conviene introducir antes la jerarquía proyectiva, de la que $\mathbf{\Sigma}_1^1$ y $\mathbf{\Pi}_1^1$ son los primeros peldaños:

Definición 4.31 Para cada espacio polaco X y cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, definimos inductivamente las clases (de Lusin) $\mathbf{\Sigma}_n^1(X)$ y $\mathbf{\Pi}_n^1(X)$ como sigue:

- $\mathbf{\Sigma}_1^1(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es analítico}\}$.
- $\mathbf{\Pi}_n^1(X) = \{X \setminus A \mid A \in \mathbf{\Sigma}_n^1(X)\}$.
- $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X) = \{\pi_X[A] \mid A \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N})\}$.

Definimos además $\mathbf{\Delta}_n^1 = \mathbf{\Sigma}_n^1 \cap \mathbf{\Pi}_n^1$.

Claramente, las clases $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ y $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ son las que ya teníamos definidas. En particular $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ es la clase de los conjuntos de Borel. Las clases de Lusin satisfacen las mismas inclusiones que la jerarquía de Borel:

Teorema 4.32 *Si X es un espacio polaco, se dan las inclusiones siguientes:*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \boldsymbol{\Sigma}^1_1 & & & & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 & & & & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 & & & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
\boldsymbol{\Delta}^1_1 & & & & \boldsymbol{\Delta}^1_2 & & & & \boldsymbol{\Delta}^1_3 & & & & \boldsymbol{\Delta}^1_4 & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
 & & \boldsymbol{\Pi}^1_1 & & & & \boldsymbol{\Pi}^1_2 & & & & \boldsymbol{\Pi}^1_3 & & & &
\end{array}$$

Demostración: Si $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1(X)$, existe un cerrado $C \subset X \times \mathcal{N}$ tal que $A = \pi_X[C]$, pero $C \in \mathcal{B}(X \times \mathcal{N}) \subset \boldsymbol{\Pi}^1_1(\mathcal{N} \times X)$, luego $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_2(X)$, es decir, tenemos la inclusión $\boldsymbol{\Sigma}^1_1 \subset \boldsymbol{\Sigma}^1_2$. En general, de la inclusión $\boldsymbol{\Sigma}^1_n \subset \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}$ se sigue que $\boldsymbol{\Pi}^1_n \subset \boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}$ y de aquí a su vez que $\boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1} \subset \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+2}$.

Si $A \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(X)$, entonces $A \times \mathcal{N} \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$. Esto es un caso particular del teorema siguiente 4.34: las antiimágenes continuas de conjuntos de cualquiera de las clases de Lusin están en la misma clase. Naturalmente, demostraremos 4.34 sin apoyarnos en el teorema que estamos demostrando.

Aceptando esto, concluimos que $A = \pi_X(A \times \mathcal{N}) \in \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}(X)$, luego tenemos la inclusión $\boldsymbol{\Pi}^1_n \subset \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}$. Tomando complementarios obtenemos a su vez que $\boldsymbol{\Sigma}^1_n \subset \boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}$.

Las inclusiones concernientes a las clases $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ son ahora inmediatas. ■

Definición 4.33 Se llaman subconjuntos *proyectivos* de un espacio polaco X a los elementos de

$$\boldsymbol{P}(X) = \bigcup_{n \in \omega} \boldsymbol{\Sigma}^1_n(X) = \bigcup_{n \in \omega} \boldsymbol{\Pi}^1_n(X) = \bigcup_{n \in \omega} \boldsymbol{\Delta}^1_n(X).$$

Los teoremas siguientes recogen las propiedades básicas de las clases de Lusin:

Teorema 4.34 *Las antiimágenes por funciones medibles Borel (en particular, continuas), las uniones numerables y las intersecciones numerables de conjuntos $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ (resp. $\boldsymbol{\Pi}^1_n$) son conjuntos $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ (resp. $\boldsymbol{\Pi}^1_n$). Los conjuntos $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ forman una σ-álgebra.*

Demostración: Veamos primero el caso de las antiimágenes medibles. Para $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ lo tenemos probado (teorema 4.4). Si se cumple para $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$, se cumple trivialmente para $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, pues, dada una función medible Borel $f : X \longrightarrow Y$ y un conjunto $A \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(Y)$, tenemos que $Y \setminus A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_n(Y)$, luego, por hipótesis de inducción, $X \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \setminus A] \in \boldsymbol{\Sigma}^1_n(X)$, luego $f^{-1}[A] \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(X)$.

Si se cumple para $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ y $A \in \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}(Y)$, entonces existe un $B \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(Y \times \mathcal{N})$ tal que $A = \pi_Y[B]$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es medible Borel, también lo es la aplicación inducida $f^* : X \times \mathcal{N} \longrightarrow Y \times \mathcal{N}$, luego $f^{*-1}[B] \in \boldsymbol{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$, con lo que

$A' = \pi_X[f^{*-1}[B]] \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$. Ahora basta observar que $A' = f^{-1}[A]$. En efecto:

$$x \in A' \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ (x, y) \in f^{*-1}[B] \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ (f(x), y) \in B \leftrightarrow f(x) \in A.$$

Por el teorema 4.3 sabemos que $\mathbf{\Sigma}^1_1$ es cerrado para uniones e intersecciones numerables. Es inmediato que si vale para $\mathbf{\Sigma}^1_n$ también vale para $\mathbf{\Pi}^1_n$. Supongamos ahora que vale para $\mathbf{\Pi}^1_n$ y sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia de conjuntos en $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$. Entonces $A_n = \pi_Y[C_n]$, con $C_n \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$. Por consiguiente,

$$\pi_X[\bigcup_{n\in\omega} C_n] = \bigcup_{n\in\omega} \pi_X[C_n] = \bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X).$$

Fijando un homeomorfismo $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}^\omega$ que a cada $y \in \mathcal{N}$ le asigne una sucesión $(y_n)_{n\in\omega}$, vemos que

$$x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee a \in \mathcal{N}\ (x, a) \in C_n \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}^\omega \bigwedge n \in \omega\ (x, y(n)) \in C_n$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\ (x, y_n) \in C_n \leftrightarrow x \in \pi_X[U],$$

donde

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) \in X \times \mathcal{N} \mid \bigwedge n \in \omega\ (x, y_n) \in C_n\} \\ &= \bigcap_{n\in\omega} \{(x, y) \in X \times \mathcal{N} \mid\ (x, y_n) \in C_n\} \\ &= \bigcap_{n\in\omega} (I \times p_n)^{-1}[\{(x, y) \in X \times \mathcal{N} \mid (x, y) \in C_n\}] \\ &= \bigcap_{n\in\omega} (I \times p_n)^{-1}[C_n] \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N}), \end{aligned}$$

luego $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$. ■

En particular, un isomorfismo de Borel entre dos espacios polacos determina isomorfismos entre sus respectivas σ-álgebras $\mathbf{\Delta}^1_n$, así como entre sus álgebras de conjuntos proyectivos.

Hemos definido los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$ como las proyecciones de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$, pero en realidad todas las imágenes de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n$ por cualquier aplicación continua, o simplemente medible Borel, son $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$, tal y como muestra el teorema siguiente:

Teorema 4.35 *Las imágenes de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$ por funciones medibles Borel (en particular, continuas) son $\mathbf{\Sigma}^1_n$, mientras que las imágenes de los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n$ son los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación medible Borel. En la prueba del teorema 4.4 hemos visto que su gráfica

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

es un conjunto de Borel en $X \times Y$. Por otra parte, el teorema 1.25 nos da una aplicación $g : \mathcal{N} \longrightarrow X$ continua y suprayectiva, con la que podemos construir a su vez una aplicación $h : Y \times \mathcal{N} \longrightarrow X \times Y$ continua y suprayectiva.

Si $A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X)$, tenemos que

$$B = \{(x, f(x) \mid x \in A\} = (A \times Y) \cap G_f \in \Pi^1_n(X \times Y),$$

luego $C = h^{-1}[B] \in \mathbf{\Pi}^1_n(Y \times \mathcal{N})$, luego $\pi_Y[C] \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(Y)$. Pero $\pi_Y[C] = f[A]$. En efecto:

$$y \in \pi_Y[C] \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}\ (y, x) \in C \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}\ (g(x), y) \in B$$

$$\leftrightarrow \bigvee x \in X\ (x, y) \in B \leftrightarrow y \in f[A].$$

Con esto queda probada la parte del enunciado sobre conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n$. El caso $\mathbf{\Sigma}^1_1$ es el teorema 4.4 y, para $n > 1$, tenemos que los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$ son las imágenes de los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ por aplicaciones medibles Borel, luego las imágenes de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$ por aplicaciones medibles Borel son también imágenes de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ por aplicaciones medibles Borel, luego son $\mathbf{\Sigma}^1_n$. ■

El teorema anterior se puede precisar ligeramente:

Teorema 4.36 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación inyectiva y medible Borel entre espacios polacos.*

a) Si $A \in \mathcal{B}(X)$, entonces $f[A] \in \mathcal{B}(Y)$.

b) Si $A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X)$, entonces $f[A] \in \mathbf{\Pi}^1_n(Y)$.

Demostración: a) Sea $G = G(f) \subset X \times Y$ la gráfica de f, que por 4.12 es un conjunto de Borel. La inyectividad de f se traduce en que la proyección $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ cumple que $\pi_Y|_G$ es inyectiva, luego, por 4.13 tenemos que $f[A] = \pi_Y[\pi_X^{-1}[A] \cap G] \in \mathcal{B}(Y)$.

b) Basta observar que $f[A] = f[X] \cap (Y \setminus f[X \setminus A])$. Por una parte, tenemos que $f[X] \in \Delta^1_1 \subset \mathbf{\Pi}^1_n$ por el apartado anterior y, por otra parte, $f[X \setminus A] \in \mathbf{\Sigma}^1_1$ por el teorema anterior, luego $f[A] \in \mathbf{\Pi}^1_n$. ■

Teorema 4.37 *Si $X \subset Y$ son espacios polacos, entonces los subconjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$ o $\mathbf{\Delta}^1_n$ de X son los subconjuntos de la misma clase de Y contenidos en X.*

Demostración: Teniendo en cuenta que la inclusión $i : X \longrightarrow Y$ es continua, el teorema 4.34 implica que todo subconjunto de X que está en una de las clases proyectivas de Y, está en la clase correspondiente de X. Veamos ahora que, para cada par de espacios $X \subset Y$, se cumple que $\mathbf{\Sigma}^1_n(X) \subset \mathbf{\Sigma}^1_n(Y)$ y $\mathbf{\Pi}^1_n(X) \subset \mathbf{\Pi}^1_n(Y)$.

Para $\mathbf{\Sigma}^1_1$ se deduce inmediatamente de la definición de conjunto analítico.

Si $\mathbf{\Sigma}_n^1(X) \subset \mathbf{\Sigma}_n^1(Y)$ y $A \in \mathbf{\Pi}_n^1(X)$, entonces $X \setminus A \in \mathbf{\Sigma}_n^1(Y)$ y, como $X \in \mathbf{\Pi}_2^0(Y) \subset \mathbf{\Delta}_1^1(Y)$, concluimos que $Y \setminus A = (Y \setminus X) \cup (X \setminus A) \in \mathbf{\Sigma}_n^1(Y)$, luego $A \in \mathbf{\Pi}_n^1(Y)$.

Si $\mathbf{\Pi}_n^1(X) \subset \mathbf{\Pi}_n^1(Y)$ para todo par de espacios $X \subset Y$ y $A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$, entonces existe un $B \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N}) \subset \mathbf{\Pi}_n^1(Y \times \mathcal{N})$ tal que $A = \pi_X[B] = \pi_Y[B]$, luego $A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(Y)$.

A partir de aquí, el resultado para las clases $\mathbf{\Delta}_n^1$ es trivial. ■

Aunque hemos definido los conjuntos proyectivos a partir de proyecciones respecto de productos con $\mathcal{N}$. Sucede que es equivalente considerar proyecciones respecto de productos por $\mathcal{C}$:

Teorema 4.38 *Si X es un espacio polaco y $B \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$, existe un conjunto $A \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{C})$ tal que $B = \pi_X[A]$. Esto también es válido para $B \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$ con $A \in \mathbf{\Delta}_1^0(X \times \mathcal{C})$.*

Demostración: La clave es el teorema 1.37, que nos da una aplicación $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{C}$ que es un homeomorfismo en su imagen, la cual, a su vez, induce una aplicación $g : X \times \mathcal{N} \longrightarrow X \times \mathcal{C}$ que también es un homeomorfismo en su imagen. Si $B \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$, por definición existe un $A_0 \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N})$ (resp. cerrado, si $n = 0$) tal que $B = \pi_X[A]$. Entonces, $A = g[A_0]$ es $\mathbf{\Pi}_n^1$ en la imagen de g, luego también en $X \times \mathcal{C}$, por 4.37 (resp. es $\mathbf{\Delta}_1^0$, si $n = 0$), y claramente $X = \pi_X[A]$. ■

Por último demostramos que la jerarquía proyectiva es estricta, de modo que, en particular, hay conjuntos analíticos que no son de Borel. La técnica es la misma que hemos empleado para la jerarquía de Borel, es decir, construir conjuntos universales.

Teorema 4.39 *Para cada espacio polaco X existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_n^1(X)$ y un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}_n^1(X)$.*

Demostración: Por el teorema 2.8, existe un cerrado $V \subset \mathcal{C} \times \mathcal{N} \times X$ $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}_1^0(\mathcal{N} \times X)$. Sea

$$U = \{(u, x) \in \mathcal{C} \times X \mid \bigvee y \in \mathcal{N}\ (u, y, x) \in V\}.$$

Como U es la proyección de un cerrado, se cumple que $U \in \mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{C} \times X)$ y es $\mathbf{\Sigma}_1^1$-universal para $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, pues si $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, existe un cerrado $C \subset \mathcal{N} \times X$ tal que $A = \pi_X[C]$, pero dicho cerrado será de la forma $C = V_u$, para cierto $u \in \mathcal{C}$, y entonces es claro que $A = U_u$.

Si $V \subset \mathcal{C} \times X$ es un conjunto $\mathcal{C}$ universal para $\mathbf{\Sigma}_n^1(X)$, es claro que su complementario $U = (\mathcal{C} \times X) \setminus V$ es universal para $\mathbf{\Pi}_n^1(X)$ y, si V es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}_n^1(X)$, el conjunto U construido a partir de V como en el caso $\mathbf{\Sigma}_1^1$ es $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$, exactamente con la misma prueba. ■

El teorema siguiente se demuestra con el argumento de 2.9 tomado palabra por palabra (usando 4.37 en lugar de 2.6):

Teorema 4.40 *Si X es un espacio polaco no numerable, para cada $1 \leq n < \omega$ se cumple que $\mathbf{\Sigma}_n^1 \neq \mathbf{\Pi}_n^1$ y, por consiguiente, $\mathbf{\Delta}_n^1 \subsetneq \mathbf{\Sigma}_n^1 \subsetneq \mathbf{\Delta}_{n+1}^0$, e igualmente con $\mathbf{\Pi}_n^1$.*

Terminamos con una observación sobre bases de Hamel:

Teorema 4.41 *Si existe una base de Hamel de clase $\mathbf{\Sigma}_n^1$, entonces existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ de clase $\mathbf{\Sigma}_n^1$ no medible Lebesgue. En particular, una base de Hamel no puede ser un conjunto analítico.*

Demostración: Si B es una base de Hamel de clase $\mathbf{\Sigma}_n^1$ y $b \in B$, como $\{b\}$ es un conjunto de Borel, resulta que $B_0 = B \setminus \{b\}$ es también $\mathbf{\Sigma}_n^1$. En la nota final de la sección 3.4 hemos visto que existe un conjunto no medible Lebesgue que es unión numerable de imágenes continuas de B_0, luego también es $\mathbf{\Sigma}_n^1$. ∎

4.4 Buenos órdenes proyectivos

El axioma de elección implica que todo conjunto X admite un buen orden E, pero, en el caso en que X es un espacio polaco no numerable, ¿puede ser $E \subset X \times X$ un conjunto de Borel, o analítico, o, en general, proyectivo? Vamos a obtener algunos resultados a este respecto.

Ante todo, si X e Y son espacios polacos no numerables, existe un isomorfismo de Borel $f : X \longrightarrow Y$, y la aplicación $f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$ también es un isomorfismo de Borel. Por lo tanto, existe un buen orden proyectivo en X si y sólo si existe un buen orden proyectivo (de la misma clase $\mathbf{\Sigma}_n^1$, $\mathbf{\Pi}_n^1$ o $\mathbf{\Delta}_n^1$) en Y, es decir, el problema de la existencia de buenos órdenes proyectivos se puede estudiar en cualquier espacio polaco no numerable en particular y las conclusiones son válidas para todos los espacios polacos no numerables.

Otro hecho básico es el siguiente:

Teorema 4.42 *Si $E \subset X \times X$ es una relación de orden total $\mathbf{\Sigma}_n^1 \cup \mathbf{\Pi}_n^1$ en un espacio polaco, entonces $E \in \mathbf{\Delta}_n^1$.*

Demostración: Sea $\Delta \subset X \times X$ la diagonal, que es un conjunto de Borel. Esto hace que $E' = E \setminus \Delta$ sea también $\mathbf{\Sigma}_n^1 \cup \mathbf{\Pi}_n^1$, al igual que lo es la relación E'^{-1} dada por $E'^{-1}(x, y) \leftrightarrow E'(y, x)$ (más concretamente, se cumple que E'^{-1} es $\mathbf{\Sigma}_n^1$ (resp. $\mathbf{\Pi}_n^1$) si y sólo si E' lo es). Al tratarse de una relación de orden total, tenemos la partición

$$X \times X = E' \cup \Delta \cup E'^{-1}.$$

De aquí se sigue que si, por ejemplo, E es $\mathbf{\Sigma}_n^1$, entonces $\Delta \cup E'^{-1}$ también lo es, luego E es $\mathbf{\Pi}_n^1$, y viceversa. En ambos casos, E es $\mathbf{\Delta}_n^1$. ∎

De momento demostraremos únicamente el siguiente resultado básico:

Teorema 4.43 *Si existe un buen orden $\mathbf{\Delta}_n^1$ en $\mathbb{R}$, entonces existe un subconjunto en $\mathbf{\Delta}_n^1(\mathbb{R})$ que no es medible Lebesgue ni tiene la propiedad de Baire.*

DEMOSTRACIÓN: Sea E un buen orden en $\mathbf{\Delta}_n^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Basta probar que el conjunto de Vitali V definido en la demostración de 3.1 es (o, mejor dicho, puede tomarse) $\mathbf{\Delta}_n^1$. En efecto, V resulta de elegir un elemento en cada clase de equivalencia de $\mathbb{I}$ respecto de la relación dada por $a\,R\,b \leftrightarrow b-a\in\mathbb{Q}$. Si, concretamente, tomamos como elemento en V el mínimo de cada clase respecto del buen orden E, tenemos que, para cada $x\in\mathbb{I}$,

$$x\in V \leftrightarrow \bigwedge y\in\mathbb{I}(x-y\in\mathbb{Q}\rightarrow (x,y)\in E) \leftrightarrow \bigwedge y\in\mathbb{I}(x-y\notin\mathbb{Q}\vee (x,y)\in E).$$

Ahora observamos que

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{I}\times\mathbb{I}\mid x-y\notin\mathbb{Q}\}\in\mathbf{\Delta}_1^1(\mathbb{I}\times\mathbb{I}).$$

En efecto, basta considerar la aplicación continua $f:\mathbb{I}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x-y$, de modo que $B=f^{-1}[\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}]$.

Por consiguiente, $B\cup E\in\mathbf{\Delta}_n^1(\mathbb{I}\times\mathbb{I})$ y $V=\pi[B\cup E]\in\mathbf{\Delta}_n^1(\mathbb{I})\subset\mathbf{\Delta}_n^1(\mathbb{R})$. ■

Por consiguiente, concluimos que un espacio polaco no numerable no admite buenos órdenes $\mathbf{\Sigma}_1^1$ o $\mathbf{\Pi}_1^1$. A lo máximo a lo que podemos aspirar es a un buen orden $\mathbf{\Delta}_2^1$.

4.5 Clases normadas

Introducimos aquí una propiedad que nos permitirá estudiar las propiedades de reducción y separación en las clases proyectivas.

Definición 4.44 Sea Γ una clase de conjuntos definida sobre los espacios polacos y sea $A\in\Gamma(X)$. Diremos que una aplicación $\phi:A\longrightarrow\Omega$ es una *norma en* Γ si existen relaciones $\leq_\Gamma, \leq_{\neg\Gamma}\subset X\times X$ en Γ y $\neg\Gamma$ respectivamente tales que, para todo $y\in A$ y todo $x\in X$, se cumple que

$$x\in A\wedge\phi(x)\leq\phi(y)\leftrightarrow x\leq_\Gamma y\leftrightarrow x\leq_{\neg\Gamma} y.$$

Diremos que Γ es una *clase normada* si todo $A\in\Gamma$ tiene una norma en Γ.

Observemos que las relaciones $\leq_\Gamma$ y $\leq_{\neg\Gamma}$ no son relaciones de orden en A. Ambas son reflexivas y transitivas, pero en general no tienen por qué ser simétricas. Ambas son lo que se llaman *buenos preórdenes* en A, es decir relaciones reflexivas y transitivas tales que la relación $x\sim y\leftrightarrow x\leq y\wedge y\leq x$ es una relación de equivalencia en A y $\leq$ induce un buen orden en el conjunto cociente $A/\sim$.

Si Γ es cerrada para uniones e intersecciones finitas y sustituciones continuas, entonces las relaciones inversas $\geq_\Gamma$ y $\geq_{\neg\Gamma}$ también están en Γ y $\neg\Gamma$, respectivamente, pues se obtienen de sus inversas como antiimágenes por el homeomorfismo $X \times X \longrightarrow X \times X$ dado por $(x, y) \mapsto (y, x)$. Además podemos definir

$$x <_\Gamma y \leftrightarrow x \leq_\Gamma y \land \neg(x \geq_{\neg\Gamma} y), \qquad x <_{\neg\Gamma} y \leftrightarrow x \leq_{\neg\Gamma} y \land \neg(x \geq_\Gamma y),$$

de modo que, para todo $y \in A$ y todo $x \in X$ se cumple que

$$x \in A \land \phi(x) < \phi(y) \leftrightarrow x <_\Gamma y \leftrightarrow x <_{\neg\Gamma} y.$$

Más aún, si extendemos $\phi : X \longrightarrow \Omega$ haciendo que, sobre $X \setminus A$ tome un valor fijo mayor que cualquier ordinal de $\phi[A]$, podemos definir

$$x \leq^* y \leftrightarrow x \in A \land \phi(x) \leq \phi(y), \qquad x <^* y \leftrightarrow x \in A \land \phi(x) < \phi(y),$$

de modo que ambas relaciones están en Γ. En efecto, basta tener en cuenta que

$$x \leq^* y \leftrightarrow x \in A \land (x \leq_\Gamma y \lor \neg y \leq_{\neg\Gamma} x), \qquad x <^* y \leftrightarrow x \in A \land \neg y \leq_{\neg\Gamma} x.$$

Recíprocamente, si las relaciones $\leq^*$ y $<^*$ están en Γ, entonces ϕ es una norma en Γ, pues basta definir $x \leq_\Gamma y \leftrightarrow x \leq^* y$, $x \leq_{\neg\Gamma} y \leftrightarrow y \not<^* x$.

Teorema 4.45 *Sea Γ una clase normada definida sobre los espacios polacos, que contenga los conjuntos abiertos cerrados y que sea cerrada para uniones e intersecciones finitas y para sustituciones continuas.*

a) Γ tiene la propiedad de reducción y $\neg\Gamma$ tiene la propiedad de separación.

b) Si existe un conjunto $\mathcal{C}$-universal para $\Gamma(\mathcal{C})$, entonces Γ no tiene la propiedad de separación y $\neg\Gamma$ no tiene la propiedad de reducción.

c) Si Γ es cerrada para intersecciones numerables entonces tiene la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción generalizada.

d) Si Γ es cerrada para uniones e intersecciones numerables, entonces $\neg\Gamma$ tiene la propiedad de separación generalizada.

Demostración: a) Sean $A, B \in \Gamma(X)$ y definimos $R = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$. Como la proyección $X \times \omega \longrightarrow X$ es obviamente continua, vemos que $A \times \omega \in \Gamma$, y también $X \times \{0\} \in \Gamma$ (pues es abierto cerrado), así concluimos que

$$A \times \{0\} = (A \times \omega) \cap (X \times \{0\}) \in \Gamma,$$

y análogamente $B \times \{1\} \in \Gamma$, luego $R \in \Gamma(X \times \omega)$.

Por consiguiente, podemos tomar una norma $\phi : R \longrightarrow \Omega$. Definimos los conjuntos A^*, $B^* \subset X$ mediante

$$x \in A^* \leftrightarrow (x, 0) <^* (x, 1), \qquad x \in B^* \leftrightarrow (x, 1) \leq^* (x, 0).$$

Se cumple que $A^*, B^* \in \Gamma$. Por ejemplo, la aplicación $X \longrightarrow (X \times \omega) \times (Y \times \omega)$ dada por $x \mapsto ((x, 0), (x, 1))$ es continua, y A^* es la antiimagen de $<^*$ por dicha aplicación, luego $A^* \in \Gamma$, y análogamente con B^*. Además, es obvio que $A^* \cap B^* = \varnothing$ y, si $x \in A^*$, entonces $(x, 0) \in R$, luego $x \in A$, es decir, $A^* \subset A$ e igualmente $B^* \subset B$. Por último, si $x \in A \cup B$, entonces $(x, 0) \in R$ o bien $(x, 1) \in R$, luego $\phi(x, 0) < \phi(x, 1)$ o bien $\phi(x, 1) \leq \phi(x, 0)$, luego $x \in A^* \cup B^*$.

Esto prueba que Γ tiene la propiedad de reducción, luego $\neg\Gamma$ tiene la propiedad de separación por 2.14.

b) está demostrado en 2.14 d).

c) Tomemos $R \in \Gamma(X \times \omega)$ y sea $\phi : R \longrightarrow \Omega$ una norma en R. Definimos R^* mediante

$$(x, n) \in R^* \leftrightarrow (x, n) \in R \wedge \bigwedge m \in \omega((x, n) \leq^* (x, m))$$

$$\wedge \bigwedge m \in \omega((x, n) <^* (x, m) \vee n \leq m)).$$

Veamos que $R^* \in \Gamma(X \times \omega)$. Para ello observamos que R^* es intersección de tres conjuntos, y que los tres están en $\Gamma(X \times \omega)$. Uno es el propio R, otro es

$$\bigcap_{m \in \omega} \{(x, n) \in X \times \omega \mid (x, n) \leq^* (x, m)\},$$

que está en $\Gamma(X \times \omega)$ porque cada uno de los conjuntos de la intersección es la antiimagen de $\leq^*$ por la aplicación continua $X \times \omega \longrightarrow X \times \omega \times X \times \omega$ dada por $(x, n) \mapsto (x, n, x, m)$. El tercero es

$$\bigcap_{m \in \omega} (\{(x, n) \in X \times \omega \mid (x, n) <^* (x, m)\} \cup (X \times (m + 1))).$$

En cada unión, el conjunto de la izquierda está en $\Gamma(X \times \omega)$ por ser una antiimagen continua de $<^*$ y el de la derecha por ser una antiimagen continua del conjunto abierto cerrado $m + 1$ en ω.

Una expresión alternativa para R^* es:

$$(x, n) \in R^* \leftrightarrow (x, n) \in R \wedge \phi(x, n) = \text{mín}\{\phi(x, m) \mid (x, m) \in R\}$$

$$\wedge\, n = \text{mín}\{m \in \omega \mid (x, m) \in R \wedge \phi(x, m) = \phi(x, n)\}.$$

Es decir, dado $(x, m) \in R$, consideramos todos los pares (x, n) con la misma proyección, y nos quedamos únicamente con aquellos en los que $\phi(x, n)$ toma el valor mínimo. De entre ellos, seleccionamos el menor n posible. Es inmediato entonces que, dado $(x, m) \in R$, existe un único par en R^* de la forma (x, n). Por lo tanto, R^* cumple la definición 2.12.

El resto del teorema se sigue de 2.13 y 2.14. ■

A continuación demostramos que la clase $\mathbf{\Pi}^1_1$ es una clase normada, con lo que, de hecho, satisface todas las hipótesis del teorema precedente. Nos apoyaremos en los resultados de la sección 4.2, si bien en el capítulo siguiente daremos una demostración con técnicas alternativas.

Teorema 4.46 *Existe una norma $\phi : \mathbf{BO} \longrightarrow \aleph_1$ (suprayectiva) en $\mathbf{\Pi}^1_1$.*

Demostración: Definimos $\phi(x) = \alpha \leftrightarrow x \in \mathbf{BO}_\alpha$. Vamos a probar que es una norma en $\mathbf{\Pi}^1_1$. Para ello observamos que cada función $f : A \subset \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ puede codificarse mediante un elemento de $\mathcal{C}$. Como en la sección anterior, $d : \omega \longrightarrow \mathcal{D}$ es una biyección arbitraria prefijada, y consideramos también la semejanza $\langle\ ,\ \rangle : \omega\times\omega \longrightarrow \omega$. Así, a cada f podemos asignarle la función $x \in \mathcal{C}$ dada por

$$x(\langle m, n\rangle) = 1 \leftrightarrow d(n) \in A \wedge f(d(n)) = d(m).$$

Llamamos $C \subset \mathcal{C}$ al conjunto de todos los puntos que codifican sucesiones f crecientes respecto del orden usual en $\mathbb{Q}$. Explícitamente:

$$z \in C \leftrightarrow \bigwedge mn_1n_2 \in \omega(z(\langle n, m_1\rangle) = z(\langle n, m_2\rangle) = 1 \rightarrow m_1 = m_2)$$

$$\wedge \bigwedge n_1n_2m_1m_2(d(n_1) < d(n_2) \wedge z(\langle n_1, m_1\rangle) = z(\langle n_2, m_2\rangle) = 1$$

$$\rightarrow d(m_1) < d(m_2)).$$

Es fácil ver que C es cerrado, es decir, que si $x \notin C$, entonces, cualquier $y \in \mathcal{C}$ tal que $x|_n = y|_n$ para un n suficientemente grande, cumplirá también que $y \notin C$. Ahora vemos que la relación

$$x \leq_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow x, y \in \mathbf{BO} \wedge \phi(x) \leq \phi(y)$$

es $\mathbf{\Pi}^1_1$, pues $\phi(x) \leq \phi(y)$ equivale a que no existan un $u \in A_x$ y una aplicación $f : A_y \longrightarrow A_x$ que conserve el orden y cuya imagen esté contenida en la sección inicial determinada por u. Por lo tanto:

$$x \leq_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow x, y \in \mathbf{BO} \wedge \neg\bigvee zk(z \in C \wedge x(k) = 1 \wedge$$

$$\bigwedge n \in \omega(y(n) = 1 \rightarrow \bigvee m \in \omega(d(m) < d(k) \wedge x(m) = 1 \wedge z(\langle n, m\rangle) = 1))).$$

Para probar que la relación es $\mathbf{\Pi}^1_1$ basta ver que el conjunto

$$\{(x, y, z, k) \in \mathcal{C}^3 \times \omega \mid z \in C \wedge x(k) = 1 \wedge$$

$$\bigwedge n \in \omega(y(n) = 1 \rightarrow \bigvee m \in \omega(d(m) < d(k) \wedge x(m) = 1 \wedge z(\langle n, m\rangle) = 1))\}$$

es cerrado. Para ello vemos que es intersección de tres conjuntos, uno es el cerrado $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times C \times \omega$, otro el cerrado $\{(x, y, z, k) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \omega \mid x(k) = 1\}$ y el tercero la intersección

$$\bigcap_{n\in\omega} (\{(x, y, z, k) \in \mathcal{C}^3 \times \omega \mid y(n) = 0\} \cup$$

$$\bigcap_{m\in\omega} \{\{(x, y, z, k) \in \mathcal{C}^3 \times \omega \mid d(m) < d(k) \wedge x(m) = 1 \wedge z(\langle n, m\rangle) = 1\}),$$

donde todos los conjuntos definidos explícitamente son abiertos cerrados.

Por otra parte, si $x \in \mathcal{C}$ e $y \in \mathbf{BO}$, la relación $x \in \mathbf{BO} \wedge \phi(x) \leq \phi(y)$ equivale a la existencia de una aplicación $f : A_x \longrightarrow A_y$ que conserve el orden, es decir,

$$x \leq_{\Sigma_1^1} y \leftrightarrow \bigvee z(z \in C \wedge \bigwedge n \in \omega(x(n) = 1 \rightarrow \bigvee m(y(m) = 1 \wedge z(\langle n, m \rangle) = 1)),$$

que claramente es $\mathbf{\Sigma}_1^1$, pues es la proyección del subconjunto de $\mathcal{C}^3$ formado por los (x, y, z) que cumplen la afirmación tras $\bigvee z$, que a su vez es intersección del cerrado $\mathcal{C}^2 \times C$ con la intersección de los conjuntos abiertos

$$\{(x, y, z) \in \mathcal{C}^3 \mid x(n) = 0\} \cup \bigcup_{m \in \omega} \{(x, y, z) \in \mathcal{C}^3 \mid y(m) = 1 \wedge z(\langle n, m \rangle) = 1\}.$$

■

Teorema 4.47 *La clase $\mathbf{\Pi}_1^1$ es normada.*

Demostración: Sea X un espacio polaco y sea $A \in \mathbf{\Pi}_1^1(X)$. Sea Φ una criba cerrada tal que $A = X \setminus C(\Phi)$. Por el teorema 4.28 existe una aplicación $f : X \longrightarrow \mathcal{C}$ medible Borel tal que $A_\alpha(\Phi) = f^{-1}[\mathbf{BO}_\alpha]$. Definimos la norma $\phi : A \longrightarrow \aleph_1$ dada por $\phi(x) = \alpha \leftrightarrow f(x) \in \mathbf{BO}_\alpha$. Equivalentemente, ϕ es la composición de $f : A \longrightarrow \mathbf{BO}$ con la norma definida en la demostración del teorema anterior. La aplicación $f \times f : X \times X \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es medible Borel, por lo que las antiimágenes de las relaciones $\leq_{\Pi_1^1}$ y $\leq_{\Sigma_1^1}$ definidas en el teorema anterior son $\mathbf{\Pi}_1^1$ y $\mathbf{\Sigma}_1^1$ respectivamente, y es fácil ver que prueban que ϕ es una norma en $\mathbf{\Pi}_1^1$. ■

Más aún:

Teorema 4.48 *Si la clase $\mathbf{\Pi}_n^1$ es normada, también lo es $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$. En particular, la clase $\mathbf{\Sigma}_2^1$ es normada.*

Demostración: Sea X un espacio polaco y $A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X)$. Entonces existe $B \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times \mathcal{N})$ tal que $A = \pi_X[B]$. Por hipótesis existe una norma $\phi : B \longrightarrow \Omega$ en $\mathbf{\Pi}_n^1$. Definimos $\psi : A \longrightarrow \Omega$ mediante $\psi(x) = \min\{\phi(x, y) \mid (x, y) \in B\}$. Vamos a probar que ψ es una norma en $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$. En efecto, si $x_1 \in X$ y $x_2 \in A$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 \leq^* x_2 &\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge z \in \mathcal{N}((x_1, y) \in B \wedge \phi(x_1, y) \leq \phi(x_2, z))) \\ &\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \neg \bigvee z \in \mathcal{N}\ (x_1, y) \not\leq^* (x_2, z) \end{aligned}$$

El conjunto

$$\{(x_1, y, x_2, z) \in X \times \mathcal{N} \times X \times \mathcal{N} \mid (x_1, y) \not\leq^* (x_2, z)\}$$

es $\mathbf{\Sigma}_n^1$ (es el complementario de $\leq^*$), luego su proyección en $X \times \mathcal{N} \times X$ es también $\mathbf{\Sigma}_n^1$, luego el complementario de esta proyección es $\mathbf{\Pi}_n^1$ y su proyección en $X \times X$ es $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$. Dicha proyección es $\leq^*$. Similarmente,

$$\begin{aligned} x_1 <^* x_2 &\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge z \in \mathcal{N}((x_1, y) \in B \wedge \phi(x_1, y) < \phi(x_2, z))) \\ &\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \neg \bigvee z \in \mathcal{N}\ (x_1, y) \not<^* (x_2, z), \end{aligned}$$

luego $<^*$ también es $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$. Esto prueba que ψ es una norma en $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$. ■

En particular, tenemos que las clases $\mathbf{\Pi}^1_1$ y $\mathbf{\Sigma}^1_2$ tienen la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción generalizada, pero no la propiedad de separación, mientras que $\mathbf{\Sigma}^1_1$ y $\mathbf{\Pi}^1_2$ tienen la propiedad de separación generalizada, pero no la propiedad de reducción.

4.6 Uniformización

Introducimos ahora una propiedad que no hemos estudiado para los conjuntos de Borel porque no la poseen:

Definición 4.49 Sea Γ una clase de conjuntos definida sobre los espacios polacos. Diremos que Γ tiene la propiedad de *uniformización* si para todo par de espacios polacos X, Y y todo $A \in \Gamma(X \times Y)$ existe un $B \in \Gamma(X \times Y)$ tal que $B \subset A$ y

$$\bigwedge x \in X (\bigvee y \in Y\ (x, y) \in A \leftrightarrow \overset{1}{\bigvee} y \in Y\ (x, y) \in B).$$

En tal caso se dice que B *uniformiza* a A. (Véase la figura en la página xvi.)

Hemos visto que las clases $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ poseen la propiedad de uniformización numérica, que es el caso particular de la propiedad de uniformización en el que $Y = \omega$. Sin embargo, las clases de la jerarquía de Borel no poseen la propiedad de uniformización. En efecto:

Teorema 4.50 *Existe un conjunto cerrado $C \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ que no admite una uniformización analítica.*

Demostración: Hemos probado que $\mathbf{\Pi}^1_1$ no posee la propiedad de separación. Así pues, existen conjuntos disjuntos A_1, $A_2 \in \mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{N})$ tales que no existe ningún conjunto de Borel B tal que $A_0 \subset B$ y $A_1 \cap B = \varnothing$. Existen conjuntos cerrados $C_0, C_1 \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tales que

$$\mathcal{N} \setminus A_i = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee y \in \mathcal{N}\ (x, y) \in C_i\}.$$

La aplicación $x \mapsto 0^\frown x$ es un homeomorfismo entre $\mathcal{N}$ y $B_{\{0\}} \subset \mathcal{N}$ que induce a su vez un homeomorfismo $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times B_{\{0\}} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Tomando la imagen de C_0 por este homeomorfismo podemos suponer que $C_0 \subset \mathcal{N} \times B_{\{0\}}$, e igualmente que $C_1 \subset \mathcal{N} \times B_{\{1\}}$.

Llamamos $C = C_0 \cup C_1$, y vamos a probar que no puede ser uniformizado por un conjunto analítico. Supongamos, por el contrario, que $B \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ uniformiza a C. Como las proyecciones de C_0 y C_1 son $\mathcal{C} \setminus A_0$ y $\mathcal{C} \setminus A_1$, tenemos que $\pi[C] = \mathcal{N}$. Por lo tanto B es la gráfica de una función $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ que, por el teorema 4.12 es medible Borel.

Entonces, $D_i = f^{-1}[B_{\{i\}}]$ son dos conjuntos de Borel disjuntos y $A_i \subset D_{1-i}$. En efecto, si $x \in A_i$, entonces $x \in \mathcal{N} \setminus A_{1-i}$, luego existe un $y \in \mathcal{N}$ tal que $(x, y) \in C_{1-i} \subset C$, luego $(x, f(x)) \in C$, pero no puede ser $(x, f(x)) \in C_i$, ya que entonces $x \notin A_i$, luego $(x, f(x)) \in C_{1-i} \subset \mathcal{N} \times B_{\{1-i\}}$, luego $f(x) \in B_{\{1-i\}}$, luego $x \in D_{\{1-i\}}$.

Por lo tanto, D_0 separa a A_0 y A_1, contradicción. ■

En particular, ninguna de las clases $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ o incluso $\mathbf{\Sigma}^1_1$ tiene la propiedad de separación. La primera candidata a poseerla es $\mathbf{\Pi}^1_1$ y vamos a ver que ése es el caso.

De la demostración del teorema de uniformización para $\mathbf{\Pi}^1_1$ puede abstraerse un argumento general a través del concepto de escala, que introducimos a continuación.

Definición 4.51 Sea A un subconjunto de un espacio polaco X. Una *escala* en A es una sucesión de normas $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ tal que si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en A convergente a un $x \in X$ y las sucesiones $\{\phi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces $x \in A$ y $\phi_n(x) \leq \phi_n(x_m)$, para todo m suficientemente grande.

Si Γ es una clase de conjuntos y cada ϕ_n es una norma en Γ, entonces se dice que la escala es una escala en Γ. Diremos que Γ *tiene escalas* si cada $A \in \Gamma$ tiene una escala en Γ.

Teorema 4.52 *Si $\mathbf{\Pi}^1_m$ tiene escalas, entonces tiene la propiedad de uniformización.*

Demostración: Sean X e Y espacios polacos y $A \in \mathbf{\Pi}^1_m(X \times Y)$. Por el teorema 1.26 existe un cerrado $C \subset \mathcal{N}$ y una biyección continua $f : C \longrightarrow Y$, con lo que $F = (I \times f) : X \times C \longrightarrow X \times Y$ es también una biyección continua.

Así $A' = F^{-1}[A] \in \mathbf{\Pi}^1_m(X \times C) \subset \mathbf{\Pi}^1_m(X \times \mathcal{N})$. Si probamos que existe un conjunto $B' \in \mathbf{\Pi}^1_m(X\times\mathcal{N})$ que uniformiza a A', entonces $B = F[B']$ uniformiza a A y, como F es inyectiva y continua, $B \in \mathbf{\Pi}^1_m(X \times Y)$ por 4.36. Así pues, basta probar la propiedad de uniformización para conjuntos $A \in \mathbf{\Pi}^1_m(X \times \mathcal{N})$.

Sea $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ una escala en $\mathbf{\Pi}^1_m$ definida sobre A y sean $\leq^*_n$ y $<^*_n$ las relaciones correspondientes (todas ellas en $\mathbf{\Pi}^1_m$). Para cada par $(x, y) \in X \times \mathcal{N}$ definimos

$$\psi_n(x, y) = (\phi_0(x, y), y(0), \phi_1(x, y), y(1), \ldots, \phi_n(x, y), y(n)) \in \Omega^{2n+2}.$$

Consideramos la relación en $X \times \mathcal{N}$ dada por

$$(x, y) \preceq^*_n (x', y') \leftrightarrow (x, y) \in A \land \psi_n(x, y) \leq \psi_n(x', y'),$$

donde $\leq$ es el orden lexicográfico en Ω^{2n+2}. Más explícitamente:

$$(x, y) \prec^*_n (x', y') \leftrightarrow \bigvee i \leq n\big(\bigwedge j < i\big((x, y) \leq^*_j (x', y') \land (x', y') \leq^*_j (x, y)$$

$$\land\, y(j) = y'(j)\big) \land \big((x, y) <^*_i (x', y') \lor ((x, y) \leq^*_i (x', y') \land (x', y') \leq^*_i (x, y)$$

$$\land\, y(i) < y'(i))\big)\big),$$

$$(x, y) \preceq^*_n (x', y') \leftrightarrow ((x, y) \prec^*_n (x', y') \lor$$

$$\bigwedge i \leq n((x, y) \leq^*_i (x', y') \land (x', y') \leq^*_i (x, y) \land y(i) = y'(i))).$$

A partir de estas expresiones es fácil ver que $\preceq_n^*$ y $\prec_n^*$ están en $\mathbf{\Pi}_m^1$. Llamamos

$$B_n = \{(x,y) \in X \times \mathcal{N} \mid \bigwedge z \in \mathcal{N}\ (x,y) \preceq_n^* (x,z)\}.$$

Observemos que el conjunto $C_n = \{(x,y,z) \in X \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid (x,y) \preceq_n^* (x,z)\}$ está en $\mathbf{\Pi}_m^1$, pues es la antiimagen de $\preceq_n^*$ por la aplicación continua dada por $(x,y,z) \mapsto (x,y,x,z)$. Esto implica que $B_n \in \mathbf{\Pi}_m^1$, pues su complementario es la proyección del complementario de C_n, luego es $\mathbf{\Sigma}_m^1$. Además, $B_{n+1} \subset B_n \subset A$.

Llamamos $B = \bigcap\limits_{n\in\omega} B_n \in \mathbf{\Pi}_m^1$ y vamos a ver que B uniformiza a A.

Obviamente $B \subset A$. Si $(x,y),(x,y') \in B_n$, entonces $(x,y) \preceq_n^* (x,y')$ y $(x,y') \preceq_n^* (x,y)$, luego $\psi_n(x,y) = \psi_n(x,y')$, luego $y|_{n+1} = y'|_{n+1}$. Por lo tanto, si $(x,y),(x,y') \in B$, se cumple que $y = y'$. Así pues, B es la gráfica de una función. Sólo hemos de probar que si $(x,y) \in A$ existe un $z \in \mathcal{N}$ tal que $(x,z) \in B$. Definimos

$$Y_0 = \{y \in \mathcal{N} \mid (x,y) \in A \wedge \bigwedge z \in \mathcal{N}((x,z) \in A \to (x,y) \preceq_0^* (x,z))\},$$

$$Y_{n+1} = \{y \in Y_n \mid (x,y) \in A \wedge \bigwedge z \in \mathcal{N}((x,z) \in B_n \to (x,y) \preceq_{n+1}^* (x,z))\}.$$

Una simple inducción demuestra que $Y_n \neq \varnothing$ y $y \in Y_n \leftrightarrow (x,y) \in B_n$. En efecto, como existe un y tal que $(x,y) \in A$, tomándolo con $\psi_0(x,y)$ mínimo, tenemos que $y \in Y_0 \neq \varnothing$, y claramente $y \in Y_0 \leftrightarrow (x,y) \in B_0$.

Si es cierto para n, tomamos $y \in Y_n$ tal que $\psi_{n+1}(x,y)$ sea mínimo. Así $(x,y) \in A$ y, si $(x,z) \in B_n$, entonces $z \in Y_n$, luego $\psi_n(x,y) \leq \psi_n(x,z)$, luego $(x,y) \preceq_{n+1}^* (x,z)$, luego $y \in Y_{n+1} \neq \varnothing$.

Si $y \in Y_{n+1}$ y $z \in \mathcal{N}$, sea $z' \in \mathcal{N}$ tal que $\psi_{n+1}(x,z')$ sea mínimo. Entonces $(x,z') \in B_{n+1} \subset B_n$ y $(x,z') \preceq_{n+1}^* (x,z)$, luego $(x,y) \preceq_{n+1}^* (x,z') \preceq_{n+1}^* (x,z)$, luego $(x,y) \in B_{n+1}$. El recíproco es trivial.

Si $y_1, y_2 \in Y_n$, entonces $(x,y_1),(x,y_2) \in B_n$, de donde $(x,y_1) \preceq_n^* (x,y_2)$ y $(x,y_2) \preceq_n^* (x,y_1)$, luego $\psi_n(x,y_1) = \psi_n(x,y_2)$ y en particular $y_1|_{n+1} = y_2|_{n+1}$. Sea $z(n)$ el valor común de $y(n)$ para todo $y \in Y_n$. Así tenemos definido un $z \in \mathcal{N}$ tal que si $\{z_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión con $z_n \in Y_n$, se cumple que $z_n|_{n+1} = z|_{n+1}$, luego la sucesión $\{(x,z_n)\}_{n\in\omega}$ converge a (x,z). Además, si $m > n$, se cumple que $z_m, z_n \in Y_n$, por lo que $\phi_n(x,z_m) = \phi_n(x,z_n)$. Esto significa que la sucesión $\{\phi_n(x,z_m)\}_{m\in\omega}$ es finalmente constante. Por definición de escala, esto implica que $(x,z) \in A$, así como que $\phi_n(x,z) \leq \phi_n(x,z_n)$ para todo $n \in \omega$.

Más aún, si $m \leq n$, entonces $\phi_m(x,z) \leq \phi_m(x,z_m) = \phi_m(x,z_n)$, pues $z_m, z_n \in Y_m$. Como además $z|_{n+1} = z_n|_{n+1}$, resulta que $\psi_n(x,z) \leq \psi_n(x,z_n)$, luego $(x,z) \preceq_n^* (x,z_n) \in B_n$, luego $(x,z) \in B_n$ para todo n, luego $(x,z) \in B$. ■

Nota Más adelante necesitaremos la observación siguiente sobre la demostración del teorema anterior. En ella hemos partido de una escala $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ sobre un conjunto $A \in \mathbf{\Pi}_m^1(X \times \mathcal{N})$ y hemos construido aplicaciones ψ_n cuya imagen está en realidad en un conjunto de la forma κ^{2n+2}, para un cierto ordinal κ suficientemente grande. Componiendo ψ_n con la semejanza entre κ^{2n+2}

(con el orden lexicográfico) y su ordinal, obtenemos aplicaciones $\chi_n : A \longrightarrow \Omega$ y las relaciones $\preceq_n^*$ y $\prec_n^*$ prueban que son normas en $\mathbf{\Pi}_m^1$. Más aún, la sucesión $\{\chi_n\}_{n\in\omega}$ forma una escala en $\mathbf{\Pi}_m^1$.

En efecto: si $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ es una sucesión en A que converge a un punto $(x, y) \in X \times \mathcal{N}$ de modo que las sucesiones $\{\chi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces $\{\psi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ es finalmente constante, luego, las sucesiones $\{\phi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ y $\{y_k|_n\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes. Como $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala, esto implica que $(x, y) \in A$, así como que $\phi_n(x, y) \leq \phi_n(x_k, y_k)$ para todo $k \geq k_n$. Además, tomando k_n suficientemente grande, se cumple también que $y_k|_n = y|_n$. Esto implica que, para k suficientemente grande, $\psi_n(x, y) \leq \psi_n(x_k, y_k)$, luego también $\chi_n(x, y) \leq \chi_n(x_k, y_k)$.

Más aún, la escala $\{\chi_n\}_{n\in\omega}$ cumple (claramente) una propiedad adicional:

Si $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ es una sucesión en A tal que las sucesiones $\{\chi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces la sucesión $\{y_k\}_{k\in\omega}$ es convergente. ■

Teorema 4.53 *La clase $\mathbf{\Pi}_1^1$ tiene escalas.*

Demostración: Sea $Z = \{(\beta, \gamma) \in \aleph_1 \times \aleph_1 \mid \gamma \leq \beta\}$ en el que consideramos el orden lexicográfico:

$$(\beta, \gamma) < (\beta', \gamma') \leftrightarrow \beta < \beta' \lor (\beta = \beta' \land \gamma < \gamma').$$

Puesto que todas las secciones iniciales son numerables, el ordinal de Z es $\aleph_1$, luego existe una única semejanza $F : Z \longrightarrow \aleph_1$.

Fijemos un espacio polaco X y un conjunto $A \in \mathbf{\Pi}_1^1(X)$. Entonces $X \setminus A = S(B)$, donde B es un esquema de Suslin que, según 4.7, podemos tomar abierto, decreciente y con la propiedad de los diámetros. Por el teorema 4.22 tenemos que $X \setminus A = C(\Phi)$, para una cierta criba monótona abierta en X. Así

$$x \in A \leftrightarrow (M_x(\Phi), \preceq) \text{ está bien ordenado.}$$

Fijamos una biyección $d : \omega \longrightarrow \mathcal{D}$ y, para cada $r \in \mathcal{D}$, definimos la criba

$$\Phi_r(s) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{si } s \prec r, \\ \varnothing & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de manera que

$$M_x(\Phi_r) = \{s \in M_x(\Phi) \mid s \prec r\}.$$

Definimos la norma $\phi_n : A \longrightarrow \aleph_1$ dada por

$$\phi_n(x) = F(\beta, \gamma), \qquad \beta = \operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq), \quad \gamma = \operatorname{ord}(M_x(\Phi_{d(n)}), \preceq).$$

Veamos que la relación

$$x \leq_{\Pi_1^1}^n y \leftrightarrow x, y \in A \land \phi_n(x) \leq \phi_n(y)$$

es $\mathbf{\Pi}^1_1(X\times X)$. Para ello la expresamos en la forma

$$x \leq^n_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow (x,y)\in A\times A \wedge (\operatorname{ord}(M_x(\Phi),\preceq) < \operatorname{ord}(M_y(\Phi),\preceq)$$
$$\vee\ (\operatorname{ord}(M_x(\Phi),\preceq) = \operatorname{ord}(M_y(\Phi),\preceq)$$
$$\wedge\ \operatorname{ord}(M_x(\Phi_{d(n)}),\preceq) \leq \operatorname{ord}(M_y(\Phi_{d(n)}),\preceq))).$$

Basta probar que son $\mathbf{\Pi}^1_1$ las tres relaciones:

$$\begin{array}{lcl} R_1(x,y) & \leftrightarrow & \operatorname{ord}(M_x(\Phi),\preceq) < \operatorname{ord}(M_y(\Phi),\preceq),\\ R_2(x,y) & \leftrightarrow & \operatorname{ord}(M_x(\Phi),\preceq) \leq \operatorname{ord}(M_y(\Phi),\preceq),\\ R_3(x,y) & \leftrightarrow & \operatorname{ord}(M_x(\Phi_{d(n)}),\preceq) \leq \operatorname{ord}(M_y(\Phi_{d(n)}),\preceq). \end{array}$$

(Notemos que entonces $R_2(x,y)\wedge R_2(y,x)$ también será $\mathbf{\Pi}^1_1$, y ésta es la relación que necesitamos para probar que $\leq^n_{\Pi^1_1}$ es $\mathbf{\Pi}^1_1$.)

Recordemos de la prueba del teorema 4.46 que el conjunto $C\subset\mathcal{C}$ de las sucesiones que codifican funciones crecientes $f : A\subset\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{D}$ es cerrado en $\mathcal{C}$. Así,

$$R_1(x,y)\leftrightarrow \neg\bigvee z\in C\ (z \text{ codifica una } f : M_y(\Phi)\longrightarrow M_x(\Phi))$$
$$\leftrightarrow \neg\bigvee z\in C\ (\bigwedge i\in\omega(y\in\Phi(d(i))\rightarrow \bigvee j\in\omega(x\in\Phi(d(j))\wedge z(\langle i,j\rangle)=1))).$$

Ahora observamos que el conjunto

$$B_i = \{(x,y,z)\in X\times X\times\mathcal{C} \mid \bigvee j\in\omega(x\in\Phi(d(j))\wedge z(\langle i,j\rangle)=1)\}$$

es abierto, el conjunto $(X\times(X\setminus\Phi(d(i)))\times\mathcal{C})$ es cerrado, luego

$$B=(X\times X\times C)\cap\bigcap_{i\in\omega}((X\times(X\setminus\Phi(d(i)))\times\mathcal{C})\cup B_i)\subset X\times X\times\mathcal{C}$$

es de Borel, y $R_1=(X\times X)\setminus\pi_{X\times X}[B]$, luego R_1 es $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Para R_2 usamos la equivalencia

$$R_2(x,y)\leftrightarrow\neg\bigvee z\in C\bigvee m\in\omega(d(m)\in M_x(\Phi)\wedge$$
$$z \text{ codifica una } f : M_y(\Phi)\longrightarrow M_x(\Phi_{d(m)}))$$
$$\leftrightarrow\neg\bigvee z\in C\bigvee m\in\omega(x\in\Phi(d(m))\wedge$$
$$\bigwedge i\in\omega(y\in\Phi(d(i))\rightarrow\bigvee j\in\omega(x\in\Phi_{d(m)}(d(j))\wedge z(\langle i,j\rangle=1))))$$

y a partir de aquí se razona como con R_1. El caso de R_3 es similar al de R_2.

Por otra parte, dado $y\in A$, la relación dada por

$$x\leq^n_{\Sigma^1_1} y\leftrightarrow x\in A\wedge\phi_n(x)\leq\phi_n(y)$$

es equivalente a

$$x\leq^n_{\Sigma^1_1} y\leftrightarrow R_1(x,y)\vee(R_2(x,y)\wedge R_2(y,x)\wedge R_3(x,y)).$$

(Notemos que, al suponer $y \in A$, las relaciones $R_1(x, y)$ y $R_2(x, y)$ ya implican que $x \in A$.) A su vez,

$$R_1(x, y) \leftrightarrow \bigvee z \in C \bigvee m \in \omega(d(m) \in M_y(\Phi) \land$$

$$z \text{ codifica una } f : M_x(\Phi) \longrightarrow M_y(\Phi_{d(m)})),$$

que es fácil ver que es $\mathbf{\Sigma}_1^1$, e igualmente con R_2 y R_3. Por lo tanto $\leq^n_{\Sigma^1_1}$ es $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Esto prueba que ϕ_n es una norma en $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Supongamos ahora que $\{x_k\}_{k\in\omega}$ es una sucesión en A que converge a $x \in X$ y que las sucesiones $\{\phi_n(x_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente iguales a ordinales α_n. Más concretamente, para cada n existe un k_n tal que, si $k \geq k_n$, entonces $\alpha_n = F(\beta_n, \gamma_n)$, donde $\beta_n = \operatorname{ord}(M_{x_k}(\Phi), \preceq)$, $\gamma_n = \operatorname{ord}(M_{x_k}(\Phi_{d(n)}), \preceq)$.

Hemos de probar que $x \in A$ y que $\phi_n(x) \leq \alpha_n$.

En primer lugar observamos que para todo $k \geq \text{máx}\{k_m, k_n\}$ se cumple que $\beta_m = \operatorname{ord}(M_{x_k}(\Phi), \preceq) = \beta_n$, luego en realidad todos los β_n son iguales a un mismo β. No ocurre lo mismo con los γ_n. Veamos que si $d(m), d(n) \in M_x(\Phi)$ y $d(m) \prec d(n)$, entonces $\gamma_m < \gamma_n$.

En efecto, tenemos que $x \in \Phi(d(m)) \cap \Phi(d(n))$. Como la criba es abierta, existe un $k \geq \text{máx}\{k_m, k_n\}$ tal que $x_k \in \Phi(d(m)) \cap \Phi(d(n))$. Esto implica que $d(m) \in M_{x_k}(\Phi_{d(n)})$, luego $M_{x_k}(\Phi_{d(m)})$ es un segmento inicial propio de $M_{x_k}(\Phi_{d(n)})$, por lo que $\gamma_m < \gamma_n$.

De este modo tenemos una aplicación $M_x(\Phi) \longrightarrow \Omega$ (la dada por $d(n) \mapsto \gamma_n$) que conserva el orden, luego $M_x(\Phi)$ está bien ordenado y, por consiguiente, $x \in A$.

Más aún, si $d(n) \in M_x(\Phi)$, entonces la misma aplicación muestra que $M_x(\Phi_{d(n)})$ es semejante a un subconjunto de γ_n, luego $\operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) \leq \gamma_n \leq \beta$. Como todos los segmentos iniciales de $M_x(\Phi)$ tienen ordinal $\leq \beta$, ha de ser $\operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq) \leq \beta$, luego

$$\phi_n(x) = F(\operatorname{ord}(M_x(\Phi), \preceq), \operatorname{ord}(M_x(\Phi_{d(n)}), \preceq)) \leq F(\beta, \gamma_n) = \alpha_n.$$

Esto prueba que la escala que hemos construido es una escala en $\mathbf{\Pi}^1_1$. ■

Más aún:

Teorema 4.54 *Si la clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ tiene escalas, también las tiene la clase $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. En particular la clase $\mathbf{\Sigma}^1_2$ tiene escalas.*

Demostración: Sea X un espacio polaco y $C \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X)$. Esto significa que existe un $A \in \mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$ tal que $C = \pi_X[A]$. Sea $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ una escala en $\mathbf{\Pi}^1_n$ definida sobre A. Por la nota posterior al teorema 4.52 podemos suponer que tiene la propiedad adicional de que si $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ es una sucesión en A tal que las sucesiones $\{\phi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes, entonces la sucesión $\{y_k\}_{k\in\omega}$ es convergente. (Tomamos como ϕ_n la norma que en la nota hemos llamado χ_n.)

Por el teorema 4.52, tenemos que $\mathbf{\Pi}^1_n$ tiene la propiedad de uniformización, luego podemos tomar $B \subset A$ en $\mathbf{\Pi}^1_n(X \times \mathcal{N})$ que uniformiza a A. Más concretamente, podemos tomar el conjunto B definido en la prueba de 4.52, es decir, $B = \bigcap\limits_{n\in\omega} B_n$, donde

$$B_n = \{(x, y) \in X \times \mathcal{N} \mid \bigwedge z \in \mathcal{N}\ (x, y) \preceq^*_n (x, z)\}.$$

Definimos $\bar{\phi}_n : C \longrightarrow \Omega$ mediante $\bar{\phi}_n(x) = \phi(x, y)$, donde y es el único elemento de $\mathcal{N}$ tal que $(x, y) \in B$. Vamos a probar que $\{\bar{\phi}_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en C.

Para ello consideramos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ contenida en C y convergente a un $x \in X$, de modo que las sucesiones $\{\bar{\phi}_n(x_k)\}_{k\in\omega}$ sean finalmente constantes, digamos que iguales a ordinales α_n. Para cada $k \in \omega$, sea y_k el único elemento de $\mathcal{N}$ tal que $(x_k, y_k) \in B$. Entonces, $\bar{\phi}_n(x_k) = \phi_n(x_k, y_k)$, luego las sucesiones $\{\phi_n(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ son finalmente constantes, luego $\{y_k\}_{k\in\omega}$ converge a un $y \in \mathcal{N}$, luego $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\omega}$ converge a (x, y). Como $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala, concluimos que $(x, y) \in A$, así como que $\phi_n(x, y) \leq \alpha_n$. Entonces $x \in C$. Sea $y_0 \in \mathcal{N}$ tal que $(x, y_0) \in B$. Entonces, para cada $n \in \omega$, tenemos que $(x, y_0) \in B_n$, luego $(x, y_0) \preceq^*_n (x, y)$, luego $\bar{\phi}(x) = \phi_n(x, y_0) \leq \phi_n(x, y) \leq \alpha_n$.

Falta probar que cada $\bar{\phi}_n$ es una norma en $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. Ahora bien,

$$x_1 \leq^* x_2 \leftrightarrow x_1 \in C \wedge \bar{\phi}_n(x_1) \leq \bar{\phi}_n(x_2)$$

es equivalente a

$$x_1 \leq^* x_2 \leftrightarrow \bigvee y_1 \in \mathcal{N} \bigwedge y_2 \in \mathcal{N}((x_1, y_1) \in B \wedge (x_1, y_1) \preceq^*_n (x_2, y_2)).$$

En efecto, si $x_1 \leq^* x_2$, entonces $x_1 \in C$, luego existe un $y_1 \in \mathcal{N}$ tal que $(x_1, y_1) \in B$ y $\bar{\phi}_n(x_1) \leq \bar{\phi}_n(x_2)$ o que significa que, o bien $x_2 \notin C$, en cuyo caso $(x_2, y_2) \notin A$ y se cumple $(x_1, y_1) \preceq^*_n (x_2, y_2)$, o bien $x_2 \in C$, con lo que existe un $y' \in \mathcal{N}$ tal que $(x_2, y') \in B$, y entonces $(x_1, y_1) \leq (x_2, y') \leq (x_2, y_2)$, porque $(x_2, y') \in B_n$.

Recíprocamente, si se cumple el miembro derecho de la equivalencia anterior, la condición $(x_1, y_2) \in B$ implica que $x_1 \in C$. Si $x_2 \notin C$, se cumple trivialmente que $\bar{\phi}(x_1) \leq \bar{\phi}(x_2)$, mientras que si $x_2 \in C$, existe un $y_2 \in \mathcal{N}$ tal que $(x_2, y_2) \in B$, luego, por hipótesis $(x_1, y_1) \preceq^*_n (x_2, y_2)$, luego $\phi(x_1, y_2) \leq \phi(x_2, y_2)$, luego $\bar{\phi}(x_1) \leq \bar{\phi}(x_2)$.

Es claro entonces que $\leq^*$ es una relación $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$, y lo mismo vale para la relación $<^*$ definida sin más que cambiar $\preceq^*$ por $\prec^*$. ■

En particular, el teorema 4.52 implica que $\mathbf{\Pi}^1_1$ tiene la propiedad de uniformización. No podemos decir lo mismo de $\mathbf{\Sigma}^1_2$ porque no cumple la propiedad d) de dicho teorema. No obstante:

Teorema 4.55 *Si* $\mathbf{\Pi}_n^1$ *tiene la propiedad de uniformización, entonces* $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$ *también la tiene.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X e Y espacios polacos y $A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1(X \times Y)$. Entonces existe un $B \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times Y \times \mathcal{N})$ tal que $A = p[B]$. Por hipótesis existe un conjunto $C \subset B$ tal que $C \in \mathbf{\Pi}_n^1(X \times Y \times \mathcal{N})$ que uniformiza a B respecto de la primera componente, es decir, que

$$\bigvee yz\ (x, y, z) \in B \leftrightarrow \overset{1}{\bigvee} yz\ (x, y, z) \in C.$$

Es fácil ver que $D = p[C]$ uniformiza a A. ■

Así pues, $\mathbf{\Pi}_1^1$ y $\mathbf{\Sigma}_2^1$ tienen la propiedad de uniformización, mientras que $\mathbf{\Sigma}_1^1$ y $\mathbf{\Pi}_2^1$ no pueden tenerla, porque entonces tendrían en particular la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción, cuando sabemos que no la poseen.

Veamos una aplicación:

Teorema 4.56 *Todo conjunto* $\mathbf{\Sigma}_2^1$ *es unión de* $\aleph_1$ *conjuntos de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Si A es $\mathbf{\Sigma}_2^1$ en un espacio polaco X, entonces $A = \pi_x[B]$ para cierto $B \in \mathbf{\Pi}_1^1(X \times \mathcal{N})$. Sea $B^* \subset B$ un conjunto $\mathbf{\Pi}_1^1$ que lo uniformice. Por 4.23 sabemos que B^* es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, luego A es la unión de sus proyecciones. Ahora bien, la proyección π_X es inyectiva (y continua) sobre B^*, luego las proyecciones son conjuntos de Borel, por 4.13. ■

En particular [AE], el teorema 4.24 es válido para conjuntos $\mathbf{\Sigma}_2^1$. Sucede que la posibilidad de que existan conjuntos $\mathbf{\Sigma}_2^1$ con cardinal $\aleph_1$ es equivalente a la posibilidad de que existan conjuntos $\mathbf{\Pi}_1^1$ con dicho cardinal. En efecto, todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_2^1$ es de la forma $A = \pi_x[B]$, donde B es $\mathbf{\Pi}_1^1$ y, uniformizándolo, podemos suponer que tiene el mismo cardinal que A.

Capítulo V

Introducción a la teoría efectiva

Para poner de manifiesto la naturaleza esencialmente conjuntista (por oposición a topológica) de muchas cuestiones relacionadas con los conjuntos proyectivos es necesario introducir la teoría efectiva de Kleene (véase la introducción). El centro de la teoría efectiva es la teoría de la recursión, pero, dado que ésta descansa sobre una serie de resultados técnicos, con enunciados muy simples y naturales, pero demostraciones tediosas, hemos optado por evitarla por completo, de modo que los contenidos de los capítulos siguientes resulten accesibles sin necesidad de adentrarse en tales tecnicismos. El precio a pagar es que sólo podemos exponer "la cuarta parte" de esta teoría, a saber, la mitad correspondiente a las clases de Kleene análogas a las clases de Lusin, pero no la correspondiente a las análogas a las clases de Borel y, dentro de esta mitad, la mitad correspondiente al espacio de Baire $\mathcal{N}$ y no la mitad correspondiente a ω, de la que sólo podremos presentar los resultados más superficiales.

Más concretamente, introduciremos directamente la clase de los conjuntos aritméticos sin aludir a las clases Σ^0_n, Π^0_n y Δ^0_n que determinan en ellos la correspondiente jerarquía de Kleene (ni, por supuesto, a la prolongación de esta jerarquía que determina los conjuntos hiperaritméticos). Esto nos obligará a considerar provisionalmente a las clases de Kleene Σ^1_n, Π^1_n y Δ^1_n como un mero auxiliar en el estudio de las clases de Lusin, pues para un estudio exhaustivo de las primeras clases en sí mismas la teoría de la recursión resulta imprescindible.

Aunque la jerarquía efectiva puede definirse sobre una familia muy amplia de espacios polacos (aquellos a los que se puede dotar de una "estructura recursiva" entre los que se encuentra, por ejemplo, la recta real $\mathbb{R}$) el papel auxiliar con que vamos a concebir aquí la teoría de Kleene hace muy conveniente la simplificación que consiste en estudiarla únicamente sobre la clase de espacios que realmente consideró Kleene, a saber, los espacios de la forma $X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$, donde $r, s \in \omega$, sin excluir que uno de los dos pueda ser nulo. (Si los dos son nulos, tenemos el espacio trivial de un único punto.) Nos referiremos a estos espacios como *espacios producto.* Observemos que, en general, $X \cong \omega$ o bien $X \cong \mathcal{N}$, según si s es o no nulo. No obstante, aunque en realidad sólo estemos estudiando dos espacios distintos (de los cuales aparentemente uno es trivial), conviene trabajar con r y s arbitrarios para que podamos considerar cómodamente proyecciones entre ellos.

Por analogía con la notación tradicional al tratar con $\mathbb{R}^n$, representaremos a sus elementos de un espacio producto en la forma $(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$ (en vez de $(n_0, \ldots, n_{r-1}, x_0, \ldots, x_{s-1})$).

5.1 Árboles multidimensionales

Antes de pasar al estudio de los espacios producto en el sentido que acabamos de precisar, conviene hacer algunas consideraciones generales sobre una clase de espacios más generales que los espacios $\mathcal{N}^s$.

La idea fundamental es que si $X = X_1 \times \cdots \times X_s$ es un producto cartesiano arbitrario, un árbol R en X, según lo convenido en la sección 1.3, es un subconjunto de $X^{<\omega}$. Cada elemento de $X^{<\omega}$ es una sucesión $\{(x_i^1, \ldots, x_i^s)\}_{i<n}$, donde $x_j^i \in X_j$, pero una sucesión de este tipo determina y está completamente determinada por la s-tupla de sucesiones $(\{x_i^1\}_{i<n}, \ldots, \{x_i^s\}_{i<n})$. Así tenemos así definida una biyección natural $\phi : X^{<\omega} \longrightarrow S$, donde

$$S = \{(t_1, \ldots, t_s) \in X_1^{<\omega} \times \cdots \times X_s^{<\omega} \mid \ell(t_1) = \cdots = \ell(t_s)\}.$$

Si $t = (t_1, \ldots, t_s) \in S$, llamaremos $\ell(t) \in \omega$ a la longitud de cualquiera de sus componentes y, si $m \leq \ell(t)$, llamaremos $t|_m = (t_1|_m, \ldots, t_s|_m)$. De este modo, si $t \in X^{<\omega}$, tenemos que $\ell(t) = \ell(\phi(t))$ y $\phi(t|_m) = \phi(t)|_m$.

Más aún, si definimos en S el orden parcial dado por

$$t \leq t' \leftrightarrow t_1 \subset t_1' \land \cdots \land t_s \subset t_s'$$

(y en $X^{<\omega}$ consideramos el orden parcial dado por la inclusión), entonces, para todo $t_1, t_2 \in X^{<\omega}$, se cumple que $t_1 \leq t_2 \leftrightarrow \phi(t_1) \leq \phi(t_2)$.

Diremos que R es un *árbol s-dimensional* en un producto $X_1 \times \cdots \times X_s$ si $R \subset S \land \bigwedge t \in R \bigwedge m < \ell(t)\, r|_m \in R$.

Claramente, un conjunto $R \subset X^{<\omega}$ es un árbol en X si y sólo si $\phi[R]$ es un árbol s-dimensional en $X_1 \times \cdots \times X_s$.

Por otra parte, cada $x \in X^\omega$ es una sucesión $x = \{(x_n^1, \ldots, x_n^s)\}_{n<\omega}$ que determina y está determinada por la s-tupla $(\{x_n^1\}_{n<\omega}, \ldots, \{x_n^s\}_{n<\omega})$, con lo que tenemos otra biyección $\psi : X^\omega \longrightarrow X_1^\omega \times \cdots \times X_s^\omega$.

Claramente, si R es un árbol en X y $R' = \phi[R]$, el conjunto $[R] \subset X^\omega$ de sus caminos (o ramas infinitas) se corresponde a través de ψ con el conjunto

$$[R'] = \{x \in X_1^\omega \times \cdots \times X_s^\omega \mid \bigwedge n \in \omega\; x|_n \in R'\},$$

donde $x|_n = (x_1|_n, \ldots, x_s|_n)$.

Todas estas consideraciones nos permiten identificar S con $X^{<\omega}$ y, a su vez, identificar los árboles en X con los árboles s-dimensionales en X. De este modo, en lo sucesivo, cuando digamos, por ejemplo, que $x \in X^{<\omega}$, donde X es un producto cartesiano, se entenderá que x no es una sucesión en X sino una s-tupla de sucesiones, cuando digamos que R es un árbol en X, se entenderá que R es un árbol multidimensional, etc.

En particular, si $X = Y^s$, estamos identificando X^ω con $(Y^\omega)^s$ y, más particularmente aún, podemos identificar $\mathcal{N}^s$ con $(\omega^s)^\omega$.

Consideremos un producto cartesiano $X \times Y$ (donde, como hasta ahora, $X = X_1 \times \cdots \times X_s$, aunque sin excluir el caso en que $s = 1$). Si R es un árbol en $X \times Y$, tenemos que $[R] \subset X^\omega \times Y^\omega$, luego podemos considerar la proyección $p[R] \subset X^\omega$. Concretamente:

$$p[R] = \{x \in X^\omega \mid \bigvee y \in Y^\omega \bigwedge n \in \omega\ (x|_n, y|_n) \in R\}.$$

Adoptaremos el convenio de que, cuando R es un árbol en un producto finito de al menos dos conjuntos, $p[R]$ representa siempre la proyección en la que se elimina únicamente la última componente.

Definición 5.1 Sea $X = X_1 \times \cdots \times X_s$ un producto cartesiano arbitrario. Llamaremos $\mathbf{\Sigma}^1_1(X^\omega)$ a la clase de todos los subconjuntos de X^ω de la forma $p[R]$, donde R es un árbol en $X \times \omega$. A su vez, $\mathbf{\Pi}^1_n(X^\omega)$ será la clase de los complementarios de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_n(X^\omega)$ y $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(X^\omega)$ será la clase de los conjuntos de la forma $A = p[B]$, donde $B \in \mathbf{\Pi}^1_n(X^\omega \times \mathcal{N}) = \mathbf{\Pi}^1_n((X \times \omega)^\omega)$. Más explícitamente:

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ (x, y) \in B.$$

Observemos que los conjuntos de la forma $[R]$, donde R es un árbol en $X \times \omega$ son simplemente los cerrados en el espacio topológico $(X \times \omega)^\omega$ (que, a través de las identificaciones que estamos considerando, es homeomorfo a $X^\omega \times \mathcal{N}$). Por lo tanto, los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_1(X^\omega)$ que acabamos de definir son las proyecciones de los cerrados de $X^\omega \times \mathcal{N}$.

En particular, las clases que acabamos de definir coinciden con las clases de la jerarquía proyectiva cuando $X = \omega$ (es decir, $X^\omega = \mathcal{N}$) o, más en general, cuando $X = \omega^s$ (con lo que X^ω se identifica con $\mathcal{N}^s$).

5.2 Las clases de Kleene

Según la última observación de la sección anterior, los subconjuntos analíticos de $\mathcal{N}^s$ son los de la forma $p[R]$, donde R es un árbol en $\omega^s \times \omega$. Más explícitamente:

Un conjunto $A \subset \mathcal{N}^s$ es analítico si y sólo si existe un árbol R en $\omega^s \times \omega$ tal que

$$(x_1, \ldots, x_s) \in A \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\ (x_1|_n, \ldots, x_s|_n, z|_n) \in R.$$

Vamos a generalizar esta caracterización para incluir a los conjuntos analíticos de los espacios producto $\omega^r \times \mathcal{N}^s$:

Teorema 5.2 *Un conjunto $A \subset X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$ es analítico si y sólo si existe un conjunto $R \subset V_\omega^{r+s+2} \subset V_\omega$ tal que*

$$(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in A \leftrightarrow$$

$$\bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega (n_1, \ldots, n_r, x_1|_n, \ldots, x_s|_n, z|_n, n) \in R.$$

Demostración: Observemos que un conjunto $A \subset X$ es analítico si y sólo si, para cada $p \in \omega^r$, el conjunto $A_p = \{x \in \mathcal{N}^s \mid (p, x) \in A\}$ es analítico. En efecto, si A es analítico, como $\{p\} \times \mathcal{N}^s$ es abierto y cerrado en X, la intersección $A \cap (\{p\} \times \mathcal{N}^s)$ es analítica en $\{p\} \times \mathcal{N}^s$ y, a través del homeomorfismo natural de este espacio en $\mathcal{N}^s$, dicha intersección se corresponde con A_p.

Recíprocamente, si cada A_p es analítico, también lo son las intersecciones $A \cap (\{p\} \times \mathcal{N}^s)$, luego también lo es la unión (numerable) de todas ellas, que no es sino A.

Así pues, para cada $p \in \omega^r$ existe un árbol $s+1$-dimensional R_p tal que

$$(p, x) \in A \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega \ (x|_n, z|_n) \in R_p.$$

Tomando $R = \bigcup\limits_{p \in \omega^r} \{p\} \times R_p \times \omega$ se cumple la equivalencia del enunciado.

Recíprocamente, supongamos que A cumple la equivalencia del enunciado con un cierto conjunto $R \subset V_\omega^{r+s+2}$. Entonces, para cada $p \in \omega^r$, definimos

$$R_p = \{t \in (\omega^{s+1})^{<\omega} \mid \bigwedge n \leq \ell(t) \ (p, t|_n, n) \in R\}.$$

Claramente R_p es un árbol $s+1$-dimensional y

$$(p, x) \in A \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega \ (x|_n, z|_n) \in R_p,$$

luego $A_p \in \mathbf{\Sigma}_1^1(\mathcal{N}^s)$, luego $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$. ■

Tenemos así una caracterización puramente conjuntista (sin topología) de los conjuntos analíticos de los espacios producto. Vamos a apoyarnos en ella para introducir (la mitad de) la teoría efectiva de Kleene.

Definición 5.3 Consideremos el lenguaje formal $\mathcal{L}_k$ que resulta de extender el lenguaje de la teoría de conjuntos con k relatores monádicos $R_1, \ldots, R_k$. Claramente, unos conjuntos $a_1, \ldots, a_k \subset V_\omega$ determinan un modelo de $\mathcal{L}_r$, al que representaremos por $(V_\omega, a_1, \ldots, a_k)$, cuyo universo es V_ω, en el que el relator de pertenencia se interpreta como la pertenencia y cada relator R_i se interpreta como la pertenencia a a_i. Diremos que un conjunto $X \subset V_\omega$ es *aritmético* en $a_1, \ldots, a_k$ si existe una fórmula $\phi(x)$ de $\mathcal{L}_k$ tal que

$$\bigwedge x \in V_\omega (x \in X \leftrightarrow (V_\omega, a_1, \ldots, a_k) \vDash \phi(x)).$$

Los conjuntos *aritméticos* son los que pueden definirse sin parámetros.

Informalmente, X es aritmético en $a_1, \ldots, a_k$ si alguien que sólo pueda "ver" los conjuntos de V_ω y tenga además la capacidad de determinar si uno cualquiera de ellos está o no en cada a_i, tiene con ello información suficiente para determinar si un elemento de V_ω es o no elemento de X.

En particular, como V_ω es un modelo transitivo de ZFC$-$AI, cualquier relación que pueda definirse en ZFC$-$AI (y que sea absoluta para modelos transitivos) es aritmética.

Evidentemente, todo subconjunto de V_ω es aritmético en sí mismo, pero siempre podemos tomar un parámetro más sencillo:

Teorema 5.4 *Para cada $X \subset V_\omega$ existe un $a \in \mathcal{N}$ de manera que X es aritmético en a.*

Demostración: Definimos en ω la relación E dada por $m\,E\,n$ si y sólo si el $m+1$-ésimo dígito de la expansión binaria de n es igual a 1. Evidentemente $m\,E\,n$ implica que $m < n$, luego la relación E está bien fundada en ω, y claramente es extensional (si dos números tienen la misma expansión binaria, son iguales). Vamos a probar que su colapso transitivo es V_ω.

En efecto, sea $\pi : \omega \longrightarrow M$ la función colapsante y veamos por inducción que $\bigwedge n \in \omega\ \pi(n) \in V_\omega$. Ciertamente, $\pi(0) = \varnothing \in V_\omega$. Si $\pi[n] \subset V_\omega$, existe un $k \in \omega$ tal que $\pi[n] \subset V_k$ y así

$$\pi(n) = \{\pi(m) \mid m\,E\,n\} \subset \{\pi(m) \mid m < n\} \subset V_k,$$

luego $\pi(n) \in V_{k+1} \subset V_\omega$.

Recíprocamente, por $\in$-inducción en V_ω, si $x \in V_\omega$ cumple que $x \subset M$, entonces existen naturales $n_1, \ldots, n_r$ tales que $x = \{\pi(n_1), \ldots, \pi(n_r)\}$ y basta tomar el número m cuya expresión binaria tiene unos en las posiciones $n_1, \ldots, n_r$ para que sea $\pi(m) = x$, luego $x \in M$. Esto prueba que $M = V_\omega$.

Ahora observamos que π es definible en V_ω, es decir, que dados $n \in \omega$ y $x \in V_\omega$,

$$\pi(n) = x \leftrightarrow V_\omega \vDash n \in \omega \land \bigvee f(f \text{ es una función de dominio } n+1 \land x = f(n)$$
$$\land \bigwedge m \in n+1(f(m) = \{f(i) \mid i\,E\,m\})),$$

donde usamos que, evidentemente $i\,E\,m$, es decir, "la $i+1$-ésima cifra del desarrollo binario de m es 1" es definible en V_ω (porque V_ω es un modelo de ZFC-AI y toda la aritmética natural puede construirse en ZFC-AI). En resumen, existe una fórmula $\phi(n,x)$ del lenguaje de la teoría de conjuntos tal que

$$\pi(n) = x \leftrightarrow V_\omega \vDash \phi(n,x).$$

Dado $X \subset V_\omega$ (podemos suponer que no es vacío), sea $X' = \pi^{-1}[X]$ y sea $a : \omega \longrightarrow X'$ suprayectiva. Así $X = \{\pi(a(n)) \mid n \in \omega\}$. Equivalentemente:

$$x \in X \leftrightarrow (V_\omega, a) \vDash \bigvee mn \in \omega(R_a(n,m) \land \phi(m,x)).$$

Así pues, X es aritmético en a. ■

Definición 5.5 Si $a \in \mathcal{N}$, y $X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$, llamaremos $\Sigma_1^1(a)(X)$ a la clase de todos los conjuntos $A \subset X$ tales que existe un $R \subset V_\omega^{r+s+2} \subset V_\omega$ aritmético en a tal que

$$(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in A \leftrightarrow$$

$$\bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega(n_1, \ldots, n_r, x_1|_n, \ldots, x_s|_n, z|_n, n) \in R.$$

Llamaremos $\Sigma_1^1(X)$ a la clase de los conjuntos que satisfacen esta definición con un R aritmético (sin parámetro). Es claro que si $a \in \mathcal{N}$ es aritmético como subconjunto de V_ω (por ejemplo, si a es una sucesión constante), entonces todo R aritmético en a es aritmético, luego $\Sigma_1^1 = \Sigma_1^1(a)$.

De los dos últimos teoremas se sigue inmediatamente que

$$\boldsymbol{\Sigma}_1^1(X) = \bigcup_{a \in \omega} \Sigma_1^1(a)(X).$$

Llamaremos

$$\begin{aligned}
\Pi_n^1(a)(X) &= \{A \subset \omega^r \times \mathcal{N}^s \mid X \setminus A \in \Sigma_n^1(a)(X)\}, \\
\Sigma_{n+1}^1(a)(X) &= \{\pi_X[A] \mid A \in \Pi_n^1(a)(X \times \mathcal{N})\}, \\
\Delta_n^1(a)(X) &= \Sigma_n^1(a)(X) \cap \Pi_n^1(a)(X).
\end{aligned}$$

A partir de la clase Σ_1^1 podemos definir del mismo modo clases Σ_n^1, Π_n^1 y Δ_n^1, pero no son clases nuevas, sino que, para todo $a \in \mathcal{N}$ que sea aritmético como subconjunto de V_ω, se cumple que $\Sigma_1^1 = \Sigma_1^1(a)$ y, por consiguiente, $\Sigma_n^1 = \Sigma_n^1(a)$, $\Pi_n^1 = \Pi_n^1(a)$, $\Delta_n^1 = \Delta_n^1(a)$.

Una simple inducción demuestra ahora que

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Sigma_n^1(a), \quad \boldsymbol{\Pi}_n^1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Pi_n^1(a), \quad \boldsymbol{\Delta}_n^1 = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \Delta_n^1(a).$$

La última igualdad requiere un poco de atención: en principio, si tenemos que $A \in \boldsymbol{\Delta}_n^1(X)$, podemos afirmar que $A \in \Sigma_n^1(a) \cap \Pi_n^1(b)$, para ciertos $a, b \in \mathcal{N}$, que en principio no son necesariamente el mismo. Ahora bien, si llamamos $c \in \mathcal{N}$ a la sucesión $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$, es fácil ver que $\Sigma_1^1(a) \cup \Sigma_1^1(b) \subset \Sigma_1^1(c)$ (esto se reduce a probar que todo subconjunto de V_ω que es aritmético en a o en b también lo es en c, lo cual a su vez es consecuencia de que a y b son aritméticos en c) y a partir de aquí se prueba por inducción que $\Sigma_n^1(a) \cup \Sigma_n^1(b) \subset \Sigma_n^1(c)$ y $\Pi_n^1(a) \cup \Pi_n^1(b) \subset \Pi_n^1(c)$, con lo que $A \in \Delta_n^1(c)$.

Observemos que cada clase $\Sigma_1^1(a)(X)$ es numerable. En efecto, las fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos (con un relator adicional) pueden enumerarse explícitamente, lo que permite asociar a cada subconjunto aritmético en a de V_ω la mínima fórmula que lo define (respecto de una buena ordenación definible explícitamente), y así, vemos que hay una cantidad numerable de subconjuntos de V_ω aritméticos en a. A su vez, a cada conjunto $\Sigma_1^1(a)$ le podemos asociar el mínimo conjunto aritmético R que lo define (respecto de una buena ordenación definible explícitamente), lo que prueba que $\Sigma_1^1(a)(X)$ es numerable.

Esto implica a su vez que todas las clases que hemos definido (para un $a \in \mathcal{N}$ fijo) son numerables. En particular, tenemos que

$$\mathcal{P}\omega = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Sigma_n^1(a) = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Pi_n^1(a) = \bigcup_{a\in\mathcal{N}} \Delta_n^1(a),$$

pero cada una de las clases para un a fijo es un subconjunto estricto de ω.

Podemos ver a los subconjuntos de $\omega^r \times \mathcal{N}^s$ como relaciones y escribir

$$A(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \text{ en lugar de } (n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in A.$$

En concordancia con esta notación, escribiremos

$$\neg A, \qquad A \wedge B, \qquad A \vee B, \qquad A \rightarrow B, \qquad A \leftrightarrow B$$

en lugar de

$$(\omega^r \times \mathcal{N}^s) \setminus A, \quad A \cap B, \quad A \cup B, \quad \neg A \wedge B, \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A),$$

respectivamente. Definimos también

$$\bigvee x\, A, \qquad \bigwedge x\, A, \qquad \bigvee n\, A, \qquad \bigwedge n\, A,$$

de modo que

$$(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \bigvee x\, A \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N}\ (n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, x) \in A,$$

$$(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \bigvee n\, A \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ (n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in A,$$

y análogamente con los cuantificadores universales.

En estos términos, la definición de $\Sigma_{n+1}^1(a)$ puede expresarse diciendo que $A \in \Sigma_{n+1}^1(a)$ si y sólo si existe un $B \in \Pi_n^1(a)$ tal que $A = \bigvee x\, B$.

Empezamos a estudiar la jerarquía de Kleene por su base, para lo cual vamos a detenernos en primer lugar en los subconjuntos de los espacios producto que pueden definirse (sin proyecciones) a partir de subconjuntos aritméticos de V_ω:

Definición 5.6 Diremos que un conjunto $A \subset X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$, con $r \geq 1$, es *aritmético básico* en $a \in \mathcal{N}$ si existe $R \subset V_\omega$ aritmético en a tal que

$$(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in A \leftrightarrow$$

$$(n_1, \ldots, n_r, x_1|_{n_1}, \ldots, x_1|_{n_r}, \ldots, x_s|_{n_1}, \ldots, x_s|_{n_r}) \in R.$$

Evidentemente, si A es aritmético básico en a, también lo es $\neg A$. Diremos que A es *aritmético* en a si existe una sucesión de conjuntos $A_0, A_1, \ldots, A_k = A$ tales que A_0 es aritmético básico en a y $A_{i+1} = \bigwedge n_i\, A_i$ o bien $A_{i+1} = \bigvee n_i\, A_i$.

Llamaremos $\mathrm{Ar}(a)(X)$ a la familia de todos los subconjuntos aritméticos en a del espacio producto X. Es inmediato que si $A \in \mathrm{Ar}(a)$, también se cumple que $\neg A$, $\bigvee n\, A$, $\bigwedge n\, A \in \mathrm{Ar}(a)$.

Nota Observemos que esta definición es consistente con la definición previa de subconjunto de V_ω aritmético en a, pues se cumple $X \subset V_\omega$ si y sólo si $X = \omega^r$, y entonces los conjuntos $A \subset X$ aritméticos en a en el sentido de la definición precedente son simplemente los subconjuntos de V_ω aritméticos en a que además son subconjuntos de X.

En efecto, es obvio que todo conjunto $A \subset \omega^r$ que es aritmético en a como subconjunto de V_ω es aritmético básico en a como subconjunto de ω^r (basta tomar $R = A$ en la definición) y si A es aritmético básico en a como subconjunto de ω^r, entonces $A = R \cap \omega^r$, donde R es el subconjunto aritmético de V_ω dado por la definición anterior, y es fácil ver entonces que A es aritmético en a como subconjunto de V_ω. Más aún, si $A \subset \omega^{r+1}$ es aritmético en a como subconjunto de V_ω, también lo son los conjuntos $\bigwedge n\, A$ y $\bigvee n\, A$, luego todos los subconjuntos de ω^r aritméticos en a son subconjuntos de V_ω aritméticos en a. ■

Veamos las propiedades básicas de los conjuntos aritméticos en a:

Teorema 5.7 *Sea* $a \in \mathcal{N}$.

a) Si $A \in \mathrm{Ar}(a)$, $r \leq r'$ *y* $s \leq s'$, *el conjunto* A' *dado por*

$$A'(n_1, \ldots, n_{r'}, x_1, \ldots, x_{s'}) \leftrightarrow A(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$$

también está en $\mathrm{Ar}(a)$.

b) Si A, $B \in \mathrm{Ar}(a)$, *entonces* $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\bigwedge n\, A$, $\bigvee n\, A \in \mathrm{Ar}(a)$.

Demostración: a) Razonamos por inducción sobre la longitud de la sucesión $A_0, \ldots, A_k = A$ que define a A como conjunto aritmético en a. Por simplificar la notación tomaremos $r = s = 2$, aunque esto es irrelevante en la prueba.

Si A es aritmético básico en a, existe un conjunto $R \subset V_\omega$ aritmético en a tal que

$$A(n_1, n_2, x_1, x_2) \leftrightarrow R(n_1, n_2, x_1|_{n_1}, x_1|_{n_2}, x_2|_{n_1}, x_2|_{n_2}).$$

Para definir a A' como conjunto aritmético básico basta tomar un producto $R' = \omega^u \times R \times (\omega^{<\omega})^v$, donde u y v son los adecuados para que R' tenga todas las coordenadas adicionales (triviales) que requiere la definición de A'. Es claro que R' también es aritmético en a.

Si $A = \bigvee n\ B$, donde B es aritmético en a (definible en un paso menos que A), entonces

$$A'(n_1, \ldots, n_{r'}, x_1, \ldots, x_{s'}) \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ B(n, n_1, n_2, x_1, x_2)$$

$$\leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ B'(n, n_1, \ldots, n_{r'}, x_1, \ldots, x_{s'}),$$

donde B' es $\mathrm{Ar}(a)$ por hipótesis de inducción, luego $A' = \bigvee n\, B'$ también lo es. El caso $A = \bigwedge n\ B$ es idéntico.

b) Si

$$A = \mathrm{C}_1 m_1 \mathrm{C}_2 m_2 \cdots A_0(m_1, m_2, \ldots, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$

donde las C_i's representan cuantificadores arbitrarios, entonces

$$\neg A = C_1' m_1 C_2' m_2 \cdots \neg A_0(m_1, m_2, \ldots, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$

donde cada C_i' es el cuantificador opuesto a C_i, luego basta observar que si A_0 es aritmético básico en a, entonces $\neg A_0$ también lo es, lo cual se sigue inmediatamente del hecho de que el complementario de un subconjunto de V_ω aritmético en a es también aritmético en a.

Si tenemos que

$$A = \mathrm{C}_1 m_1 \mathrm{C}_2 m_2 \cdots A_0(m_1, m_2, \ldots, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$

$$B = \mathrm{C}_1 k_1 \mathrm{C}_2 k_2 \cdots B_0(k_1, k_2, \ldots, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$

donde las C's representan cuantificadores arbitrarios y A_0, B_0 son aritméticos básicos en a, entonces los conjuntos

$$A_0'(m_1, m_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$$
$$\leftrightarrow A_0(m_1, m_2, \ldots, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$
$$B_0'(m_1, m_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$$
$$\leftrightarrow B_0(k_1, k_2, \ldots, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$

son aritméticos en a por el primer apartado de este teorema, y es inmediato comprobar que $A_0' \wedge B_0'$ también lo es, Ahora basta observar que

$$A \wedge B = \mathrm{C} m_1 \mathrm{C} m_2 \cdots \mathrm{C} k_1 \mathrm{C} k_2 \cdots (A_0' \wedge B_0'),$$

luego también es aritmético en a. Con la disyunción se razona igual y el caso de los cuantificadores es inmediato a partir de la definición. ■

Ahora necesitamos algunas propiedades técnicas:

Teorema 5.8 *Sea* $a \in \mathcal{N}$.

a) Si $A \in \mathrm{Ar}(a)$, *el conjunto* A' *dado por*

$$A'(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z) \leftrightarrow A(n, z(n), n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$$

también está en $\mathrm{Ar}(a)$.

b) Sea $\langle\ ,\ \rangle : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ *la biyección canónica definida en* 1.23 *y sea su inversa la aplicación dada por* $m \mapsto (m_0, m_1)$. *Entonces, si* $A \in \mathrm{Ar}(a)$, *el conjunto* A' *dado por*

$$A'(n_1, \ldots, n_r, m, x_1, \ldots, x_s) \leftrightarrow A(n_1, \ldots, n_r, m_0, m_1, x_1, \ldots, x_s)$$

también está en $\mathrm{Ar}(a)$.

c) Sea $\mathcal{N} \longrightarrow \omega \times \mathcal{N}$ *el homeomorfismo dado por* $z \mapsto (z(0), z')$*, donde* $z'(i) = z(i+1)$*. Si* $A \in \mathrm{Ar}(a)$*, entonces el conjunto* A' *dado por*

$$A'(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z) \leftrightarrow A(z(0), n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z')$$

también está en $\mathrm{Ar}(a)$*.*

d) Sea $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^2$ *el homeomorfismo dado por* $z \mapsto (z_0, z_1)$*, donde* $z_0(i) = z(2i)$*,* $z_1(i) = z(2i+1)$*. Si* $A \in \mathrm{Ar}(a)$*, entonces el conjunto* A' *dado por*

$$A'(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z) \leftrightarrow A(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z_0, z_1)$$

también está en $\mathrm{Ar}(a)$*.*

e) Sea $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^\omega$ *el homeomorfismo canónico dado por* $z \mapsto \{z_n\}_{n\in\omega}$*, donde* $z_n(i) = z(\langle n, i\rangle)$*. Si* $A \in \mathrm{Ar}(a)$*, entonces el conjunto* A' *dado por*

$$A'(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z) \leftrightarrow A(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z_n)$$

también está en $\mathrm{Ar}(a)$*.*

Demostración: a) Tenemos que

$$A'(n, \ldots, z) \leftrightarrow \bigvee m\, (z(n) = m \wedge A(n, m, \ldots,)),$$

luego, por el teorema anterior, basta probar que el conjunto

$$E = \{(n, m, z) \in \omega^2 \times \mathcal{N} \mid z(n) = m\}$$

es aritmético, para lo cual basta a su vez probar que lo es

$$F = \{(k, n, m, z) \in \omega^3 \times \mathcal{N} \mid k = n + 1 \wedge z(n) = m\},$$

ya que $E = \bigvee k\, F$. Ahora bien,

$$(k, n, m, z) \in F \leftrightarrow (k, n, m, z|_k) \in R,$$

donde $R = \{(k, n, m, s) \in V_\omega^4 \mid (n, m) \in s\}$ es claramente aritmético.

b) Claramente

$$A'(\ldots, m, \ldots,) \leftrightarrow \bigvee uv(u = m_0 \wedge v = m_1 \wedge A(\ldots, u, v, \ldots)),$$

luego basta probar que los conjuntos

$$\{(u, m) \in \omega^2 \mid u = m_0\}, \qquad \{(v, m) \in \omega^2 \mid v = m_1\}$$

son aritméticos, y lo son, pues $u = m_0$ es definible en ZFC-AI y es absoluto para modelos transitivos de ZFC-AI, luego es definible en V_ω, e igualmente con $v = m_1$.

Los apartados restantes se demuestran por inducción sobre la longitud de la sucesión $A_0, \ldots, A_k = A$ que define a A como conjunto aritmético en a, pero el único caso no trivial es el que se da cuando A es aritmético básico en a. Por simplicidad supondremos que $r = s = 2$.

c) Si A es aritmético básico en a, entonces

$$A'(n_1, n_2, x_1, x_2, z) \leftrightarrow R(z(0), n_1, n_2, x_1|_{z(0)}, x_1|_{n_1}, \ldots, z'|_{z(0)}, z'|_{n_1}, z'|_{n_2}),$$

con R aritmético en a. Definimos

$$R'(n, m, n_1, n_2, s_{1n}, s_{1m}s_{11}, s_{12}, s_{2n}, s_{2m}, s_{21}, s_{22}, t_n, t_m, t_1, t_2) \leftrightarrow$$

$$n = 1 \wedge m = t_n(0) + 1 \wedge R(t_n(0), n_1, n_2, s_{1m}|_{t_n(0)}, s_{11}, s_{12}, \ldots, t'_m, t_1, t_2),$$

donde t' se define como z' pero para una sucesión finita. Claramente R' es aritmético en a y define un conjunto $B \in \mathrm{Ar}(a)$ tal que

$$A'(n_1, n_2, x_1, x_2, z) \leftrightarrow B(1, z(0) + 1, n_1, n_2, x_1, x_2, z).$$

Además, siempre que se cumple $B(n, m, n_1, n_2, x_1, x_2, z)$ es $n = 1$ y $m = z(0)+1$, luego $A' = \bigvee nm\, B'$ es $\mathrm{Ar}(a)$.

d) Si A es aritmético básico en a, entonces

$$A'(n_1, n_2, x_1, x_2, z) \leftrightarrow R(n_1, n_2, x_1|_{n_1}, x_1|_{n_2}, \ldots, z_0|_{n_1}, z_0|_{n_2}, z_1|_{n_1}, z_1|_{n_2}),$$

con R aritmético en a. Definimos

$$R'(m_1, m_2, n_1, n_2, s_{1m1}, s_{1m2}, s_{1n1}, s_{1n2}, s_{2m1}, \ldots, t_{m1}, t_{m2}, t_{n1}, t_{n2}) \leftrightarrow$$

$$m_1 = 2n_1 \wedge m_2 = 2n_2 \wedge R(n_1, n_2, s_{1n1}, s_{1n2}, s_{2n1}, s_{2n2}, t^0_{m1}, t^0_{m2}, t^1_{m1}, t^1_{m2}),$$

donde t^0 y t^1 se definen como z_0 y z_1 pero para sucesiones finitas. Así R' es aritmético en a y define un conjunto $B' \in \mathrm{Ar}(a)$ tal que

$$A'(n_1, n_2, x_1, x_2, z) \leftrightarrow B'(2m_1, 2m_2, n_1, n_2, x_1, x_2, z),$$

con lo que $A' = \bigvee m_1 m_2\, B$ es $\mathrm{Ar}(a)$.

e) Si A es aritmético básico en a, entonces

$$A'(n, n_1, n_2, x_1, x_2, z) \leftrightarrow R(n, n_1, n_2, x_1|_n, x_1|_{n_1}, x_1|_{n_2}, \ldots, z_n|_n, z_n|_{n_1}, z_n|_{n_2}),$$

donde R es aritmético en a. Definimos

$$R'(m, n, n_1, n_2, s_{10}, s_1, s_{11}, s_{12}, s_{20}, s_2, s_{21}, s_{22}, t_0, t, t_1, t_2) \leftrightarrow$$

$$m \in \omega \wedge \bigwedge i \in \omega (i < \max\{n, n_1, n_2\} \rightarrow \langle n, i \rangle < m) \wedge$$

$$R(n, n_1, n_2, s_1, s_{11}, s_{12}, \ldots, t_n|_n, t_n|_{n_1}, t_n|_{n_2}),$$

donde t_n se define como z_n pero para una sucesión finita t.

Notemos que la segunda condición de la definición de R' garantiza que si t tiene dominio m entonces t_n esté definida sobre n, n_1 y n_2. Claramente R es aritmético en a y define un conjunto B' tal que

$$A'(n, n_1, n_2, x_1, x_2, z) \leftrightarrow \bigvee m \in \omega\, B(m, n, n_1, n_2, x_1, x_2, z),$$

luego $A' \in \mathrm{Ar}(a)$. ■

De aquí obtenemos que todo conjunto aritmético puede expresarse en la "forma canónica" que describe el teorema siguiente:

Teorema 5.9 *Todo conjunto aritmético en a puede expresarse en la forma*

$$\bigwedge m_1 \bigvee m_2 \bigwedge m_3 \cdots A(m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$$

o bien

$$\bigvee m_1 \bigwedge m_2 \bigvee m_3 \cdots A(m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$

donde A es un conjunto aritmético básico.

Demostración: Lo demostramos por inducción sobre el número de pasos necesarios para construir el conjunto. Si es aritmético básico el resultado es trivialmente cierto. Supongamos que todo conjunto construido en k pasos puede ponerse en esta forma y consideremos un conjunto construible en $k+1$ pasos. Supongamos que es de la forma $C = \bigvee n_0\, B$, donde B se construye en k pasos. Si B es de la primera forma indicada en el enunciado, lo mismo le sucede a C. Supongamos que, por el contrario,

$$B = \bigvee m_1 \bigwedge m_2 \bigvee m_3 \cdots A(m_1, \ldots, m_k, n_0, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$

con lo que

$$C = \bigvee n_0 \bigvee m_1 \bigwedge m_2 \bigvee m_3 \cdots A(m_1, \ldots, m_k, n_0, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s).$$

Entonces

$$C = \bigvee n_0 \bigwedge m_2 \bigvee m_3 \cdots A(n_{00}, m_2, \ldots, m_k, n_{01}, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$

donde (n_{00}, n_{01}) es la imagen de n_0 por la biyección considerada en el apartado b) del teorema anterior. Dicho apartado garantiza que

$$C = \bigvee n_0 \bigwedge m_2 \bigvee m_3 \cdots A'(n_0, m_2, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s),$$

para un cierto conjunto A' que también es aritmético básico (esto se ve en la prueba). Por lo tanto, C también puede ponerse en la forma indicada. La contracción de dos generalizadores consecutivos se lleva a cabo análogamente. ■

Ahora podemos probar la caracterización siguiente de las clases $\Sigma^1_1(a)$:

Teorema 5.10 *Sea X un espacio producto, $a \in \mathcal{N}$ y $A \subset X$. Entonces se cumple que $A \in \Sigma^1_1(a)$ si y sólo si existe un conjunto $B \in \mathrm{Ar}(a)$ de manera que $A = \bigvee x\, B$.*

Demostración: Por simplificar la notación supondremos $r = s = 2$. Si $A \in \Sigma^1_1(a)$, existe un $R \subset V_\omega$ aritmético en a tal que

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in A \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\ (n_1, n_2, x_1|_n, x_2|_n, z|_n) \in R$$

y el conjunto

$$B(n, n_1, n_2, x_1, x_2, z) \leftrightarrow (n_1, n_2, x_1|_n, x_2|_n, z|_n) \in R$$

es claramente aritmético básico (cumple la definición con $R' = R \times (\omega^{<\omega})^6$, de modo que R' dependa trivialmente de $x_1|_{n_1}, x_1|_{n_2}, x_2|_{n_1}, x_2|_{n_2}, z|_{n_1}, z|_{n_2}$). Así pues, $A = \bigvee z\, B$ con $B \in \mathrm{Ar}(a)$.

Supongamos, recíprocamente, que A es de esta forma y veamos que es $\Sigma^1_1(a)$. En primer lugar probamos que B puede expresarse en la forma descrita en el teorema anterior pero empezando con un generalizador. En efecto, si fuera

$$A = \bigvee z \bigvee m_1 \bigwedge m_2 \bigvee m_3 \cdots A_0(m_1, \ldots, m_k, n_1, n_2, x_1, x_2, z),$$

con A_0 aritmético básico, entonces

$$A = \bigvee z \bigwedge m_2 \bigvee m_3 \cdots A_0(z(0), m_2, \ldots, m_k, n_1, n_2, x_1, x_2, z')$$

$$= \bigvee z \bigwedge m_2 \bigvee m_3 \cdots A_0'(m_2, \ldots, m_k, n_1, n_2, x_1, x_2, z),$$

donde A_0' es aritmético. Según la prueba del teorema 5.8 c), A_0' consta de dos particularizadores consecutivos, que se pueden contraer según el teorema anterior para tener de nuevo una expresión con cuantificadores alternos.

Ahora observamos que si, tras $\bigvee z$, hay dos cuantificadores $\bigwedge m_1 \bigvee m_2$, podemos sustituirlos por $\bigvee x \bigwedge m_1$ sin modificar los demás cuantificadores. En efecto,

$$A = \bigvee z \bigwedge m_1 \bigvee m_2 \bigwedge m_3 \cdots A_0(m_1, \ldots, m_k, n_1, n_2, x_1, x_2, z)$$

$$= \bigvee zx \bigwedge m_1 \bigwedge m_3 \cdots A_0(m_1, x(m_1), m_3, \ldots, m_k, n_1, n_2, x_1, x_2, z)$$

$$= \bigvee zx \bigwedge m_1 \bigwedge m_3 \cdots A_0'(m_1, m_3, \ldots, m_k, n_1, n_2, x_1, x_2, x, z)$$

donde A_0' es aritmético básico (se ve en la prueba de 5.8 a). A su vez podemos contraer los cuantificadores $\bigwedge m_1 \bigwedge m_3$ (sin añadir otros nuevos). Repitiendo este proceso llegamos a una expresión de la forma

$$A = \bigvee z_1 \cdots z_r \bigwedge m\, A_0(m, n_1, n_2, x_1, x_2, z_1, \ldots, z_r),$$

donde A_0 es aritmético básico en a. Si R es el conjunto aritmético en a que define a A_0, definimos

$$R'(n_1, n_2, s_1, s_2, t_1, \ldots, t_r, n) \leftrightarrow n_1, n_2, n \in \omega \land s_1, s_2, t_1, \ldots, t_r \in \omega^n \land$$
$$\bigwedge m \in \omega(n_1 \leq n \land n_2 \leq n \land m \leq n \rightarrow$$
$$R(m, n_1, n_2, s_1|_m, s_1|_{n_1}, s_1|_{n_2}, \ldots, t_1|_m, t_1|_{n_1}, t_1|_{n_2}, \ldots, t_r|_m, t_r|_{n_1}, t_r|_{n_2},)).$$

Claramente R' es aritmético en a y

$$A = \bigvee z_1 \cdots z_r \bigwedge n\, R'(n_1, n_2, x_1|_n, x_2|_n, z_1|_n, \ldots, z_r|_n, n).$$

El conjunto dado por

$$B(n_1, n_2, x_1, x_2, z_1, \ldots, z_{r-1}) \leftrightarrow$$
$$\bigvee z_r \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\, R'(n_1, n_2, x_1|_n, x_2|_n, z_1|_n, \ldots, z_r|_n, n)$$

es $\Sigma^1_1(a)$ por definición, y $A = \bigvee z_1 \cdots z_{r-1}\, B$. Para terminar la demostración basta ver el hecho siguiente, que tiene interés en sí mismo:

Si $A \in \Sigma^1_1(a)$, entonces $\bigvee x\, A \in \Sigma^1_1(a)$. En efecto, tenemos que

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in \bigvee x\, A \leftrightarrow \bigvee xz \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\, R(n_1, n_2, x_1|_n, x_2|_n, x|_n, z|_n, n),$$

para cierto $R \subset V_\omega$ aritmético en a. Entonces,

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in \bigvee x\, A \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\, R(n_1, n_2, x_1|_n, x_2|_n, x|_n, z_0|_n z_1|_n, n),$$

donde (z_0, z_1) son los definidos en 5.8 e). Definimos

$$R'(n_1, n_2, s_1, s_2, t, n) \leftrightarrow n_1, n_2, n \in \omega \land s_1, s_2, t \in \omega^n \land$$
$$\bigvee k \in \omega((n = 2k \lor n = 2k+1) \land R(n_1, n_2, s_1|_k, s_2|_k, t_0, t_1, k)),$$

donde t_0 y t_1 se definen como z_0 y z_1 pero para sucesiones finitas. Es claro que R' es aritmético en a y

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in \bigvee x\, A \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\, R'(n_1, n_2, x_1|_n, x_2|_n, z|_n, n),$$

con lo que $\bigvee x\, A$ es $\Sigma^1_1(a)$. ■

Hemos visto que $\mathrm{Ar}(a)$ es cerrado para $\bigwedge n$ y $\bigvee m$, en cambio, si aplicamos cuantificadores de segundo orden $\bigwedge x$ o $\bigvee x$ obtenemos conjuntos de los primeros niveles de la jerarquía de Kleene:

Teorema 5.11 *Sea* $a \in \mathcal{N}$.

a) Si $A \in \mathrm{Ar}(a)$, *entonces* $\bigvee x\, A \in \Sigma^1_1(a)$, $\bigwedge x\, A \in \Pi^1_1(a)$.

b) $\mathrm{Ar}(a) \subset \Delta^1_1(a)$.

Demostración: a) El caso del particularizador es el teorema anterior. Para el generalizador observamos que, como $\neg A \in \mathrm{Ar}(a)$, tenemos que $\neg \bigwedge n\, A = \bigvee n\, \neg A \in \Sigma^1_1(a)$, luego $\bigwedge n\, A \in \Pi^1_1(a)$.

b) Basta observar que si $A \in \mathrm{Ar}(a)$, entonces $A' = A \times \mathcal{N} \in \mathrm{Ar}(a)$ por 5.7 a), y $A = \bigvee x\, A' = \bigwedge x, A' \in \Sigma^1_1(a) \cap \Pi^1_1(a) = \Delta^1_1(a)$. ■

Nota No vamos a probarlo aquí, pero sucede que $\mathrm{Ar}(a) \subsetneq \Delta_1^1(a)$ (cf. 5.40). Los conjuntos $\Delta_1^1(a)$ son el equivalente efectivo a los conjuntos de Borel, mientras que los conjuntos $\mathrm{Ar}(a)$ son el equivalente a la parte finita de la jerarquía de Borel, es decir, a los conjuntos de $\bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} \mathbf{\Sigma}_n^0 = \bigcup\limits_{n\in\omega\setminus\{0\}} \mathbf{\Pi}_n^0$. La clase $\mathrm{Ar}(a)$ puede obtenerse a partir de una jerarquía $\Sigma_n^0(a)$, $\Pi_n^0(a)$ para $n \in \omega$, la cual puede prolongarse a una jerarquía transfinita de conjuntos *hiperaritméticos,* y éstos sí que resultan ser los conjuntos $\Delta_1^1(a)$.

Teorema 5.12 *Todas las afirmaciones del teorema* 5.8 *(así como* 5.7 a)*) son válidas cambiando* $\mathrm{Ar}(a)$ *por* $\Sigma_n^1(a)$.

Demostración: Razonamos en cada caso por inducción sobre n. Notemos que cada $A \in \Sigma_{n+1}^1(a)$ es de la forma $\bigvee x \,\neg B$, donde $B \in \Sigma_n^1(a)$, y esto vale para $n = 0$ si convenimos en que $\Sigma_0^1(a) = \mathrm{Ar}(a)$. Así pues, si empezamos la inducción por $n = 0$, el caso $n = 0$ es precisamente 5.8, que ya está demostrado. El resto de la inducción es trivial. Veamos por ejemplo el caso e). Tenemos que

$$\begin{aligned} A'(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z) &\leftrightarrow A(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z_n) \\ &\leftrightarrow \bigvee x \neg B(n, n_1, \ldots, n_r, x, x_1, \ldots, x_s, z_n) \\ &\leftrightarrow \bigvee x \neg B'(n, n_1, \ldots, n_r, x, x_1, \ldots, x_s, z), \end{aligned}$$

donde B' es $\Sigma_n^1(a)$ por hipótesis de inducción, y así A es $\Sigma_{n+1}^1(a)$. ■

Finalmente podemos demostrar el resultado principal (junto con 5.11), que nos permitirá reconocer fácilmente el carácter proyectivo de numerosos conjuntos.

Teorema 5.13 *Sea* $n \geq 1$ *y* $a \in \mathcal{N}$.

a) Si A, B son relaciones $\Sigma_n^1(a)$*, también lo son*

$$\bigvee x\, A, \qquad A \wedge B, \qquad A \vee B, \qquad \bigvee n\, A, \qquad \bigwedge n\, A.$$

b) Si A, B son relaciones $\Pi_n^1(a)$*, también lo son*

$$\bigwedge x\, A, \qquad A \wedge B, \qquad A \vee B, \qquad \bigvee n\, A, \qquad \bigwedge n\, A.$$

c) Si A es $\Sigma_n^1(a)$*, entonces* $\neg A$ *es* $\Pi_n^1(a)$*, y si A es* $\Pi_n^1(a)$*, entonces* $\neg A$ *es* $\Sigma_n^1(a)$.

d) Si A es $\Pi_n^1(a)$ *y B es* $\Sigma_n^1(a)$*, entonces* $A \rightarrow B$ *es* $\Sigma_n^1(a)$.
Si A es $\Sigma_n^1(a)$ *y B es* $\Pi_n^1(a)$*, entonces* $A \rightarrow B$ *es* $\Pi_n^1(a)$.

e) Si A y B son $\Delta_n^1(a)$*, también lo son*

$$\neg A, \quad A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \rightarrow B, \quad A \leftrightarrow B, \quad \bigwedge n\, A, \quad \bigvee n\, A.$$

Demostración: a) Por simplificar la notación supondremos $r = s = 2$. Si $A \in \Sigma^1_{n+1}(a)$ (admitiendo $n = 0$), entonces $A = \bigvee y \neg B$, con $B \in \Sigma^1_n(a)$, luego

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in \bigvee x\, A \leftrightarrow \bigvee xy \in \mathcal{N} \neg B(n_1, n_2, x_1, x_2, x, y)$$

$$\leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \neg B(n_1, n_2, x_1, x_2, z_0, z_1) \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \neg B'(n_1, n_2, x_1, x_2, z),$$

donde $B' \in \Sigma^1_n(a)$ por 5.8 d) si $n = 0$ y por 5.12 si $n > 0$. Por lo tanto concluimos que $\bigvee x\, A \in \Sigma^1_{n+1}(a)$.

Análogamente,

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in \bigvee n\, A \leftrightarrow \bigvee n \in \omega \bigvee y \in \mathcal{N} \neg B(n, n_1, n_2, x_1, x_2, y)$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\, \neg B(y(0), n_1, n_2, x_1, x_2, y') \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \neg B'(n_1, n_2, x_1, x_2, y),$$

donde $B' \in \Sigma^1_n(a)$ por 5.8 c) si $n = 0$ y por 5.12 si $n > 0$. Por lo tanto concluimos que $\bigvee n\, A \in \Sigma^1_{n+1}(a)$.

Por otra parte

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in \bigwedge n\, A \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega \bigvee y \in \mathcal{N} \neg B(n, n_1, n_2, x_1, x_2, y)$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega \neg B(n, n_1, n_2, x_1, x_2, y_n)$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega \neg B'(n, n_1, n_2, x_1, x_2, y)$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \neg \bigvee n \in \omega\, B'(n, n_1, n_2, x_1, x_2, y),$$

donde B' es $\Sigma^1_n(a)$ por 5.8 e) si $n = 0$ y por 5.12 si $n > 0$. Usando también el caso anterior (ya demostrado) concluimos que $\bigvee x\, A \in \Sigma^1_{n+1}(a)$.

Ahora demostramos simultáneamente por inducción sobre n los casos de la conjunción y la disyunción. Si A, $B \in \Sigma^1_{n+1}(a)$ (admitiendo $n = 0$), tenemos que

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in A \leftrightarrow \bigvee y_1 \neg A'(n_1, n_2, x_1, x_2, y_1),$$

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in B \leftrightarrow \bigvee y_2 \neg B'(n_1, n_2, x_1, x_2, y_2),$$

donde A', $B' \in \Sigma^1_n(a)$. Entonces

$$(n_1, n_2, x_1, x_2) \in A \wedge B \leftrightarrow \bigvee y_1 y_2 \neg (A'(n_1, n_2, x_1, x_2, y_1) \vee B'(n_1, n_2, x_1, x_2, y_2))$$

Para $n = 0$ sabemos que $A' \vee B'$ es $\Sigma^1_n(a)$ por 5.11, y si $n > 0$ lo tenemos por hipótesis de inducción. Usando la parte ya probada de los particularizadores concluimos que $A \wedge B \in \Sigma^1_{n+1}(a)$. Con la disyunción se razona exactamente igual.

Con esto tenemos probado a). Usando c), que es trivial, se prueba inmediatamente que también se cumple b). Por ejemplo, si A es $\Pi^1_n(a)$, entonces $\neg A$ es $\Sigma^1_n(a)$, luego $\bigvee x \neg A$ es $\Sigma^1_n(a)$, luego $\neg \bigvee x \neg A$ es $\Pi^1_n(a)$, pero esta relación es la misma que $\bigwedge x\, A$. Los demás casos se razonan de forma análoga. A su vez, d) y e) son consecuencias claras de a), b), c). ■

Definición 5.14 Sea $a \in \mathcal{N}$. Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios producto es $\Delta^1_n(a)$ si su gráfica $G(f) \subset X \times Y$ es un conjunto $\Delta^1_n(a)$.

Esto equivale a que la gráfica sea $\Sigma^1_n(a)$ pues, en tal caso

$$(x, y) \in G(f) \leftrightarrow \neg \bigvee y' \in Y((x, y') \in G(f) \wedge y' \neq y),$$

y la relación de la derecha es claramente $\Pi^1_n(a)$. (El cuantificador sobre Y equivale a r cuantificadores sobre ω y s sobre $\mathcal{N}$, donde $Y = \omega^r \times \mathcal{N}^s$, y podemos aplicar el primer apartado del teorema anterior.)

A su vez esto implica que si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son aplicaciones $\Delta^1_n(a)$, su composición también lo es, pues

$$(x, z) \in G(f \circ g) \leftrightarrow \bigvee y \in Y((x, y) \in G(f) \wedge (y, z) \in G(g)),$$

luego $G(f \circ g)$ es $\Sigma^1_n(a)$ y, por consiguiente, $\Delta^1_n(a)$.

Teorema 5.15 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación $\Delta^1_n(a)$ entre espacios producto. Para todo $A \in \Sigma^1_n(a)(Y)$ (resp. $\Pi^1_n(a)(Y)$, $\Delta^1_n(a)(Y)$), se cumple que $f^{-1}[A] \in \Sigma^1_n(a)(X)$ (resp. $\Pi^1_n(a)(X)$, $\Delta^1_n(a)(X)$).*

Demostración: Basta observar que

$$x \in f^{-1}[A] \leftrightarrow \bigvee y \in Y\ (x, y) \in (X \times A) \cap G_f,$$

luego $f^{-1}[A] \in \bigvee y \in Y\ \Sigma^1_n(a) = \Sigma^1_n(a)$. ■

Es fácil ver que los isomorfismos naturales entre los distintos espacios producto tienen gráficas aritméticas y, en particular, son Δ^1_1. Por ejemplo, el isomorfismo natural $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}^2$ tiene por gráfica el conjunto

$$G = \{(x, y, z) \in \mathcal{N}^3 \mid y = x_0 \wedge z = x_1\},$$

y es fácil ver que es aritmético. En efecto, el conjunto

$$R = \{(m, n, s, t, u) \in V_\omega \mid m, n \in \omega \wedge n = 2m \wedge s \in \omega^n \wedge$$
$$t, u \in \omega^m \wedge t = s_0 \wedge u = s_1\}$$

es claramente aritmético, luego el conjunto

$$G_0 = \{(m, n, x, y, z) \in \omega^2 \times \mathcal{N}^3 \mid m, n \in \omega \wedge n = 2m$$
$$\wedge\ y|_m = (x|_n)_0 \wedge z|_m = (x|_m)_1\}$$

es aritmético básico, y $G = \bigwedge m \bigvee n\ G_0$ es aritmético.

De este modo, los isomorfismos naturales entre los espacios producto hacen corresponder los conjuntos de cada clase de Kleene.

Veamos ahora que las clases de Kleene satisfacen las mismas inclusiones de las clases de la jerarquía proyectiva:

Teorema 5.16 *Si X es un espacio producto y $a \in \mathcal{N}$, se dan las inclusiones siguientes:*

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma_1^1(a) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Sigma_2^1(a) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Sigma_3^1(a) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \cdots \\
\Delta_1^1(a) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Delta_2^1(a) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Delta_3^1(a) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Delta_4^1(a) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
 & \Pi_1^1(a) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \Pi_2^1(a) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \Pi_3^1(a) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN: Si un conjunto $A \subset X$ es $\Sigma_1^1(a)$, entonces existe $B \in \mathrm{Ar}(a)$ tal que $A = \bigvee x\, B$, pero también $B \in \Pi_1^1(a)$, luego $A \in \Sigma_1^1(a)$. Así pues, $\Sigma_1^1(a) \subset \Sigma_2^1(a)$. Si, en general, $\Sigma_n^1(a) \subset \Sigma_{n+1}^1(a)$, entonces $\Pi_n^1(a) \subset \Pi_{n+1}^1(a)$, lo que a su vez implica que $\Sigma_{n+1}^1(a) \subset \Sigma_{n+2}^1(a)$.

Las inclusiones cruzadas son obvias: si $A \in \Sigma_n^1(a)$, por 5.12 a) se cumple que $B = A \times \mathcal{N} \in \Sigma_n^1(a)$ y $A = \bigwedge x\, B$, luego $A \in \Pi_{n+1}^1(a)$. Esto prueba que $\Sigma_n^1(a) \subset \Pi_{n+1}^1(a)$ y de aquí, a su vez, $\Pi_n(a) \subset \Sigma_{n+1}^1(a)$. Las inclusiones sobre las clases $\Delta_n^1(a)$ son obvias. ■

Aprovecharemos los dos teoremas siguientes para ilustrar algunas técnicas elementales que permiten justificar que un conjunto dado es aritmético.

Teorema 5.17 *Si $X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$, los abiertos básicos*

$$\{n_1\} \times \cdots \times \{n_r\} \times B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_s}$$

son aritméticos (sin parámetro) y existe una enumeración $\{B_n\}_{n\in\omega}$ de todos ellos tal que el conjunto

$$\{(n, x) \in \omega \times X \mid x \in B_n\}$$

es aritmético.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un abierto básico del tipo indicado en el enunciado. No perdemos generalidad, es decir, no dejamos de tener una base, si suponemos que todas las sucesiones $t_i \in \omega^{<\omega}$ tienen la misma longitud $l > 0$. Fijado un abierto básico (o, equivalentemente, unos valores $n_1, \ldots, n_r, l, t_1, \ldots, t_s$), tenemos que

$$(m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_s) \in \{n_1\} \times \cdots \times \{n_r\} \times B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_s}$$

$$\leftrightarrow m_1 = n_1 \wedge \cdots \wedge m_r = n_r \wedge x_1|_l = t_1 \wedge \cdots \wedge x_s|_l = t_s.$$

En principio, la definición de conjunto aritmético básico requiere que la pertenencia al conjunto dependa de las restricciones de $x_1, \ldots, x_s$ a los números $n_1, \ldots, n_r$, mientras que aquí dependen de las restricciones a otro número fijo l. Como ya hemos visto en algunas demostraciones anteriores, esto puede arreglarse introduciendo la variable y eliminándola luego con un cuantificador. En este caso, el conjunto

$$A = \{l\} \times \{n_1\} \times \cdots \times \{n_r\} \times B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_s}$$

es aritmético elemental, pues

$$(k, m_1, \ldots, m_r, x_1, \ldots, x_s) \in A$$
$$\leftrightarrow k = l \wedge m_1 = n_1 \wedge \cdots \wedge m_r = n_r \wedge x_1|_l = t_1 \wedge \cdots \wedge x_s|_l = t_s,$$

luego

$$\{n_1\} \times \cdots \times \{n_r\} \times B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_s} = \bigvee k\, A$$

también es aritmético.

Para enumerar la base de X, fijados r y s, dado n, lo descomponemos como $n = \langle n_1, \ldots, n_r, m, t_1, \ldots, t_s \rangle$, y a su vez calculamos las sucesiones de ω^{m+1} codificadas por $t_1, \ldots, t_s$ (notemos que m puede ser 0). Con esto tenemos completamente determinado un abierto básico de la forma indicada en el enunciado, al que llamamos B_n.

El conjunto del enunciado es el conjunto A dado por

$$A(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \leftrightarrow$$
$$\bigvee m \in \omega\, (n = \langle n_1, \ldots, n_r, m, \langle x|_{m+1} \rangle, \ldots, \langle x_s|_{m+1} \rangle \rangle),$$

y es claramente aritmético. La prueba se basa en otro principio general: el hecho de que $\langle n_1, \ldots, n_r, m, \langle t_1 \rangle, \ldots, \langle t_s \rangle \rangle$ pueda definirse en ZFC-AI implica automáticamente que el conjunto $R \subset V_\omega$ dado por

$$R(n, n_1, \ldots, n_r, m, t_1, \ldots, t_s) \leftrightarrow n, n_1, \ldots, n_r, m \in \omega \wedge t_1, \ldots, t_s \in \omega^{m+1}$$
$$\wedge\, n = \langle n_1, \ldots, n_r, m, \langle t_1 \rangle, \ldots, \langle t_s \rangle \rangle$$

es aritmético, puesto que V_ω es un modelo transitivo de ZFC-AI. (Aquí es importante que la definición de R es absoluta para modelos transitivos de ZFC-AI.) El hecho técnico de que la definición de A dependa de las restricciones de los x_i a $m+1$ en lugar de a m se trata introduciendo una nueva variable k, añadiendo la condición $k = m + 1$ y luego añadiendo un cuantificador $\bigvee k$. ∎

Como aplicación podemos probar que la jerarquía de Kleene es estricta. Nos basamos en lo siguiente:

Teorema 5.18 *Si X es un espacio producto, los conjuntos universales para $\mathbf{\Sigma}^1_n(X)$ y $\mathbf{\Pi}^1_n(X)$ construidos en* 4.39 *son, de hecho, Σ^1_n y Π^1_n respectivamente.*

Demostración: En este contexto resulta más natural considerar conjuntos $\mathcal{N}$-universales en lugar de $\mathcal{C}$-universales, así que vamos a hacer esta mínima adaptación en el argumento. Nos hemos de remontar al conjunto $\mathbf{\Sigma}^0_1(X)$-universal construido en 2.8, que es

$$U = \{(y, x) \in \mathcal{N} \times X \mid \bigvee n \in \omega(y(n) = 0 \wedge x \in B_n)\}.$$

Podemos decir que es "evidentemente" aritmético. La justificación de esto consiste en probar que es aritmético el conjunto

$$\{(n, y, x) \in \omega \times \mathcal{N} \times X \mid y(n) = 0 \wedge x \in B_n\},$$

que lo es por ser la intersección del conjunto considerado en el teorema anterior (multiplicado por $\mathcal{N}$) con el conjunto

$$\{(n,y) \in \omega \times \mathcal{N} \mid y(n) = 0\}$$

(multiplicado por X), y éste es aritmético porque su definición depende sólo de n y de $y|_{n+1}$.

Así pues, U es aritmético, y también lo es su complementario, V que es un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\mathbf{\Pi}^0_1(X)$.

Pasamos ya a revisar la prueba de 4.39, donde partimos de un conjunto V, que ahora tomamos $\mathcal{N}$-universal en lugar de $\mathcal{C}$-universal, para $\mathbf{\Pi}^0_1(\mathcal{N} \times X)$. Hemos visto que podemos tomarlo aritmético. Con ello, el conjunto $\mathcal{N}$-universal U para $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ definido en 4.39, que es:

$$U = \{(u,x) \in \mathcal{N} \times X \mid \bigvee y \in \mathcal{N}\ (u,y,x) \in V\} = \bigvee y\, V,$$

es obviamente $\Sigma^1_1(\mathcal{N}\times X)$. Los conjuntos universales para las clases siguientes de la jerarquía proyectiva se construyen tomando complementarios y proyecciones, luego cada uno de ellos es Σ^1_n o Π^1_n, según corresponda. ■

Teorema 5.19 *Si X es un espacio producto no numerable y $a \in \mathcal{N}$, las inclusiones del teorema* 5.16 *son todas estrictas.*

Demostración: Basta probar que $\Sigma^1_n(a)(X) \neq \Pi^1_n(a)(X)$ (por el mismo argumento empleado en 2.9). En caso contrario, tomamos un conjunto $\mathcal{N}$-universal $U \subset X \times \mathcal{N}$ para $\mathbf{\Sigma}^1_n(X)$ que sea Σ^1_n. Como X es no numerable, tiene al menos un factor igual a $\mathcal{N}$, luego podemos factorizarlo como $X = \mathcal{N} \times Z$, para otro espacio producto Z. El conjunto $U' = U \times Z \subset X \times X$ es también Σ^1_n y claramente es X-universal para $\mathbf{\Sigma}^1_n(X)$ (porque, fijado $z \in Z$, para cada $y \in \mathcal{N}$ tenemos que $U_y = U'_{(y,z)}$, luego las secciones de U' recorren igualmente toda la clase $\mathbf{\Sigma}^1_n(X)$). Por otra parte, la diagonal $\Delta = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$ es claramente aritmética, luego $U_0 = \Delta \cap U' \in \Sigma^1_n(X \times X)$. A su vez,

$$A = \bigvee y\, U_0 = \{x \in X \mid (x,x) \in U'\} \in \Sigma^1_n(X) \subset \Sigma^1_n(a)(X) = \Pi^1_n(a)(X),$$

luego $B = X \setminus A = \{x \in X \mid (x,x) \notin U'\} \in \Sigma^1_n(a)(X) \subset \mathbf{\Sigma}^1_n(X)$, pero esto es imposible, pues, como U' es universal, debe existir un $x \in X$ tal que $B = U'_x$, y así

$$x \in B \leftrightarrow (x,x) \in U' \leftrightarrow x \notin B.$$

■

Nota Claramente, si $X = \omega$ no existe un conjunto X-universal para $\mathbf{\Sigma}^1_n(X)$, pues ello supondría que $\mathcal{P}\omega$ podría parametrizarse por un conjunto numerable. No obstante, la jerarquía de Kleene para cada $a \in \mathcal{N}$ es igualmente estricta en ω, pero la prueba se basa en la existencia de conjuntos ω-universales para $\Sigma^1_n(a)(\omega)$ (no para $\mathbf{\Sigma}^1_n(\omega)$) y no la veremos aquí. ■

5.3 Representaciones en términos de árboles

En esta sección obtendremos unas expresiones para los conjuntos $\Pi^1_1(a)$ y $\Sigma^1_2(a)$ en términos de árboles que aprovecharemos para estudiar estas clases de forma alternativa a como hicimos en el capítulo anterior, donde nos basamos principalmente en el concepto de criba.

En general, si R es un árbol en un producto $X \times Y$ (donde X puede ser a su vez un producto cartesiano de un número finito de conjuntos) y $s \in X^n$, llamaremos

$$R_s = \{t \in Y^n \mid (s,t) \in R\}.$$

Si $x \in X^\omega$, llamaremos

$$R_x = \bigcup_{n\in\omega} R_{x|_n},$$

que claramente es un árbol en Y. Más precisamente, si $t \in Y^n$,

$$t \in R_x \leftrightarrow (x|_n, t) \in R.$$

Recordemos ahora que, según la definición 5.5, dado $a \in \mathcal{N}$, un conjunto $A \subset \mathcal{N}^s$ es $\Sigma^1_1(a)$ si y sólo si existe un conjunto $R \subset V_\omega^{s+2}$ aritmético en a tal que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega (x|_n, z|_n, n) \in R.$$

Ahora bien, podemos sustituir R por un árbol R' en $\omega^s \times \omega$ aritmético en a, de modo que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega (x|_n, z|_n) \in R'.$$

En efecto, basta definir

$$R' = \{(s,t) \in (\omega^s \times \omega)^{<\omega} \mid \bigwedge n \leq \ell(s)\ (s|_n, t|_n, n) \in R\},$$

que obviamente es aritmético en a. (Recíprocamente, dado R', podemos definir $R = R' \times \omega$.)

Equivalentemente, las observaciones precedentes se expresan diciendo que $A \subset \mathcal{N}^s$ es un conjunto $\Sigma^1_1(a)$ si y sólo si existe un árbol R en $\omega^s \times \omega$ aritmético en a tal que $A = p[R]$. A su vez, esto equivale a que, para cada $x \in \mathcal{N}$,

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega\ z|_n \in R_x \leftrightarrow [R_x] \neq \varnothing.$$

Más aún si consideramos a un árbol en un conjunto X como conjunto parcialmente ordenado con la relación inversa a la inclusión, la existencia de una rama infinita en $[R_x]$ equivale a que R_x no esté bien fundado. Así pues, $A \subset \mathcal{N}^s$ es un conjunto $\Sigma^1_1(a)$ si y sólo si existe un árbol R en $\omega^s \times \omega$ aritmético en a tal que, para cada $x \in \mathcal{N}^s$

$$x \in A \leftrightarrow R_x \text{ no está bien fundado.}$$

Podemos mejorar este resultado gracias al concepto siguiente:

El *orden de Brouwer-Kleene* en $\omega^{<\omega}$ es el orden total dado por $s \preceq t$ si y sólo si $t \subset s$ o $s(n) < t(n)$, donde n es el mínimo número natural tal que $s(n) \neq t(n)$. Es fácil ver que se trata ciertamente de una relación de orden.

Teorema 5.20 *Sea R un árbol en ω, sea $\leq$ la relación inversa a la inclusión y $\preceq$ el orden de Brouwer-Kleene. Entonces $(R, \leq)$ está bien fundado si y sólo si $(R, \preceq)$ está bien ordenado.*

Demostración: Un orden total es un buen orden si y sólo si está bien fundado, luego en realidad sólo hay que probar que una relación de orden está bien fundada en R si y sólo si lo está la otra. A su vez, la buena fundación equivale a que no existan sucesiones estrictamente decrecientes. Como $\preceq$ extiende a $\leq$, una implicación es evidente.

Si $\prec$ no está bien fundado sobre R, existe una sucesión $\{s_i\}_{i\in\omega}$ en R tal que $s_{i+1} \prec s_i$. Si existe una subsucesión en la que cada término extiende al anterior, ésta prueba que $\leq$ no está bien fundado. En caso contrario, existe una subsucesión en la que ningún término extiende al anterior y, quedándonos con ella, podemos suponer que $s_i \not\subset s_{i+1}$ para todo i. Sea n_i el menor natural tal que $s_i(n_i) > s_{i+1}(n_i)$. No puede haber infinitos n_i iguales entre sí, luego, tomando una subsucesión, podemos suponer que la sucesión $\{n_i\}_{i\in\omega}$ es estrictamente creciente. De este modo, la sucesión $s_i|_{n_i} \subset s_{i+1}|_{n_i} \subset s_{i+1}|_{n_{i+1}}$ prueba que $(R, \leq)$ no está bien fundado. ■

Ahora podemos resumir en el teorema siguiente lo que hemos obtenido sobre los subconjuntos $\Sigma^1_1(a)$ de $\mathcal{N}^s$, si bien resulta más natural expresar el resultado en términos de sus complementarios:

Teorema 5.21 *Sea $a \in \mathcal{N}$. Un conjunto $A \subset \mathcal{N}^s$ es $\Pi^1_1(a)$ si y sólo si existe un árbol R en $\omega^s \times \omega$ aritmético en a tal que, para cada $x \in \mathcal{N}^s$, se cumple que*

$$x \in A \leftrightarrow (R_x, \leq) \text{ está bien fundado } \leftrightarrow (R_x, \preceq) \text{ está bien ordenado.}$$

A su vez de aquí obtenemos una representación similar para conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$:

Teorema 5.22 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y sea $A \subset \mathcal{N}^s$ un conjunto $\Sigma^1_2(a)$. Entonces existe un árbol R en $\omega^s \times \aleph_1$ tal que $A = p[R]$. Además $R \in L[a]$.*

Demostración: Por definición, $A = \bigvee y\, B$, donde $B \subset \mathcal{N}^s \times \mathcal{N}$ es un conjunto $\Pi^1_1(a)$. Por el teorema anterior existe un árbol U en $\omega^{s+1} \times \omega$ aritmético en a tal que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\; U_{(x,y)} \text{ está bien fundado.}$$

Teniendo en cuenta que $U_{(x,y)}$ es numerable, si está bien fundado, la aplicación rango correspondiente es una aplicación $\rho : U_{(x,y)} \longrightarrow \aleph_1$ que conserva el orden. Recíprocamente, si existe una aplicación $f : U_{(x,y)} \longrightarrow \aleph_1$ que conserva el orden, entonces $U_{(x,y)}$ está sin duda bien fundado. Así pues:

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f (f : U_{(x,y)} \longrightarrow \aleph_1 \land \bigwedge uv \in U_{(x,y)} (u \subsetneq v \rightarrow f(v) < f(u)))$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f (f : \omega^{<\omega} \longrightarrow \aleph_1 \land \bigwedge uv \in U_{(x,y)} (u \subsetneq v \rightarrow f(v) < f(u))).$$

Fijemos una enumeración aritmética $\{s_n\}_{n\in\omega}$ de $\omega^{<\omega}$. Por ejemplo, definimos $s_0 = \varnothing$ y, si $n \in \omega \setminus \{0\}$, descomponemos $n - 1 = \langle n_0, n_1 \rangle$ y le asociamos la sucesión $s \in \omega^{n_0+1}$ tal que $n_1 = \langle s(0), \ldots, s(n_0)\rangle$ (véase la prueba de 5.17). Así, $\ell(s_n) = n_0 + 1 \leq n$.

Para cada función f definida sobre un subconjunto de ω, definimos f^* como la función definida sobre el subconjunto correspondiente de $\omega^{<\omega}$ mediante $f^*(s_n) = f(n)$. Así,

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f(f : \omega \longrightarrow \aleph_1 \land \bigwedge uv \in U_{(x,y)}(u \subsetneq v \to f^*(v) < f^*(u))).$$

Definimos un árbol R' en $\omega^s \times \omega \times \aleph_1$ mediante

$$(s, t, h) \in R' \leftrightarrow \bigwedge uv \in U_{(s,t)}(u \subsetneq v \to h^*(v) < h^*(u)),$$

donde $U_{(s,t)} = \{u \in \omega^{<\omega} \mid \ell(u) \leq \ell(s) = \ell(t) \land (s|_{\ell(u)}, t|_{\ell(u)}, u) \in U\}$. De este modo, si $x \in \mathcal{N}^s$, $y \in \mathcal{N}$ y $(x|_n, y|_n, h) \in R'$, se cumple que $h^*|_{U_{(x,y)}}$ conserva el orden. En efecto, si $u, v \in \mathcal{D}h^* \cap U_{(x,y)}$, entonces $u = s_i$, $v = s_j$, donde $i, j < n$, luego $\ell(u) \leq i < n$ y $\ell(v) \leq j < n$ y, como $u \in U_{(x,y)}$ tenemos que $(x|_{\ell(u)}, y|_{\ell(u)}, u) \in U$, luego $u \in U_{(x|_n, y|_n)}$, e igualmente $v \in U_{(x|_n, y|_n)}$. Por definición de R', si $u \subsetneq v$, entonces $h^*(v) < h^*(u)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f \in R'_{(x,y)} &\to \bigwedge n \in \omega\ (f|_n)^*|_{U_{(x,y)}} \text{ conserva el orden} \\ &\to f^*|_{U_{(x,y)}} \text{ conserva el orden.} \end{aligned}$$

El recíproco es trivial, pues $U_{(x|_n, y|_n)} \subset U_{(x,y)}$. Por lo tanto:

$$f \in R'_{(x,y)} \leftrightarrow f^*|_{U_{(x,y)}} \text{ conserva el orden.}$$

A su vez esto implica que

$$\begin{aligned} x \in A &\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f(f : \omega \longrightarrow \aleph_1 \land f \in R'_{(x,y)}) \\ &\leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N} \bigvee f \in \aleph_1^\omega \bigwedge n \in \omega\ (x|_n, y|_n, f|_n) \in R'. \end{aligned}$$

Ahora bien, podemos considerar a R' como árbol en $\omega^s \times Y$, donde $Y = \omega \times \aleph_1$, con lo que la condición anterior se escribe:

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in Y^\omega \bigwedge n \in \omega\ (x|_n, y|_n) \in R'.$$

A través de una biyección $Y \longrightarrow \aleph_1$ el árbol R' se corresponde con un árbol R en $\omega^s \times \aleph_1$, de modo que

$$x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \aleph_1^\omega \bigwedge n \in \omega\ (x|_n, y|_n) \in R,$$

es decir, que $A = p[R]$.

Para terminar observamos que $V_\omega = L_\omega[a]$, y que el hecho de que U sea aritmético en a significa, por definición, que[1] $U \in \mathcal{D}_a L_\omega[a] = L_{\omega+1}[a] \subset L[a]$. Claramente entonces $R' \in L[a]$ y, si la última biyección la tomamos constructible, también $R \in L[a]$. ■

[1]Véase [PC], sección 13.1.

5.4 Conjuntos $\Pi^1_1(a)$

Vamos a definir ahora un conjunto que, sin ser el mismo, representará un papel equivalente al conjunto **BO** que definimos en el capítulo anterior.

Definición 5.23 Para cada $x \in \mathcal{N}$, definimos la relación $\leq_x \subset \omega \times \omega$ mediante

$$m \leq_x n \leftrightarrow x(\langle m, n\rangle) = 0.$$

Definimos $m <_x n \leftrightarrow m \leq_x n \land m \neq n$. En general, si $R \subset X \times X$ es una relación en un conjunto X, su *campo* es el conjunto

$$C_R = \{x \in X \mid \bigvee y \in X(x\,R\,y \lor y\,R\,x)\}.$$

Llamaremos $C_x \subset \omega$ al campo de $\leq_x$. Definimos

$$\mathrm{OT} = \{x \in \mathcal{N} \mid (C_x, \leq_x) \text{ está totalmente ordenado}\}$$

Claramente es un conjunto aritmético, pues

$$x \in \mathrm{OT} \leftrightarrow \bigwedge mn(x(\langle m, n\rangle) = 0 \rightarrow x(\langle n, m\rangle) = 0) \land$$

$$\bigwedge mnr(x(\langle m, n\rangle) = 0 \land x(\langle n, r\rangle) = 0 \rightarrow x(\langle m, r\rangle) = 0) \land$$

$$\bigwedge mn((\bigvee r\ x(\langle m, r\rangle) = 0 \land \bigvee r\ x(\langle n, r\rangle) = 0) \rightarrow x(\langle m, n\rangle) = 0 \lor x(\langle n, m\rangle) = 0)$$

y es claro que esta relación es aritmética. (Aquí hemos usado que una relación simétrica y transitiva en su campo es también reflexiva en su campo.)

Similarmente, definimos

$$\mathrm{BO} = \{x \in \mathcal{N} \mid (C_x, \leq_x) \text{ está bien ordenado}\}.$$

Para cada $x \in \mathrm{BO}$ existe un único ordinal $\|x\| < \aleph_1$ y una única semejanza $f : (C_x, \leq_x) \longrightarrow \|x\|$.

Teorema 5.24 *El conjunto* BO *es* Π^1_1 *y la aplicación* $\|\ \| : \mathrm{BO} \longrightarrow \aleph_1$ *es una norma en* Π^1_1.

Demostración: En primer lugar:

$$x \in \mathrm{BO} \leftrightarrow x \in \mathrm{OT} \land \neg \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge n \in \omega(z(n+1) <_x z(n))$$

$$\leftrightarrow x \in \mathrm{OT} \land \bigwedge z \in \mathcal{N} \bigvee n \in \omega(u = z(n+1) \land v = z(n) \land u \neq v \land x(\langle u, v\rangle) = 0)).$$

Claramente, la relación tras $\bigwedge z \in \mathcal{N}$ es aritmética, luego la relación completa es Π^1_1.

Definimos ahora

$$x \leq_{\Sigma^1_1} y \leftrightarrow x \in \mathrm{OT} \land \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge mn \in \omega(m <_x n \rightarrow z(m) <_y z(n)).$$

Claramente se trata de una relación Σ^1_1 en $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ y, si $x\in\mathcal{N}$, $y\in\mathrm{BO}$, se cumple que

$$x\leq_{\Sigma^1_1} y \leftrightarrow x\in \mathrm{BO}\land \|x\|\leq\|y\|.$$

Por otra parte, definimos

$$x\leq_{\Pi^1_1} y\leftrightarrow x,y\in\mathrm{BO}\land\neg\bigvee z\in\mathcal{N}\bigvee k\in\omega(k\leq_x k\land$$

$$\bigwedge mn\in\omega(m<_y n\rightarrow z(m)<_x z(n)<_x k)),$$

y es claro que se trata de una relación Π^1_1 y

$$x\leq_{\Pi^1_1} y\leftrightarrow x,y\in\mathrm{BO}\land\|x\|\leq\|y\|.$$

(Concretamente, $\leq_{\Pi^1_1}$ afirma que $(C_y,\leq_y)$ no es semejante a ningún segmento inicial de $(C_x,\leq_x)$.) Esto prueba que $\|\ \|$ es una norma en Π^1_1 definida sobre BO. ■

Como consecuencia inmediata:

Teorema 5.25 *Para cada* $\alpha<\aleph_1$*, los conjuntos*

$$\mathrm{BO}_\alpha=\{x\in\mathrm{BO}\mid\|x\|\leq\alpha\},\quad\{x\in\mathrm{BO}\mid\|x\|<\alpha\},\quad\{x\in\mathrm{BO}\mid\|x\|=\alpha\}$$

son $\mathbf{\Delta}^1_1$.

Demostración: Podemos tomar $a\in\mathrm{BO}$ tal que $\|a\|=\alpha$. Entonces,

$$x\in\mathrm{BO}_\alpha\leftrightarrow x\leq_{\Sigma^1_1} a\leftrightarrow x\leq_{\Pi^1_1} a.$$

Así pues, BO_α es la antiimagen por la aplicación continua $x\mapsto(x,a)$ tanto de $\leq_{\Sigma^1_1}$ como de $\leq_{\Pi^1_1}$, luego es $\mathbf{\Delta}^1_1$. (Notemos que la aplicación es, de hecho, aritmética en a, luego BO_α es $\Delta^1_1(a)$.) Trivialmente,

$$\{x\in\mathrm{BO}\mid\|x\|<\alpha\}=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{BO}_\beta$$

y el tercero conjunto es la diferencia de los dos anteriores. ■

Veamos ahora el teorema análogo a 4.28:

Teorema 5.26 *Si* $A\subset\mathcal{N}^s$ *es un conjunto* $\mathbf{\Pi}^1_1$ *existe una aplicación continua* $f:\mathcal{N}^s\longrightarrow\mathcal{N}$ *tal que* $f[\mathcal{N}^s]\subset\mathrm{OT}$ *y* $A=f^{-1}[\mathrm{BO}]$.

Demostración: Según el teorema 5.21, existe un árbol S en $\omega^s\times\omega$ tal que, para cada $x\in\mathcal{N}^s$ se cumple que $x\in A\leftrightarrow(S_x,\preceq)$ está bien ordenado.

Sea $\{s_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$. Para cada $x\in\mathcal{N}^s$ definimos $f(x)=y$ de modo que

$$y(\langle m,n\rangle)=\begin{cases}0 & \text{si } s_m,s_n\in S_x \text{ y } s_m\preceq s_n,\\ 1 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Es claro entonces que (C_{R_y},R_y) es semejante a $(S_x,\preceq)$, de manera que $f(x)\in\mathrm{OT}$ y $f(x)\in\mathrm{BO}\leftrightarrow x\in A$, es decir, que $A=f^{-1}[\mathrm{BO}]$. Sólo falta probar que f es continua.[2] Para ello basta ver que las antiimágenes de los abiertos subbásicos

$$S_{k,r} = \{y \in \mathcal{N} \mid y(k) = r\}$$

son abiertas. Si $r > 1$ entonces $f^{-1}[S_{k,r}] = \varnothing$, trivialmente abierto. Suponemos, pues, que $r \leq 1$. Sea $k = \langle m, n\rangle$. Si $s_m \not\preceq s_n$, entonces $f^{-1}[S_{k,0}] = \varnothing$ y $f^{-1}[S_{k,1}] = \mathcal{N}^s$, luego podemos suponer $s_m \preceq s_n$. Sea $l = \max\{\ell(s_m), \ell(s_n)\}$. Así, si $x \in f^{-1}[S_{k,r}]$, entonces $x \in B_{x|_l} \subset f^{-1}[S_{k,r}]$, pues si $x' \in B_{x|_l}$ entonces $x'|_l = x|_l$, luego $s_m, s_n \in S_x \leftrightarrow s_m, s_n \in S_{x'}$, luego $f(x')(k) = f(x)(k) = r$. ■

De aquí se sigue que BO no es $\mathbf{\Sigma}^1_1$, por el mismo argumento elemental empleado en el teorema 4.30. También tenemos una prueba alternativa del teorema 4.23: todo subconjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ de $\mathcal{N}^s$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel y, como todos los espacios polacos no numerables son Borel-isomorfos (y el resultado es trivial para los espacios numerables), podemos concluir que el teorema es cierto para espacios polacos arbitrarios.

En la sección 4.4 demostramos que un espacio polaco no numerable no admite buenos órdenes $\mathbf{\Sigma}^1_1$ o $\mathbf{\Pi}^1_1$. Vamos a generalizar ligeramente este hecho:

Teorema 5.27 *Sea X un espacio polaco no numerable y $E \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X \times X)$ una relación bien fundada en X. Entonces el rango $\rho_E : X \longrightarrow \Omega$ determinado por E tiene por imagen un ordinal numerable.*

Demostración: En primer lugar vamos a dar una demostración alternativa a la que dimos en la sección 4.4 de que los espacios polacos no numerables no admiten buenos órdenes $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Más precisamente:

Si $E \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X \times X)$ es un buen orden, entonces $\operatorname{ord}(X, E) < \aleph_1$.

Para reducir este hecho al enunciado basta observar que, si $\Delta \subset X \times X$ es la diagonal, entonces $E \setminus \Delta$ es una relación bien fundada en X, analítica en $X \times X$ y la aplicación rango es la misma que la semejanza de X con su ordinal.

No vamos a necesitar este caso particular para demostrar el caso general, pero la prueba es más sencilla. En la sección 4.4 vimos que (tanto en el caso general como en el particular), el hecho de que los espacios polacos no numerables sean Borel-isomorfos implica que basta probar el resultado para un espacio en concreto, por ejemplo $\mathcal{N}$.

Supongamos, pues, que E es un buen orden analítico en $\mathcal{N}$ cuyo ordinal es $\geq \aleph_1$. Cambiando E por $E \setminus \Delta$ podemos suponer que E es una relación de orden estricto. Entonces, para todo ordinal numerable α, existe una aplicación $f : (\alpha, <) \longrightarrow (X, E)$ que conserva el orden. Recíprocamente, si $(Q, <)$ es un conjunto numerable totalmente ordenado y $f : (Q, <) \longrightarrow (X, E)$ conserva el orden, entonces $(Q, <)$ está bien ordenado.

[2] Notemos que si A es $\Pi^1_1(a)$ el árbol R puede tomarse aritmético en a, con lo que, tomando la enumeración $\{s_n\}_{n\in\omega}$ aritmética, la aplicación f resulta ser $\Delta^1_1(a)$.

Claramente entonces:

$$x \in \mathrm{BO} \leftrightarrow x \in \mathrm{OT} \wedge \bigvee f(f : \omega \longrightarrow \mathcal{N} \wedge \bigwedge mn \in \omega(m <_x n \rightarrow (f(m), f(n)) \in E)).$$

Ahora bien, una aplicación $f : \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ es un elemento de $\mathcal{N}^\omega$, que se corresponde con un $z \in \mathcal{N}$ a través del homeomorfismo natural $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}^\omega$. Por lo tanto:

$$x \in \mathrm{BO} \leftrightarrow x \in \mathrm{OT} \wedge \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge mn \in \omega(m <_x n \rightarrow (z_m, z_n) \in E)$$

$$\leftrightarrow x \in \mathrm{OT} \wedge \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge mn \in \omega(n \leq_x m \vee (z_m, z_n) \in E)$$

Ahora observamos que, como la aplicación $\omega \times \omega \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dada por $(m, n, z) \mapsto (z_m, z_n)$ es claramente aritmética, la antiimagen de E por esta aplicación, es decir, el conjunto

$$\{(m, n, z) \in \omega \times \omega \times \mathcal{N} \mid (z_m, z_n) \in E\}$$

es un conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_1$, de donde se sigue inmediatamente que $\mathrm{BO} \in \mathbf{\Sigma}^1_1$, contradicción.

Veamos ahora el caso general:

Si E es una relación analítica bien fundada en $\mathcal{N}$ de modo que existen elementos en $\mathcal{N}$ de cualquier rango numerable, entonces, dado un ordinal numerable α, existe un conjunto numerable $S \subset \mathcal{N}$ y una aplicación $f : S \longrightarrow \alpha$ suprayectiva tal que

$$\bigwedge x \in S \bigwedge \beta < f(x) \bigvee y \in S(y\, E\, x \wedge \beta \leq f(y)).$$

En efecto, sea $\rho_E : \mathcal{N} \longrightarrow \Omega$ la aplicación rango. Si $x \in \mathcal{N}$ tiene rango numerable, por el axioma de elección numerable, existe S_x tal que

- $S_x \subset \mathcal{N}$ es numerable.
- $\bigwedge y \in S_x \; y\, E\, x$.
- $\bigwedge \beta(\bigvee y \in \mathcal{N}(y\, E\, x \wedge \rho_E(y) = \beta) \rightarrow \bigvee y \in S_x \; \rho_E(y) = \beta)$.

Si $S \subset \mathcal{N}$ es numerable y todos sus elementos tienen rango numerable, podemos elegir una familia $\{S_x\}_{x\in S}$ de conjuntos que cumplan las tres condiciones anteriores. Llamamos $\bar{S} = \bigcup\limits_{x\in S} S_x$, que es un subconjunto numerable de $\mathcal{N}$ cuyos elementos tienen todos rango numerable. Así hemos probado que para todo $S \subset \mathcal{N}$ numerable con elementos de rango numerable existe un $\bar{S}$ numerable con elementos de rango numerable tal que

$$\bigwedge x \in S \bigwedge \beta(\bigvee y \in \mathcal{N}(y\, E\, x \wedge \rho_E(y) = \beta) \rightarrow \bigvee y \in \bar{S}(y\, E\, x \wedge \rho_E(y) = \beta)).$$

Ahora, una aplicación de ED nos da una sucesión $\{S_n\}_{n\in\omega}$ tal que $S_0 = S_x$, donde $x \in \mathcal{N}$ es un elemento prefijado de rango α, y $\bigwedge n \in \omega \; S_{n+1} = \bar{S}_n$. (Usamos ED porque $\bar{S}_n$ no está unívocamente determinado, sino que elegimos un conjunto concreto en cada paso.)

Llamamos $S = \bigcup\limits_{n\in\omega} S_n$ y $f = \rho_E|_S : S \longrightarrow \alpha$.

Se cumple que f es suprayectiva, pues si $\beta < \alpha$, existe un $y_0 \, E \, x$ tal que $\beta \leq \rho_E(y_0)$ y dicho y_0 puede tomarse en $S_0 \subset S$. Si $\beta < \rho_E(y_0)$ existe un $y_1 \, E \, y_0$ tal que $\beta \leq \rho_E(y_1)$, y dicho y_1 puede tomarse en S_1. Como no existen sucesiones decrecientes

$$\cdots y_3 \, E \, y_2 \, E \, y_1 \, E y_0,$$

tras un número finito de pasos hemos de llegar a un $y_n \in S_n$ tal que $\rho_E(y_n) = \beta$.

Además S cumple la propiedad requerida, pues si $x \in S$ y $\beta < f(x) = \rho_E(x)$, entonces $x \in S_n$ para cierto n y existe un $y \, E \, x$ tal que $\beta \leq \rho_E(y)$, pero y puede tomarse en $S_{n+1} \subset S$.

Recíprocamente, si $(Q, <)$ es un conjunto numerable totalmente ordenado y existe $S \subset \mathcal{N}$ y $f : S \longrightarrow Q$ suprayectiva tal que

$$\bigwedge x \in S \bigwedge q \in Q(q < f(x) \to \bigvee y \in S(y \, E \, x \wedge q \leq f(y))),$$

entonces $(Q, <)$ está bien ordenado. En efecto, en caso contrario existe una sucesión $\{q_n\}_{n\in\omega}$ decreciente en Q. Sea $x_0 \in S$ tal que $f(x_0) = q_0$. Entonces $q_1 < f(x_0)$, luego existe $x_1 \in S$ tal que $x_1 \, E, x_0$ y $q_1 \leq f(x_1)$. Entonces $q_2 < f(x_1)$, luego existe un $x_2 \in S$ tal que $x_2 \, E \, x_0$ y $q_2 \leq f(x_2)$. De este modo construimos (con ED) una sucesión decreciente en $\mathcal{N}$ respecto de E, contradicción.

Así pues, teniendo en cuenta que un subconjunto numerable de $\mathcal{N}$ se codifica por un $z \in \mathcal{N}$ (el conjunto es $\{z_n \mid n \in \omega\}$), y que una aplicación $f : S \longrightarrow \omega$ se codifica por otro $w \in \mathcal{N}$ (de modo que $f(z_n) = w(n)$), tenemos que

$$x \in \mathrm{BO} \leftrightarrow x \in \mathrm{OT} \wedge \bigvee zw \in \mathcal{N}((\bigwedge n \in \omega \bigvee m \in \omega \ w(m) = n) \wedge$$

$$\bigwedge nk \in \omega(k <_x w(n) \to \bigvee m \in \omega((z_m, z_n) \in E \wedge k \leq_x w(m)))).$$

Como en el caso anterior, es fácil ver que esta equivalencia implica que BO es $\mathbf{\Sigma}^1_1$, contradicción. ■

A partir de aquí podemos obtener información sobre la posibilidad de que un espacio polaco no numerable admita un buen orden $\mathbf{\Sigma}^1_2$:

Teorema 5.28 *Sea X un espacio polaco no numerable y $E \in \mathbf{\Sigma}^1_2(X \times X)$ una relación bien fundada en X. Entonces el rango $\rho_E : X \longrightarrow \Omega$ determinado por E tiene por imagen un ordinal $< \aleph_2$.*

Demostración: El hecho de que dos espacios polacos no numerables cualesquiera sean Borel-isomorfos implica claramente que basta probar el teorema para $X = \mathcal{N}$. Si $E \in \mathbf{\Sigma}^1_2(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$, el teorema 5.22 nos da un árbol R en $\omega^2 \times \aleph_1$ tal que, para todo $x, y \in \mathcal{N}$,

$$(x, y) \in E \leftrightarrow \bigvee f(f : \omega \longrightarrow \aleph_1 \wedge \bigwedge n \in \omega \ (x|_n, y|_n, f|_n) \in R).$$

Para cada $f : \omega \longrightarrow \aleph_1$ y cada $n \in \omega$, definimos $f_n : \omega \longrightarrow \aleph_1$ mediante $f_n(m) = f(\langle n, m\rangle)$, donde $\langle\ ,\ \rangle : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ es la semejanza canónica. Igualmente, para cada $z \in \mathcal{N}$ tenemos definida del mismo modo la sucesión $\{z_n\}_{n\in\omega}$. Así pues,

$$E \text{ no está bien fundada} \leftrightarrow \bigvee x \in \mathcal{N} \bigwedge m \in \omega\ (x_{m+1}, x_m) \in E$$

$$\leftrightarrow \bigvee x \bigwedge m \bigvee f \bigwedge n\ (x_{m+1}|_n, x_m|_n, f|_n) \in R$$

$$\leftrightarrow \bigvee x \bigvee f \bigwedge mn\ (x_{m+1}|_n, x_m|_n, f_m|_n) \in R.$$

Definimos como sigue un árbol U en $\omega \times \aleph_1$: un par $(s, g) \in \omega^k \times \aleph_1^k$ está en U si y sólo si existe $(u, v, h) \in R$ tal que, para todo $m \in \omega$, se cumple que $s_{m+1} \subset u$, $s_m \subset v$, $g_m \subset h$, donde $s_m(i) = s(\langle m, i\rangle)$, $g_m(i) = g(\langle m, i\rangle)$ son funciones definidas en ciertos subconjuntos finitos de ω. De este modo,

$$E \text{ no está bien fundada} \leftrightarrow \bigvee x \bigvee f \bigwedge n\ (x|_n, f|_n) \in U.$$

Por consiguiente, E está bien fundada si y sólo si U está bien fundado.

Para demostrar el teorema basta probar que se cumple en un modelo transitivo numerable arbitrario M de ZF+ED. Todo lo dicho hasta aquí es válido relativizado a M. Ahora consideramos una extensión genérica $M[G]$ en la que $\aleph_1^{M[G]} = \aleph_2^M$, con lo que $\aleph_1^M$ es numerable$^{M[G]}$.

Estamos suponiendo que $E \subset (\mathcal{N} \times \mathcal{N})^M$ está dado por

$$(x, y) \in E \leftrightarrow R_{(x,y)} \text{ no está bien fundado.}$$

Sea $E^* \subset (\mathcal{N} \times \mathcal{N})^{M[G]}$ el conjunto dado por

$$(x, y) \in E^* \leftrightarrow R_{(x,y)} \text{ no está bien fundado.}$$

Como estar bien fundado es absoluto para modelos transitivos, se cumple que $E \subset E^*$. Observemos ahora que la construcción de U a partir de R es absoluta, por lo que, al igual que se cumple en M que E está bien fundada si y sólo si U está bien fundado, también se cumple en $M[G]$ que E^* está bien fundada si y sólo si U (el mismo U) está bien fundado. Así, como E está bien fundada, el árbol U también lo está, y concluimos que E^* también está bien fundada.

Ahora bien, $E^* = p[R]^{M[G]}$, pero R es un árbol en $\omega \times \omega \times \aleph_1^M$ y $\aleph_1^M$ es un ordinal numerable$^{M[G]}$. Por lo tanto, a través de una biyección $\omega \longrightarrow \aleph_1^M$, el árbol R se corresponde con un árbol $R' \in M[G]$ en $\omega \times \omega \times \omega$ de modo que $E^* = p[R']^{M[G]}$, y esto prueba que E^* es analítica$^{M[G]}$. Por el teorema anterior, la imagen de ρ_{E^*} es un ordinal α numerable$^{M[G]}$, luego $\alpha < \aleph_2^M$.

Por otra parte, la inclusión $E \subset E^*$ implica que, para cada $x \in \mathcal{N}^M$, se cumple $\rho_E(x) \leq \rho_{E^*}(x) < \alpha < \aleph_2^M$, luego la imagen de ρ_E ha de ser un ordinal $\leq \alpha < \aleph_2^M$. ∎

En particular, todo buen orden $\mathbf{\Sigma}^1_2$ de un espacio polaco no numerable tiene ordinal $< \aleph_2$. Por consiguiente, si un espacio polaco admite un buen orden $\mathbf{\Sigma}^1_2$ (o $\mathbf{\Pi}^1_2$), necesariamente $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

5.5 Clases con normas y escalas

Presentamos aquí la versión efectiva de la teoría sobre clases normadas que tratamos en el capítulo anterior. La definición 4.44 de clase normada no requiere más modificación que la de aplicarla a una clase de conjuntos Γ no definida sobre todos los espacios polacos, sino únicamente sobre los espacios producto. Más aún, por simplicidad consideraremos únicamente espacios producto con $s \geq 1$, de modo que todos son homeomorfos a $\mathcal{N}$ (y el homeomorfismo se puede tomar aritmético).

Todas las consideraciones posteriores son válidas igualmente con esta restricción y con una mínima variante: en lugar de exigir a la clase Γ que sea cerrada para sustituciones continuas, basta exigir que sea cerrada para sustituciones aritméticas, ya que en dichas consideraciones únicamente usamos que la aplicación $(x, y) \mapsto (y, x)$ es continua y, por otra parte, también es aritmética. En cuanto al teorema 4.45, podemos adaptarlo como sigue:

Teorema 5.29 *Sea Γ una clase normada definida sobre los espacios producto que contenga los conjuntos aritméticos y que sea cerrada para uniones e intersecciones finitas y para sustituciones aritméticas. Entonces:*

a) Γ tiene la propiedad de reducción y $\neg\Gamma$ tiene la propiedad de separación.

b) Si existe un conjunto $\mathcal{N}$-universal para $\Gamma(\mathcal{N})$, entonces Γ no tiene la propiedad de separación y $\neg\Gamma$ no tiene la propiedad de reducción.

c) Si $\Gamma = \bigwedge n\, \Gamma$ entonces Γ tiene la propiedad de uniformización numérica.

Demostración: El apartado a) se demuestra adaptando trivialmente la prueba del apartado correspondiente de 4.45.

b) Adaptamos la prueba de 2.14 d). Al igual que allí, definimos los conjuntos U^0 y U^1 usando el homeomorfismo natural $\mathcal{N}^2 \cong \mathcal{N}$, que es aritmético, por lo que U^0 y U^1 están en Γ. Con ellos construimos el conjunto $V \in \Delta$ que no es exactamente $\mathcal{N}$-universal para $\Delta(\mathcal{N})$, sino que cumple que, para todo $A \in \Delta(\mathcal{N})$ existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que $A = V_x$ (pero no todo V_x tiene por qué estar en $\Delta(\mathcal{N})$). Esto basta para que funcione el argumento de 2.10. En efecto, definimos $A = \{x \in \mathcal{N} \mid (x, x) \notin V\}$, que está en $\Delta(\mathcal{N})$ porque la aplicación $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dada por $x \mapsto (x, x)$ es aritmética. Entonces, debería haber un $x \in \mathcal{N}$ tal que $V_x = A$, lo cual es absurdo.

c) La demostración de 4.45 es válida igualmente en este contexto. La única diferencia está en la justificación de que $R^* \in \Gamma(X \times \omega)$, donde

$$(x, n) \in R^* \leftrightarrow (x, n) \in R \land \bigwedge m \in \omega((x, n) \leq^* (x, m))$$

$$\land \bigwedge m \in \omega((x, n) <^* (x, m) \lor n \leq m)).$$

Ahora basta ver que las relaciones definidas tras los $\bigwedge m$ están en Γ, por ejemplo, para la primera de las dos, esto es así por que la relación $(x, n) \leq^* (x, m)$ es la antiimagen de $\leq^*$ por la aplicación aritmética $(x, m, n) \mapsto (x, n, x, m)$. ■

Teorema 5.30 *Si $a \in \mathcal{N}$, la clase $\Pi^1_1(a)$ es normada.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset \mathcal{N}^s$ un conjunto $\Pi^1_1(a)$. Por el teorema 5.26 existe una aplicación continua $f : \mathcal{N}^s \longrightarrow \mathcal{N}$ (que, según hemos visto en la prueba, puede tomarse $\Delta^1_1(a)$) tal que $A = f^{-1}[\mathrm{BO}]$. Esto nos permite componer f con la norma en BO dada por el teorema 5.24. Se comprueba inmediatamente que la aplicación $f \times f : \mathcal{N}^s \times \mathcal{N}^s \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es también $\Delta^1_1(a)$, luego las antiimágenes de las relaciones $\leq_{\Sigma^1_1}$ y $\leq_{\Pi^1_1}$ son $\Sigma^1_1(a)$ y $\Pi^1_1(a)$ respectivamente, y es claro que satisfacen la definición de norma.

En realidad falta demostrar que los subconjuntos $\Pi^1_1(a)$ de los espacios producto generales, es decir, de la forma $X = \omega^r \times \mathcal{N}^s$ (con $s \geq 1$) también admiten normas $\Pi^1_1(a)$, pero esto se sigue de la parte ya probada teniendo en cuenta que X es homeomorfo a $\mathcal{N}$ a través de un homeomorfismo Δ^1_1. ■

La demostración del teorema 4.48 se adapta trivialmente para probar la versión efectiva correspondiente:

Teorema 5.31 *Dado $a \in \mathcal{N}$, si la clase $\Pi^1_n(a)$ es normada, también lo es la clase $\Sigma^1_{n+1}(a)$.*

Por lo tanto, tenemos que las clases $\Pi^1_1(a)$ y $\Sigma^1_2(a)$ son normadas, con lo que en particular tienen la propiedad de reducción y la propiedad de uniformización numérica (pero no la de separación) y las clases $\Sigma^1_1(a)$ y $\Pi^1_2(a)$ tienen la propiedad de separación (pero no la de reducción).

Pasamos ahora a estudiar las clases con escalas y la uniformización. Para tratar con clases efectivas, la definición de escala requiere una precisión que en el caso clásico se cumplía trivialmente:

Para que una escala $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ en un conjunto $A \subset X$ sea una Γ escala, donde Γ es una clase definida sobre los espacios producto no numerables, exigiremos que las relaciones $x \leq^n_\Gamma y$ y $x \leq^n_{\neg\Gamma} y$ (que prueban que cada ϕ_n es una norma en Γ) estén en Γ y $\neg\Gamma$ respectivamente como un único par de relaciones ternarias en $X \times X \times \omega$, y no sólo como infinitas relaciones binarias en $X \times X$.

Con esta precisión, la prueba del teorema 4.52 se adapta sin dificultad:

Teorema 5.32 *Sea Γ una clase definida sobre los espacios producto no numerables que sea cerrada para uniones e intersecciones finitas, para antiimágenes Δ^1_1, para $\bigwedge n \in \omega$, $\bigvee n \in \omega$ y para $\bigwedge x \in \mathcal{N}$. Entonces, si Γ tiene escalas tiene la propiedad de uniformización.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que todo conjunto $A \in \Gamma(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ puede uniformizarse en Γ. Para ello tomamos una escala $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ y, a partir de este punto, seguimos la demostración de 4.52 con los pocos cambios que comentamos a continuación.

Por la precisión que hemos hecho a la definición de escala en Γ, ahora tenemos que las relaciones $\preceq^*_n$ y $\prec^*_n$ están en $\Gamma(\mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega)$, con lo que

$$C = \{(x, y, z, n) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \mid (x, y) \preceq^*_n (x, z)\}$$

está en Γ y, por lo tanto, también lo está

$$B^* = \{(x, y, n) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \mid \bigwedge z \in \mathcal{N}\ (x, y) \preceq_n^* (x, z)\}.$$

A su vez, esto implica que

$$B = \bigcap_{n\in\omega} B_n = \bigwedge n \in \omega\ B^*$$

también esté en Γ, y el resto de la prueba vale sin cambio alguno. ■

Teorema 5.33 *Si $a \in \mathcal{N}$, la clase $\Pi_1^1(a)$ tiene escalas.*

Demostración: Basta probar que todo $A \subset \mathcal{N}$ que sea $\Pi_1^1(a)$ tiene una escala en $\Pi_1^1(a)$. Según 5.26, existe una aplicación continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que $f[\mathcal{N}] \subset \mathrm{LO}$ y $A = f^{-1}[\mathrm{BO}]$, y en la prueba hemos visto que la podemos tomar $\Delta_1^1(a)$.

Consideremos la aplicación $g : \mathcal{N} \times \omega \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que

$$\leq_{g(x,n)} = \{(u, v) \in \omega \times \omega \mid u \leq_x v <_x n\}.$$

Notemos que su gráfica es aritmética, pues

$$(x, n, y) \in G(g) \leftrightarrow \bigwedge uv \in \omega(y(\langle u, v\rangle) = 0 \leftrightarrow x(\langle u, v\rangle) = 0 \wedge x(\langle v, n\rangle) = 0$$

$$\wedge\ v \neq n) \wedge \bigwedge u \in \omega(y(u) = 1 \leftrightarrow y(u) \neq 0).$$

En particular g es Δ_1^1.

Sea $Z = \{(\beta, \gamma) \in \aleph_1 \times \aleph_1 \mid \gamma \leq \beta\}$ en el que consideramos el orden lexicográfico:

$$(\beta, \gamma) < (\beta', \gamma') \leftrightarrow \beta < \beta' \vee (\beta = \beta' \wedge \gamma < \gamma').$$

Puesto que todas las secciones iniciales son numerables, el ordinal de Z es $\aleph_1$, luego existe una única semejanza $F : Z \longrightarrow \aleph_1$. Definimos $\phi_n : A \longrightarrow \Omega$ como las aplicaciones dadas por

$$\phi_n(x) = F(\|f(x)\|, \|g(f(x), n)\|).$$

Observemos que $\|g(f(x), n)\| \leq \|f(x)\|$ porque el término de la izquierda es el ordinal de una sección inicial de un conjunto bien ordenado cuyo ordinal es el término de la derecha.

Vamos a probar que $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en A. Para ello consideramos una sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ contenida en A, convergente a un $x \in \mathcal{N}$ y tal que cada sucesión $\{\phi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ sea finalmente igual a un $F(\alpha_n, \beta_n)$.

En primer lugar observamos que todos los α_n son iguales a un mismo ordinal α. En efecto, dados n, $n' \in \omega$, podemos tomar un m suficientemente grande como para que $\alpha_n = \|f(x_m)\| = \alpha_{n'}$. Por otra parte, teniendo en cuenta que f es continua, por lo que $\{f(x_m)\}_{m\in\omega}$ converge a $f(x)$, se cumple que

$$n <_{f(x)} n' \rightarrow f(x)(\langle n, n'\rangle) = 0 \land n \neq n'$$

$$\rightarrow \text{para } m \text{ grande } f(x_m)(\langle n, n'\rangle) = 0 \land n \neq n'$$

$$\rightarrow \text{para } m \text{ grande } n <_{f(x_m)} n'$$

$$\rightarrow \text{para } m \text{ grande } \|g(f(x_m), n)\| < \|g(f(x_m), n')\| \rightarrow \beta_n < \beta_{n'}$$

Así pues, $<_{f(x)}$ está bien fundada, luego $f(x) \in \mathrm{BO}$, luego $x \in A$. Más aún, la aplicación $n \mapsto \beta_n$ es una semejanza del segmento inicial de n en $(C_{f(x)}, \leq_{f(x)})$ en un subconjunto de β_n, luego $\|g(f(x), n)\| \leq \beta_n \leq \alpha$. A su vez,

$$\|f(x)\| = \sup\{\|g(f(x), n)\| \mid n \in \omega\} \leq \alpha,$$

luego $\phi_n(x) \leq F(\alpha, \beta_n)$, como exige la definición de escala.

Falta probar que la escala es $\Pi^1_1(a)$. Para ello observamos que si $x \in \mathcal{N}$, $y \in A$, se cumple que

$$x \in A \land \phi_n(x) \leq \phi_n(y) \leftrightarrow x \in A \land$$

$$(\|f(x)\| < \|f(y)\| \lor (\|f(x)\| = \|f(y)\| \land \|g(f(x), n)\| \leq \|g(f(y), n)\|))$$

$$\leftrightarrow f(x) \leq_{\Pi^1_1} f(y) \land (f(y) \not\leq_{\Sigma^1_1} f(x) \lor (g(f(x), n) \leq_{\Pi^1_1} g(f(y), n))),$$

donde $\leq_{\Pi^1_1}$ y $\leq_{\Sigma^1_1}$ son las relaciones definidas en la demostración de 5.24.

Así pues, la relación

$$x \leq^n_{\Pi^1_1} y \leftrightarrow f(x) \leq_{\Pi^1_1} f(y) \land (f(y) \not\leq_{\Sigma^1_1} f(x) \lor (g(f(x), n) \leq_{\Pi^1_1} g(f(y), n)))$$

es claramente $\Pi^1_1(a)$ (pues se expresa en términos de uniones e intersecciones de antiimágenes de relaciones Π^1_1 por aplicaciones $\Delta^1_1(a)$) y cumple la definición de escala en $\Pi^1_1(a)$. Lo mismo sucede con la relación $\Sigma^1_1(a)$ dada por:

$$x \leq^n_{\Sigma^1_1} y \leftrightarrow f(x) \leq_{\Sigma^1_1} f(y) \land (f(y) \not\leq_{\Pi^1_1} f(x) \lor (g(f(x), n) \leq_{\Sigma^1_1} g(f(y), n))).$$

■

Los teoremas 4.54 y 4.55 se adaptan sin dificultad alguna:

Teorema 5.34 *Sea $a \in \mathcal{N}$. Si la clase $\Pi^1_n(a)$ tiene escalas (resp. tiene la propiedad de uniformización), lo mismo le sucede a $\Sigma^1_{n+1}(a)$.*

Por lo tanto, concluimos que las clases $\Pi^1_1(a)$ y $\Sigma^1_2(a)$ tienen escalas y la propiedad de uniformización, mientras que $\Sigma^1_1(a)$ y $\Pi^1_2(a)$ no pueden tener la propiedad de uniformización, pues entonces tendrían la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción.[3]

[3]Para reducir dos conjuntos A y B basta uniformizar $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$.

5.6 La definibilidad de los conjuntos proyectivos

Para acabar demostraremos algunos resultados que precisan el sentido en que se puede decir que los conjuntos proyectivos son "definibles". El primero de ellos los presentará como los conjuntos que pueden definirse mediante fórmulas de un lenguaje de segundo orden, que consta de variables de primer orden que recorren los elementos de ω y variables de segundo orden que recorren los elementos de $\mathcal{N}$.

Definición 5.35 Llamaremos *formalismo de la aritmética de segundo orden* al lenguaje formal $\mathcal{L}_a$ que consta de los signos siguientes:

- Variables de primer orden: m, n, ...
- Variables de segundo orden: x, y, ...
- Tres funtores diádicos: $+$, $\cdot$, e
- Constantes: $0, 1, 2, 3, \ldots$
- Signos lógicos: $\neg, \rightarrow, \bigwedge, =$

La naturaleza conjuntista de estos signos es irrelevante, pero es útil tomarlos tan simples como sea posible. Concretamente, conviene suponer que todos ellos son números naturales. Por ejemplo, podemos considerar que las variables de primer orden son los números $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$, que las variables de segundo orden son los números $3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$, que las constantes son los números $5, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$, que los funtores son los números 7, 7^2 y 7^3 y que los signos lógicos son los números $11, 11^2, 11^3, 11^4$.

Así, por ejemplo, cuando hablamos de la constante 1 de $\mathcal{L}_a$, nos referimos al número natural 25.

Si llamamos $\mathrm{Sig}(\mathcal{L}_a) \subset \omega$ al conjunto de los signos de $\mathcal{L}_a$, definimos por recurrencia el conjunto $\mathrm{Term}(\mathcal{L}_a) \subset \omega^{<\omega}$ de *términos* de $\mathcal{L}_a$ como el determinado por las reglas siguientes:

a) Si v es una variable de primer orden o una constante, entonces $\{v\}$ (la sucesión de longitud 1 formada por v, que normalmente representaremos simplemente como v) es un término.

b) Si t_1 y t_2 son términos, también lo son $+^\frown t_1{}^\frown t_2$ y $\cdot^\frown t_1{}^\frown t_2$, y representaremos a estas sucesiones en la forma $t_1 + t_2$, $t_1 \cdot t_2$, respectivamente.

c) Si x es una variable de segundo orden y t es un término, entonces $e^\frown x^\frown t$ es un término, que representaremos por $x(t)$.

Más precisamente, definimos T_0 como el conjunto de sucesiones de longitud 1 que cumplen a) y, supuesto definido T_n, definimos T_{n+1} como la unión de T_n y el conjunto de las sucesiones que pueden obtenerse a partir de T_n aplicando las reglas b) y c). Así $\mathrm{Term}(\mathcal{L}_a)$ se define como la unión de los conjuntos T_n.

Las *fórmulas atómicas* de $\mathcal{L}_a$ son las sucesiones de la forma $=\frown t_1 \frown t_2$, donde $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}(\mathcal{L}_a)$, y las representaremos en la forma $t_1 = t_2$.

El conjunto $\mathrm{Form}(\mathcal{L}_a) \subset \omega^{<\omega}$ de *fórmulas* de $\mathcal{L}_a$ es el determinado por las reglas siguientes:

a) Las fórmulas atómicas son fórmulas de $\mathcal{L}_a$.

b) Si α y β son fórmulas de $\mathcal{L}_a$, entonces $\neg\frown\alpha$ y $\rightarrow\frown\alpha\frown\beta$ son fórmulas de $\mathcal{L}_a$, que representaremos por $\neg\alpha$ y $\alpha \rightarrow \beta$, respectivamente.

c) Si α es una fórmula de $\mathcal{L}_a$ y x es una variable, entonces $\bigwedge\frown x\frown\alpha$ es una fórmula de $\mathcal{L}_a$ que representaremos por $\bigwedge x\, \alpha$

El conjunto $\mathrm{Form}_a(\mathcal{L}_a)$ de las *fórmulas aritméticas* de $\mathcal{L}_a$ es el conjunto de fórmulas construidas según las tres reglas anteriores pero restringiendo la regla c) a variables de primer orden, es decir, las fórmulas aritméticas son las fórmulas de $\mathcal{L}_a$ que no tienen variables ligadas de segundo orden.

Cuando haya riesgo de confundir una fórmula metamatemática con el nombre de una fórmula de $\mathcal{L}_a$ usaremos ángulos de Quine para representar a éstas últimas (por ejemplo, podemos escribir $\ulcorner 2+2=4 \urcorner \in \mathrm{Form}_a(\mathcal{L}_a)$ o $\ulcorner 2+2 \urcorner \neq \ulcorner 4 \urcorner$, y ambas afirmaciones son ciertas).

Usaremos los convenios lógicos usuales. Por ejemplo, $\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner = \ulcorner \neg\alpha \rightarrow \beta \urcorner$, $\ulcorner \bigvee x\, \alpha \urcorner = \ulcorner \neg \bigwedge x \neg \alpha \urcorner$, etc.

Una *valoración* en $\mathcal{L}_a$ es una aplicación s que a cada variable de primer orden de $\mathcal{L}_a$ le asigna un elemento de ω, y a cada variable de segundo orden de $\mathcal{L}_a$ le asigna un elemento de $\mathcal{N}$.

Si s es una valoración de $\mathcal{L}_a$, definimos $\bar{s} : \mathrm{Term}(\mathcal{L}_a) \longrightarrow \omega$ como la única aplicación que cumple:

a) Si n es una variable de primer orden, $\bar{s}(n) = s(n)$.

b) Si $c = 5^n$ es una constante, entonces $\bar{s}(c) = n - 1$ (es decir, $\bar{s}(7) = 7$, donde el primer 7 es la constante 7 ($= 5^8$) y el segundo 7 es el número natural 7.

c) $\bar{s}((t_1 + t_2)) = \bar{s}(t_1) + \bar{s}(t_2)$, $\bar{s}((t_1 \cdot t_2)) = \bar{s}(t_1) \cdot \bar{s}(t_2)$, $\bar{s}((t_1^{t_2})) = \bar{s}(t_1)^{\bar{s}(t_2)}$.

d) $\bar{s}(x(t)) = s(x)(\bar{s}(t))$.

A su vez, definimos $\bar{s} : \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a) \longrightarrow \{0, 1\}$ como la única aplicación que cumple las reglas siguientes, donde convenimos en escribir $\vDash \alpha[s]$ en lugar de $\bar{s}(\alpha) = 1$, para cada $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a)$:

a) $\vDash (t_1 = t_2)[s] \leftrightarrow \bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$.

b) $\vDash \neg\alpha[s] \leftrightarrow \neg \vDash \alpha[s]$.

c) $\vDash (\alpha \rightarrow \beta)[s] \leftrightarrow \neg \vDash \alpha[s] \vee \vDash \beta[s]$.

d) $\vDash \bigwedge n\alpha[s] \leftrightarrow \bigwedge m \in \omega \vDash \alpha[s_n^m]$, donde s_n^m es la valoración que coincide con s salvo que $s_m(n) = m$.

e) $\vDash \bigwedge x\, \alpha[s] \leftrightarrow \bigwedge y \in \mathcal{N} \vDash \alpha[s_x^y]$.

Notemos que, como en las dos últimas propiedades se cambia de valoración, en realidad hemos de definir, por recurrencia sobre la longitud de las fórmulas, una aplicación

$$\phi : \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a) \longrightarrow 2^{\mathrm{Val}(\mathcal{L}_a)},$$

donde $\mathrm{Val}(\mathcal{L}_a)$ es el conjunto de las valoraciones en $\mathcal{L}_a$. Una vez definida ϕ, definimos $\bar{s}(\alpha) = \phi(\alpha)(\bar{s})$.

De este modo, "$\vDash \alpha[s]$" es una fórmula metamatemática con dos variables libres.

Se define del modo habitual lo que son variables libres y ligadas en una fórmula, y un argumento estándar demuestra que $\vDash \alpha[s]$ sólo depende del valor que toma s sobre las variables libres en α. Por ello, si α tiene sus variables libres entre $\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_r, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s$, si $n_1, \ldots, n_r \in \omega$ y $x_1, \ldots, x_s \in \mathcal{N}$, escribiremos

$$\vDash \alpha[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s]$$

para referirnos a $\vDash \alpha[s]$, donde s es cualquier valoración que cumpla $s(\bar{n}_i) = n_i$, $s(\bar{x}_i) = x_i$. Cuando no haya posibilidad de confusión, no distinguiremos entre variables y los objetos con los que queremos valorarlas.

Los conjuntos proyectivos y la aritmética Nuestro primer objetivo es demostrar el teorema siguiente:[4]

Teorema 5.36 *Un conjunto $A \subset \omega^r \times \mathcal{N}^s$ es aritmético en $a \in \mathcal{N}$ si y sólo si existe una fórmula aritmética α tal que*

$$A = \{(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^r \times \mathcal{N}^s \mid \vDash \alpha[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\}.$$

Empezamos demostrando:

> *Sea $t(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a)$ un término cuyas variables libres figuren entre las señaladas y sea n una variable que no figure entre ellas. Entonces el conjunto*
>
> $$\{(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash n = t[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\}$$
>
> *es aritmético.*

[4]Incidentalmente, esto demuestra que, aunque nuestra definición de "conjunto aritmético" no es la estándar, basada en la teoría de la recursión, es equivalente a la usual, pues ésta admite la misma caracterización.

Lo demostramos por inducción sobre la longitud de t. Si t tiene longitud 1, ha de ser una variable de primer orden o una constante. Según el caso, el conjunto en cuestión es de la forma

$$\{(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash n = n_i\}$$

o bien

$$\{(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash n = m\},$$

para un cierto $m \in \omega$, y claro que ambos conjuntos son aritméticos.

Si $t = t_1 + t_2$, por hipótesis de inducción, los conjuntos

$$\{(n, m_1, m_2, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash m_1 = t[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\}$$

$$\{(n, m_1, m_2, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash m_2 = t[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\}$$

son aritméticos en a. (Aquí usamos la propiedad a) del teorema 5.7.) Es fácil ver que también lo es el conjunto

$$\{(n, m_1, m_2, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid m = m_1 + m_2\},$$

luego también lo es la intersección de los tres, pero dicha intersección es el conjunto correspondiente a $t_1 + t_2$. Similarmente se razona el caso de $t_1 \cdot t_2$. Para el caso de $x_i(t)$ o $a(t)$ usamos que

$$\{(n, m, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash m = t[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\}$$

es aritmético en a por hipótesis de inducción y que también lo son los conjuntos

$$\{(n, m, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash n = x_i(m)\}$$

y

$$\{(n, m, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash n = a(m)\}.$$

La intersección del primero y el que corresponda de los dos últimos es el conjunto correspondiente a $x_i(t)$ o $a(t)$. ■

Ahora demostramos que todos los conjuntos de la forma indicada en el teorema 5.36 son aritméticos. Razonamos por inducción sobre la complejidad de la fórmula α (el número de pasos necesarios para construirla).

Si $\alpha \equiv t_1 = t_2$, tomamos una variable n que esté libre en α y usamos que los conjuntos

$$\{(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash n = t_1[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\}$$

$$\{(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^{r+1} \times \mathcal{N}^s \mid \vDash n = t_2[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\}$$

son aritméticos en a. También lo es su intersección C, y el conjunto del enunciado es $\bigvee n\, C$, luego también es aritmético.

Si α se obtiene de subfórmulas por conectores lógicos, basta aplicar la hipótesis de inducción a los conjuntos definidos por las subfórmulas y usar que la clase de los conjuntos aritméticos es cerrada para complementos, uniones, intersecciones, etc. Esto incluye los cuantificadores respecto de variables de primer orden, mientras que los de segundo orden no pueden aparecer en fórmulas aritméticas. ■

Para demostrar que todo conjunto aritmético puede expresarse en la forma indicada en 5.36 basta probarlo para conjuntos aritméticos básicos, ya que el caso general se obtiene sin más que añadir cuantificadores de primer orden a las fórmulas que definen a éstos.

Consideramos la relación $E \subset \omega \times \omega$ y la función colapsante $\pi : \omega \longrightarrow V_\omega$ definidas en la demostración del teorema 5.4.

Observemos que los axiomas de Peano pueden expresarse mediante fórmulas de primer orden de $\mathcal{L}_a$, y son verdaderos en la interpretación que hemos definido. El teorema [LTC 6.9] afirma que toda relación recursiva es expresable en todo sistema aritmético. Para el caso de la relación E (que es claramente recursiva) esto significa que existe una fórmula de primer orden $\epsilon(m,n)$ tal que, si $m, n \in \omega$ cumplen $E(m,n)$, entonces puede demostrarse a partir de los axiomas de Peano $\epsilon(m,n)$ (donde ahora m y n son las constantes de $\mathcal{L}_a$ asociadas a m y n) y esto implica a su vez que $\vDash \epsilon[m,n]$ (donde ahora m y n vuelven a ser los números naturales) y si $\neg E(m,n)$, se puede demostrar $\neg\epsilon(m,n)$, y esto a su vez implica que $\vDash \epsilon[m,n]$. En definitiva, tenemos que

$$\pi(m) \in \pi(n) \leftrightarrow E(m,n) \leftrightarrow \vDash \epsilon[m,n].$$

Si representamos más convenientemente la fórmula $\epsilon(m,n)$ por $m \in n$, la equivalencia anterior puede reformularse como que, si $x, y \in V_\omega$,

$$x \in y \leftrightarrow \vDash \pi^{-1}(x) \in \pi^{-1}(y).$$

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de la teoría de conjuntos. Podemos suponer que los signos de $\mathcal{L}$ son los mismos que los correspondientes en $\mathcal{L}_a$. En particular, suponemos que las variables de $\mathcal{L}$ son las variables de primer orden de $\mathcal{L}_a$. Así, a cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}$ podemos asociarle la fórmula de primer orden $\bar{\phi}$ de $\mathcal{L}_a$ (con las mismas variables libres) que resulta de sustituir cada subfórmula de tipo $m \in n$ por $\epsilon(m,n)$. Una simple inducción muestra entonces que la equivalencia anterior se generaliza a

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\omega (V_\omega \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n] \leftrightarrow \vDash \bar{\phi}[\pi^{-1}(x_1), \ldots, \pi^{-1}(x_n)]).$$

Notemos que ahora tenemos dos representaciones distintas de cada número natural. Por ejemplo, es claro que $m\,E\,0$ no se cumple nunca, lo que se traduce en que el número natural 0, "visto como conjunto" es $\varnothing$ o, equivalentemente, 0 es también 0 como conjunto. Similarmente, como $m\,E\,1$ se cumple si y sólo si $m = 0$, tenemos que el número natural 1 codifica el conjunto $\{\varnothing\} = 1$. En cambio, como 3 en binario es 11, vemos que $m\,E\,3$ se cumple si y sólo si $m = 0, 1$, por lo que 3 como conjunto es $\{0, 1\} = 2$. Así, al ver a 3 como un conjunto, resulta ser el número natural 2. Más precisamente: $\pi^{-1}(2) = 3$. En general, hemos de distinguir entre el número natural n y el número natural $\pi^{-1}(n)$ que se corresponde con n cuando lo vemos como un conjunto.

Veamos ahora que existe una fórmula de primer orden $\nu(\bar{n}, n)$ (donde $\bar{n}$ y n son dos variables de primer orden) tal que

$$\vDash \nu[\bar{n}, n] \leftrightarrow \bar{n} = \pi^{-1}(n).$$

En efecto, basta definir

$$\nu(\bar{n}, n) \equiv \bar{n} \in \omega \land \bigvee f(f : \bar{n} + 1 \longrightarrow V \land f(0) = 0 \land f(\bar{n}) = n$$

$$\land \bigwedge i \in \bar{n}(f(i+1) = f(i) \oplus 1)),$$

donde usamos $\oplus$ para indicar el funtor suma de $\mathcal{L}_a$, mientras que $+$ representa aquí la suma definida en ZFC-AI. Notemos que, como $\pi^{-1}(0) = 0$ y $\pi^{-1}(1) = 1$, no necesitamos especificar la interpretación del 0 y el 1 que aparecen en la fórmula.

Consideremos ahora el lenguaje $\mathcal{L}'$ que tiene un relator monádico adicional R que se interpreta como la pertenencia a un $a \in \mathcal{N}$ prefijado. Definimos

$$\alpha(n, a) \equiv \bigvee u\bar{u}v\bar{v}(\nu(\bar{u}, u) \land \nu(\bar{v}, v) \land n = (\bar{u}, \bar{v}) \land v = a(u)).$$

Así, si $x \in V_\omega$, tenemos que

$$(V_\omega, a) \vDash R[x] \leftrightarrow x \in a \leftrightarrow \vDash \alpha[\pi^{-1}(x), a].$$

Por lo tanto, si extendemos la definición de la correspondencia $\phi \mapsto \bar{\phi}$ a fórmulas de $\mathcal{L}'$ estableciendo que a cada fórmula $\phi(n_1, \ldots, n_r)$ le asignamos la fórmula aritmética $\bar{\phi}(n_1, \ldots, n_r, a)$ sustituyendo cada subfórmula $m \in n$ por $\epsilon(m, n)$ y cada subfórmula $R(n)$ por $\alpha(n, a)$, una simple inducción sobre la complejidad de ϕ demuestra que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\omega((V_\omega, a) \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n] \leftrightarrow \vDash \bar{\phi}[\pi^{-1}(x_1), \ldots, \pi^{-1}(x_n), a]).$$

Veamos ahora que existe una fórmula aritmética $\rho(m, n, x)$ de manera que, si $m, n \in \omega$ y $x \in \mathcal{N}$, se cumple

$$\vDash \rho[m, n, x] \leftrightarrow m = \pi^{-1}(x|_n).$$

En efecto, basta definir

$$\rho(m, n, x) \equiv \bigvee \bar{n}(\nu(\bar{n}, n) \land \bigwedge u(u \in m \leftrightarrow$$

$$\bigvee v\bar{v}w\bar{w}(\nu(\bar{v}, v) \land \nu(\bar{w}, w) \land u = (\bar{v}, \bar{w}) \land \bar{v} \in \bar{n} \land w = x(v)))).$$

Sea ahora $\psi(n_1, \ldots, n_r, t_{11}, \ldots, t_{1r}, \ldots, t_{s1}, \ldots, t_{sr})$ una fórmula de $\mathcal{L}'$. Por simplificar la notación supondremos $r = 3$ y $s = 2$, si bien todo lo que vamos a ver es válido en general.

Definimos

$$\psi'(n_1, n_2, n_3, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{21}, t_{22}, t_{23}) \equiv \bigvee n_1' n_2' n_3' t_{11}' t_{12}' t_{13}' t_{21}' t_{22}' t_{23}'$$

$$(n_1' = n_1 \land n_2' = n_2 \land n_3' = n_3 \land t_{11}' = t_{11} \land t_{12}' = t_{12} \land t_{13}' = t_{13}$$

$$\land\, t_{21}' = t_{21} \land t_{22}' = t_{22} \land t_{23}' = t_{23} \land \psi(n_1', n_2', n_3', t_{11}', t_{12}', t_{13}', t_{21}', t_{22}', t_{23}')).$$

Claramente, si $n_1, n_2, n_3 \in \omega$ y $x_1, x_2 \in \mathcal{N}$ se cumple

$$(V_\omega, a) \vDash \psi[n_1, n_2, n_3, x_1|_{n_1}, x_1|_{n_2}, x_1|_{n_3}, x_2|_{n_1}, x_2|_{n_2}, x_2|_{n_3}]$$

si y sólo si

$$(V_\omega, a) \vDash \psi'[n_1, n_2, n_3, x_1|_{n_1}, x_1|_{n_2}, x_1|_{n_3}, x_2|_{n_1}, x_2|_{n_2}, x_2|_{n_3}]$$

si y sólo si

$$\vDash \bar{\psi}'[\pi^{-1}(n_1), \pi^{-1}(n_2), \pi^{-1}(n_3), \pi^{-1}(x_1|_{n_1}), \pi^{-1}(x_1|_{n_2}), \pi^{-1}(x_1|_{n_3}),$$

$$\pi^{-1}(x_2|_{n_1}), \pi^{-1}(x_2|_{n_2}), \pi^{-1}(x_2|_{n_3}), a].$$

Esto a su vez equivale a que existen $n_1', n_2', n_3', t_{11}', t_{12}', t_{13}', t_{21}', t_{22}', t_{23}' \in \omega$ tales que

$$n_1' = \pi^{-1}(n_1) \land n_2' = \pi^{-1}(n_2) \land n_3' = \pi^{-1}(n_3) \land$$

$$t_{11}' = \pi^{-1}(x_1|_{n_1}) \land t_{12}' = \pi^{-1}(x_1|_{n_2}) \land t_{13}' = \pi^{-1}(x_1|_{n_3})$$

$$\land\, t_{21}' = \pi^{-1}(x_2|_{n_1}) \land t_{22}' = \pi^{-1}(x_2|_{n_2}) \land t_{23}' = \pi^{-1}(x_2|_{n_3})$$

$$\land \vDash \psi[n_1', n_2', n_3', t_{11}', t_{12}', t_{13}', t_{21}', t_{22}', t_{23}', a].$$

A su vez, esto equivale a $\vDash \hat{\psi}[n_1, n_2, n_3, x_1, x_2, a]$, donde $\hat{\psi}$ es la fórmula aritmética que resulta de sustituir en $\bar{\psi}'$ cada subfórmula $n_i = n_i'$ por $\nu(n_i', n_i)$ y cada subfórmula $t_{ij} = t_{ij}'$ por $\rho(t_{ij}', n_j, x_i)$.

De este modo, si $A \subset \omega^3 \times \mathcal{N}^2$ es aritmético básico en a, se cumple que

$$(n_1, n_2, n_3, x_1, x_2) \in A \leftrightarrow R(n_1, n_2, n_3, x_1|_{n_1}, x_1|_{n_2}, x_1|_{n_3}, x_2|_{n_1}, x_2|_{n_2}, x_2|_{n_3})$$

para cierto conjunto $R \subset V_\omega$ aritmético en a, luego existe una fórmula ψ tal que

$$(n_1, n_2, n_3, x_1, x_2) \in A \leftrightarrow$$

$$(V_\omega, a) \vDash \psi[n_1, n_2, n_3, x_1|_{n_1}, x_1|_{n_2}, x_1|_{n_3}, x_2|_{n_1}, x_2|_{n_2}, x_2|_{n_3}]$$

$$\leftrightarrow \vDash \hat{\psi}[n_1, n_2, n_3, x_1, x_2, a],$$

luego A es de la forma requerida por el teorema 5.36. ■

Ahora es fácil probar (teniendo en cuenta el teorema 5.13):

Teorema 5.37 *Un conjunto $A \subset \omega^r \times \mathcal{N}^s$ es proyectivo si y sólo si existe un $a \in \mathcal{N}$ y una fórmula $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a)$ tal que*

$$A = \{(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \omega^r \times \mathcal{N}^s \mid \vDash \alpha[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, a]\}.$$

Otra consecuencia interesante de 5.36 es la siguiente:

Teorema 5.38 *Dado $a \in \mathcal{N}$, un conjunto $A \subset \omega^r \times \mathcal{N}^s$ es $\Sigma^1_n(a)$ (resp. $\Pi^1_n(a)$) si y sólo si existe un conjunto Σ^1_n (resp. Π^1_n) $B \subset \omega^r \times \mathcal{N}^{s+1}$ tal que*

$$A = \{x \in \omega^r \times \mathcal{N}^s \mid (x, a) \in B\}.$$

Demostración: El teorema 5.36 implica inmediatamente que el resultado es cierto para conjuntos aritméticos A y B, y de aquí se sigue inmediatamente por inducción para conjuntos de cualquier clase de Kleene. ■

Los conjuntos proyectivos como conjuntos constructibles Recordemos ([PC, sección 6.4]) que $L(\mathcal{N})$ es la menor clase propia que contiene a $\mathcal{N}$ y satisface los axiomas de ZF (aunque no necesariamente AE).

Teorema 5.39 *La clase de los subconjuntos proyectivos de $\mathcal{N}$ es $L_1(\mathcal{N}) \cap \mathcal{P}\mathcal{N}$.*

Demostración: Sabemos que $L_1(\mathcal{N}) = \mathcal{D}L_0(\mathcal{N})$ y

$$L_0(\mathcal{N}) = \{\mathcal{N}\} \cup \mathcal{N} \cup (\omega \times \omega) \cup [\omega]^2 \cup [\omega]^1 \cup \omega.$$

Al considerar subconjuntos definibles de $L_0(\mathcal{N})$ estamos tomando a $L_0(\mathcal{N})$ como modelo transitivo del lenguaje de la teoría de conjuntos, pero no es un modelo de ZF (ni mucho menos), por lo que no podemos razonar como si los teoremas de ZF fueran verdaderos en $L_0(\mathcal{N})$. En particular, muchos conjuntos cuya existencia se puede probar a partir de los axiomas de ZF no tienen por qué existir en $L_0(\mathcal{N})$. Por otra parte, algunos conceptos admiten definiciones mucho más sencillas. Por ejemplo, podemos considerar $x = \mathcal{N}$ como abreviatura de la fórmula $\bigwedge y\ x \notin y$, en el sentido de que, evidentemente

$$L_0(\mathcal{N}) \vDash (\bigwedge y\ x \notin y)[s] \leftrightarrow s(x) = \mathcal{N}.$$

Similarmente, podemos definir:

- $x \in \mathcal{N} \equiv \bigvee y(y = \mathcal{N} \land x \in y)$,
- $x \in \omega \equiv \bigvee uvw(x \in u \land u \in v \land v \in w \land w \in \mathcal{N})$
- $m = x(n) \equiv \bigvee uvw(u \in x \land \bigwedge k(k \in u \leftrightarrow k = v \lor k = w) \land \bigwedge k(k \in v \leftrightarrow k = n) \land \bigwedge k(k \in w \leftrightarrow k = m \lor k = n))$
- $x = 0 \equiv \bigwedge y\ y \notin x$
- $m = u + 1 \equiv \bigwedge k(k \in m \leftrightarrow k \in u \lor k = u)$

- $m = u+v \equiv \bigvee x(x \in \mathcal{N} \wedge x(0) = u \wedge \bigwedge r(x(r+1) = x(r)+1) \wedge x(v) = m))$
- $m = u \cdot v \equiv \bigvee x(x \in \mathcal{N} \wedge x(0) = 0 \wedge \bigwedge r(x(r+1) = x(r)+u) \wedge x(v) = m))$

Podemos suponer que el conjunto de las variables de $\mathcal{L}$ es el mismo que el conjunto de las variables de $\mathcal{L}_a$ (incluyendo las de primer y segundo orden). Diremos entonces que una variable de $\mathcal{L}$ es de primer o segundo orden si es de dicho tipo como variable de $\mathcal{L}_a$. Así, a cada término t de $\mathcal{L}_a$ le podemos asociar una fórmula ϕ_t^n, cuyas variables libres son las mismas que las de t más una nueva variable de primer orden n (que no esté en t), de modo que, para toda valoración s de $\mathcal{L}_a$,

$$\vDash n = t[s] \leftrightarrow L_0(\mathcal{N}) \vDash \phi_t^n[s].$$

En efecto:

a) Si t es una variable (de primer orden) m, definimos $\phi_t^n \equiv n = m$.

b) Si t es una constante, definimos

$$\phi_0^n \equiv n = 0, \quad \phi_1^n \equiv n = 0+1, \quad \phi_2^n \equiv n = 0+1+1, \quad \text{etc.}$$

c) Si $t = t_1 + t_2$, definimos $\phi_t^n \equiv \bigvee uv \in \omega(\phi_{t_1}^u \wedge \phi_{t_2}^v \wedge n = u + v)$.

d) Si $t = t_1 \cdot t_2$, definimos $\phi_t^n \equiv \bigvee uv \in \omega(\phi_{t_1}^u \wedge \phi_{t_2}^v \wedge n = u \cdot v)$.

e) Si $t = x(t_0)$, definimos $\phi_t^n \equiv \bigvee m \in \omega(\phi_{t_0}^m \wedge n = x(m))$.

A su vez para cada fórmula $\phi(n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a)$, definimos una fórmula $\bar{\phi}$ con las mismas variables libres de modo que, si $n_1, \ldots, n_r \in \omega$ y $x_1, \ldots, x_s \in \mathcal{N}$, se cumple

$$\vDash \phi[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s] \leftrightarrow L_0(\mathcal{N}) \vDash \bar{\phi}[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s].$$

En efecto:

a) Si $\phi \equiv t_1 = t_2$ definimos $\bar{\phi} \equiv \bigvee n(\phi_{t_1}^n \wedge \phi_{t_2}^n)$.

b) Si $\phi \equiv \neg\psi$ entonces $\bar{\phi} \equiv \neg\bar{\psi}$, y análogamente con las fórmulas construidas a partir de los demás conectores lógicos.

c) Si $\phi \equiv \bigwedge n\psi$, entonces $\bar{\phi} \equiv \bigwedge n \in \omega\, \bar{\psi}$ y análogamente con el particularizador.

d) Si $\phi \equiv \bigwedge x\, \psi$, entonces $\bar{\phi} \equiv \bigwedge x \in \mathcal{N}\ \bar{\psi}$ y análogamente con el particularizador.

De este modo, si $A \subset \mathcal{N}$ es un conjunto proyectivo, por el teorema 5.37 existe un $a \in \mathcal{N}$ y una fórmula $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_a)$ de modo que

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid \vDash \alpha[x, a]\} = \{x \in \mathcal{N} \mid L_0(\mathcal{N}) \vDash \bar{\alpha}[x, a]\}$$

$$= \{x \in L_0(\mathcal{N}) \mid L_0(\mathcal{N}) \vDash (x \in \mathcal{N} \wedge \bar{\alpha})[x, a]\} \in \mathcal{D}L_0(\mathcal{N}) = L_1(\mathcal{N}).$$

Veamos ahora el recíproco. Un elemento de $L_1(\mathcal{N}) \cap \mathcal{PN}$ es de la forma

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid L_0(\mathcal{N}) \vDash \alpha[x, a_1, \ldots, a_n]\},$$

para ciertos $a_i \in L_0(\mathcal{N})$. Ahora bien, hemos visto que si $a_i \in \omega$, entonces a_i puede definirse en $L_0(\mathcal{N})$ por la formula ϕ_{a_i}, luego, si x_i es la variable interpretada por a_i, podemos cambiar α por $\bigvee x_i(\phi_{a_i} \wedge \alpha)$ y obtenemos una fórmula con la misma interpretación pero sin el parámetro a_i. Lo mismo sucede si $a_i = \mathcal{N}$, y es fácil ver que lo mismo puede hacerse si $a_i \in [\omega]^1 \cup [\omega]^2 \cup (\omega \times \omega)$. Así pues, podemos suponer que todos los parámetros a_i están en $\mathcal{N}$. Más aún, si definimos $a(k \cdot n + i) = a_{i+1}(k)$ y

$$\alpha'(x, a) \equiv \bigvee a_1 \cdots a_n \in \mathcal{N}(\bigwedge k \in \omega$$

$$(a_1(k) = a(n \cdot k) \wedge a_2(k) = a(n \cdot k + 1) \wedge \cdots \wedge a_n(k) = a(n \cdot k + n - 1) \wedge \alpha),$$

entonces

$$L_0(\mathcal{N}) \vDash \alpha[x, a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow L_0(\mathcal{N}) \vDash \alpha'[x, a].$$

En definitiva, podemos suponer que

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid L_0(\mathcal{N}) \vDash \alpha[x, a]\},$$

para cierto $a \in \mathcal{N}$. Vamos a probar que existe una fórmula α' tal que

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid M \vDash \alpha'[x, a]\},$$

donde $M = V_\omega \cup \mathcal{N} \cup \{\mathcal{N}\}$. Observemos que $L_0(\mathcal{N}) \subset M$ y sólo hay que probar que es definible en este modelo, es decir, que existe una fórmula $x \in L_0(\mathcal{N})$ con x como única variable libre tal que

$$(M \vDash x \in L_0(\mathcal{N})) \leftrightarrow x \in L_0(\mathcal{N}).$$

Admitiendo esto, la fórmula α' es simplemente la que resulta de sustituir cada cuantificador $\bigwedge x$ por $\bigwedge x \in L_0(\mathcal{N})$, e igualmente con los cuantificadores existenciales. La definición de $L_0(\mathcal{N})$ es:

$$x \in L_0(\mathcal{N}) \equiv \bigvee y(\bigwedge z(z \notin y) \wedge (x = y \vee x \in y \vee$$

$$\bigvee u(u \in y \wedge x \in u \vee \bigvee v(v \in u \wedge x \in v \vee \bigvee w(w \in v \wedge x \in w))))).$$

(Notemos que la fórmula fuerza a que y se interprete como $\mathcal{N}$, con lo que u se interpreta como un elemento de $\mathcal{N}$, y v como un elemento de $\omega \times \omega$, y w como un elemento de $[\omega]^1 \cup [\omega]^2$.)

En definitiva, todo elemento de $L_1(\mathcal{N}) \cap \mathcal{PN}$ es de la forma

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid M \vDash \alpha[x, a]\},$$

para cierto $a \in \mathcal{N}$.

Consideremos nuevamente la función $\pi^{-1} : V_\omega \longrightarrow \omega$ y definamos ahora otra biyección $i : M \longrightarrow \omega \cup \mathcal{N}$ del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \pi^{-1}(x) + 1 & \text{si } x \in V_\omega, \\ 0 & \text{si } x = \mathcal{N}, \\ x & \text{si } x \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Consideremos también la fórmula aritmética $\epsilon(m,n)$ que representa la relación E y modifiquémosla como sigue:

$$\epsilon'(m,n) \equiv \bigvee m'n'(m = m' + 1 \land n = n' + 1 \land \epsilon(m',n')).$$

De este modo, es claro que si $x, y \in V_\omega \cup \{\mathcal{N}\}$, se cumple

$$x \in y \leftrightarrow \vDash \epsilon'(f(x), f(y)),$$

y así, a cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}$ podemos asociarle una fórmula aritmética tal que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\omega (V_\omega \vDash \phi[x_1,\ldots,x_n] \leftrightarrow \vDash \bar{\phi}[f(x_1),\ldots,f(x_n)]).$$

Por otra parte, si definimos

$$\epsilon''(n,x) \equiv \bigvee u\bar{u}v\bar{v}(\nu'(\bar{u},u) \land \nu'(\bar{v},v) \land n = (\bar{u},\bar{v}) \land x(u) = v),$$

(donde ν' es la fórmula análoga a ν pero definida con ϵ' en lugar de ϵ) tenemos que para todo $s \in V_\omega$ y todo $x \in \mathcal{N}$,

$$s \in x \leftrightarrow \vDash \epsilon''[f(s), x].$$

Veamos finalmente que a cada fórmula $\phi(n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s)$ de $\mathcal{L}$ le podemos asociar otra fórmula $\hat{\phi}$ con variables libres de primer orden $n_1,\ldots,n_r$ y de segundo orden $x_1,\ldots,x_s$ de modo que si $n_1,\ldots,n_r \in V_\omega \cup \{\mathcal{N}\}$ y $x_1,\ldots,x_s \in \mathcal{N}$

$$M \vDash \phi[n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s] \leftrightarrow \vDash \hat{\phi}[f(n_1),\ldots,f(n_r),x_1,\ldots,x_s].$$

En efecto:

- Si $\phi \equiv n_i \in n_j$, entonces $\hat{\phi} \equiv \epsilon'(n_i,n_j)$,
- Si $\phi \equiv n_i \in x_j$, entonces $\hat{\phi} \equiv \epsilon''(n_i,x_j)$,
- Si $\phi \equiv x_i \in x_j$, entonces $\hat{\phi} \equiv 0 \neq 0$,
- Si $\phi \equiv x_i \in n_j$, entonces $\hat{\phi} \equiv n_j = 0$,
- Si $\phi \equiv n_i = n_j$, entonces $\hat{\phi} \equiv n_i = n_j$,
- Si $\phi \equiv n_i = x_j$ o $\phi \equiv x_j = n_i$, entonces $\hat{\phi} \equiv 0 \neq 0$,
- Si $\phi \equiv x_i = x_j$, entonces $\hat{\phi} \equiv \bigwedge n(x_i(n) = x_j(n))$,

- Si $\phi \equiv \neg\psi$, entonces $\hat{\phi} \equiv \neg\hat{\psi}$, e igualmente con los demás conectores lógicos.
- Si $\phi \equiv \bigwedge u\ \psi(u, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$, consideramos las dos fórmulas

  $$\hat{\psi}_1(n, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s) \qquad \text{y} \qquad \hat{\psi}_2(x, n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s)$$

  resultantes de considerar a u como variable de primer orden o de segundo orden. Definimos $\hat{\phi} \equiv \bigwedge n\ \hat{\psi}_1 \wedge \bigwedge x\ \hat{\psi}_2$. Similarmente con el cuantificador existencial.

Por consiguiente, todo elemento de $L_1(\mathcal{N}) \cap \mathcal{PN}$ es de la forma

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid M \vDash \alpha[x, a]\} = \{x \in \mathcal{N} \mid \vDash \hat{\alpha}[x, a]\},$$

luego es proyectivo. ■

Así pues, los conjuntos proyectivos pueden verse como el primer paso de una jerarquía transfinita $L_\alpha(\mathcal{N}) \cap \mathcal{PN}$, que en total da lugar a la familia de conjuntos $(\mathcal{PN})^{L(\mathcal{N})}$.

Un ejemplo de conjunto Δ^1_1 no aritmético Para terminar demostraremos el resultado siguiente, en el que identificamos las fórmulas de $\mathcal{L}_a$, que en principio son sucesiones de $\omega^{<\omega}$, con números naturales a través de la biyección canónica.

Teorema 5.40 *El conjunto V de las sentencias aritméticas de $\mathcal{L}_a$ (fórmulas aritméticas sin variables libres) que son verdaderas en su interpretación natural es un subconjunto Δ^1_1 de ω no aritmético.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\mathrm{Form}_1(\mathcal{L}_a)$ al conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}_a$ de primer orden, es decir, fórmulas sin variables de segundo orden. Definimos las fórmulas

$$Tn \equiv \bigvee i \in \omega\, (n_0 = 2^{i+1} \vee n_0 = 5^{i+1} \vee n_0 = 7 \vee n_0 = 7^2).$$

$$Fn \equiv n_0 = 11 \vee n_0 = 11^2 \vee n_0 = 11^3 \vee n_0 = 11^4.$$

Así si n es un término o una fórmula de primer orden de $\mathcal{L}_a$, entonces Tn equivale a que sea concretamente un término y Fn a que sea una fórmula. Consideremos la fórmula

$$\begin{gathered}
\phi(\alpha, m) \equiv \bigvee k \in \omega(k = \ell(m) + 1 \wedge \bigwedge i \leq k \\
(\ell(m_i) = 1 \wedge \bigvee j \in \omega\, ((m_i)_0 = 2^{j+1} \vee (m_i)_0 = 5^{j+1})) \vee \\
\bigvee u \in \omega \bigvee vw < i(\ell(u) = 1 \wedge (u_0 = 7 \vee u_0 = 7^2) \\
\wedge Tm_v \wedge Tm_w \wedge m_i = u^\frown m_v{}^\frown m_w) \vee \\
\bigvee u \in \omega \bigvee vw < i(\ell(u) = 1 \wedge u_0 = 11^4 \wedge Tm_v \wedge Tm_w \wedge m_i = u^\frown m_v{}^\frown m_w) \vee \\
\bigvee u \in \omega \bigvee vw < i(\ell(u) = 1 \wedge Fm_v \wedge Fm_w \wedge \\
((u_0 = 11 \wedge m_i = u^\frown m_v) \vee (u_0 = 11^2 \wedge m_i = u^\frown m_v{}^\frown m_w) \vee \\
(u_0 = 11^3 \wedge \bigvee pj \in \omega(\ell(p) = 1 \wedge p_0 = 2^{j+1} \wedge m_i = u^\frown p^\frown m_v)))) \\
\wedge \alpha = m_k).
\end{gathered}$$

Es claro que

$$t \in \mathrm{Term}_1(\mathcal{L}_a) \leftrightarrow Tt \land \bigvee m \in \omega\ \phi(t,m),$$

$$\alpha \in \mathrm{Form}_1(\mathcal{L}_a) \leftrightarrow F\alpha \land \bigvee m \in \omega\, \phi(\alpha,m).$$

(La fórmula $\phi(\alpha,m)$ afirma que m codifica a una sucesión de números naturales cada uno de los cuales es una variable, o una constante, o un término construido a partir de términos anteriores de la sucesión, o una fórmula atómica construida a partir de términos anteriores de la sucesión, o una fórmula construida a partir de fórmulas anteriores de la sucesión, así como que el último elemento de la sucesión es α.)

Además, estas expresiones demuestran que $\mathrm{Term}_1(\mathcal{L}_a)$ y $\mathrm{Form}_1(\mathcal{L}_a)$ son subconjuntos aritméticos de ω. Definimos ahora

$$\beta = \tilde{\mathtt{S}}_r^s\alpha \equiv \bigvee k \in \omega(k = \ell(\alpha) = \ell(\beta) \land$$

$$\bigwedge i < k((\alpha_i \neq 2^{r+1} \land \beta_i = \alpha_i) \lor (\alpha_i = 2^{r+1} \land \beta_i = 2^{s+1}))).$$

Así β es la sucesión de signos que resulta de sustituir la variable 2^{r+1} por 2^{s+1} en α. Ahora refinamos la definición:

$$\beta = \mathtt{S}_r^s\alpha \equiv \bigvee kmm' \in \omega\ (\phi(\alpha,m) \land k = \ell(m)+1 = \ell(m')+1 \land \bigwedge i \leq k$$

$$((Tm_i \lor (m_i)_0 = 11^4 \to m'_i = \tilde{\mathtt{S}}_r^s m_i) \land$$

$$\bigwedge u \in \omega \bigwedge v < i(\ell(u) = 1 \land u_0 = 11 \land m_i = u^\frown m_v \to m'_i = u^\frown m'_v) \land$$

$$\bigwedge u \in \omega \bigwedge vw < i(\ell(u) = 1 \land u_0 = 11^2 \land m_i = u^\frown m_v{}^\frown m_w \to m'_i = u^\frown m'_v{}^\frown m'_w)$$

$$\land \bigwedge u \in \omega \bigwedge v < i \bigwedge pj \in \omega(\ell(u) = \ell(p) = 1 \land u_0 = 11^3 \land p_0 = 2^{j+1} \land$$

$$m_i = u^\frown p^\frown m_v \to ((j \neq r \land j \neq s \land m'_i = u^\frown p^\frown m'_i) \lor$$

$$(j = r \land m'_i = m_i) \lor (j = s \land \bigvee \gamma\delta t t' \in \omega(M(t) \land \ell(t') = 1 \land t'_0 = 2^t \land$$

$$\delta = \tilde{S}_s^t m_i \land \gamma = \tilde{\mathtt{S}}_r^s\delta \land m'_i = u^\frown t'^\frown\gamma))))) \land m'_k = \beta),$$

donde la fórmula $M(t)$ abrevia que t es el menor número natural mayor que r, s y que todos los $(m_i)_j$, para $j < \ell(m_i)$. De este modo β es la sustitución de la variable 2^{r+1} por la variable 2^{s+1} en α pero cuidando de que 2^{s+1} no quede ligada donde 2^{r+1} estaba libre. Ahora es claro que esta relación es aritmética.

Seguidamente definimos

$$\psi(z) \equiv z \in \mathcal{N} \land \bigwedge i \in \omega\ (z(2^{i+1}) = i \land z(5^{i+1}) = i) \land$$

$$\bigwedge utt't'' \in \omega\ (\ell(u) = 1 \land (u_0 = 7 \lor u_0 = 7^2) \land t = u^\frown t^\frown t' \land$$

$$\land\, t' \in \mathrm{Term}_1(\mathcal{L}_a) \land t'' \in \mathrm{Term}_1(\mathcal{L}_a) \to ((u_0 = 7 \to z(t) = z(t') + z(t'')) \land$$

$$(u_0 = 7^2 \to z(t) = z(t')z(t'')))) \land$$

$$\bigwedge \alpha \in \omega(\alpha \in \mathrm{Form}_1(\mathcal{L}_a) \to z(\alpha) = 0 \lor z(\alpha) = 1) \land$$

$$\bigwedge utt'\alpha \in \omega(\ell(u) = 1 \wedge u_0 = 11^4 \wedge t \in \mathrm{Term}_1(\mathcal{L}_a) \wedge t' \in \mathrm{Term}_1(\mathcal{L}_a) \wedge$$
$$\alpha = u^\frown t^\frown t' \to (z(\alpha) = 1 \leftrightarrow z(t) = z(t'))) \wedge$$
$$\bigwedge \alpha\beta u \in \omega(\ell(u) = 1 \wedge u_0 = 11 \wedge \beta \in \mathrm{Form}_1(\mathcal{L}_a) \wedge \alpha = u^\frown \beta$$
$$\to z(\alpha) = 1 \leftrightarrow z(\beta) = 0)) \wedge$$
$$\bigwedge \alpha\beta\gamma u \in \omega(\ell(u) = 1 \wedge u_0 = 11^2 \wedge \beta, \gamma \in \mathrm{Form}_1(\mathcal{L}_a) \wedge \alpha = u^\frown \beta^\frown \gamma$$
$$\to z(\alpha) = 1 \leftrightarrow (z(\beta) = 0 \vee z(\gamma) = 1))) \wedge$$
$$\bigwedge \alpha\beta upr \in \omega\ (\ell(u) = 1 \wedge u_0 = 11^3 \wedge \ell(p) = 1 \wedge p_0 = 2^r \wedge \beta \in \mathrm{Form}_1(\mathcal{L}_a)$$
$$\wedge\ \alpha = u^\frown p^\frown \beta \to (z(\alpha) = 1 \leftrightarrow \bigwedge s \in \omega \bigwedge \gamma \in \omega(\gamma = \mathsf{S}^s_r\beta \wedge z(\gamma) = 1)))$$

Así $\psi(z)$ afirma que, para cada $\alpha \in \mathrm{Form}_1(\mathcal{L}_a)$ se cumple $z(\alpha) = 1$ si y sólo si $\vDash \alpha[v]$, donde v es la valoración dada por $v(2^{i+1}) = i$.

Notemos que en la definición de $\psi(z)$ todas las intervenciones de z pueden reducirse a la forma $z(m) = n$ y, como el conjunto

$$\{(m, n, z) \in \omega^2 \times \mathcal{N} \mid z(m) = n\}$$

es aritmético (lo hemos visto en la demostración del teorema 5.8), concluimos que $\{z \in \mathcal{N} \mid \psi(z)\}$ es un conjunto aritmético. Dejamos a cargo del lector la comprobación de que el conjunto $S \subset \omega$ de las sentencias aritméticas de $\mathcal{L}_a$ también es aritmético. Así, para cada $\alpha \in S$, tenemos que

$$\alpha \in S \wedge\ \vDash \alpha \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N}\ (\psi(z) \to z(\alpha) = 1) \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N}\ (\psi(z) \wedge z(\alpha) = 1),$$

lo que prueba que el conjunto V del enunciado es Δ^1_1. Si fuera aritmético, por el teorema 5.36 existiría una fórmula aritmética $T(\alpha)$ tal que

$$\alpha \in V \leftrightarrow\ \vDash T[\alpha],$$

pero esto es imposible por el teorema de Tarski de indefinibilidad de la verdad. Veamos el argumento adaptado a este contexto:

Modificando ligeramente la definición de $\beta = \mathsf{S}^j_i\alpha$ podemos definir una fórmula $\beta = \mathsf{Sc}^j_i\alpha$ de modo que, si se cumple, $\alpha \in \mathrm{Form}_1(\mathcal{L}_a)$ y β es la fórmula que resulta de sustituir la variable 2^{i+1} en α por la constante 5^{j+1}. Como el conjunto $\{(\alpha, \beta, i, j) \in \omega^4 \mid \beta = \mathsf{Sc}^j_i\alpha\}$ es aritmético, existe una fórmula aritmética $\sigma(\alpha, \beta, i, j)$ tal que

$$\beta = \mathsf{Sc}^j_i\alpha \leftrightarrow\ \vDash \sigma[\alpha, \beta, i, j].$$

Consideremos entonces la fórmula aritmética

$$\gamma(\alpha) \equiv \bigvee \beta(\sigma(\alpha, \beta, \ulcorner 1 \urcorner, \alpha) \wedge \neg T(\beta)),$$

donde β es una variable de $\mathcal{L}_a$ distinta de $\alpha = 2$ y $\ulcorner 1 \urcorner$ representa la constante 5^{1+1} de $\mathcal{L}_a$. Así γ es una fórmula aritmética, en particular un número natural. Consideramos finalmente la sentencia aritmética

$$\psi = \gamma(\ulcorner\gamma\urcorner) = \mathsf{Sc}^\gamma_1\gamma = \bigvee \beta(\sigma(\ulcorner\gamma\urcorner, \beta, \ulcorner 1 \urcorner, \ulcorner\gamma\urcorner) \wedge \neg T(\beta)).$$

Se cumple entonces $\vDash \sigma[\gamma, \psi, 1, \gamma]$. Por consiguiente, $\vDash \psi$ es equivalente a que existe un β tal que $\vDash \sigma[\gamma, \beta, 1, \gamma]$ y $\beta \notin V$ y, como la primera condición equivale a que $\beta = \mathsf{Sc}_1^\gamma \gamma = \psi$, concluimos que

$$\vDash \psi \leftrightarrow \psi \notin V \leftrightarrow \neg \vDash \psi,$$

y tenemos una contradicción (suponiendo que V es aritmético hemos construido una sentencia aritmética que equivale a su propia falsedad). ■

Capítulo VI

Juegos infinitos

En los capítulos anteriores hemos visto que las clases proyectivas $\mathbf{\Sigma}_1^1$, $\mathbf{\Pi}_1^1$, $\mathbf{\Sigma}_2^1$ y $\mathbf{\Pi}_2^1$ (y sus análogas efectivas) comparten propiedades con las clases de la jerarquía de Borel, pero no hemos dicho nada sobre las clases siguientes. Ello se debe a que todas las propiedades que hemos estudiado resultan indecidibles sobre las clases superiores de la jerarquía proyectiva, no ya en ZF+ED, sino incluso en ZFC. El axioma de elección permite demostrar la existencia de conjuntos no medibles, sin la propiedad de Baire, etc., así como uniformizar, separar y reducir conjuntos, pero no permite concluir (ni excluir) que los conjuntos obtenidos gracias a él pertenezcan a ninguna clase de conjuntos proyectivos.

En este capítulo veremos que muchas de las propiedades que hemos estudiado se pueden reducir a un mismo esquema general puramente conjuntista, a saber, la determinación de ciertos juegos infinitos. Este punto de vista nos proporcionará, por una parte, demostraciones alternativas de algunos resultados que ya conocemos y, lo que es más importante, nos permitirá formular un axioma muy simple (el axioma de determinación proyectiva ADP) con el cual podremos extender a todas las clases proyectivas los resultados que en ZFC pueden ser demostrados únicamente para las primeras de la jerarquía de Lusin. Si estamos dispuestos a renunciar al axioma de elección, el axioma ADP puede extenderse al axioma de determinación (AD) que permite extender muchas propiedades a subconjuntos arbitrarios de cualquier espacio polaco.

6.1 Definiciones básicas

Definición 6.1 Sea X un conjunto, sea $R \subset X^{<\omega}$ un árbol en X y $A \subset [R]$ un conjunto de ramas de R. Llamaremos *juego* (de longitud ω) asociado al *árbol de reglas* R y al *conjunto de apuesta* A al par $J(R, A) = (R, A)$. Los elementos de R se llaman *posiciones legales* del juego $J(R, A)$. Las ramas de R (finitas o infinitas) se llaman *partidas* de $J(R, A)$.

Si x es una partida de $J(R, A)$, los elementos $x_0, x_2, x_4, \ldots$ se llaman *jugadas del jugador* I, mientras que los elementos $x_1, x_3, x_5, \ldots$ son las *jugadas del* *jugador* II. La partida x la *gana* el jugador I si es finita y la última jugada es del jugador I o si es infinita y $x \in A$ En caso contrario la gana el jugador II.

La idea es que podemos imaginar (aunque nuestra imaginación no forma parte de las definiciones) que cada partida se construye mediante la interacción entre dos jugadores. El jugador I realiza la primera jugada x_0, que ha de respetar las reglas del juego, es decir, que, vista como un elemento $s_1 \in X^1$, ha de cumplir que $s_1 \in R$. Seguidamente, el jugador II realiza su jugada x_1, con la condición de que $s_2 = s_1{}^\frown x_1 \in R$, y así sucesivamente. Si llega un punto en que un jugador no tiene ninguna jugada legal, éste pierde la partida. En caso contrario, la partida se prolonga hasta un elemento de $[R]$, y entonces gana I si la partida pertenece al conjunto de apuesta. Podemos interpretar esto como que I ha apostado a que es capaz de acabar la partida en A (salvo que II pierda antes), mientras que II ha apostado a que es capaz de acabarla en $[R] \setminus A$ (salvo que I pierda antes).

Una *estrategia* para el jugador I (resp. II) es una aplicación $\sigma : S \longrightarrow X$, donde $S \subset R$ es un árbol tal que:

a) Si $s \in S$ tiene longitud impar (resp. par), entonces $s^\frown x \in S$ para todo $x \in X$ tal que $s^\frown x \in R$.

b) Si $s \in S$ tiene longitud par (resp. impar), entonces $s^\frown \sigma(s) \in S$.

De este modo, si σ es una estrategia para I, el jugador I puede usar σ como criterio para determinar unívocamente sus jugadas. Más precisamente, si σ es una estrategia para I y $y \in X^\omega$, existe una única rama $\sigma * y$ de S (finita o infinita) que cumple:

$$(\sigma * y)(2n) = (\sigma * y)|_{2n}{}^\frown \sigma((\sigma * y)|_{2n}), \qquad (\sigma * y)(2n+1) = (\sigma * y)|_{2n+1}{}^\frown y_n.$$

Notemos que si $\sigma * y$ tiene longitud finita, ésta ha de ser impar, es decir, termina con una jugada de I, ya que, por definición de estrategia, toda posición en S de longitud par puede prolongarse con σ. Además, si la longitud es $2n+1$, necesariamente $(\sigma * y)^\frown y_n \notin R$.

En definitiva, $\sigma * y$ es la partida que se obtiene empezando con $x_0 = \sigma(\varnothing)$, seguido de y_0, seguido de $x_1 = \sigma(x_0, y_0)$, seguido de y_1, seguido de $x_2 = \sigma(x_0, y_0, x_1, y_1)$, etc., y que se prolonga mientras las jugadas para II determinadas por la sucesión y sean legales.

Análogamente, si σ es una estrategia para II, se define $y * \sigma$ como la única rama de S que cumple

$$(y * \sigma)(2n) = (y * \sigma)|_{2n}{}^\frown y_n, \qquad (y * \sigma)(2n+1) = (y * \sigma)|_{2n+1}{}^\frown \sigma((y * \sigma)|_{2n+1}),$$

que, en caso de ser finita, tiene longitud par.

Una estrategia σ para I (resp. para II) es *ganadora* si para toda sucesión $y \in X^\omega$ tal que $\sigma * y$ (resp. $y * \sigma$) es infinita, se cumple de hecho que $\sigma * y \in A$ (resp. $y * \sigma \in [R] \setminus A$).

En otras palabras, una estrategia es ganadora si, cuando el jugador para el que está diseñada la sigue, éste gana necesariamente la partida.

El juego $J(R, A)$ está *determinado* si uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.

Llamaremos $J(A) = J(X^{<\omega}, A)$, donde $A \subset X^\omega$, es decir, $J(A)$ es el juego cuya única regla es que cada jugada ha de estar en el conjunto X. Observemos ahora que, en realidad, todo juego de la forma $J(R, A)$ es equivalente a uno de la forma $J(A')$, en el sentido de que cada jugador tiene una estrategia ganadora en uno si y sólo si la tiene en el otro, de modo que establecer un árbol de reglas es sólo una forma de simplificar la definición de un juego.

En efecto, dado un juego $J(R, A)$, para cada $x \in X^\omega \setminus [R]$ existe un mínimo $n \in \omega$ tal que $x|_n \notin R$, descartando el caso trivial en que $R = \varnothing$, será $n = m+1$, de modo que $x|_m \in R$. Así,

$$X^\omega \setminus [R] = \bigcup_{s \in I} B_s,$$

donde $I = \{s \in X^{<\omega} \mid s \notin R \land s|_{\ell(s)-1} \in R\}$. Ahora bien, podemos dividir I en dos subconjuntos: el conjunto I_1 formado por las sucesiones de longitud impar, y el conjunto I_2 formado por las de longitud par. De este modo, si definimos los abiertos

$$U_1 = \bigcup_{s \in I_1} B_s, \qquad U_2 = \bigcup_{s \in I_2} B_s,$$

tenemos que $X^\omega \setminus [R] = U_1 \cup U_2$ y cada $x \in U_1$ es una prolongación de una partida de $J(R, A)$ en la que ha perdido el jugador I por ser el primero en realizar una jugada ilegal, mientras que cada $x \in U_2$ es una prolongación de una partida de $J(R, A)$ en la que ha perdido el jugador II por el mismo motivo. Por lo tanto, si llamamos $A' = A \cup U_2$, tenemos que todo $x \in A'$ corresponde a una partida de $J(R, A)$ en la que gana I, ya sea porque $x \in A$, ya sea porque II ha hecho una jugada ilegal, mientras que todo $x \in X^\omega \setminus A'$ corresponde a una partida de $J(R, A)$ en la que gana II, ya sea porque $x \in [R] \setminus A$, ya porque I ha hecho una jugada ilegal.

Es claro entonces que cada jugador tiene una estrategia ganadora en $J(R, A)$ si y sólo si la tiene en $J(A')$. Es importante recordar que A' es simplemente la unión de A con un abierto U_2 disjunto con A.

Diremos que un conjunto $A \subset X^\omega$ está *determinado* si lo está el juego $J(A)$.

El axioma de elección implica que existen juegos no determinados. Esto es consecuencia de 3.8 y el teorema siguiente:

Teorema 6.2 *Si $B \subset \mathcal{N}$ es un conjunto de Bernstein, entonces $J(B)$ no está determinado.*

DEMOSTRACIÓN: En general, si $B \subset X^\omega$ y σ es una estrategia para I en el juego $J(B)$, para cada $y \in X^\omega$ la partida $\sigma * y$ es infinita, pues no existen jugadas ilegales. Más aún, el conjunto

$$[\sigma] = \{\sigma * y \mid y \in X^\omega\} \subset X^\omega$$

es un cerrado perfecto. En efecto, si $x \in X^\omega \setminus [\sigma]$, esto significa que la partida x no está jugada de acuerdo a la estrategia σ, lo que significa a su vez que existe un mínimo n tal que la posición $x|_n$ está jugada según σ, pero $x|_{n+1}$ ya no lo está. Entonces $x \in B_{x|_{n+1}} \subset X^\omega \setminus [\sigma]$.

Según el teorema 1.19, tenemos que $[\sigma] = [A]$, donde $A \subset X^{<\omega}$ es el árbol formado por las restricciones de los elementos de $[\sigma]$, es decir, el árbol de las posiciones jugadas según la estrategia σ. Dicho árbol es perfecto. pues cada posición de longitud impar admite tantas extensiones incompatibles como elementos tiene X (suponemos que X tiene al menos dos elementos), luego 1.19 implica que $[\sigma]$ es perfecto. Todo lo dicho vale igualmente si partimos de una estrategia para II.

Concretando ahora al caso $X = \omega$, vemos que si B es un conjunto de Bernstein el jugador I no tiene estrategia ganadora para $J(B)$, pues, para cada estrategia σ, existe un $x \in (\mathcal{N} \setminus B) \cap [\sigma]$ y entonces x es una partida jugada según σ pero en la que es II quien gana. Igualmente, II no tiene estrategia ganadora, pues si τ es una estrategia para II, existe $x \in B \cap [\tau]$, y entonces x es una partida jugada según τ en la que I resulta vencedor. ■

Por otra parte, el axioma de elección garantiza también la determinación de ciertos juegos:

Teorema 6.3 (Gale-Stewart) (AE) *Sea X un conjunto, sea $R \subset X^{<\omega}$ un árbol bien podado y sea $A \subset [R]$ un abierto o un cerrado. Entonces el juego $J(R, A)$ está determinado.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primeramente que A es cerrado, así como que II no tiene estrategia ganadora, y vamos a probar que I sí que la tiene. En general, si $s \in R$ es una posición de longitud par (en la que le corresponde jugar a I), diremos que *s no está perdida para* I si II no tiene una estrategia ganadora a partir de s, es decir, si II no tiene una estrategia ganadora en el juego $J(R_s, A_s)$, donde $R_s = \{t \in X^{<\omega} \mid s^\frown t \in R\}$ y $A_s = \{x \in [R_s] \mid s^\frown x \in A\}$.

Así pues, que II no tenga estrategia ganadora para $J(R, A)$ equivale a que $\varnothing$ no es una posición perdida para I. El punto crucial[1] es que si $s \in X^{2n}$ es una posición no perdida para I, existe un $x_{2n} \in X$ tal que $s^\frown x_{2n} \in R$ y para todo $x_{2n+1} \in X$ tal que $s^\frown x_{2n}{}^\frown x_{2n+1} \in R$, la posición $s^\frown x_{2n}{}^\frown x_{2n+1}$ no está perdida para I.

Así pues, tenemos que $\varnothing$ no está perdida para I y que, siempre que s sea una posición no perdida para I, sea cual sea la jugada legal de II, existe una jugada de I que da lugar a una posición no perdida para I. Ésta es precisamente la estrategia para I: elegir en cada momento una jugada legal[2] que dé lugar a una

[1]Esto se debe a que, si para cada jugada legal x_{2n} existiera una jugada legal x_{2n+1} tal que el jugador II tuviera una estrategia ganadora para $J(R_{s^\frown x_{2n}{}^\frown x_{2n+1}}, A_{s^\frown x_{2n}{}^\frown x_{2n+1}})$, a partir de dichas estrategias podemos construir fácilmente una estrategia ganadora para II en $J(R_s, A_s)$. Ahora bien, para ello, para cada $x_{2n} \in X$ legal hemos de elegir una jugada legal y una estrategia, lo que, en general, puede suponer una elección no numerable y requiere AE. No obstante, si particularizamos el teorema a $X = \omega$, la elección es numerable y basta ED.

[2]Nuevamente, si $X = \omega$ esta elección no requiere AE (no siquiera ED).

posición no perdida cualquiera que sea la respuesta de II. Vamos a ver que esta estrategia es ganadora. Evidentemente, siempre da lugar a partidas infinitas y, si $x \in [R]$ es una partida en la que I juega con esta estrategia, no puede ocurrir que $x \in [R] \setminus A$, pues se trata de un conjunto abierto, luego existiría un cierto $n \in \omega$ de manera que $x|_{2n} \in B_{x|_{2n}} \subset [R] \setminus A$, pero esto supone que la posición $x|_{2n}$ estaría perdida para I, ya que II tendría la estrategia trivial de jugar arbitrariamente.

El caso en que A es abierto se razona análogamente sin más que intercambiar los papeles de I y II: suponemos que I no tiene una estrategia ganadora, con lo que, ninguna posición de longitud I está perdida para II, y II siempre puede jugar de modo que pase de una posición no perdida a otra en la que cualquier respuesta de I dé lugar a una posición no perdida. La partida resultante no puede estar en A, porque si estuviera en A, al ser abierto, daría lugar a la misma contradicción que el caso precedente. ■

Ejercicio: Sea $R \subset X^{<\omega}$ un árbol no necesariamente bien podado. Demostrar que el juego $J(R, [R])$, es decir, el juego en el que I apuesta simplemente a que no se quedará nunca sin posibilidad de jugar, está determinado.

En particular, tomando $R = X^{<\omega}$ o $A = [R]$ (y observando además que $J(R, [R]) = J([R])$), concluimos (con AE) que los abiertos y los cerrados de X^ω están determinados.

Para referencias posteriores enunciamos el siguiente caso particular del teorema anterior, donde lo único a destacar es que, como ya hemos explicado, no depende de AE:

Teorema 6.4 (Gale-Stewart) *Sea $R \subset \omega^{<\omega}$ un árbol bien podado y $A \subset [R]$ un abierto o un cerrado. Entonces el juego $J(R, A)$ está determinado. En particular, los abiertos y los cerrados de $\mathcal{N}$ están determinados.*

Definición 6.5 Si Γ es una clase de subconjuntos de un espacio X^ω, llamaremos $\mathrm{Det}_X(\Gamma)$ a la afirmación *"todo conjunto $A \in \Gamma$ está determinado".* Si $\mathbf{\Gamma}$ es una clase de conjuntos definida sobre todos los espacios X^ω, abreviaremos por $\mathrm{Det}(\mathbf{\Gamma})$ la afirmación *"para todo conjunto X, todo $A \in \mathbf{\Gamma}(X)$ está determinado".*

Así, el teorema de Gale-Stewart (que usa AE) implica[3] $\mathrm{Det}(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ y $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^0_1)$, mientras que simplemente con ED podemos demostrar $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ y $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^0_1)$. Cada uno de estos pares de resultados es en realidad uno solo:

Teorema 6.6 *Si Γ es una familia de subconjuntos de X^ω cerrada para sustituciones continuas, entonces* $\mathrm{Det}_X(\Gamma) \leftrightarrow \mathrm{Det}_X(\neg\Gamma)$.

Demostración: Dado $A \in \Gamma$, sea $B = \{x^\frown y \mid x \in X \land y \in A\}$. Notemos que $B = f^{-1}[A]$, donde $f : X^\omega \longrightarrow X^\omega$ es la aplicación continua que a cada

[3]Pero el teorema de Gale-Stewart es ligeramente más fuerte, pues implica la determinación de ciertos conjuntos de la forma "abierto" $\cup$ ("cerrado" $\cap$ "abierto"), es decir, la determinación de ciertos conjuntos $\mathbf{\Delta}^0_2$.

$y \in X^\omega$ le quita su primera componente y_0. Por lo tanto, $B \in \Gamma$, y es inmediato que si I tiene una estrategia ganadora para $J(B)$, entonces II la tiene para $J(X^\omega \setminus A)$ y que si II tiene una estrategia ganadora para $J(B)$ entonces I la tiene para $J(X^\omega \setminus A)$. Esto prueba que $\mathrm{Det}_X(\Gamma) \rightarrow \mathrm{Det}_X(\neg\Gamma)$. La implicación opuesta se debe a que $\neg\Gamma$ también es cerrado para sustituciones continuas. ■

Cabe destacar que cuando decimos que necesitamos el axioma de elección es que realmente lo necesitamos:

Teorema 6.7 (ZF) $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}_1^0) \leftrightarrow AE$.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a demostrar que, para todo conjunto Z, existe una función de elección en $\mathcal{P}Z$. Para ello tomamos $X = Z \cup \mathcal{P}Z$ y consideramos el juego $J(A)$ cuyo conjunto de apuesta es el abierto cerrado

$$A = \{x \in X^\omega \mid x_0 \subset Z \wedge x_0 \neq \varnothing \wedge x_1 \notin x_0\}.$$

Por hipótesis $J(A)$ está determinado, pero es evidente que I no puede tener una estrategia ganadora, ya que para ganar se vería obligado a jugar un $x_0 \subset Z$ no vacío, y entonces II sólo tiene que jugar un $x_1 \in x_0$ y ya tiene ganada la partida. Por lo tanto, es II quien tiene una estrategia ganadora τ. Así, la función $e : \mathcal{P}Z \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow Z$ dada por $e(x) = \tau(x)$ es una función de elección. (Notemos que $\tau(x)$ es la respuesta de II según τ cuando I empieza la partida jugando x.) ■

6.2 Aplicaciones del teorema de Gale-Stewart

En esta sección damos demostraciones alternativas a partir del teorema de Gale-Stewart (en su versión débil, que requiere ED, pero no AE) de algunos resultados sobre conjuntos analíticos que ya hemos demostrado en los capítulos anteriores, a la vez que probamos que las generalizaciones a clases posteriores de la jerarquía proyectiva se reducen a la determinación de dichas clases.

6.2.1 Subconjuntos perfectos

Sea X un espacio polaco perfecto en el que fijamos una distancia y una base numerable $\{U_n\}_{n\in\omega}$. Dado un subconjunto A de X, consideramos el juego $J^*(A)$ que se juega según el esquema siguiente:

I	U_0^0, U_1^0		U_0^1, U_1^1		$\cdots$	
II		i_0		i_1		$\cdots$

Las reglas son las siguientes:

a) U_i^n son abiertos básicos no vacíos de diámetro menor que 2^{-n}.

b) $\overline{U_0^n} \cap \overline{U_1^n} = \varnothing$.

c) $i_n \in 2$.

d) $\overline{U_0^{n+1} \cup U_1^{n+1}} \subset U_{i_n}^n$.

Si I y II juegan una partida siguiendo estas reglas, existirá un único punto $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U^n_{i_n}}$. Diremos que I gana la partida si $x \in A$.

En otras palabras: I comienza el juego presentando a II dos abiertos básicos. Entonces II elige uno de los dos, luego I elige otros dos abiertos básicos dentro del que II ha elegido, y así sucesivamente.

Observemos en primer lugar que este juego es equivalente a un juego típico $J(R, A')$, para cierto árbol $R \subset \omega^{<\omega}$ y cierto $A' \subset \mathcal{N}$. En efecto, podemos fijar una biyección $\omega \longrightarrow \omega \times \omega$ que a cada $n \in \omega$ le asigne un par $(n_0, n_1) \in \omega \times \omega$ y considerar así que cada jugada de I no es más que un número natural x^n que determina dos abiertos $U^n_i = U_{x^n_i}$ a partir de la enumeración fijada para la base de X. Así, las reglas de $J^*(A)$ se traducen en condiciones sobre las jugadas x^n de I e i_n de II que definen un árbol R en ω (bien podado, pues es imposible que un jugador se encuentre sin posibilidades de realizar una jugada legal). Así, cada partida de $J^*(A)$ se corresponde biunívocamente con una partida jugada en R.

En particular, cada $y \in [R]$ determina una partida de $J^*(A)$ y, con ella, un $x \in X$ que determina qué jugador es el vencedor, por lo que tenemos una aplicación $f : [R] \longrightarrow X$ dada por $y \mapsto x$. Llamando $A' = j^{-1}[A]$, tenemos claramente que $J^*(A)$ es equivalente a $J(R, A')$.

Es importante que la aplicación f es continua. En efecto, si $U \subset X$ es abierto e $y \in f^{-1}[U]$, sea $x = f(y) \in U$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset U$. Si $2^{-n} < \epsilon$, entonces $y \in B_{y|_{2n+1}} \subset f^{-1}[U]$, pues si $z \in B_{y|_{2n+1}}$ el abierto $U^n_{i_n}$ determinado por z es el mismo que el determinado por y, luego $x, f(z) \in \overline{U^n_{i_n}}$, luego $d(x, f(z)) < 2^{-n} < \epsilon$, luego $f(z) \in B_\epsilon(x) \subset U$. Así pues:

Teorema 6.8 *Si X es un espacio polaco perfecto, existe un árbol bien podado $R \subset \omega^{<\omega}$ y una aplicación continua $f : [R] \longrightarrow X$ tal que, para cada $A \subset X$, el juego $J^*(A)$ está determinado si y sólo si lo está el juego $J(R, f^{-1}[A])$.*

Por otra parte:

Teorema 6.9 *Sea X un espacio polaco perfecto y $A \subset X$. Entonces*

a) I *tiene una estrategia ganadora para $J^*(A)$ si y sólo si A contiene un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$.*

b) II *tiene una estrategia ganadora para $J^*(A)$ si y sólo si A es numerable.*

Demostración: Supongamos que σ es una estrategia para I. Aunque hemos definido σ como una función que actúa sobre posiciones del juego, lo cierto es que la imagen por σ de una posición está completamente determinada por las jugadas de II en dicha posición. Por lo tanto, podemos ver a σ como una aplicación que a cada $s \in 2^{<\omega}$ le asigna un par $(U_{s,0}, U_{s,1})$ de abiertos básicos de X. Así podemos definir un esquema de Hausdorff $A : 2^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}X$ mediante $A(\varnothing) = X$ y $A(s^\frown i) = \overline{U}_{s,i}$.

De este modo, $A(0)$ y $A(1)$ son las clausuras de los abiertos que constituyen la primera jugada de I según σ, $A(0,0)$ y $A(0,1)$ son las clausuras de los abiertos determinados por σ como segunda jugada para I bajo el supuesto de que la primera jugada de II sea 0, mientras que $A(1,0)$ y $A(1,1)$ son las clausuras de la segunda jugada de I según σ si la primera jugada de II es 1, etc.

Las reglas de $J^*(A)$ implican que el esquema A cumple las propiedades indicadas en la demostración del teorema 1.36, por lo que determina una aplicación $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow X$ que es un homeomorfismo en su imagen. Ahora bien, el hecho de que σ sea una estrategia ganadora para I se traduce en que dicha imagen está contenida en A. Por lo tanto, A contiene un subespacio homeomorfo a $\mathcal{C}$.

Recíprocamente, si $C \subset A$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$, en particular C no tiene puntos aislados, luego I puede elegir como primera jugada un par de abiertos (legales) U_0^0 y U_1^0 con la condición adicional de que ambos corten a C, y puede mantener esta condición a lo largo de toda la partida: si U_0^n y U_1^n cortan a C y II juega i_n, entonces, como $U_{i_n}^0 \cap C$ no puede reducirse a un punto, I puede elegir dos abiertos legales U_0^{n+1} y U_1^{n+1} que siguen cortando ambos a C. Cualquier estrategia que mantenga esta condición es ganadora, ya que, para cada $n \in \omega$, existe un $c_n \in C$ tal que $c_n \in U_{i_n}^n$. La sucesión $\{c_n\}_{n\in\omega}$ es de Cauchy, luego converge a un $c \in C \subset A$ tal que $c \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U_{i_n}^n}$. Dicho c no es sino el punto que determina el vencedor del juego, con lo que resulta que I es el vencedor.

Si $A = \{x_n\}_{n\in\omega}$ una estrategia ganadora para II consiste en jugar i_n tal que $x_n \notin U_{i_n}^n$.

Finalmente, supongamos que σ es una estrategia ganadora para II. Diremos que una posición s de longitud $2n$ (es decir, que termina con una jugada i_n de II) es *buena* para un $x \in A$ si está jugada de acuerdo con σ y $x \in U_{i_n}^n$. Convenimos en considerar que $\varnothing$ es también una posición buena para x.

Si toda posición buena para x admite una extensión de longitud $2n+2$ que también es buena para x, entonces podemos formar una partida jugada de acuerdo con σ que termina en x, lo que contradice a que σ sea una estrategia ganadora para II. Así pues, para cada $x \in A$ existe una posición s_x que es buena para x pero que no admite extensiones buenas para x. Equivalentemente:

$$A \subset \bigcup_s P_s,$$

donde s recorre las posiciones de longitud impar jugadas de acuerdo con σ y, si $\ell(s) = 2n+1$, el conjunto P_s contiene a los $x \in U_{i_n}^n$ tales que, para toda posible jugada (U_0^{n+1}, U_1^{n+1}) de I que prolongue s, si i_{n+1} es la jugada que σ determina a su vez como respuesta, se cumple que $x \notin U_{i_{n+1}}^{n+1}$.

Ahora bien, sucede que P_s no puede contener más de un punto, ya que, dados dos puntos x_0, $x_1 \in U_{i_n}^n$, siempre hay una jugada legal para I tal que $x_i \in U_i^{n+1}$, con lo que $x_{i_{n+1}} \in U_{i_{n+1}}^{n+1}$, luego $x_{i_{n+1}} \notin P_s$. Como el conjunto de posiciones es numerable, esto prueba que A es numerable. ■

En particular:

Teorema 6.10 *Sea* $\mathbf{\Gamma}$ *una clase de conjuntos cerrada para uniones e intersecciones finitas y para sustituciones continuas, y que contenga a* $\mathbf{\Sigma}_1^0 \cup \mathbf{\Pi}_1^0$. *Entonces* $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Gamma})$ *implica que, para todo espacio polaco* X, *todo* $A \in \mathbf{\Gamma}(X)$ *no numerable contiene un subconjunto perfecto.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Cantor-Bendixson 1.41 podemos descomponer $X = P \cup N$, donde P es perfecto y N numerable. Como la inclusión $i : P \longrightarrow X$ es continua, $A \cap P \in \mathbf{\Gamma}(P)$ y sigue siendo no numerable, luego podemos suponer que X es perfecto. Basta probar que el juego $J^*(A)$ está determinado, para lo cual, según 6.8 es equivalente a la determinación de un juego $J(R, A')$, donde R es un árbol en ω y $A' \subset [R]$ es una antiimagen continua de A, luego $A' \in \mathbf{\Gamma}([R])$. Por el teorema 1.22 existe una retracción $r : \mathcal{N} \longrightarrow [R]$, de modo que $A'' = r^{-1}[A']$ cumple que $A' = A'' \cap [R]$. Por lo tanto $A'' \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$ (por sustitución continua) y también $A' \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$ (por ser intersección de dos conjuntos de la clase). Finalmente, por la observación previa al teorema 6.2, la determinación de $J(R, A')$ equivale a la determinación de un juego $J(A''')$, donde A''' es la unión de A' y un abierto, luego $A''' \in \mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$ y la determinación de $J(A''')$ la tenemos por hipótesis. ■

Así pues, una forma alternativa de demostrar 2.31 sería demostrar $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Delta}_1^1)$, pues la clase $\mathbf{\Delta}_1^1$ cumple las condiciones del teorema anterior. Esto lo probaremos en la sección siguiente. Sin embargo, vamos a ver que con una ligera modificación del juego $J^*(A)$ podemos extender el teorema 2.31 a conjuntos analíticos sin necesidad de nada más que el teorema de Gale-Stewart 6.4.

Para ello consideramos de nuevo un espacio polaco perfecto X, pero ahora fijamos un conjunto $F \subset X \times \mathcal{N}$. Definimos el juego $J_0^*(F)$ que se juega según el esquema siguiente:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & y_0, U_0^0, U_1^0 & & y_1, U_0^1, U_1^1 & & \cdots & \\ \hline \mathrm{II} & & i_0 & & i_1 & & \cdots \end{array}$$

con las mismas reglas que $J^*(A)$ añadiendo únicamente que $y_i \in \omega$. Así, una partida de $J_0^*(F)$ determina un par $(x, y) \in X \times \mathcal{N}$. Establecemos que I gana la partida si $(x, y) \in F$.

Como en el caso de $J^*(A)$, tenemos que $J_0^*(F)$ se puede codificar como un juego $J(R, A')$, donde R es un árbol en ω y $A' = f^{-1}[F]$, donde $f : [R] \longrightarrow X \times \mathcal{N}$ es la aplicación continua que a cada partida le hace corresponder el par (x, y) que resulta de ella.

Teorema 6.11 *Sea* X *un espacio polaco perfecto, sea* $F \subset X \times \mathcal{N}$ *y* $A = \pi_X[F]$. *Entonces*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora para* $J_0^*(F)$ *entonces* A *contiene un subespacio homeomorfo a* $\mathcal{C}$.

b) Si II *tiene una estrategia ganadora para* $J_0^*(F)$, *entonces* A *es numerable.*

Demostración: a) Claramente, una estrategia ganadora de I para $J_0^*(F)$ da lugar a una estrategia ganadora para $J^*(A)$ sin más que no tener en cuenta los y_i.

b) Supongamos que II tiene una estrategia ganadora σ para $J_0^*(F)$. Sea $x \in A$ y sea $y_0 \in \mathcal{N}$ tal que $(x, y_0) \in F$. Razonamos como en 6.9: Diremos que una posición s de longitud $2n$ es *buena* para x si está jugada de acuerdo con σ, los y_i son los dados por $y_0|_n$ y $x \in U_{i_n}^n$. Como en 6.9 concluimos tiene que haber una posición s buena para x que no pueda prolongarse a otra mayor, con lo cual $x \in P_{s,y_0(n+1)}$, donde $P_{s,a}$ contiene los $x \in U_{i_n}^n$ tales que, para toda posible jugada $(a, U_0^{n+1}, U_1^{n+1})$ de I que prolongue a s, si i_{n+1} es la jugada que σ determina a su vez como respuesta, $x \notin U_{i_n}^n$. Por lo tanto,

$$A \subset \bigcup_{s,a} P_{s,a},$$

donde s recorre las posiciones de longitud par jugadas de acuerdo con σ y $a \in \omega$. Al igual que en 6.9, razonamos que $P_{s,a}$ contiene a lo sumo un punto, y esto implica que A es numerable. ■

Como consecuencia:

Teorema 6.12 *Todo conjunto analítico no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto.*

Demostración: Sea X un espacio polaco y $A \subset X$ un conjunto analítico no numerable. Por el teorema de Cantor-Bendixson podemos suponer que X es perfecto. Por definición de conjunto analítico existe un cerrado $F \subset X \times \mathcal{N}$ tal que $A = \pi_X[F]$. Por el teorema anterior basta probar que $J_0^*(F)$ está determinado, lo cual equivale a que cierto juego $J(R, F')$ esté determinado, donde R es un árbol bien podado en ω y $F' \subset [R]$ es una antiimagen continua de F, luego un cerrado en $[R]$. Basta aplicar el teorema Gale-Stewart 6.4. ■

El mismo argumento empleado para probar 6.12 nos da:

Teorema 6.13 $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}_n^1)$ *implica que todo conjunto* $\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1$ *no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto.*

6.2.2 La propiedad de Baire

Sea X un espacio polaco (en el que fijamos una distancia) y sea B una base numerable de X (en realidad, basta con que B sea una *base débil,* es decir, un conjunto de abiertos no vacíos tales que todo abierto no vacío de X contenga uno de ellos). Sea $F \subset X \times \mathcal{N}$. Definimos el *juego de Banach-Mazur* $G_0^{**}(F)$ como el juego que sigue el esquema siguiente:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & y_0, U_0 & & y_1, U_1 & & \cdots & \\ \hline \mathrm{II} & & V_0 & & V_1 & & \cdots \end{array}$$

con las reglas

a) U_n, V_n son abiertos de B de diámetro $\leq 2^{-n}$.

b) $\overline{U_{n+1}} \subset \overline{V_n} \subset \overline{U_n}$.

c) $y_n \in \omega$.

Así, cada partida determina un $y \in \mathcal{N}$ y un único $x \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n}$. El jugador I gana la partida si $(x, y) \in F$.

(En realidad $G_0^{**}(F)$ es la variante del juego de Banach-Mazur $G^{**}(F)$ propiamente dicho, en el que $F \subset X$ y I no juega los enteros y_n.)

Como en el caso de los juegos que hemos tratado antes, es fácil reformularlo como un juego $J(R, F')$, donde R es un árbol en ω (obviamente bien podado) y $F' \subset [R]$. Más concretamente, existe una aplicación continua $f : [R] \longrightarrow X \times \mathcal{N}$ que a cada partida z le asigna el par (x, y), y $F' = f^{-1}[F]$.

Teorema 6.14 *Sea X un espacio polaco, sea $F \subset X \times \mathcal{N}$ y $A = \pi_X[F]$.*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora para $G_0^{**}(F)$, entonces existe un $U \in B$ tal que $\overline{U} \setminus A$ es de primera categoría.*

b) Si II *tiene una estrategia ganadora para $G_0^{**}(F)$, entonces A es de primera categoría.*

Demostración: Veamos primero b). Sea σ una estrategia ganadora para el jugador II y sea $x \in A$. Tomamos $y_0 \in \mathcal{N}$ tal que $(x, y_0) \in F$.

Diremos que una posición s de longitud $2n$ es *buena* para x si está jugada de acuerdo con la estrategia σ, las jugadas y_i de I son las dadas por $y_0|_n$ y $x \in \overline{V_n}$. Entonces, ha de haber una posición buena para x que no pueda prolongarse a otra posición buena para x, pues, en otro caso, obtendríamos una partida jugada según σ en la que ganaría I. En otras palabras, existe una posición buena s tal que, para toda jugada posible de I (con $y_{n+1} = y_0(n+1)$), la jugada siguiente según σ hace que $x \notin \overline{V_{n+1}}$.

Si s es una posición de longitud $2n$ jugada según σ y $a \in \omega$, llamaremos $C_{s,a}$ al conjunto de todos los $x \in X$ tales que $x \in \overline{V_n}$ y, para toda jugada (legal) de I de la forma (a, U_{n+1}), el abierto V_{n+1} determinado por σ cumple que $x \notin \overline{V_{n+1}}$.

Hemos probado que, dado $x \in A$, existe una posición s de longitud par jugada según σ y un $a = y(n+1)$ de modo que $x \in C_{s,a}$ o, lo que es lo mismo $A \subset \bigcup_{s,a} C_{s,a}$.

Ahora bien, sucede que $C_{s,a}$ es diseminado, pues lo contrario significa que existe un abierto no vacío $U_{n+1} \subset \overline{C}_{s,a} \subset \overline{V}_n$, que podemos tomar tal que $U_{n+1} \in B$ y $d(U_{n+1}) < 2^{-n-1}$. Sea entonces V_{n+1} el abierto determinado por σ si I prolonga s con (a, U_{n+1}). Entonces $V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset \overline{U_{n+1}} \subset \overline{C}_{s,a}$, luego $V_{n+1} \cap C_{s,a} \neq \varnothing$, pero esto es absurdo, por la propia definición de $C_{s,a}$.

Como los pares (s, a) recorren un conjunto numerable, concluimos que A es de primera categoría.

a) Si I tiene una estrategia ganadora para $G_0^{**}(F)$, es claro que también la tiene para el juego $G^{**}(A)$. Sólo tiene que seguir su estrategia desechando los y_n que ésta le proporciona. Si σ es una estrategia, llamemos $U = \sigma(\varnothing)$ y vamos a probar que II tiene una estrategia ganadora para $G^{**}(\overline{U} \setminus A)$. Admitiendo esto, toda la demostración del apartado b) se simplifica (al adaptarla a G^{**} en lugar de G_0^{**}) para probar que $\overline{U} \setminus A$ es de primera categoría.

Veamos cuál es la estrategia de II. Sea U_0 la primera jugada de I y supongamos en primer lugar que $\overline{U_0} \not\subset \overline{U}$. Tomamos $x \in \overline{U_0} \setminus \overline{U}$. Entonces, como $X \setminus \overline{U}$ es un entorno de x, se cumple que $U_0 \cap (X \setminus \overline{U})$ es un abierto no vacío, luego podemos tomar $V_0 \in B$, $V_0 \subset \overline{V_0} \subset U_0 \setminus \overline{U}$, $d(V_0) < 1/2$. Jugando V_0, II tiene asegurada la victoria sean cuales sean las jugadas posteriores.

Supongamos ahora que $\overline{U_0} \subset \overline{U}$. Entonces II puede responder con el abierto V_0 determinado por σ para la partida que empieza con U seguido de U_0. En general, II puede jugar de modo que cada posición de la partida se convierta en una posición según σ cuando se le antepone U. De este modo se asegura de que el punto final x esté en $\overline{U} \cap A$, luego no estará en $\overline{U} \setminus A$ y ganará la partida. ■

Como aplicación obtenemos una demostración alternativa del teorema 4.16:

Teorema 6.15 *Todo conjunto analítico tiene la propiedad de Baire*

Demostración: Sea X un espacio polaco y $A \subset X$ un conjunto analítico. Sea $F \subset X \times \mathcal{N}$ un cerrado tal que $A = \pi_X[F]$. El juego $G_0^{**}(F)$ es equivalente a un juego que cumple las hipótesis del teorema de Gale-Stewart 6.4, luego está determinado.

Si II tiene una estrategia ganadora, entonces A es de primera categoría, luego tiene la propiedad de Baire.

Supongamos que es I quien tiene la estrategia ganadora. Entonces existe un abierto básico no vacío (de una base numerable) $U_0 \subset X$ tal que $\overline{U_0} \setminus A$ es de primera categoría. Sea U la unión de todos los abiertos con esta propiedad. Entonces $U \setminus A$ está contenido en una unión numerable de conjuntos de primera categoría, luego tiene primera categoría. Si probamos que $A \setminus U$ también es de primera categoría, tendremos que lo es $A \,\Delta\, U$, y así A tendrá la propiedad de Baire.

Supongamos que $A \setminus U = \pi_X[F \setminus (U \times \mathcal{N})]$ no es de primera categoría. Como $F \setminus (U \times \mathcal{N})$ es cerrado, el juego $G_0^{**}(F \setminus (U \times \mathcal{N}))$ está determinado, de nuevo por el teorema de Gale-Stewart, pero II no puede tener una estrategia ganadora, luego la tiene I. Esto significa que existe un abierto básico no vacío U' tal que $\overline{U}' \setminus (A \setminus U)$ es de primera categoría. Como $\overline{U}' \setminus A \subset \overline{U}' \setminus (A \setminus U)$, también $\overline{U}' \setminus A$ es de primera categoría, luego $U' \subset U$ por definición de U, luego $U' \subset \overline{U}' \setminus (A \setminus U)$, luego U' es de primera categoría, lo cual es absurdo. ■

Adaptando ligeramente el argumento anterior obtenemos:

Teorema 6.16 $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ *implica que todo conjunto* $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ *en un espacio polaco tiene la propiedad de Baire.*

Notemos que, por una parte, $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ es equivalente a $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_n)$ y, por otra, que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ tenga la propiedad de Baire equivale a que la tengan todos los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$. En particular, hemos probado que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ tiene la propiedad de Baire.

6.2.3 Conjuntos universalmente medibles

El teorema 4.17 demuestra que los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_1$ son universalmente medibles. Vamos a estudiar ahora bajo qué circunstancias podemos asegurar que lo mismo les sucede a los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. Por conveniencia estudiaremos conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$, aunque el problema es equivalente, pues un conjunto es universalmente medible si y sólo si lo es su complementario.

Sea X un espacio polaco no numerable (si es numerable todos sus subconjuntos son medibles) con una medida de Borel μ. En la prueba del teorema 2.40 hemos visto que podemos construir otra medida unitaria en X con los mismos conjuntos medibles, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que μ es unitaria.

Usando un isomorfismo de Borel $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ para transportar la medida, no perdemos generalidad si suponemos que $X = \mathcal{C}$. (Si probamos que todos los conjuntos de $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}(\mathcal{C})$ son medibles para la medida transportada, los conjuntos de $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}(X)$ serán μ-medibles.)

Sea $\{t_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $2^{<\omega}$ y $\{s_n\}_{n<\omega}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$. Para cada $F \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ y cada $\epsilon > 0$, definimos el juego $J'_0(F, \epsilon)$ que se juega según el esquema:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & x_0, y_0 & & x_1, y_1 & & \cdots & \\ \hline \mathrm{II} & & z_0 & & z_1 & & \cdots \end{array}$$

con las reglas:

a) $x_n, y_n \in 2$, $z_n \in \omega$.

b) Si $U_n = \bigcup\limits_{i<\ell(s_{z_n})} B_{t_{s_{z_n}(i)}}$, se cumple que $\mu(U_n) < \epsilon/2^{3n+3}$.

Así, cada partida determina un par $(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ y un abierto $U = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$.

El jugador I gana la partida si $(x, y) \in F \cap ((\mathcal{C} \setminus U) \times \mathcal{C})$.

En la práctica podemos pensar que las jugadas de II son uniones finitas de abiertos básicos de $\mathcal{C}$. La jugada z_n determina una sucesión $s_{z_n} \in \omega^{<\omega}$, la cual determina a su vez una sucesión finita $t_{s_{z_n}(0)}, \ldots, t_{s_{z_n}(k)} \in 2^{<\omega}$, la cual determina a su vez el abierto U_n, y cualquier unión finita de abiertos básicos puede obtenerse de esta forma.

Al igual que sucedía con los juegos que hemos analizado previamente, es fácil reducir $J'_0(F, \epsilon)$ a un juego $J(R, B)$, donde R es un árbol (obviamente bien podado) en ω. Para analizar B, observamos que tenemos una aplicación continua $f : [R] \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{N}$ que a cada partida le asigna las sucesiones (x, y, z).

El conjunto C de las partidas $w \in [R]$ tales que, si $f(w) = (x, y, z)$, $x \in \mathcal{C} \setminus U$, es cerrado en $[R]$. En efecto, si $w \in [R] \setminus C$, tenemos que $x \in U_n$ para un $n \in \omega$, luego existe un $r \in \omega$ tal que $x \in B_{x|_r} \subset U_n$ Por continuidad, existe un $k \in \omega$ tal que $B_{z|_k} \cap [R] \subset f^{-1}[B_{x|_r} \times \mathcal{C} \times B_{z|_{n+1}}]$, con lo que $z \in B_{z|_k} \cap [R] \subset [R] \setminus C$.

Claramente, el conjunto de apuesta B es $C \cap f^{-1}[F \times \mathcal{N}]$, y es claro que si $F \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$, entonces $B \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{N})$. Además, la determinación del juego $J'_0(F, \epsilon)$ equivale a la de un juego $J(B')$ donde B' es la unión de B y un abierto, luego $B' \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{N})$. Por consiguiente, $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ implica que el juego $J'_0(F, \epsilon)$ está determinado siempre que $F \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$.

Teorema 6.17 *Sea μ una medida de Borel unitaria en $\mathcal{C}$, $\epsilon > 0$, $F \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ y $A = \pi_X[F]$.*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora en el juego $J'_0(F, \epsilon)$, entonces A contiene un conjunto μ-medible de medida positiva.*

b) Si II *tiene una estrategia ganadora en el juego $J'_0(F, \epsilon)$, entonces existe un abierto $U \subset \mathcal{C}$ tal que $A \subset U$ y $\mu(U) < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Si I tiene una estrategia ganadora σ, sea $C \subset \mathcal{N}$ el conjunto de las sucesiones $z \in \mathcal{N}$ tales que si II juega $z_0, z_1, \ldots$ sus jugadas son legales. Se cumple que C es cerrado, pues si $z \in \mathcal{N} \setminus C$, existe un mínimo $n \in \omega$ tal que la jugada z_n es ilegal, con lo que $z \in B_{z|_{n+1}} \subset \mathcal{N} \setminus C$.

La aplicación $C \longrightarrow \mathcal{C}$ que a cada $z \in C$ le asigna el punto x correspondiente a la partida $\sigma * z$ es continua, luego su imagen, que es el conjunto $B \subset A$ de todos los puntos de X construidos mediante partidas en las que I juega según σ, cumple $B \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathcal{C})$. Por el teorema 4.17 sabemos que B es μ-medible. Sólo hemos de probar que no tiene medida nula.

Si fuera $\mu(B) = 0$, existiría un abierto G tal que $B \subset G$ y $\mu(G) < \epsilon/2^3$. Expresamos G como unión de abiertos básicos $G = \bigcup\limits_{i \in \omega} G_i$, donde cada G_i es de la forma B_t, para cierta $t \in 2^{<\omega}$. Como dos abiertos básicos distintos están uno contenido en otro o son disjuntos, podemos refinar la unión para que los G_i sean disjuntos dos a dos.

Definimos U_0 como una unión finita de abiertos G_i tal que $\mu(G \setminus U_0) < \epsilon/2^6$, y asegurando que al menos $G_0 \subset U_0$. Tenemos que $\mu(U_0) < \epsilon/2^3$. Similarmente, definimos $U_1 \subset G \setminus U_0$ como una unión finita de abiertos G_i de modo que $\mu(G \setminus (U_0 \cup U_1)) < \epsilon/2^9$, asegurando que $G_1 \subset U_0 \cup U_1$. Procediendo de este modo construimos una sucesión $\{U_n\}_{n<\omega}$ de abiertos en $\mathcal{C}$, cada uno de los cuales es una unión finita de abiertos básicos, $\mu(U_n) < \epsilon/2^{3n+3}$ y $B \subset G = \bigcup\limits_{n \in \omega} U_n$.

Entonces, la sucesión U_n determina una estrategia para II (jugar en cada paso U_n independientemente de lo que haga I), que claramente burla a la estrategia σ, pues el conjunto U resultante será G y, si I juega según σ, el punto x resultante estará en $B \subset U$. Esto contradice que σ sea una estrategia ganadora, luego B ha de tener medida positiva.

Supongamos ahora que es II quien tiene una estrategia ganadora σ. Para cada par $(s,t) \in 2^{n+1} \times 2^{n+1})$, llamemos $U_{s,t}$ al abierto U_n que determina σ como jugada n-sima de II cuando I ha jugado hasta el momento $x_i = s(i), y_i = t(i)$. Sea $G = \bigcup\limits_{s,t} U_{s,t}$.

Claramente, U es abierto y $A \subset U$, pues si $x \in A$, existe un $y \in \mathcal{C}$ tal que $(x,y) \in F$. Entonces I puede jugar en cada turno $x(n), y(n)$ y, si II aplica su estrategia σ, al final de la partida se llega al punto $(x,y) \in F$, luego la única forma en que II puede ganar es que x esté en U, lo que significa que está en $U_n = U_{x|_{n+1}, y|_{n+1}}$, para cierto $n \in \omega$, luego $x \in G$. Por otra parte,

$$\mu(G) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\bigcup_{s,t \in 2^{n+1}} U_{s,t}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+2} \cdot \frac{\epsilon}{2^{3n+3}} = \epsilon.$$

■

Con esto podemos probar:

Teorema 6.18 $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ *implica que todo conjunto* $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ *en un espacio polaco es universalmente medible.*

Demostración: Hemos visto que basta ver que todo $B \in \mathbf{\Pi}^1_{n+1}(\mathcal{C})$ es medible para toda medida de Borel unitaria μ en $\mathcal{C}$. En la prueba del teorema 4.17 hemos visto que existe un conjunto $\hat{B}$ que es G_δ, $B \subset \hat{B}$ y todo conjunto de Borel contenido en $\hat{B} \setminus B$ es nulo. Sea $A = \hat{B} \setminus B \in \mathbf{\Sigma}^1_{n+1}(\mathcal{C})$. Por el teorema 4.38, existe un $F \in \mathbf{\Pi}^1_n(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ tal que $A = \pi_X[F]$.

Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, el juego $J'(A, \epsilon)$ está determinado, pero por el teorema anterior I no puede tener una estrategia ganadora. Esto significa que la tiene II, luego, de nuevo por el teorema anterior, existe un abierto G tal que $A \subset G$ y $\mu(G) < \epsilon$. Esto implica que $\mu^*(A) = 0$, donde μ^* es la medida exterior asociada a μ, pero todo conjunto de medida exterior nula es medible, luego $\hat{B} \setminus B$ es medible, luego B también lo es. ■

Como en el caso de la propiedad de Baire, observemos que $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_n)$ es equivalente a $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_n)$, así como que la medibilidad de los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ equivale a la de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$.

Notemos también que en la demostración de 6.37 hemos usado que los conjuntos analíticos son universalmente medibles, luego, al contrario de lo que sucedía con la propiedad de Baire, en este caso no podemos usar el argumento para obtener una prueba alternativa de este hecho.

6.3 La determinación de los conjuntos de Borel

En el capítulo siguiente veremos que no es posible demostrar en ZFC que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ es universalmente medible, por lo que tampoco es posible demostrar $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_1)$. El máximo resultado de determinación que puede, pues, probarse en principio en ZFC es $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}^1_1)$, y vamos a ver que, en efecto, esto es posible.

Por conveniencia, vamos a representar las estrategias para un juego $J(R, A)$ de una forma ligeramente distinta de como las hemos representado hasta ahora. En lugar de considerar que una estrategia es una aplicación $\sigma : S \longrightarrow X$, donde $S \subset R$ es un árbol, podemos considerar que una estrategia es ella misma un árbol $\sigma \subset R$. Concretamente, una estrategia para I es un árbol $\sigma \subset R$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) Si $s \in \sigma$ tiene longitud par, existe un único $x \in X$ tal que $s^\frown x \in \sigma$.

b) Si $s \in \sigma$ tiene longitud impar y $x \in X$ cumple que $s^\frown x \in R$, entonces $s^\frown x \in \sigma$.

Una estrategia para II se define análogamente, sin más que intercambiar las palabras "par" e "impar". De este modo, las partidas jugadas de acuerdo con σ son simplemente las ramas de σ, finitas o infinitas. Es obvio que toda estrategia en este sentido determina unívocamente una estrategia equivalente en el sentido anterior (equivalente en cuanto a que determina las mismas partidas en función de las jugadas del adversario) y viceversa.

Llamaremos $\Sigma^{\mathrm{I}}(R)$ y $\Sigma^{\mathrm{II}}(R)$ a los conjuntos de todas las estrategias para los jugadores I y II (respectivamente) en un juego en el conjunto X determinado por el árbol $R \subset X^{<\omega}$ (notemos que el conjunto de apuesta puede determinar si una estrategia es o no ganadora, pero no influye a la hora de decidir si un árbol es o no una estrategia).

Definimos también los conjuntos de estrategias parciales

$$\Sigma^{\mathrm{I}}_*(R) = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma^{\mathrm{I}}(R \cap X^{<2n+1}), \qquad \Sigma^{\mathrm{II}}_*(R) = \bigcup_{n\in\omega} \Sigma^{\mathrm{II}}(R \cap X^{<2n+2}).$$

Definición 6.19 Un *cubrimiento* $c : R \longrightarrow S$ de un árbol S en un conjunto Y por un árbol R en un conjunto X es una terna $c = (c, c^{\mathrm{I}}, c^{\mathrm{II}})$, donde

c1 $c : R \longrightarrow T$ es una aplicación que conserva el orden y las longitudes de las sucesiones (es decir, que $\ell(c(r)) = \ell(r)$, para todo $r \in R$). Claramente c induce una aplicación $c : [R] \longrightarrow [S]$, a la que llamaremos con el mismo nombre. Concretamente: $c(x) = \bigcup\limits_{n\in\omega} c(x|_n)$.

c2 $c^{\mathrm{I}} : \Sigma^{\mathrm{I}}_*(R) \longrightarrow \Sigma^{\mathrm{II}}_*(S)$ es una aplicación tal que $\sigma \subset \sigma' \to c^{\mathrm{I}}(\sigma) \subset c^{\mathrm{I}}(\sigma')$ y que induce una aplicación $c^{\mathrm{I}} : \Sigma^{\mathrm{I}}(R) \longrightarrow \Sigma^{\mathrm{I}}(S)$. Para c^{II} exigimos lo mismo.

c3 Para cada $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(S)$, si $s \in c^{\mathrm{I}}(\sigma)$, existe un $r \in \sigma$ tal que $c(r) = s$, y si $y \in [c^{\mathrm{I}}(\sigma)]$ existe un $x \in [\sigma]$ tal que $c(x) = y$. Lo mismo es válido para II.

Diremos que un cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ *resuelve* un juego $J(S, A)$ si se cumple que $c^{-1}[A \cap [S]] = [R] \cap C$, donde C es abierto y cerrado en X^ω.

Observemos que si un cubrimiento resuelve un juego $J(S, A)$, también resuelve el juego $J(S, [S] \setminus A)$.

Esta propiedad nos permite aplicar el teorema de Gale-Stewart:

Teorema 6.20 (AE) *Si un cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ resuelve un juego $J(S, A)$, entonces $J(S, A)$ está determinado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $B = c^{-1}[A \cap [S]]$, que por hipótesis es abierto y cerrado en $[R]$. Por el teorema de Gale-Stewart sabemos que $J(R, B)$ está determinado.

Supongamos que σ es una estrategia ganadora para I en $J(R, B)$ y veamos que $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$ es una estrategia ganadora para I en $J(S, A)$. Sólo hemos de probar que $[c^{\mathrm{I}}(\sigma)] \subset A$. Ahora bien, si $y \in [c^{\mathrm{I}}(\sigma)]$, entonces existe un $x \in [\sigma]$ tal que $\sigma^{\mathrm{I}}(x) = y$. Entonces $x \in B$, puesto que σ es ganadora, luego $y \in A$.

El mismo razonamiento prueba que si σ es una estrategia ganadora para II en $J(R, B)$, entonces $c^{\mathrm{II}}(\sigma)$ es una estrategia ganadora para II en $J(S, A)$. ■

Definición 6.21 Diremos que un cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ es un k-*cubrimiento,* donde $k \in \omega$, si $R \cap X^{<k} = S \cap Y^{<k}$ y

a) Si $r \in R \cap X^{<k}$, entonces $c(r) = r$.

b) Si $2n < k$ y $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(R \cap X^{<2n+1})$, entonces $c^{\mathrm{I}}(\sigma) = \sigma$, e igualmente con c^{II} cambiando $2n$ por $2n + 1$.

Diremos que un conjunto $A \subset Y^\omega$ es *absolutamente resoluble* si para todo árbol S en Y, para toda función continua $f : [S] \longrightarrow Y^\omega$ y todo $k \in \omega$, existe un k-cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ que resuelve el juego $J(S, f^{-1}[A])$.

Llamamos $\mathbf{U}$ a la clase de conjuntos definida sobre todos los espacios de la forma Y^ω, para todo conjunto Y, de modo que $\mathbf{U}(Y^\omega)$ es la clase de todos los subconjuntos de Y^ω absolutamente resolubles.

Vamos a demostrar las propiedades siguientes:

a) (AE) Si $A \in \mathbf{U}(Y^\omega)$ y S es cualquier árbol en Y, entonces $J(S, A)$ está determinado.

b) La clase $\mathbf{U}$ contiene a los cerrados.

c) La clase $\mathbf{U}$ es cerrada para complementos.

d) La clase $\mathbf{U}$ es cerrada para intersecciones numerables.

La propiedad a) es inmediata: tomando como $f : [S] \longrightarrow Y^\omega$ la inclusión, el juego $J(S, [S] \cap A)$ está determinado por el teorema anterior, pero esto equivale a que lo esté el juego $J(S, A)$.

La propiedad c) también es obvia: si tomamos $A \in \mathbf{U}(Y^\omega)$ y S es un árbol en Y, $f : [S] \longrightarrow Y^\omega$ es una aplicación continua y $k \in \omega$, entonces existe un k-cubrimiento $c : R \longrightarrow S$ que resuelve el juego $J(S, f^{-1}[A])$, luego también resuelve el juego $J(S, [S] \setminus f^{-1}[A]) = J(S, f^{-1}[Y^\omega \setminus A])$, luego $Y^\omega \setminus A$ es absolutamente resoluble.

Nos falta probar b) y d), pero antes observemos que estas cuatro propiedades implican inmediatamente el teorema central de esta sección:

Teorema 6.22 (AE) (Martin) *Se cumple* $\mathrm{Det}(\mathbf{\Delta}_1^1)$.

DEMOSTRACIÓN: Las propiedades b), c) y d) implican que $\mathbf{U}(Y^\omega)$ es una σ-álgebra en Y^ω que contiene a los abiertos, luego contiene a la σ-álgebra de Borel, luego la propiedad a) implica que todo conjunto de Borel está determinado. ■

La parte más delicada es la demostración de b):

Teorema 6.23 *Todo conjunto cerrado es absolutamente resoluble.*

DEMOSTRACIÓN: En las condiciones de la definición de resolución absoluta, llamamos $F = f^{-1}[A]$, que es un cerrado en $[S]$, luego existe un árbol J en Y^ω tal que $F = [J]$.

Notemos que si $k < k'$, todo k'-cubrimiento es también un k-cubrimiento, luego basta probar que se cumple la definición de resolución absoluta para k arbitrariamente grande. En particular, podemos suponer que $k = 2m$.

Consideramos a continuación el juego J^* que se juega según el esquema siguiente:

I	x_0		$\cdots$	x_{2m-2}		(x_{2m}, P)		x_{2m+2}		$\cdots$
II		x_1	$\cdots$		x_{2m-1}		(x_{2m+1}, u)		x_{2m+3}	$\cdots$

y con las reglas siguientes:

a) $(x_0, \ldots, x_n) \in S$ para todo $n \in \omega$.

b) $P \subset S$ y $(x_0, \ldots, x_{2m}) \in P$.

c) O bien $u = \varnothing$ o bien $u = (x_0, x_1, \ldots, x_{2m+1}, x'_{2m+2}, \ldots, x'_{2l+1}) \in P \setminus J$.

d) Si $u = \varnothing$, a partir de la jugada $2m + 2$ ambos jugadores han de respetar las reglas adicionales siguientes:

1. I debe jugar de modo que, para todo $y \in Y$, si $(x_0, \ldots, x_{2t}, y) \in S$, entonces $(x_0, \ldots, x_{2t}, y) \in P$ (es decir, I debe garantizar que cualquier jugada legal que pueda hacer II quede dentro de P, y si no puede lograrlo pierde).
2. II debe garantizar que las posiciones siguientes estén en J.

e) Si $u = (x_0, x_1, \ldots, x_{2m+1}, x'_{2m+2}, \ldots, x'_{2l+1})$, entonces las jugadas siguientes de ambos jugadores deben ser precisamente

$$x_{2m+1} = x'_{2m+2}, \ldots, x_{2l+1} = x'_{2l+1}.$$

A partir de la jugada x_{2l+2} ambos jugadores son libres de jugar sin someterse más que a la regla a).

Más informalmente: En la jugada $2m$, el jugador I hace una oferta a II consistente en que II se comprometa a jugar en J (y rendirse si no lo consigue) a cambio de que I se comprometa a rendirse si II logra salirse de P. No obstante, II puede rechazar la oferta, y entonces ambos jugadores se comprometen a hacer sus próximas jugadas de acuerdo con la sucesión u fijada por II.

Estas reglas determinan un árbol R sobre un cierto conjunto X y podemos definir $c : R \longrightarrow S$ de forma obvia (eliminando P y u en las posiciones de longitud mayor que $2m$). En particular, $R \cap X^{<k} = S \cap Y^{<k}$, como exige la definición de k-cubrimiento. Definimos

$$C = \{\bar{x} \in X^\omega \mid (x_0, \ldots, x_{2m}) \in P \subset S \wedge u = 0\}.$$

Claramente C es un abierto cerrado en X^ω y $c^{-1}[F] = [R] \cap C$, pues una partida $\bar{x} \in [R] \cap C$ cumple que $u = 0$, luego todas las sucesiones finitas $(x_0, \ldots, x_{2t+1})$ están en J, luego $c(\bar{x}) \in F$. Recíprocamente, si $c(\bar{x}) \in F$, ha de ser $u = 0$, por las reglas c) y e).

De este modo, si definimos adecuadamente aplicaciones c^{I} y c^{II}, tendremos que c es un k-cubrimiento que resuelve el juego $J(S, F)$.

Aunque aquí va a ser irrelevante, podemos completar la definición de J^* estableciendo que el conjunto de apuesta es $B = c^{-1}[F]$, en consonancia con la demostración de 6.20, de modo que $J^* = J(R, B)$.

Sea $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}_*(R)$ una estrategia parcial y vamos a definir $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$. Para $i \leq m$, la jugada x_{2i} prescrita por $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$ para $J(S, F)$ es la misma prescrita por σ para J^* (de acuerdo con la definición de k-cubrimiento). En ese punto, si II juega x_{2m+1}, la respuesta de I consiste en aplicar σ a la jugada $(x_{2m+1}, \varnothing)$, supuesto que $(x_0, \ldots, x_{2m+1}) \in J$ y continuará así salvo que llegue un momento en que $u = (x_0, \ldots, x_{2l+1}) \notin J$. Si se da el caso, I pasará a aplicar σ tomando como jugada de II en el turno $2m+1$ el par (x_{2m+1}, u). Notemos que, como σ respeta la regla d) 1, se cumplirá que $u \in P \setminus J$, luego la jugada (x_{2m+1}, u) es legal. Por la regla e), las respuestas de σ a las jugadas que ha hecho II hasta el turno $2l+1$ serán las dadas por u, es decir, las mismas que antes, luego I podrá seguir aplicando la estrategia parcial σ a partir de la posición $2l + 2$ mientras σ esté definida.

Con esto queda definida la estrategia $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$. Observamos que si $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(R)$, es decir, si σ proporciona una jugada legal a I en J^* mientras II juegue legalmente, al aplicar c^{I} a las restricciones de σ obtenemos una estrategia $c^{\mathrm{I}}(\sigma)$ que proporciona una jugada legal a I en $J(S, F)$ mientras II juegue legalmente (es decir, mientras mantenga la partida en S).

Así, c^{I} cumple claramente las propiedades **c1, c2** y la primera parte de **c3** de la definición de cubrimiento. La segunda parte afirma que si $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(R)$ e $y \in [c^{\mathrm{I}}(\sigma)]$, entonces existe un $x \in [\sigma]$ tal que $c^{\mathrm{I}}(x) = y$. Sólo hemos de observar que, aun en el supuesto de que I deba cambiar la partida de J^* que construye a partir de las jugadas de II, a lo sumo lo hará una vez y, si lo hace, las posiciones finitas suficientemente grandes convergen a una partida $x \in [\sigma]$

(es decir, se extienden mutuamente) que cumple lo requerido. También es obvio que c^{I} cumple la definición de k-cubrimiento.

Consideremos ahora una estrategia parcial $\tau \in \Sigma_*^{\mathrm{II}}(R)$ y vamos a construir una estrategia parcial $c^{\mathrm{II}}(\tau)$. Como en el caso anterior, para las primeras jugadas, II se limita a aplicar τ a las jugadas de I. Puede hacer esto hasta la jugada $2m$ (mientras τ esté definida), en la que debe proporcionar a τ un conjunto P como parte de la jugada de I. En tal caso juega

$$P = \{u \in S \mid \bigwedge Q \subset S \bigwedge x_{2m+1} \in Y\ (x_0, \ldots, x_{2m-1}, (x_{2m}, Q), (x_{2m+1}, u)) \notin \tau\}.$$

La jugada (x_{2m}, P) es legal. Esto significa que $u = (x_0, \ldots, x_{2m}) \in P$, lo cual significa a su vez que, dados, Q y x_{2m+1}, no puede suceder que τ recomiende jugar (x_{2m+1}, u), ya que la sucesión u tiene que tener al menos longitud $2m+2$.

Más aún, para cualquier $u \neq \varnothing$ y cualquier x_{2m+1}, se cumple que

$$(x_0, \ldots, x_{2m-1}, (x_{2m}, P), (x_{2m+1}, u)) \notin \tau,$$

pues en caso contrario tendríamos que $u \notin P$ por definición de P, mientras que la regla c) (a la que τ está sometida) exige que $u \in P$. Así pues, tras la jugada (x_{2m}, P), la estrategia τ proporcionará una jugada de la forma $(x_{2m+1}, \varnothing)$. Entonces la jugada determinada por $c^{\mathrm{II}}(\tau)$ es x_{2m+1}, y II seguirá empleando la estrategia τ con el conjunto P indicado y con $u = \varnothing$ mientras se cumpla la condición d) 1. Si se da el caso de que, para una cierta jugada x_{2l} de I, existe un x_{2l+1} tal que $u = (x_0, \ldots, x_{2l+1}) \in S \setminus P$, esto significa que existe un $Q \subset S$ y un cierto x_{2m+1} tal que

$$(x_0, \ldots, x_{2m-1}, (x_{2m}, Q), (x_{2m+1}, u)) \in \tau.$$

Para que esto sea posible, x_{2n+1} tiene que ser el que figura en u, es decir, el mismo que ya estábamos considerando. Si aplicamos la estrategia τ a la partida que resulta de considerar como jugada $2m$ de I el par (x_{2m}, Q), la jugada siguiente será el par (x_{2m+1}, u), y las jugadas siguientes hasta x_{2l+1} serán las dadas por u, es decir, las mismas que ya habíamos establecido. A partir de ahí, II puede jugar aplicando la estrategia σ con el conjunto Q y la sucesión u indicadas.

Con esto queda definida la estrategia $c^{\mathrm{II}}(\tau)$. Como en el caso anterior, si $\tau \in \Sigma^{\mathrm{II}}(R)$, es decir, si τ proporciona una jugada legal para II ante cada jugada legal de I, al aplicar c^{II} a las restricciones de τ obtenemos una estrategia $c^{\mathrm{II}}(\tau)$ que proporciona una jugada legal para cada jugada de I que mantenga la partida en S. Las comprobaciones restantes son idénticas a las del caso anterior. ■

Ahora sólo nos falta demostrar que la intersección numerable de conjuntos absolutamente resolubles es absolutamente resoluble. Para ello necesitamos construir límites inductivos de cubrimientos.

En primer lugar observemos que si tenemos dos cubrimientos $c_1 : S_2 \longrightarrow S_1$ y $c_0 : S_1 \longrightarrow S_0$, la composición $c_0 \circ c_1 : S_2 \longrightarrow S_0$, definida como la terna formada por las composiciones $(c_0 \circ c_1, c_0^{\mathrm{I}} \circ c_1^{\mathrm{I}}, c_0^{\mathrm{II}} \circ c_1^{\mathrm{II}})$, es claramente un cubrimiento, y si c_0 y c_1 son ambos k-cubrimientos, su composición también lo es.

Teorema 6.24 *Si, para cada $i \in \omega$, $c_i : S_{i+1} \longrightarrow S_i$ es un $k+i$-cubrimiento, existe un árbol S y una familia de $k+i$-cubrimientos $d_i : S \longrightarrow S_i$ tales que el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
S_{i+1} \arrow[r, "c_i"] & S_i \\
S \arrow[u, "d_{i+1}"] \arrow[ur, "d_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Componiendo los cubrimientos dados podemos construir $k+i$-cubrimientos $c_{ji} : S_j \longrightarrow S_i$, para $i \leq j$ (tomando como c_{ii} la identidad).

Si S_i es un árbol sobre el conjunto X_i, vamos a definir un árbol S sobre el conjunto $X = \bigcup_{i\in\omega} X_i$. Para ello observamos que los árboles $X^{<n} \cap S_i$ son el mismo para todo n suficientemente grande, debido a que los cubrimientos c_{ji} son n-cubrimientos para todo j suficientemente grande.

Por lo tanto, podemos definir S de modo que un $s \in X^{<\omega}$ está en S si y sólo si $s \in S_i$ para todo i suficientemente grande. Es inmediato que S definido de este modo es un árbol en X. Más precisamente, se cumple que $s \in S$ si y sólo si $s \in S_i$ para todo $i > \ell(s)$. En efecto, si $s \in S$ e $i > \ell(s)$, sabemos que $s \in S_j$, para un cierto $j > i$, pero si c_{ji} es un $k+i$-cubrimiento, luego $s = c_{ji}(s) \in S_i$.

Similarmente, es claro que si $s \in S$, $i \in \omega$ y j, j' son suficientemente grandes (mayores que $\ell(s)$ y que i), entonces $c_{ji}(s) = c_{j'i}(s)$. Esto se debe a que si, por ejemplo, $j < j'$, entonces $c_{j'i}(s) = c_{ji}(c_{j'j}(s))$, pero $c_{j'j}$ es un $k+j$-cubrimiento, luego $c_{j'j}(s) = s$.

Esto nos permite definir $d_i : S \longrightarrow S_i$ mediante $d_i(s) = c_{ji}(s)$, donde j es cualquier índice mayor que i y que $\ell(s)$.

Es inmediato comprobar que d_i conserva el orden y las longitudes, así como que hace conmutativo el diagrama del enunciado.

Ahora observamos que si $j > 2n+1$ entonces $S \cap X^{<2n+1} = S_j \cap X_j^{2n+1}$, luego $\Sigma^{\mathrm{I}}(S \cap X^{<2n+1}) = \Sigma^{\mathrm{I}}(S_j \cap X_j^{<2n+1})$. Más aún, se comprueba inmediatamente que si $j' > j > i$ y $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(S \cap X^{<2n+1})$, entonces $c^{\mathrm{I}}_{j'i}(\sigma) = c^{\mathrm{I}}_{ji}(\sigma)$.

De este modo, si $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}_*(S)$, existe un $n \in \omega$ tal que $\sigma \in \Sigma^{\mathrm{I}}(S \cap X^{<2n+1})$, y podemos definir $d^{\mathrm{I}}_i(\sigma) = c^{\mathrm{I}}_{ji}(\sigma)$, para cualquier $j > 2n+1$. Tenemos así una aplicación $d^{\mathrm{I}}_i : \Sigma^{\mathrm{I}}_*(S) \longrightarrow \Sigma^{\mathrm{I}}_*(S_j)$, y es fácil ver que cumple las condiciones de la definición de cubrimiento, así como que hace conmutativo el diagrama del enunciado. Similarmente se define y se razona con d^{II}_i. ■

El teorema siguiente completa la demostración de 6.22:

Teorema 6.25 *La clase* $\mathbf{U}$ *es cerrada para intersecciones numerables.*

Demostración: Sea $\{A_i\}_{i\in\omega}$ una familia de conjuntos en $\mathbf{U}(Y^\omega)$. Hemos de probar que $A = \bigcap_{i\in\omega} A_i \in \mathbf{U}(Y^\omega)$.

Para ello tomamos un árbol S_0 en Y, una aplicación continua $f : [S_0] \longrightarrow Y^\omega$ y un $k \in \omega$, y hemos de encontrar un k-cubrimiento de S_0 que resuelva el juego $J(S_0, f^{-1}[A])$.

Como A_0 es absolutamente resoluble, existe un k-cubrimiento $c_0 : S_1 \longrightarrow S_0$ que resuelve el juego $J(S_0, f^{-1}[A_0])$. Igualmente, como A_1 es completamente resoluble, existe un $k+1$-cubrimiento $c_1 : S_2 \longrightarrow S_1$ que resuelve el juego $J(S_1, (c_0 \circ f)^{-1}[A_1])$. Procediendo de este modo obtenemos una familia de cubrimientos $c_i : S_{i+1} \longrightarrow S_i$ en las condiciones del teorema anterior, de modo que, si llamamos c_{ji} a las composiciones $c_{j-1} \circ \cdots \circ c_i$, tenemos que c_i resuelve el juego $J(S_i, (c_{i0} \circ f)^{-1}[A_i])$.

Esto significa que existe un abierto cerrado $B_i \subset X_{i+1}^\omega$ tal que

$$c_{i+1,0}^{-1}[f^{-1}[A_i]] = c_i^{-1}[(c_{i0} \circ f)^{-1}[A_i]] = [S_{i+1}] \cap B_i.$$

Sea S el árbol (en un conjunto X) dado por el teorema anterior, de modo que tenemos también $k+i$-cubrimientos $d_i : S \longrightarrow S_i$, y sea $B = \bigcap\limits_{i \in \omega} d_{i+1}^{-1}[B_i]$, que es un cerrado en X.

Necesitaríamos que B fuera abierto cerrado, así que aplicamos el teorema 6.23, según el cual existe un árbol R en un conjunto X' y un k-cubrimiento $e : R \longrightarrow S$ que resuelve el juego $J(S, B)$. Esto significa que existe un abierto cerrado $C \subset X'^\omega$ tal que $e^{-1}[B] = [R] \cap C$.

Vamos a probar que el k-cubrimiento $c = e \circ d_0 : R \longrightarrow S_0$ resuelve el juego $J(S_0, f^{-1}[A])$. Basta ver que

$$\bigcap_{i \in \omega} c^{-1}[f^{-1}[A_i]] = c^{-1}[f^{-1}[A]] = [R] \cap C$$

o, equivalentemente, que si $x \in [R]$, entonces

$$x \in C \leftrightarrow \bigwedge i \in \omega\ d_0(e(x)) \in f^{-1}[A_i].$$

En efecto:

$$x \in C \leftrightarrow e(x) \in B \leftrightarrow \bigwedge i \in \omega\ d_{i+1}(e(x)) \in B_i$$

$$\leftrightarrow \bigwedge i \in \omega\ c_{i+1,0}(d_{i+1}(e(x))) \in f^{-1}[A_i] \leftrightarrow \bigwedge i \in \omega\ d_0(e(x)) \in f^{-1}[A_i],$$

donde hemos usado que, trivialmente, $d_0 = d_{i+1} \circ c_{i+1,0}$. ■

Observemos que en la demostración de 6.22 sólo hemos empleado AE al usar el teorema de Gale-Stewart en la demostración de 6.20. El teorema 6.7 prueba que dicho uso de AE es inevitable. Ahora bien, si llamamos $\mathbf{U_0}$ a la restricción de la clase $\mathbf{U}$ a espacios X^ω con X numerable (lo que supone exigir en la definición de conjunto absolutamente resoluble que el árbol R esté definido sobre un conjunto numerable), todo el argumento sigue siendo válido particularizado a $\mathbf{U_0}$, y así ya no es necesario AE. En efecto, es obvio que la versión 6.4 del teorema de Gale-Stewart es válida —más en general— para juegos definidos en árboles sobre conjuntos numerables cualesquiera (no necesariamente ω), y esto es lo único que necesitamos ahora en la prueba de 6.20. Sólo hay que tener presente que los únicos árboles que construimos en la demostración son el árbol R construido en la prueba de 6.23 —cuyo conjunto X es claramente numerable si el conjunto Y de partida lo es— y el árbol S construido en el teorema 6.24, cuyo conjunto X es numerable si lo son todos los conjuntos X_i correspondientes a los cubrimientos dados (pues es la unión de todos ellos). Consecuentemente:

Teorema 6.26 (Martin) $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Delta}^1_1)$.

Aunque en principio este teorema es un caso particular de 6.22, lo destacable es que se puede demostrar en ZF+ED. (Por ejemplo, la sucesión de cubrimientos c_i construida en la demostración del teorema 6.25 es un caso típico de aplicación de ED.)

6.4 El axioma de determinación proyectiva

Los resultados de la sección 6.2 muestran el impacto que tiene sobre la teoría descriptiva de conjuntos la determinación de los juegos infinitos, por lo que resulta natural estudiar las consecuencias del *axioma de determinación proyectiva:*

(ADP) Si $A \subset \mathcal{N}$ es un conjunto proyectivo, el juego $J(A)$ está determinado.

Más brevemente, el axioma ADP es la sentencia $\mathrm{Det}_\omega(P)$, donde P es la clase de los subconjuntos proyectivos de $\mathcal{N}$. Según hemos anunciado en la sección anterior, la única porción de ADP demostrable en ZFC (de hecho, en ZF + ED) es la determinación de los conjuntos de Borel. Aunque al tomar como hipótesis adicional ADP nos estamos saliendo de la teoría axiomática ZF + ED, a la que se supone que está dedicada la primera parte de este libro, estudiaremos aquí las consecuencias de este axioma porque las técnicas necesarias para ello son las mismas que hemos venido empleando hasta ahora, sin necesidad de ningún conocimiento de la lógica matemática ni de teoría de conjuntos más avanzada. Dejaremos para la segunda parte del libro el estudio de la consistencia de ADP con los axiomas de ZFC. No obstante, en esta sección seguimos tomando la axiomática ZF + ED como teoría básica, y señalaremos explícitamente todo uso que hagamos de ADP al igual que venimos haciendo con los usos de AE.

Para empezar, a partir de los resultados obtenidos en la sección 6.2, se obtiene inmediatamente el teorema siguiente:

Teorema 6.27 (ADP) *Todo conjunto proyectivo en un espacio polaco es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto.*

Por el teorema 4.41, otra consecuencia de ADP es que no existen bases de Hamel proyectivas. Ahora vamos a ver que ADP resuelve también otras cuestiones sobre las clases superiores de la jerarquía proyectiva.

6.4.1 Clases normadas

Empezamos estudiando cuáles de las clases de Kleene y de Lusin son normadas. La cuestión la resuelve completamente el teorema siguiente (debido a Moskovakis), dual de 5.31:

Teorema 6.28 (Primer teorema de periodicidad) *Para cada $a \in \mathcal{N}$, si la clase $\Sigma^1_n(a)$ es normada y se cumple* $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Delta}^1_n)$, *también lo es $\Pi^1_{n+1}(a)$.*

Demostración: Sea X un espacio producto y sea $A \subset X$ un conjunto $\Pi^1_{n+1}(a)$, de modo que existe un conjunto $B \subset X \times \mathcal{N}$ de clase $\Sigma^1_n(a)$ tal que $A = \bigwedge x\, B$. Por hipótesis existe una norma $\phi : B \longrightarrow \Omega$ en $\Sigma^1_n(a)$. Fijados x, $y \in \mathcal{N}$, consideramos el juego $J_{x,y}$ en el que, si I juega la sucesión u y II juega la sucesión v, entonces

I gana si y sólo si $(y, v) <^*_\phi (x, u) \leftrightarrow (y, v) \in B \wedge \phi(y, v) < \phi(x, u)$.

Equivalentemente:

II gana si y sólo si $(y, v) \notin B \vee \phi(x, u) \leq \phi(y, v) \leftrightarrow (y, v) \notin B \vee (x, u) \leq^*_\phi (y, v)$.

Para todo x, $y \in X$, el juego $J_{x,y}$ está determinado.

En efecto, si $y \notin A$, el jugador II gana la partida jugando cualquier v tal que $(y, v) \notin B$, mientras que si $y \in A$, entonces

$$\text{I gana} \leftrightarrow (y, v) <^*_\phi (x, u) \leftrightarrow (x, u) \not\leq^*_\phi (y, v)$$

Como ϕ es una norma en $\mathbf{\Sigma}^1_n$, el conjunto de los (u, v, x, y) que cumplen las dos equivalencias es $\mathbf{\Delta}^1_n$ en $X \times X \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ el conjunto de las partidas $\langle u, v\rangle$ ganadas por I (es decir, el conjunto de apuestas del juego $J_{x,y}$) es una antiimagen continua del anterior (por la aplicación $p \mapsto (p_0, p_1, x, y)$), luego también es $\mathbf{\Delta}^1_n$ y, por hipótesis, está determinado.

Ahora definimos $x \leq y \leftrightarrow$ II tiene una estrategia ganadora en $J_{x,y}$.

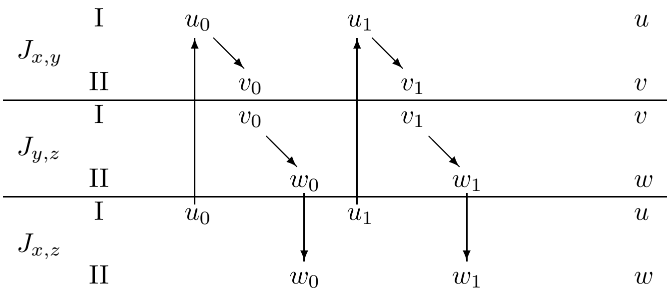
Vamos a demostrar que la restricción de $\leq$ a A es un pre-buen orden, es decir, se trata de una relación reflexiva, transitiva, conexa y bien fundada. Esto hace que el cociente de A respecto de la relación de equivalencia dada por $x \sim y \leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x$ esté bien ordenado por la relación inducida por $\leq$.

Para todo $x \in A$, se cumple que $x \leq x$.

En efecto, para ganar en $J_{x,x}$ lo único que tiene que hacer II es repetir las jugadas de I, de modo que la partida resultante es de la forma (u, u), con lo que obviamente $(x, u) \notin B \vee \phi(x, u) \leq \phi(x, u)$.

Si $x, y, z \in A$, entonces $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$.

En efecto, suponemos que II tiene estrategias ganadoras para $J_{x,y}$ y $J_{x,z}$, y hemos de describir una estrategia ganadora para $J_{x,z}$. La figura ilustra cómo obtenerla:

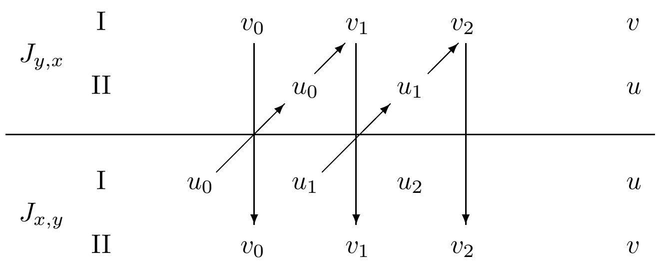


Si I juega u_0 en el juego $J_{x,z}$, llevamos su jugada al juego $J_{x,y}$ y obtenemos la jugada v_0 determinada por la estrategia de II para dicho juego. A continuación convertimos esta jugada de II en una jugada de I en el juego $J_{y,z}$ y obtenemos la jugada w_0 determinada por la estrategia de II en dicho juego. El resultado lo convertimos en la respuesta de II para el juego $J_{x,z}$. A partir de aquí I realiza su jugada u_1 y repetimos el proceso indefinidamente. Como x, y, $z \in A$, tenemos que (x, u), (y, v), $(z, w) \in B$ y, como las estrategias empleadas por II en $J_{x,y}$ y $J_{y,z}$ son ganadoras, tenemos que $\phi(x, u) \leq \phi(y, v) \leq \phi(z, w)$, y esto implica que II gana siempre el juego $J_{x,z}$, luego $x \leq z$.

Definimos ahora $x < y \leftrightarrow x \leq y \land y \not\leq x$. Entonces

Si x, $y \in A$, entonces $x < y \leftrightarrow$ I tiene una estrategia ganadora para $J_{y,x}$.

En efecto, si $x < y$ entonces $y \not\leq x$, luego II no tiene una estrategia ganadora para $J_{y,x}$ y, como el juego está determinado, la ha de tener I. Recíprocamente, si I tiene una estrategia ganadora para $J_{y,x}$, entonces II no la tiene, luego $y \not\leq x$, pero falta probar que $x \leq y$, es decir, que II sí que tiene una estrategia ganadora para $J_{x,y}$. La figura ilustra dicha estrategia:



Si la primera jugada de I en $J_{x,y}$ es u_0, la respuesta de II es la primera jugada v_0 de I según su estrategia para el juego $J_{y,x}$. Luego I juega arbitrariamente u_1 y II juega u_0 en $J_{y,x}$ y toma la respuesta v_1 de I como su jugada en $J_{x,y}$, y así sucesivamente. El juego $J_{x,y}$ termina con una partida (u, v) tal que I ha ganado $J_{y,x}$ con (v, u), es decir, se cumple que $(x, u) \in B \land \phi(x, u) < \phi(y, v)$. En particular $\phi(x, u) \leq \phi(y, v)$, luego II gana la partida de $J_{x,y}$.

Por consiguiente, *si x, $y \in A$, o bien $x \leq y$, o bien $y \leq x$* (pues si no se da el primer caso, es que II no tiene una estrategia ganadora en $J_{x,y}$, luego la tiene I, luego $y < x$).

La relación $<$ está bien fundada en A.

Supongamos, en caso contrario, que existe una sucesión decreciente

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$$

De modo que I tiene una estrategia ganadora para $J_{x_i,x_{i+1}}$. Entonces podríamos establecer una sucesión de partidas según este esquema:

$$\begin{array}{cc|cccccc}
 & \mathrm{I} & u_0^0 & & u_1^0 & & u_2^0 & \quad u^0 \\
J_{x_0,x_1} & & & & & & & \\
 & \mathrm{II} & & u_0^1 & & u_1^1 & & \quad u^1 \\
\hline
 & \mathrm{I} & u_0^1 & & u_1^1 & & u_2^1 & \quad u^1 \\
J_{x_1,x_2} & & & & & & & \\
 & \mathrm{II} & & u_0^2 & & u_1^2 & & \quad u^2 \\
\hline
 & \mathrm{I} & u_0^2 & & u_1^2 & & u_2^2 & \quad u^2 \\
J_{x_2,x_3} & & & & & & & \\
 & \mathrm{II} & & u_0^3 & & u_1^3 & & \quad u^3 \\
\hline
 & \mathrm{I} & u_0^3 & & u_1^3 & & u_2^3 & \quad u^3 \\
J_{x_3,x_4} & & & & & & & \\
 & \mathrm{II} & & u_0^4 & & u_1^4 & & \quad u^4 \\
\vdots & & & & & & & \quad \vdots
\end{array}$$

En cada una de ellas I juega con una estrategia ganadora y por consiguiente obtenemos una sucesión decreciente de ordinales:

$$\phi(x_0, u^0) > \phi(x_1, u^1) > \phi(x_2, u^2) > \cdots$$

Con esto tenemos probado que $A/\sim$ está bien ordenado por la relación de orden inducida por $\leq$, lo cual nos da una aplicación $\psi : A \longrightarrow \Omega$ que induce sobre el cociente una semejanza en un ordinal. Así pues, si x, $y \in A$, se cumple

$$x \leq y \leftrightarrow \psi(x) \leq \psi(y).$$

Vamos a probar que ψ es una norma en $\Pi^1_{n+1}(a)$. En efecto, tenemos que

$$x \leq^*_\psi y \leftrightarrow x \in A \land \text{II tiene una estrategia ganadora para } J_{x,y}$$

$$\leftrightarrow x \in A \land \text{I no tiene una estrategia ganadora para } J_{x,y}$$

$$\leftrightarrow x \in A \land \bigwedge \sigma \bigvee v \in \mathcal{N}\ (x, \sigma * v) \leq^*_\phi (y, v),$$

donde aquí representamos por $\sigma * v$ la sucesión u de jugadas de I que determina la estrategia σ cuando II juega v.

Ahora observamos que toda aplicación $\sigma : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$ define una estrategia para cualquiera de los dos jugadores, y que, recíprocamente, toda estrategia se puede extender a una aplicación en estas condiciones. A su vez, a través de la biyección canónica entre $\omega^{<\omega}$ y ω, podemos identificar a las estrategias para I con los elementos de $\mathcal{N}$. Es fácil ver que $(x, y, \sigma, v) \mapsto (x, \sigma * v, y, v)$ es una aplicación $f : \mathcal{N}^4 \longrightarrow \mathcal{N}^4$ de clase Δ^1_1, luego

$$\{(x, y, \sigma, v) \in \mathcal{N}^4 \mid (x, \sigma * v) \leq^*_\phi (y, v)\} \in \Sigma^1_n(a),$$

pues es la antiimagen de $\leq^*_\phi$ por f. Es claro entonces que $\leq^*_\psi$ es $\Pi^1_{n+1}(a)$. Similarmente:

$$x <^*_\psi y \leftrightarrow x \in A \wedge \text{I tiene una estrategia ganadora para } J_{y,x}$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge \text{II no tiene una estrategia ganadora pra } J_{y,x}$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge \bigwedge \tau \bigvee u \ (x, u) <^*_\phi (y, u * \tau),$$

y se razona análogamente que $<^*_\psi$ es $\Pi^1_{n+1}(a)$. ■

Teniendo en cuenta que la clase $\Pi^1_1(a)$ es normada (teorema 5.30) así como el teorema 5.31, concluimos inmediatamente:

Teorema 6.29 (ADP) *Las clases* $\Pi^1_{2n+1}(a)$ *y* $\Sigma^1_{2n+2}(a)$ *son normadas, pero sus complementarias no lo son.*

El hecho de que las clases complementarias no sean normadas se sigue del teorema 5.29, que nos dice además que las clases indicadas en el teorema anterior tienen la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción, mientras que las complementarias tienen la propiedad de separación.

A su vez, del teorema anterior se sigue inmediatamente la versión para las clases de Lusin, que a su vez se extiende a espacios polacos cualesquiera. (Alternativamente, en la demostración de 6.28 el espacio X puede ser un espacio polaco arbitrario.)

Teorema 6.30 (ADP) *Las clases de Lusin*

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{\Sigma}^1_2 & & \mathbf{\Sigma}^1_4 & & \mathbf{\Sigma}^1_6 & \cdots \\ \mathbf{\Pi}^1_1 & & \mathbf{\Pi}^1_3 & & \mathbf{\Pi}^1_5 & & \cdots \end{array}$$

son normadas, pero sus complementarias no lo son.

El teorema 4.45 nos da que las clases indicadas tienen la propiedad de uniformización numérica y la propiedad de reducción generalizada, mientras que sus complementarias tienen la propiedad de separación generalizada.

6.4.2 Clases con escalas

Nos ocupamos ahora de la existencia de escalas y, a su vez, de la propiedad de uniformización. Vamos a necesitar un resultado técnico:

Teorema 6.31 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y X un espacio producto no numerable. Si un conjunto $A \subset X$ admite una escala en $\Sigma^1_n(a)$ o en $\Pi^1_n(a)$, entonces admite una escala $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ con las propiedades adicionales siguientes:*

a) Si $\{x_m\}_{m\in\omega}$ es una sucesión en A tal que, para todo $n \in \omega$, cada sucesión $\{\phi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ es finalmente constante igual a α_n, entonces existe un $x \in A$ tal que $\lim\limits_m x_m = x$ (y entonces, por definición de escala, $\phi_n(x) \leq \alpha_n$).

b) Si x, $y \in A$ cumplen $\phi_n(x) \leq \phi_n(y)$, entonces $\bigwedge i \leq n\ \phi_i(x) \leq \phi_i(y)$.

Demostración: Supondremos en primer lugar que $X = \mathcal{N}$. Sea $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ una escala en A y sea λ un ordinal suficientemente grande como para que todas las normas ψ_n tomen imágenes en λ. Sea S_n el conjunto de las $2n+2$-tuplas de la forma $(\xi_0, k_0, \ldots, \xi_n, k_n)$ con $\xi_i < \lambda$, $k_i < \omega$. Consideramos en S_n el buen orden lexicográfico (de modo que, para comparar dos de sus elementos, empezamos comparando su primera componente, en caso de empate la segunda, etc.) y sea $(\xi_0, k_0, \ldots, \xi_n, k_n) \mapsto \langle \xi_0, k_0, \ldots, \xi_n, k_n\rangle$ la semejanza de S_n en su ordinal. Definimos

$$\phi_n(x) = \langle \psi_0(x), x(0), \psi_1(x), x(1), \ldots, \psi_n(x), x(n)\rangle .$$

Vamos a probar que $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala con las propiedades adicionales indicadas. Conviene abreviar $x \sim_{\psi_i} y \leftrightarrow x \leq^*_{\psi_i} y \land y \leq^*_{\psi_i} x$, que es una relación $\Sigma^1_n(a)$ o $\Pi^1_n(a)$ en $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega$. Ahora:

$$x \leq^*_{\phi_m} y \leftrightarrow x <^*_{\psi_0} y \lor (x \sim_{\psi_0} y \land x(0) < y(0)) \lor$$

$$\cdots \lor (x \sim_{\psi_0} y \land x(0) = y(0) \land \cdots \land x \sim_{\psi_m} y \land x(m) \leq y(m))$$

$$\leftrightarrow \bigvee i \leq m (\bigwedge j < i (x \sim_{\psi_j} y \land x(j) = y(j)) \land$$

$$(x <^*_{\psi_i} y \lor (x \sim_{\psi_i} y \land x(i) < y(i))) \lor (i = m \land x \sim_{\psi_m} y \land x(m) \leq y(m))).$$

Es claro que esta relación (triádica) está en la clase correspondiente $\Sigma^1_n(a)$ o $\Pi^1_n(a)$, y con una mínima variación se prueba lo mismo para $x <^*_{\phi_m} y$.

Consideremos una sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ en A tal que $\phi_n(x_m) = \alpha_n$ para todo m suficientemente grande. Entonces

$$(\psi_0(x_m), x_m(0), \ldots, \psi_n(x_m), x_m(n)) = (\xi^n_0, k^n_0, \ldots, \xi^n_n, k^n_n)$$

para todo m suficientemente grande. Como $k^n_j = x_m(j)$ para todo m suficientemente grande, resulta que $k^n_j = k_j$ no depende de n y la sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a $x = (k_j)_{j\in\omega}$. Igualmente $\xi^n_j = \xi_j$ no depende de n y $\psi_j(x_m) = \xi_j$ para todo j suficientemente grande. Como $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala, tenemos que $x \in A$ y $\psi_j(x) \leq \xi_j$. Con esto queda probado que $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala, y además es claro que $\phi_n(x) \leq \langle \xi_0, k_0, \ldots, \xi_n, k_n \rangle = \alpha_n$, luego se cumple la propiedad a). La propiedad b) es inmediata.

Consideremos ahora el caso general en que X es un espacio producto no numerable. Basta considerar un homeomorfismo $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ que sea Δ^1_1. Es fácil ver que f transforma una escala en A en otra escala en $f^{-1}[A]$, la parte ya probada nos da una escala en $f^{-1}[A]$ con las propiedades adicionales, y ésta se transforma a través de f en una escala en A con las propiedades adicionales.

■

Ahora ya podemos probar el teorema fundamental, también de Moskovakis, dual de 5.34:

Teorema 6.32 (Segundo teorema de periodicidad) *Para cada $a \in \mathcal{N}$, si la clase $\Sigma^1_n(a)$ tiene escalas y se cumple $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Delta}^1_n)$, también las tiene $\Pi^1_{n+1}(a)$.*

Demostración: Sea X un espacio producto y sea $A \subset X$ un conjunto $\Pi^1_{n+1}(a)$, de modo que existe un conjunto $B \subset X \times \mathcal{N}$ de clase $\Sigma^1_n(a)$ tal que $A = \bigwedge x\, B$. Sea $\{\phi_n\}_{n\in\omega}$ una escala en A que cumpla las condiciones del teorema anterior. Consideremos la biyección canónica $s : \omega \longrightarrow \omega^{<\omega}$, de modo que $s_0 = \varnothing$. Se comprueba además que si $s_i \subset s_j$ entonces $i \leq j$. Definimos

$$A_n = \{x \in X \mid \bigwedge y \in \mathcal{N}(s_n \subset y \rightarrow (x, y) \in B)\}.$$

Así $A_0 = A$ y $\bigwedge n \in \omega\ A \subset A_n$. Vamos a definir una norma ψ_n sobre A_n. Dados $x, y \in X$, consideramos el juego $J^n_{x,y}$ en el que, si I juega la sucesión u' y II juega la sucesión v', entonces, llamando $u = s_n{}^\frown u'$, $v = s_n{}^\frown v'$, se cumple que

I gana si y sólo si $(y, v) <^*_{\phi_n} (x, u) \leftrightarrow (y, v) \in B \wedge \phi_n(y, v) < \phi_n(x, u)$.

Equivalentemente:

II gana syss $(y, v) \notin B \vee \phi_n(x, u) \leq \phi_n(y, v) \leftrightarrow (y, v) \notin B \vee (x, u) \leq^*_{\phi_n} (y, v)$.

Ahora definimos $x \leq_n y \leftrightarrow$ II tiene una estrategia ganadora en $J^n_{x,y}$.

Los mismos razonamientos empleados en la prueba del teorema 6.28 (mínimamente adaptados) nos permiten construir una norma ψ_n sobre A_n cuya relación $\leq_{\psi_n}$ sea precisamente la relación $\leq_n$ que acabamos de definir. Más aún, las relaciones triádicas $\leq^*_{\psi_m}$ y $<^*_{\psi_m}$ están en la clase $\Pi^1_{n+1}(a)$ (donde la última n es la constante que aparece en el enunciado).

Vamos a probar que $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en A. Para ello tomamos una sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ en A que converja a un $x \in X$ y tal que las sucesiones $\{\psi_n(x_m)\}_{m\in\omega}$ tomen finalmente un valor constante α_n. Tomando una subsucesión podemos suponer que $\bigwedge m \geq n\ \psi_n(x_m) = \alpha_n$.

En primer lugar vamos a probar que $x \in A$, para lo cual hemos de probar que, para todo $y \in \mathcal{N}$, se cumple que $(x, y) \in B$. Sea n_i tal que $s_{n_i} = y|_i$. De este modo $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$

Entonces $\psi_{n_i}(x_{n_i}) = \psi_{n_i}(x_{n_{i+1}}) = \alpha_{n_i}$, luego $x_{n_{i+1}} \leq_{n_i} x_{n_i}$, luego II tiene una estrategia ganadora en el juego $J^{n_i}_{x_{n_{i+1}}, x_{n_i}}$. Consideramos ahora las partidas descritas por la figura siguiente, en las que II aplica siempre una estrategia ganadora:

$$
\begin{array}{llc|cccccc|c}
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
\hline
 & y_0\ y_1\ y_2 & \mathrm{I} & y_3 & & y^4_4 & & y^4_5 & \cdots & y^4 \\
J^{n_3}_{x_{n_4}, x_{n_3}} & & & & & & & & & \\
 & y_0\ y_1\ y_2 & \mathrm{II} & & y^3_3 & & y^3_4 & & \cdots & y^3 \\
\hline
 & y_0\ y_1 & \mathrm{I} & y_2 & & y^3_3 & & y^3_4 & \cdots & y^3 \\
J^{n_2}_{x_{n_3}, x_{n_2}} & & & & & & & & & \\
 & y_0\ y_1 & \mathrm{II} & & y^2_2 & & y^2_3 & & \cdots & y^2 \\
\hline
 & y_0 & \mathrm{I} & y_1 & & y^2_2 & & y^2_3 & \cdots & y^2 \\
J^{n_1}_{x_{n_2}, x_{n_1}} & & & & & & & & & \\
 & y_0 & \mathrm{II} & & y^1_1 & & y^1_2 & & \cdots & y^1 \\
\hline
 & & \mathrm{I} & y_0 & & y^1_1 & & y^1_2 & \cdots & y^1 \\
J^{n_0}_{x_{n_1}, x_{n_0}} & & & & & & & & & \\
 & & \mathrm{II} & & y^0_0 & & y^0_1 & & \cdots & y^0 \\
\hline
\end{array}
$$

El jugador I empieza la primera partida con y_0, la siguiente con y_1, y así sucesivamente. La segunda jugada de I en la primera partida es la respuesta de II en la segunda, la segunda jugada de I en la segunda es la respuesta de II en la tercera, y así sucesivamente. Llamamos y^i a las sucesiones que resultan de completar las sucesiones jugadas por cada jugador con la sucesión $s_{n_i} = y|_i$ correspondiente a cada juego, de modo que $\lim_i y^i = y$. Como II gana todas las partidas, se cumple que $\phi_{n_i}(x_{n_{i+1}}, y^{i+1}) \leq \phi_{n_i}(x_{n_i}, y^i)$.

Por la propiedad b) del teorema anterior, para todo i suficientemente grande se cumple que

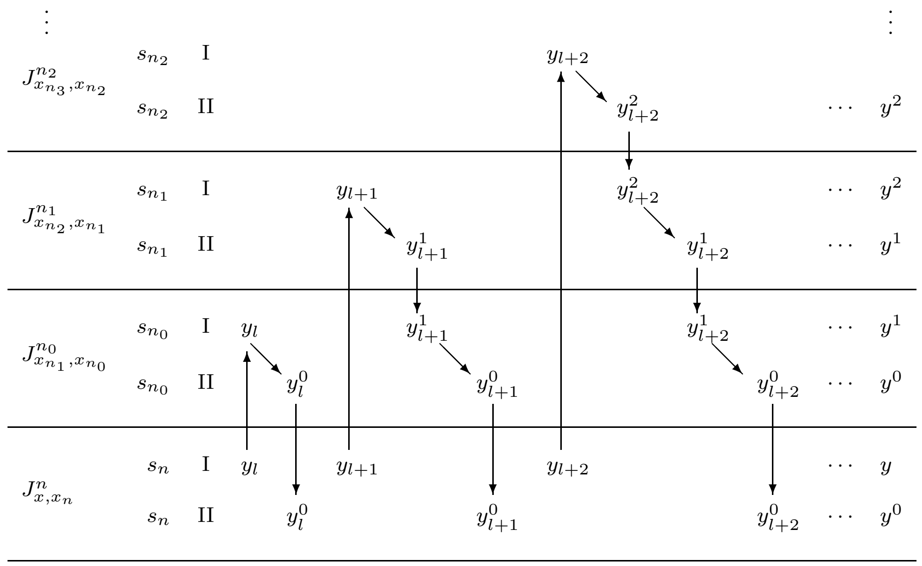
$$\phi_k(x_{n_{i+1}}, y^{i+1}) \leq \phi_k(x_{n_i}, y^i),$$

pero toda sucesión decreciente de ordinales ha de ser finalmente constante, luego la sucesión $\{\phi_k(x_{n_i}, y^i)\}_{i\in\omega}$ es finalmente constante. Como $(x_{n_i}, y^i) \to (x, y)$, la definición de escala nos da que $(x, y) \in B$, para todo y, luego $x \in A$.

Ahora falta probar que $\psi_n(x) \leq \alpha_n = \psi_n(x_n)$. Esto equivale a que $x \leq_n x_n$, es decir, a que II tenga una estrategia ganadora en el juego J^n_{x,x_n}. Veamos cómo construir dicha estrategia.

Observemos que si $k \leq m$, entonces $\psi_k(x_k) \leq \psi_k(x_m)$, luego $x_m \leq_k x_k$, luego II tiene una estrategia ganadora para $J^k_{x_m,x_k}$ (para todo $k \leq m$).

Llamemos $n_0 = n$ y $l = \ell(s_n)$. La figura siguiente explica la estrategia que vamos a considerar:



Llamamos y_l a la primera jugada de I en el juego J^n_{x,x_n}. Para responder, II la lleva a una primera jugada de I en el juego $J^{n_0}_{x_{n_1},x_{n_0}}$, donde n_1 es el número natural que cumple que $s_{n_1} = s_{n_0}{}^\frown y_l$. Luego II aplica su estrategia para este juego y copia la respuesta en el juego inicial.

Seguidamente I juega un y_{l+1} arbitrario y II lo toma como primera jugada de I en el juego $J^{n_1}_{x_{n_2},x_{n_1}}$, donde n_2 es el número natural tal que $s_{n_2} = s_{n_1}{}^\frown y_{l+1}$. Después aplica su estrategia para este juego, copia la respuesta como jugada de I en el juego anterior, aplica su estrategia y copia la respuesta en el juego inicial, y así sucesivamente.

Si llamamos y^i a las sucesiones resultantes (con la sucesión s_{n_i} correspondiente incorporada), es claro que $\lim\limits_i y^i = y$ (donde y es la sucesión jugada por I en el juego inicial). Como II gana todas las partidas salvo quizá la primera, sabemos que $\phi_{n_i}(x_{n_{i+1}}, y^{i+1}) \leq \phi_{n_i}(x_{n_i}, y^i)$. Por la propiedad b) del teorema anterior, para todo i suficientemente grande,

$$\phi_k(x_{n_{i+1}}, y^{i+1}) \leq \phi_k(x_{n_i}, y^i). \tag{6.1}$$

Como toda sucesión decreciente de ordinales es finalmente constante, cada sucesión $\{\phi_k(x_{n_i}, y^i)\}_{i\in\omega}$ es finalmente constante, digamos igual a β_k, luego, por definición de escala, $(x, y) \in B$ y $\phi_k(x, y) \leq \beta_k$. Tomando $k = n = n_0$ en (6.1) obtenemos que

$$\phi_n(x_{n_0}, y^0) \geq \phi_n(x_{n_1}, y^1) \geq \phi_n(x_{n_2}, y^2) \geq \cdots \geq \beta_n \geq \phi_n(x, y),$$

y esto significa que II gana la partida de J^n_{x,x_n}.

Con esto hemos probado que $\{\psi_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en A. Sin embargo, hay un detalle a causa del cual todavía no podemos dar el teorema por demostrado: Tenemos que las relaciones

$$x \leq^*_{\psi_m} y \leftrightarrow x \in A_m \wedge \psi_m(x) \leq \psi_m(y),$$
$$x <^*_{\psi_m} y \leftrightarrow x \in A_m \wedge \psi_n(x) < \psi_m(y),$$

son $\Pi^1_{n+1}(a)$, donde n es el natural fijo dado por el enunciado, mientras que necesitamos que se cumpla esto mismo cambiando A_m por A y que ψ_m tome su valor máximo sobre todos los elementos de $X \setminus A$, en lugar de sobre los elementos de $X \setminus A_m$. La forma más sencilla de corregir estos inconvenientes es la siguiente: sea λ un ordinal suficientemente grande como para que todas las aplicaciones ψ_m tomen valores menores que λ, consideramos la semejanza $\lambda\times\lambda$ y sea $(\alpha,\beta)\mapsto\langle\alpha,\beta\rangle$ de $\lambda\times\lambda$ (con el orden lexicográfico) en su ordinal y definimos

$$\psi'_m(x) = \langle\psi_0(x), \psi_m(x)\rangle\,.$$

Una simple adaptación del argumento del teorema anterior muestra que $\{\psi'_n\}_{n\in\omega}$ es una escala en A y, además,

$$x \leq^*_{\psi'_m} y \leftrightarrow x \in A \wedge \psi'_m(x) \leq \psi'_m(y) \leftrightarrow$$
$$x \in A \wedge (\psi_0(x) < \psi_0(y) \vee (\psi_0(x) = \psi_0(y) \wedge \psi_m(x) \leq \psi_m(y))) \leftrightarrow$$
$$x <^*_{\psi_0} y \vee (x \leq^*_{\psi_0} y \wedge y \leq^*_{\psi_0} x \wedge x \leq^*_{\psi_m} y),$$

donde usamos que $A = A_0 \subset A_m$, de modo que $x \in A \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A_m$. Esta expresión muestra que la relación triádica $x \leq^*_{\psi'_m} y$ es $\Pi^1_{n+1}(a)$, e igualmente se razona con $x <^*_{\psi'_m} y$. ■

Combinando esto con los teoremas 5.32 y 5.34 obtenemos:

Teorema 6.33 (ADP) *Las clases $\Pi^1_{2n+1}(a)$ y $\Sigma^1_{2n+2}(a)$ tienen escalas y la propiedad de uniformización.*

La prueba del teorema 6.32 es válida sin cambio alguno para la clase $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ y entonces podemos tomar como X un espacio polaco arbitrario. Por consiguiente:

Teorema 6.34 (ADP) *Las clases de Lusin*

$$\begin{array}{ccccccc} & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 & & \boldsymbol{\Sigma}^1_4 & & \boldsymbol{\Sigma}^1_6 & \cdots \\ \boldsymbol{\Pi}^1_1 & & \boldsymbol{\Pi}^1_3 & & \boldsymbol{\Pi}^1_5 & & \cdots \end{array}$$

tienen escalas y la propiedad de uniformización.

Nota (ADP) Partiendo de que $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n+1}$ no tiene la propiedad de separación (por los teoremas 5.29 y 6.29), el argumento del teorema 4.50 nos da que existen conjuntos $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n}$ en $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ que no pueden ser uniformizados por conjuntos $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1}$. Por consiguiente, ni $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n}$ ni $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+1}$ tienen la propiedad de uniformización. A su vez, esto implica que $\boldsymbol{\Pi}^1_{2n}$ no tiene escalas y, por (la versión para clases de Lusin de) 6.32, $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n-1}$ tampoco las tiene. ■

6.5 El axioma de determinación

El *axioma de determinación* es la sentencia siguiente:

(AD) *Para todo $A \subset \mathcal{N}$, el juego $J(A)$ está determinado.*

Más brevemente, AD es la sentencia $\mathrm{Det}_\omega(\mathcal{PN})$. El teorema 6.2 nos da la implicación AD $\rightarrow \neg$AE, luego ZFD = ZF + ED + AD es una extensión de ZF incompatible con ZFC. La razón principal por la que hemos desarrollado la teoría descriptiva de conjuntos en ZF + ED es para asegurar que todos los resultados que hemos visto en este libro (excepto aquellos pocos que han requerido AE) siguen siendo válidos en ZFD. Demostraremos más adelante que i la existencia de ciertos cardinales grandes es consistente, entonces ZFD es también consistente.

En la sección 6.1 hemos visto que todo juego $J(R, A)$ puede reducirse a un juego $J(A')$, por lo que el axioma de determinación implica que todo juego $J(R, A)$ está determinado.

Bajo AD tenemos la siguiente generalización del teorema 6.27:

Teorema 6.35 (AD) *Todo subconjunto de todo espacio polaco es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si no es numerable, contiene un subconjunto perfecto.*

La afirmación sobre subconjuntos perfectos es consecuencia inmediata de 6.10 tomando $\mathbf{\Gamma} = \mathcal{PN}$.

La afirmación sobre la propiedad de Baire se puede probar particularizando la demostración del teorema 6.16. En efecto, allí se parte de un conjunto $A \subset X$ de clase $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ y se expresa como $A = \pi[F]$, con $F \subset X \times \mathcal{N}$ de clase $\mathbf{\Pi}^1_n$ y se usa $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_n)$ para probar que A tiene la propiedad de Baire. Ahora partimos de un $A \subset X$ arbitrario y la prueba sigue siendo válida tomando $F = A \times \mathcal{N}$ y usando AD (con lo que no hemos de preocuparnos de ver qué tipo de conjunto es F). No obstante, el argumento puede simplificarse eliminando el paso a F por completo. Vamos a verlo con detalle:

Fijamos un espacio polaco X y en él una base $B = \{B_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos no vacíos. Para cada conjunto $A \subset X$, consideramos *juego de Banach-Mazur* $G^{**}(A)$ que sigue el esquema siguiente:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathrm{I} & U_0 & & U_1 & & \cdots & \\ \hline \mathrm{II} & & V_0 & & V_1 & & \cdots \end{array}$$

con las reglas

a) U_n, V_n son abiertos de básicos de $\mathcal{N}$ de diámetro $\leq 2^{-n}$.

b) $\overline{U_{n+1}} \subset \overline{V_n} \subset \overline{U_n}$.

Así, cada partida determina un único $x \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n}$. El jugador I gana la partida si $x \in A$.

Observemos que a través de la enumeración de la base podemos considerar que cada jugada es en realidad un número natural. Las dos reglas del juego determinan entonces un árbol bien podado $R \subset \omega^{<\omega}$ y el juego es equivalente al juego $J(R, A')$, donde A' es el conjunto de los $x \in [R]$ tales que el único punto de

$$\bigcap_{n\in\omega} \overline{B_{x(2n)}} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{B_{x(2n+1)}}$$

está en A. Por lo tanto, AD implica que el juego $G^{**}(A)$ está determinado.

Teorema 6.36 *Sea X un espacio polaco y sea $A \subset X$*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora para $G^{**}(A)$, entonces existe un $U \in B$ tal que $\overline{U} \setminus A$ es de primera categoría.*

b) Si II *tiene una estrategia ganadora para $G^{**}(A)$, entonces A es de primera categoría.*

Demostración: Veamos primero b). Sea σ una estrategia ganadora para el jugador II y sea $x \in A$.

Diremos que una posición s de longitud $2n$ es *buena* para x si está jugada de acuerdo con la estrategia σ y $x \in \overline{V_n}$. Entonces, ha de haber una posición buena para x que no pueda prolongarse a otra posición buena para x, pues, en otro caso, obtendríamos una partida jugada según σ en la que ganaría I. En otras palabras, existe una posición buena s tal que, para toda jugada posible de I, la jugada siguiente según σ hace que $x \notin \overline{V_{n+1}}$.

Si s es una posición de longitud $2n$ jugada según σ, llamaremos C_s al conjunto de todos los $x \in X$ tales que $x \in \overline{V_n}$ y, para toda jugada (legal) de I dada por U_{n+1}, el abierto V_{n+1} determinado por σ cumple que $x \notin \overline{V_{n+1}}$.

Hemos probado que, dado $x \in F$, existe una posición s de longitud par jugada según σ de modo que $x \in C_s$ o, lo que es lo mismo $F \subset \bigcup_s C_s$.

Ahora bien, sucede que C_s es diseminado, pues lo contrario significa que existe un abierto no vacío $U_{n+1} \subset \overline{C}_s \subset \overline{V}_n$, que podemos tomar de manera que $U_{n+1} \in B$ y $d(U_{n+1}) < 2^{-n-1}$. Sea entonces V_{n+1} el abierto determinado por σ si I prolonga s con U_{n+1}. Entonces $V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset \overline{U_{n+1}} \subset \overline{C}_s$, luego $V_{n+1} \cap C_s \neq \varnothing$, pero esto es absurdo, por la propia definición de C_s.

Como s recorre un conjunto numerable, concluimos que F es de primera categoría.

a) Si I tiene una estrategia ganadora σ para $G^{**}(A)$, llamemos $U = \sigma(\varnothing)$ y vamos a probar que II tiene una estrategia ganadora para $G^{**}(\overline{U} \setminus A)$. Admitiendo esto, el apartado b) ya probado nos da que $\overline{U} \setminus A$ es de primera categoría.

Veamos cuál es la estrategia de II. Sea U_0 la primera jugada de I y supongamos en primer lugar que $\overline{U_0} \not\subset \overline{U}$. Tomamos $x \in \overline{U_0} \setminus \overline{U}$. Entonces, como $X \setminus \overline{U}$ es un entorno de x, se cumple que $U_0 \cap (X \setminus \overline{U})$ es un abierto no vacío, luego podemos tomar $V_0 \in B$, $V_0 \subset \overline{V_0} \subset U_0 \setminus \overline{U}$, $d(V_0) < 1/2$. Jugando V_0, II tiene asegurada la victoria sean cuales sean las jugadas posteriores.

Supongamos ahora que $\overline{U_0} \subset \overline{U}$. Entonces II puede responder con el abierto V_0 determinado por σ para la partida que empieza con U seguido de U_0. En general, II puede jugar de modo que cada posición de la partida se convierta en una posición según σ cuando se le antepone U. De este modo se asegura de que el punto final x esté en $\overline{U} \cap A$, luego no estará en $\overline{U} \setminus A$ y ganará la partida. ■

Ahora ya podemos probar que todo $A \subset X$ tiene la propiedad de Baire. En principio, lo que sabemos es que todo $A \subset X$ es de primera categoría (en cuyo caso tiene la propiedad de Baire) o bien existe un abierto básico U_0 tal que $\overline{U}_0 \setminus A$ es de primera categoría. En el segundo caso llamamos U a la unión de todos los abiertos con dicha propiedad. Así $U \setminus A$ está contenido en una unión numerable de conjuntos de primera categoría, luego es de primera categoría. Basta probar que $A \setminus U$ también es de primera categoría, pues entonces lo será $A \Delta U$ y A tendrá la propiedad de Baire.

Si $A \setminus U$ no es de primera categoría, por el teorema anterior existe un abierto básico U_0 tal que $\overline{U}_0 \setminus (A \setminus U)$ es de primera categoría, luego $\overline{U}_0 \setminus A$ también lo es, luego $U_0 \subset U$ por definición de U, luego $U_0 \subset \overline{U}_0 \setminus (A \setminus U)$, luego U_0 es de primera categoría, lo cual es absurdo.[4] ■

Para estudiar la medibilidad, por los mismos argumentos empleados en la prueba del teorema 6.18, no perdemos generalidad si nos restringimos a $X = \mathcal{C}$, el espacio de Cantor. Como en el caso anterior, la prueba de 6.18 vale en nuestro contexto actual sin más que trivializar el paso de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, pero de hecho podemos simplificarla eliminando ese paso:

Sea $\{t_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $2^{<\omega}$ y $\{s_n\}_{n<\omega}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$. Para cada $A \subset \mathcal{C}$ y cada $\epsilon > 0$, definimos el juego $J'(A, \epsilon)$ que se juega según el esquema:

$$\begin{array}{c|cccccc} \text{I} & x_0 & & x_1 & & \cdots & \\ \hline \text{II} & & z_0 & & z_1 & & \cdots \end{array}$$

con las reglas:

a) $x_n \in 2$, $z_n \in \omega$.

b) Si $U_n = \bigcup\limits_{i<\ell(s_{z_n})} B_{t_{s_{z_n}(i)}}$, se cumple que $\mu(U_n) < \epsilon/2^{2n+2}$.

Así, cada partida determina un $x \in \mathcal{C}$ y un abierto $U = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$.

El jugador I gana la partida si $x \in A \setminus U$.

En la práctica podemos pensar que las jugadas de II son uniones finitas de abiertos básicos de $\mathcal{C}$. La jugada z_n determina una sucesión $s_{z_n} \in \omega^{<\omega}$, la

[4] Analizando con más detalle este argumento se ve fácilmente que con él también puede probarse que $\mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_n)$ implica la propiedad de Baire para los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_n$, que es un resultado menos fino que 6.16.

cual determina a su vez una sucesión finita $t_{s_{z_n}(0)}, \ldots, t_{s_{z_n}(k)} \in 2^{<\omega}$, la cual determina a su vez el abierto U_n, y cualquier unión finita de abiertos básicos puede obtenerse de esta forma.

Obviamente $J'(A, \epsilon)$ es equivalente a un juego $J(R, B)$, donde R es un árbol (claramente bien podado) en ω y B es el conjunto de los $y \in [R]$ tales que el punto $x \in \mathcal{N}$ formado por los términos pares de y está en A y no en el abierto U determinado por la sucesión z de los términos pares de y. Por lo tanto, AD implica que el juego $J'(A, \epsilon)$ está determinado.

Teorema 6.37 *Sea μ una medida de Borel unitaria en $\mathcal{C}$, $\epsilon > 0$ y $A \subset \mathcal{C}$.*

a) Si I *tiene una estrategia ganadora en el juego $J'(A, \epsilon)$, entonces A contiene un conjunto μ-medible de medida positiva.*

b) Si II *tiene una estrategia ganadora en el juego $J'(A, \epsilon)$, entonces existe un abierto $U \subset \mathcal{C}$ tal que $A \subset U$ y $\mu(U) < \epsilon$.*

Demostración: Si I tiene una estrategia ganadora σ, sea $C \subset \mathcal{N}$ el conjunto de las sucesiones $z \in \mathcal{N}$ tales que si II juega $z_0, z_1, \ldots$ sus jugadas son legales. Se cumple que C es cerrado, pues si $z \in \mathcal{N} \setminus C$, existe un mínimo $n \in \omega$ tal que la jugada z_n es ilegal, con lo que $z \in B_{z|_{n+1}} \subset \mathcal{N} \setminus C$.

La aplicación $C \longrightarrow \mathcal{C}$ dada por $z \mapsto x = (\sigma * z)_{\mathrm{I}}$ es continua, luego su imagen, que es el conjunto $B \subset A$ de todos los puntos de X construidos mediante partidas en las que I juega según σ, es un conjunto analítico, luego μ-medible. Sólo hemos de probar que no tiene medida nula.

Si fuera $\mu(B) = 0$, existiría un abierto G tal que $B \subset G$ y $\mu(G) < \epsilon/2^2$. Expresamos G como unión de abiertos básicos $G = \bigcup\limits_{i\in\omega} G_i$, donde cada G_i es de la forma B_t, para cierta $t \in 2^{<\omega}$. Como dos abiertos básicos distintos están uno contenido en otro o son disjuntos, podemos refinar la unión para que los G_i sean disjuntos dos a dos.

Definimos U_0 como una unión finita de abiertos G_i tal que $\mu(G \setminus U_0) < \epsilon/2^4$, y asegurando que al menos $G_0 \subset U_0$. Tenemos que $\mu(U_0) < \epsilon/2^2$. Similarmente, definimos $U_1 \subset G \setminus U_0$ como una unión finita de abiertos G_i de modo que $\mu(G \setminus (U_0 \cup U_1)) < \epsilon/2^6$, asegurando que $G_1 \subset U_0 \cup U_1$. Procediendo de este modo construimos una sucesión $\{U_n\}_{n<\omega}$ de abiertos en $\mathcal{C}$, cada uno de los cuales es una unión finita de abiertos básicos, $\mu(U_n) < \epsilon/2^{2n+2}$ y $B \subset G = \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$.

Entonces, la sucesión U_n determina una estrategia para II (jugar en cada paso U_n independientemente de lo que haga I), que claramente burla a la estrategia σ, pues el conjunto U resultante sera G y, si I juega según σ, el punto x resultante estará en $B \subset U$. Esto contradice que σ sea una estrategia ganadora, luego B ha de tener medida positiva.

Supongamos ahora que es II quien tiene una estrategia ganadora σ. Para cada $s \in 2^{n+1}$), llamemos U_s al abierto U_n que determina σ como jugada n-sima de II cuando I ha jugado hasta el momento $x_i = s(i)$. Sea $G = \bigcup\limits_{s} U_s$.

Claramente, U es abierto y $A \subset U$, pues si $x \in A$, I puede jugar en cada turno $x(n)$ y, si II aplica su estrategia σ, al final de la partida se llega al punto $x \in A$, luego la única forma en que II puede ganar es que x esté en U, lo que significa que está en $U_n = U_{x|_{n+1}}$, para cierto $n \in \omega$, luego $x \in G$. Por otra parte,

$$\mu(G) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\bigcup_{s \in 2^{n+1}} U_s) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \cdot \frac{\epsilon}{2^{2n+2}} = \epsilon.$$

■

Ahora tomamos un conjunto $B \subset \mathcal{C}$ arbitrario. Por la regularidad de las medidas de Borel existe un conjunto $\hat{B}$ de tipo G_δ tal que $B \subset \hat{B}$ y todo conjunto de Borel contenido en $A = \hat{B} \setminus B$ es nulo.

Dado $\epsilon > 0$, el juego $J'(A, \epsilon)$ está determinado, pero por el teorema anterior I no puede tener una estrategia ganadora. Esto significa que la tiene II, luego, de nuevo por el teorema anterior, existe un abierto G tal que $A \subset G$ y $\mu(G) < \epsilon$. Esto implica que $\mu^*(A) = 0$, donde μ^* es la medida exterior asociada a μ, pero todo conjunto de medida exterior nula es medible, luego $\hat{B} \setminus B$ es medible, luego B también lo es. ■

En particular tenemos que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es medible Lebesgue.

Segunda parte

Pruebas de consistencia

Capítulo VII

Constructibilidad

En el capítulo precedente hemos visto que el axioma de determinación proyectiva (ADP) permite demostrar para las clases superiores de la jerarquía de Lusin muchos resultados que (según veremos aquí) no pueden ser demostrados a partir de los axiomas de ZF + ED, ni incluso en ZFC. Más concretamente, lo que veremos en este capítulo es que si en lugar de ADP suponemos el axioma de constructibilidad ($V = L$) podemos decidir muchas propiedades de las clases proyectivas que resultan indecidibles en ZFC, pero en sentido opuesto a como lo hace ADP. Por ejemplo, mientras ADP implica que todo conjunto proyectivo es universalmente medible, veremos que $V = L$ implica que existen conjuntos Δ^1_2 no medibles Lebesgue.

La clave para todo los resultados que vamos a obtener en este capítulo es el resultado que demostraremos (ligeramente generalizado) en la primera sección, según el cual si V = L los espacios polacos admiten buenos órdenes Δ^1_2 que, según las observaciones tras el teorema 4.43, es el mejor resultado que se puede esperar en esta dirección.

7.1 Constructibilidad y proyectividad

Definición 7.1 Dado $x \in \mathcal{N}$, llamaremos $E_x \subset \omega \times \omega$ a la relación dada por

$$m\, E_x\, n \leftrightarrow x(\langle m, n \rangle) = 0.$$

Notemos que E_x es exactamente la misma relación que en 5.23 hemos llamado $\leq_x$. Cambiamos la notación porque hasta ahora estábamos interesados en los $x \in \mathcal{N}$ para los que la relación asociada era un buen orden, mientras que ahora nos interesarán relaciones más generales. Concretamente, observamos que, para cada $x \in \mathcal{N}$, el par (ω, E_x) es un modelo del lenguaje formal $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos. Podemos suponer que los signos de $\mathcal{L}$ son números naturales, de modo que las fórmulas de $\mathcal{L}$ son elementos de $\omega^{<\omega}$ que, a su vez, pueden codificarse de forma canónica mediante números naturales mediante la biyección canónica definida en 1.23

Si $\alpha(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ tiene sus variables libres entre $v_0, \ldots, v_{n-1}$, $x \in \mathcal{N}$ y $s \in \omega^n$, escribiremos $x \vDash \alpha[s]$ en lugar de $(\omega, E_x) \vDash \alpha[s]$.

Teorema 7.2 *Si* $\alpha(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ *tiene sus variables libres entre* $v_0, \ldots, v_{n-1}$*, el conjunto* $\{(x, s) \in \mathcal{N} \times \omega^n \mid x \vDash \alpha[s]\}$ *es* Δ^1_1.

DEMOSTRACIÓN: La fórmula α es lógicamente equivalente a una fórmula en forma prenexa[1] con las mismas variables libres, y ambas definen el mismo conjunto, luego podemos suponer que α está en forma prenexa, es decir, que es de la forma $Cv_n \cdots Cv_{n+m-1}\beta(v_0, \ldots, v_{n+m-1})$, donde cada C representa un cuantificador ($\bigwedge$ o $\bigvee$) y β no tiene cuantificadores.

Podemos tomar un $k \in \omega$ y una función $f : k + 1 \longrightarrow \omega^{<\omega}$ tal que $f(k) = \beta$ y, para todo $r \leq k$, se cumple una de las afirmaciones siguientes:

a) $\bigvee ij < n + m\ f(r) = (v_i = v_j)$,

b) $\bigvee ij < n + m\ f(r) = (v_i \in v_j)$,

c) $\bigvee r'r'' < r\ (f(r) = \neg f(r') \vee f(r) = (f(r') \wedge f(r''))$
$\vee f(r) = (f(r') \vee f(r'') \vee f(r) = (f(r') \rightarrow f(r''))$
$\vee f(r) = (f(r') \leftrightarrow f(r'')))$.

Entonces, para cada $(x, t) \in \mathcal{N} \times \omega^{n+m}$, se cumple

$$x \vDash \beta[t] \leftrightarrow \bigvee g \in V_\omega (g : k + 1 \longrightarrow 2 \wedge g(k) = 1 \wedge \bigwedge r \leq k(*)),$$

donde $(*)$ es la conjunción de las fórmulas siguientes:

a) Si $f(r) = (v_i = v_j)$ entonces $g(r) = 1 \leftrightarrow t(i) = t(j)$.

b) Si $f(r) = (v_i \in v_j)$ entonces $g(r) = 1 \leftrightarrow x(\langle t(i), t(j)\rangle) = 0$.

c) Si $f(r) = \neg g(r')$ entonces $g(r) = 1 \leftrightarrow g(r') = 0$.

d) Si $f(r) = (f(r') \wedge f(r'')$ entonces $g(r) = 1 \leftrightarrow (g(r') = 1 \wedge g(r'') = 1)$.

e) $\cdots$ análogamente con los demás conectores.

Ahora es inmediato que el conjunto

$$A = \{(x, t) \in \mathcal{N} \times \omega^{n+m} \mid x \vDash \beta[t]\}$$

es aritmético. (Notemos que la caracterización que acabamos de dar sólo depende de la restricción de x a un número natural suficientemente grande.) A su vez, el conjunto del enunciado se obtiene de A mediante un número finito de proyecciones de tipo $\bigwedge n$ o $\bigvee n$, luego también es aritmético y, en particular Δ^1_1. ■

[1] Véase [LTC], sección 2.6.

Definición 7.3 Llamaremos BF al conjunto de los $x \in \mathcal{N}$ tales que la relación E_x es extensional y bien fundada en ω.

Se trata de un conjunto Π^1_1, pues, si $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es el axioma de extensionalidad,

$$E_x \text{ es extensional} \leftrightarrow x \vDash \alpha,$$

luego $\{x \in \mathcal{N} \mid E_x \text{ es extensional}\}$ es Δ^1_1. Por otra parte,

$$E_x \text{ está bien fundada} \leftrightarrow \bigwedge y \in \mathcal{N} \bigvee n \in \omega\ x(\langle y(n+1), y(n)\rangle) \neq 0,$$

y es claro que el conjunto $\{(x, y, n) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \mid x(\langle y(n+1), y(n)\rangle) \neq 0\}$ es aritmético, luego $\{x \in \mathcal{N} \mid E_x \text{ está bien fundada}\}$ es Π^1_1. ■

Si $x \in \mathrm{BF}$, podemos considerar la función colapsante $\pi_x : (\omega, E_x) \longrightarrow M_x$. Fijado x, para cada $y \in M_x$ llamaremos $\hat{y} = \pi_x^{-1}(y)$, y diremos que $\hat{y}$ es el *nombre* de y respecto de x.

Teorema 7.4 *Los conjuntos*

$$\{(x, y, m) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \mid x \in \mathrm{BF} \wedge y \in M_x \wedge m = \hat{y}\},$$

$$\{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid x \in \mathrm{BF} \wedge y \in M_x\}$$

son Π^1_1

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la relación en $\mathcal{N} \times \omega^2$ dada por

$$m = \hat{n}_x \leftrightarrow \bigvee r \in \omega^{n+1}(r(n) = m \wedge \bigvee v\ (v = r(0) \wedge x \vDash (\bigwedge u\ u \notin v)) \wedge$$

$$\bigwedge i < n \bigvee vw\ (v = r(i) \wedge w = r(i+1) \wedge x \vDash \bigwedge u(u \in w \leftrightarrow u \in v \vee u = v)).$$

Es claro que, si $x \in \mathrm{BF}$, esta relación equivale a $n \in M_x \wedge m = \hat{n}$ (respecto de x) en el sentido de la definición precedente. Ahora bien, si no suponemos $x \in \mathrm{BF}$, tenemos que el conjunto $\{(x, m, n) \in \mathcal{N} \times \omega^2 \mid m = \hat{n}_x\}$ es Δ^1_1.

Similarmente, definimos en $\mathcal{N} \times \omega^3$ la relación

$$m = (\hat{u}, \hat{v})_x \leftrightarrow \bigvee rs(r = \hat{u}_x \wedge s = \hat{v}_x \wedge x \vDash \bigwedge x(x \in m \leftrightarrow$$

$$\bigwedge y(y \in x \leftrightarrow y = r) \vee \bigwedge y(y \in x \leftrightarrow y = r \vee y = s))).$$

De este modo, si $x \in \mathrm{BF}$ esta relación equivale a $u, v \in M_x \wedge \pi_x(m) = (u, v)$, pero sin suponer $x \in \mathrm{BF}$ la relación es Δ^1_1.

Finalmente, definimos en $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega$ la relación

$$m = \hat{y}_x \leftrightarrow \bigwedge t(x \vDash (t \in m) \rightarrow \bigvee uv(v = y(u) \wedge t = (\hat{u}, \hat{v})_x) \wedge$$

$$\bigwedge u \bigvee vt(v = y(u) \wedge t = (\hat{u}, \hat{v})_x \wedge x \vDash t \in m)).$$

Así, si $x \in \mathrm{BF}$ esta relación equivale a la determinada por el primer conjunto del enunciado, pero sin suponerlo es Δ^1_1. Por lo tanto, el primer conjunto del enunciado es la intersección de esta relación con $\mathrm{BF} \times \mathcal{N} \times \omega$, luego es Π^1_1. En cuanto al segundo, si $x \in \mathrm{BF}$, se cumple que $y \in M_x \leftrightarrow \bigvee m\ (y \in M_x \wedge m = \hat{y}_x)$, luego también es Π^1_1. ■

Definición 7.5 Llamaremos $H(\aleph_1)$ al conjunto de todos los conjuntos *hereditariamente numerables,* es decir, los conjuntos cuya clausura transitiva es numerable.

Notemos que es un conjunto porque si $A \in H(\aleph_1)$ entonces la aplicación rango $\rho : \operatorname{ct} A \longrightarrow \Omega$ tiene por imagen un ordinal numerable, luego $A \in V_{\aleph_1}$. Por lo tanto, $H(\aleph_1) \subset V_{\aleph_1}$.

Teorema 7.6 *Sea $a \in \mathcal{N}$ y $A \subset \mathcal{N}$ un conjunto definido por una fórmula $\Sigma_1^{H(\aleph_1)}(a)$, es decir,*

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee y \in H(\aleph_1)\ \phi(x, y, a)\},$$

donde $\phi(x, y, a)$ es una fórmula (metamatemática) Δ_0 (es decir, con cuantificadores acotados $\bigwedge u \in v$, $\bigvee u \in v$). Entonces[2] *A es $\Sigma_2^1(a)$.*

Demostración: La clave está en que $x \in A$ equivale a

$$\bigvee M(M \text{ transitivo numerable} \wedge x \in M \wedge a \in M \wedge \bigvee y \in M\ \phi(x, y, a)).$$

En efecto, si existe M, entonces $M \subset H(\aleph_1)$ y se cumple que $x \in A$. Recíprocamente, si $x \in A$, sea $y \in H(\aleph_1)$ según la definición. Como también $x, a \in H(\aleph_1)$, es claro que $M = \operatorname{ct}(\{x, y, a\} \cup \{x, y, a\}$ es un conjunto transitivo numerable y cumple la condición.[3]

Ahora recordamos que las fórmulas Δ_0 son absolutas para conjuntos transitivos, luego

$$\bigvee y \in M\ \phi(x, y, a) \leftrightarrow (\bigvee y\ \phi(x, y, a))^M \leftrightarrow M \vDash \bigvee y \ulcorner\phi\urcorner[x, a],$$

donde $\ulcorner\phi\urcorner \in \operatorname{Form}(\mathcal{L})$ es la fórmula matemática que se corresponde con la fórmula metamatemática ϕ. (Técnicamente, $\ulcorner\phi\urcorner$ es un designador del lenguaje (metamatemático) de la teoría de conjuntos.) A través de una biyección entre M y ω podemos definir un $z \in \mathcal{N}$ tal que M sea el colapso transitivo de (ω, E_z). Por lo tanto, $x \in A$ equivale a

$$\bigvee z \bigvee mn(z \in \mathrm{BF} \wedge x \in M_z \wedge m = \hat{x} \wedge a \in M_z \wedge n = \hat{a} \wedge z \vDash (\bigvee y \ulcorner\phi\urcorner)[m, n]).$$

Así pues, el conjunto R de los $(x, a, z, m, n) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega \times \omega$ que cumplen la condición que sigue a los cuantificadores es intersección de dos conjuntos Π_1^1 y un conjunto Δ_1^1, luego es Π_1^1, luego $\bigvee mn\, R$ también es Π_1^1 y $B = \bigvee z \bigvee mn\, R$ es Σ_2^1. Finalmente, el conjunto

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid (x, a) \in B\}$$

es $\Sigma_2^1(a)$ por 5.38. ■

[2]El teorema también es cierto si $A = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee y\ \phi(x, y, a)\}$, pero entonces requiere AE.

[3]Si no exigimos que $y \in H(\aleph_1)$ podemos llegar a la misma conclusión usando el teorema de reflexión, pero entonces usamos AE.

Con esto estamos en condiciones de probar los resultados centrales de esta sección, y que son la base de todo el capítulo. Recordemos[4] que existe una fórmula (metamatemática) Δ_0, digamos $\phi(f, Y, \alpha, a)$, tal que para cualquier conjunto a (aunque aquí nos interesa únicamente el caso $a \in \mathcal{N}$) y para todo ordinal numerable α se cumple

$$Y = L_\alpha[a] \leftrightarrow \bigvee f\ \phi(f, Y, \alpha, a) \leftrightarrow \bigvee f \in L_{\aleph_1}[a]\ \phi(f, Y, \alpha, a).$$

Combinando este hecho con el teorema anterior obtenemos:

Teorema 7.7 (Gödel) *Si $a \in \mathcal{N}$, entonces $\mathcal{N}^{L[a]}$ es un conjunto $\Sigma^1_2(a)$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que, por [PC 13.8],

$$\mathcal{N}^{L[a]} = \mathcal{N} \cap L[a] \subset (\mathcal{P}L_\omega[a])^{L[a]} \subset L_{\aleph_1}[a].$$

Por otro lado, si $\alpha < \aleph_1$, entonces $L_\alpha[a]$ es un conjunto transitivo numerable, luego $L_{\aleph_1}[a] \subset H(\aleph_1)$. Esto implica que

$$Y = L_\alpha[a] \leftrightarrow \bigvee f \in H(\aleph_1)\ \phi(f, Y, \alpha, a),$$

luego, para todo $x \in \mathcal{N} \subset H(\aleph_1)$,

$$x \in \mathcal{N}^{L[a]} \leftrightarrow \bigvee Y f \alpha \in H(\aleph_1)\ (x \in Y \land \phi(f, Y, \alpha, a))$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in H(\aleph_1)(\bigvee U \in y \bigvee Y f \alpha \in U(y = (Y, f, \alpha) \land x \in Y \land \phi(f, Y, \alpha, a)))$$

$$\leftrightarrow \bigvee y \in H(\aleph_1)\ \psi(x, y, a),$$

donde la fórmula ψ es Δ_0. En definitiva,

$$\mathcal{N}^{L[a]} = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee y \in H(\aleph_1)\ \psi(x, y, a)\},$$

luego $\mathcal{N}^{L[a]}$ es $\Sigma^1_2(a)$ por el teorema anterior. ■

Más aún, en $L[a]$ tenemos definido el buen orden $\trianglelefteq^a$, que es definible en las mismas condiciones que $L[a]$, es decir, existe una fórmula Δ_0, digamos $\psi(f, Y, \alpha, a)$, tal que, para todo $\alpha < \aleph_1$,

$$Y = \trianglelefteq^a_\alpha \leftrightarrow \bigvee f\ \psi(f, Y, \alpha, a) \leftrightarrow \bigvee f \in L_{\aleph_1}[a]\ \psi(f, Y, \alpha, a),$$

donde $\trianglelefteq^a_\alpha$ es la restricción de $\trianglelefteq^a$ a $L_\alpha[a]$, que es una sección inicial de $\trianglelefteq^a$.

Definición 7.8 Si $a \in \mathcal{N}$, definimos

$$\trianglelefteq_a = \{(x, y) \in \mathcal{N}^{L[a]} \times \mathcal{N}^{L[a]} \mid x \trianglelefteq^a y\},$$

que es un buen orden en $\mathcal{N}^{L[a]}$.

Teorema 7.9 (Gödel) *Si $a \in \mathcal{N}$, el conjunto $\trianglelefteq_a$ es $\Sigma^1_2(a)$.*

[4] [PC], Sección 13.4.

DEMOSTRACIÓN: La prueba es análoga a la del teorema anterior. Como el teorema 7.6 está enunciado para $\mathcal{N}$ en lugar de $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ fijamos un homeomorfismo $h : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}\times\mathcal{N}$, por ejemplo el dado por $h(z) = (z_0, z_1)$, donde $z_i(n) = z(2n+i)$, que claramente es Δ^1_1, y así basta probar que $h^{-1}[\trianglelefteq_a]$ es $\Sigma^1_2(a)$ en $\mathcal{N}$.

Al igual que en la prueba del teorema anterior, tenemos que, para todo ordinal numerable α,

$$Y = \trianglelefteq^a_\alpha \leftrightarrow \bigvee f \in H(\aleph_1)\ \psi(f, Y, \alpha, a),$$

luego, para cada $z \in \mathcal{N}$,

$$z \in\ h^{-1}[\trianglelefteq_a] \leftrightarrow \bigvee Y f \alpha x y \in H(\aleph_1)(x, y \in \mathcal{N} \wedge \bigwedge n \in \omega(x(n) = z(2n)$$
$$\wedge\ y(n) = z(2n + 1)) \wedge (x, y) \in Y \wedge \psi(f, Y, \alpha, a)),$$

y la fórmula de la derecha se transforma fácilmente en una fórmula en las condiciones del teorema 7.6, lo que implica que $h^{-1}[\trianglelefteq_a]$ es $\Sigma^1_2(a)$ y, consecuentemente, $\trianglelefteq_a$ también lo es. ■

Observemos que, como los conjuntos $L_\alpha[a]$ son numerables y son segmentos iniciales de $\trianglelefteq^a$, todos los segmentos iniciales de $(\mathcal{N}^{L[a]}, \trianglelefteq_a)$ son numerables, por lo que $\operatorname{ord}(\mathcal{N}^{L[a]}, \trianglelefteq_a) = \aleph_1^{L[a]} \leq \aleph_1$.

Una propiedad técnica de gran importancia es que los segmentos iniciales de la relación $\trianglelefteq_a$ pueden codificarse mediante un conjunto $\Sigma^1_2(a)$:

Teorema 7.10 (Addison) *Para cada $a \in \mathcal{N}$, la relación*

$$\mathrm{SI}(x, y) \leftrightarrow y \in \mathcal{N}^{L[a]} \wedge \{x_n \mid n \in \omega\} = \{z \in \mathcal{N}^{L[a]} \mid z \trianglelefteq_a y\}$$

es $\Delta^1_2(a)$ en $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

DEMOSTRACIÓN: Aquí hay que entender que $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es la imagen de x por el homeomorfismo canónico $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}^\omega$. Ahora observamos que

$$\mathrm{SI}(x, y) \leftrightarrow \bigvee \alpha Y Z \in H(\aleph_1)(Y = L_\alpha[a] \wedge Z\ = \trianglelefteq^a_\alpha \wedge y \in Y \wedge$$
$$\bigwedge z \in Y(z \in \mathcal{N} \wedge (z, y) \in Z \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ z = x_n))$$
$$\leftrightarrow \bigvee \alpha Y Z f g \in H(\aleph_1)(\phi(f, Y \alpha, a) \wedge \psi(g, Z, \alpha, a) \wedge y \in Y \wedge$$
$$\bigwedge z \in Y(z \in \mathcal{N} \wedge (z, y) \in Z \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ z = x_n)).$$

A partir de esta expresión, razonando análogamente a como hemos hecho en los dos teoremas precedentes se concluye que $\mathrm{SI}(x, y)$ es $\Sigma^1_2(a)$. Que su negación es también $\Sigma^1_2(a)$ es trivial. Basta tener en cuenta la equivalencia:

$$\neg\mathrm{SI}(x, y) \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigvee n \in \omega\ (z = x_n \wedge y \triangleleft_a z) \vee$$
$$\bigvee z \in \mathcal{N}(z \trianglelefteq_a y \wedge \bigwedge n \in \omega \bigvee w \in \mathcal{N}(w = x_n \wedge z \neq w)).$$

■

Esto se traduce en la propiedad siguiente del buen orden constructible:

Teorema 7.11 *Si $a \in \mathcal{N}$ y $P \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es un conjunto $\Sigma^1_n(a)$, para $n \geq 2$, entonces los conjuntos dados por*

$$P_1(x, y) \leftrightarrow x \in \mathcal{N}^{L[a]} \wedge \bigvee z \trianglelefteq_a x \; P(z, y),$$

$$P_2(x, y) \leftrightarrow x \in \mathcal{N}^{L[a]} \wedge \bigwedge z \trianglelefteq_a x \; P(z, y),$$

son también $\Sigma^1_n(a)$.

Demostración: El caso de P_1 es trivial:

$$P_1(x, y) \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N}(z \trianglelefteq_a x \wedge P(z, y)).$$

Para P_2 necesitamos el teorema anterior:

$$P_2(x, y) \leftrightarrow \bigvee w \in \mathcal{N}(\mathrm{SI}(w, x) \wedge \bigwedge n \in \omega \bigvee z \in \mathcal{N}(z = w_n \wedge P(z, y))).$$

■

Dedicamos las secciones siguientes a extraer consecuencias de los resultados técnicos que acabamos de obtener.

7.2 Consecuencias de $\mathcal{N} \subset L[a]$

Presentamos ahora las consecuencias principales de la definibilidad del buen orden constructible. Notemos que no necesitamos suponer $V = L[a]$, sino que, a todos los efectos, basta con suponer $\mathcal{N} \subset L[a]$ o, equivalentemente, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{L[a]}$. En lo sucesivo, siempre que demostremos una fórmula $\phi(a)$ con la indicación $\mathcal{N} \subset L[a]$ habrá que entender que estamos demostrando la sentencia

$$\bigwedge a \in \mathcal{N} \; (\mathcal{N} \subset L[a] \rightarrow \phi(a))$$

Naturalmente, todo resultado de este tipo puede particularizarse tomando, por ejemplo, una sucesión constante a, y entonces $L[a] = L$ y todo conjunto $\Sigma^1_n(a)$, $\Pi^1_n(a)$ o $\Delta^1_n(a)$ es simplemente Σ^1_n, Π^1_n o Δ^1_n.

La consecuencia más elemental de $\mathcal{N} \subset L[a]$ es la siguiente:

Teorema 7.12 ($\mathcal{N} \subset L[a]$) *La relación $\trianglelefteq_a$ es un buen orden en $\mathcal{N}$ de clase $\Delta^1_2(a)$ y ordinal[5] $\aleph_1$ con la propiedad de que si $P \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es un conjunto $\Sigma^1_n(a)$, para $n \geq 2$, entonces los conjuntos dados por*

$$P_1(x, y) \leftrightarrow \bigvee z \trianglelefteq_a x \; P(z, y), \qquad P_2(x, y) \leftrightarrow \bigwedge z \trianglelefteq_a x \; P(z, y),$$

son también $\Sigma^1_n(a)$.

[5]En particular tenemos que $\mathcal{N} \subset L[a] \rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

DEMOSTRACIÓN: Hemos visto que $\operatorname{ord}(\mathcal{N}^{L[a]}, \trianglelefteq_a) = \aleph_1^{L[a]} \leq \aleph_1$ y, como $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{L[a]}$, dicho ordinal ha de ser no numerable, luego ha de ser $\aleph_1$.

En principio tenemos que $\trianglelefteq_a$ es un buen orden $\Sigma_2^1(a)$, pero la demostración del teorema 4.42 se adapta trivialmente al caso efectivo: la diagonal $\Delta \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es Δ_1^1, luego $\triangleleft_a = \trianglelefteq_a \setminus \Delta$ es también $\Sigma_2^1(a)$ y, como la aplicación $(x, y) \mapsto (y, x)$ es claramente Δ_1^1, concluimos que la relación inversa $\triangleright_a$ también es $\Sigma_2^1(a)$. Por último, como $\mathcal{N} = \triangleleft_a \cup \Delta \ \cup \ \triangleright_a$ y la unión es disjunta, resulta que $\triangleright_a$ es el complementario de $\trianglelefteq_a$, luego éste es también $\Pi_2^1(a)$, luego es $\Delta_2^1(a)$. La última parte es el teorema 7.11. ■

Así, si $\mathcal{N} \subset L[a]$, tenemos que $\mathcal{N}$ admite un buen orden $\boldsymbol{\Delta}_2^1$ y, por la observación previa al teorema 4.42, lo mismo vale para todo espacio polaco. Más aún, en la demostración de 7.11 se ve que si P es $\boldsymbol{\Sigma}_n^1$, entonces los conjuntos P_1 y P_2 son también $\boldsymbol{\Sigma}_n^1$ y es claro que esto es extensible a todo espacio polaco no numerable.

En particular, si $\mathcal{N} \subset L$ tenemos que $\mathcal{N}$ admite un buen orden Δ_2^1, que es el mejor resultado posible en virtud de la observación tras el teorema 4.43.

Veamos ahora que el teorema anterior (es decir, la existencia de un buen orden en $\mathcal{N}$ que cumpla las condiciones del teorema anterior), es, de hecho, equivalente a $\mathcal{N} \subset L[a]$. Para ello necesitamos un resultado previo:

Teorema 7.13 *Sea R un árbol en $\omega \times K$ tal que $R \in L[R]$ y sea $A = p[R] \subset \mathcal{N}$. Entonces, o bien $A \subset L[R]$ o bien A contiene un subconjunto perfecto. Más aún, en el segundo caso existe un árbol perfecto $U \in L[R]$ en ω tal que $[U] \subset A$.*

DEMOSTRACIÓN: En general, para cualquier árbol R en $\omega \times K$, definimos el árbol derivado

$$R' = \{(s, h) \in R \mid \text{existen } (s_0, h_0), (s_1, h_1) \in R \text{ tales que } s \subset s_0,\ s \subset s_1,$$
$$h \subset h_0,\ h \subset h_1 \text{ y } s_0,\ s_1 \text{ son incompatibles}\}.$$

Ahora, partiendo del árbol R del enunciado, definimos

$$R^0 = R, \quad R^{\alpha+1} = (R^\alpha)', \quad R^\lambda = \bigcap_{\delta<\lambda} R^\delta.$$

Estas definiciones son absolutas para modelos transitivos de ZFC, luego, para todo ordinal α se cumple que $R^\alpha \in L[R]$. Como cada R^α está contenido en los anteriores, ha de existir un (mínimo) ordinal α tal que $R^{\alpha+1} = R^\alpha$.

Supongamos en primer lugar que $R^\alpha = \varnothing$ y veamos que entonces $A \subset L[R]$.

Para ello tomamos $x \in A$, de modo que existe $f \in K^\omega$ tal que $(x, f) \in [R]$. Sea $\gamma < \alpha$ tal que $(x, f) \in [R^\gamma] \setminus [R^{\gamma+1}]$. Esto significa que existe un par $(s, h) \in R^\gamma$ tal que $s \subset x$, $h \subset f$ y $(s, h) \notin [R^{\gamma+1}]$, lo cual significa a su vez que si $(s', h') \in R^\gamma$ cumplen $s \subset s'$ y $h \subset h'$, entonces $s' \subset x$. Entonces

$$x = \bigcup\{s' \in \omega^{<\omega} \mid s \subset s' \wedge \bigvee h'(h \subset h' \wedge (s', h') \in R^\gamma)\} \in L[R].$$

Supongamos ahora que $R^\alpha \neq \varnothing$. Este árbol tiene la propiedad de que cada $(s, h) \in R^\alpha$ tiene dos extensiones con primeras coordendas incompatibles. Ahora razonamos en $L[R]$ (que es un modelo de ZFC, luego podemos usar el axioma de elección). Tomamos $(s_0, h_0), (s_1, h_1) \in R^\alpha$ tales que s_0 y s_1 sean incompatibles. A continuación elegimos (s_{00}, h_{00}), (s_{01}, h_{01}), (s_{10}, h_{10}), $(s_{11}, h_{11}) \in R^\alpha$, tales que $s_i \subset s_{ij}$, $h_i \subset h_{ij}$ y los s_{ij} sean incompatibles. De este modo podemos construir pares $\{(s_t, h_t)\}_{t\in 2^{<\omega}}$ en R^α de modo que $t \subset t' \rightarrow s_t \subset s_{t'} \land h_t \subset h_{t'}$ y los elementos de $\{s_t\}_{t\in 2^n}$ son incompatibles dos a dos para todo n. Toda la construcción está hecha en $L[R]$, por lo que

$$U = \{s \in \omega^{<\omega} \mid \bigvee t \in 2^{<\omega}\ s \subset s_t\} \in L[R],$$

y claramente U es un árbol perfecto tal que $[U] \subset p[R^\alpha] \subset p[R] = A$. ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 7.14 (Mansfield) *Si $a \in \mathcal{N}$ y existe un buen orden $\Sigma^1_2(a)$ en $\mathcal{N}$, entonces $\mathcal{N} \subset L[a]$.*

Demostración: Sea $\trianglelefteq$ un buen orden $\Sigma^1_2(a)$ en $\mathcal{N}$ y supongamos que $\mathcal{N}$ no está contenido en $L[a]$. Es claro que entonces $\mathcal{C}$ tampoco está contenido en $L[a]$, pues todo elemento de $\mathcal{N}$ puede codificarse de forma absoluta por un elemento de $\mathcal{C}$. Llamemos $R_0 = 2^{<\omega}$, de modo que $\mathcal{C} = [R_0]$.

En general, si $R \subset R_0$ es un árbol y $f : R \longrightarrow R_0$ es una aplicación que cumple:

a) $s \subset t \rightarrow f(s) \subset f(t)$,

b) $\bigwedge x \in [R]\ \bigcup\limits_{n\in\omega} f(x|_n) \in \mathcal{C}$,

podemos definir una aplicación continua $f^* : [R] \longrightarrow \mathcal{C}$ mediante

$$f^*(x) = \bigcup_{n\in\omega} f(x|_n).$$

Vamos a probar que si $R \subset R_0$ es un árbol perfecto, $R \in L[a]$, $f : R \longrightarrow R_0$ cumple las condiciones anteriores, $f \in L[a]$ y f^* es inyectiva, entonces existen un árbol perfecto $U \subset R$, $U \in L[a]$ y una aplicación $g : U \longrightarrow R_0$ que cumple las condiciones anteriores, $g \in L[a]$, g^* es inyectiva y $\bigwedge x \in [U]\ g^*(x) \lhd f^*(x)$.

En efecto, como R es perfecto, cada $r \in R$ tiene dos extensiones incompatibles r' y r''. Si las restringimos al mínimo natural $n+1$ en el que difieren, tenemos que r' y r'' son únicas, pues $r'|_n = r''|_n$ y $r'(n), r''(n)$ sólo pueden tomar los valores 0 y 1. Es fácil construir entonces una semejanza $h : R \longrightarrow R_0$ que induce un homeomorfismo $h^* : [R] \longrightarrow [R_0]$. Más aún, la construcción puede hacerse en $L[R]$, con lo que $h \in L[R]$.

Para cada $s \in R_0$ y cada $s \in \mathcal{C}$, definimos $\hat{s}$ como la función con el mismo dominio que s y tal que $\hat{s}(i) = 1 - s(i)$, para todo i en el dominio común. Sean

$$P = \{x \in [R] \mid h^*(x) \lhd f^*(x)\}, \qquad Q = \{x \in [R] \mid \widehat{h^*}(x) \lhd f^*(x)\}$$

y sea z el $\trianglelefteq$-mínimo elemento de $\mathcal{C} \setminus L[a]$.

Si x, $y \in [R]$ cumplen $h^*(x) = z$, $h^*(y) = \hat{z}$, entonces $x, y \notin L[a]$, pues en caso contrario

$$z = \bigcup_{n\in\omega} h(x|_n) \in L[a], \quad \text{o bien} \quad \hat{z} = \bigcup_{n\in\omega} h(y|_n) \in L[a],$$

y lo segundo implica igualmente que $z \in L[a]$.

Por consiguiente, $f^*(x), f^*(y) \notin L[a]$, ya que si, por ejemplo, $f^*(x) \in L[a]$, entonces

$$S = \{s \in R \mid f(s) \subset f^*(x)\} \in L[a]$$

sería un árbol con x como única rama infinita, pues si hubiera otra rama infinita $x' \neq x$, sería $f^*(x') = f^*(x)$, en contra de la inyectividad que estamos suponiendo en f^*. Por lo tanto, tendríamos que $x \in L[a]$.

Así pues, $z \trianglelefteq f^*(x) \land z \trianglelefteq f^*(y)$, luego $z \triangleleft f^*(x) \lor z \triangleleft f^*(y)$, luego uno de los conjuntos P y Q no está contenido en $L[a]$. Vamos a suponer que es P. (El caso de Q se trata análogamente.)

Ahora observamos que R, f, h son subconjuntos de V_ω pertenecinentes a $L[a]$, por lo que pueden codificarse en función de un $b \in \mathcal{N} \cap L[a]$, de modo que son aritméticos en b. Esto implica que tanto $[R]$ como (la gráfica de) la aplicación $F : [R] \longrightarrow \mathcal{C}$ dada por $F(x) = (h^*(x), f^*(x))$ son $\Delta^1_1(b)$. Por lo tanto, el conjunto $P = F^{-1}[\triangleleft]$ es $\Sigma^1_2(b)$.

Por 5.22 existe un árbol S en $\omega \times \aleph_1$ tal que $P = p[S]$ y $S \in L[b] \subset L[a]$. Por el teorema anterior existe un árbol perfecto $U \in L[S] \subset L[a]$ tal que $[U] \subset P$. (Aquí usamos que P no está contenido en $L[b] \subset L[a]$.)

Es fácil ver que $g = h|_U : U \longrightarrow R_0$ cumple lo requerido.

Aplicando repetidamente la propiedad que acabamos de probar, y partiendo de la identidad $f_0 : [R_0] \longrightarrow [R_0]$, construimos una sucesión decreciente de árboles $\{R_n\}_{n\in\omega}$ y de funciones $\{f_n\}_{n\in\omega}$ de modo que $f_n : [R_n] \longrightarrow \mathcal{C}$ y

$$\bigwedge n \in \omega \ f^*_{n+1}(x) \triangleleft f^*_n(x).$$

Ahora bien, $\{[R_n]\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente de compactos no vacíos en $\mathcal{C}$, luego existe un $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} [R_n]$, pero esto es absurdo, porque entonces

$$\cdots \triangleleft f_3(x) \triangleleft f_2(x) \triangleleft f_1(x) \triangleleft f_0(x)$$

contradice que $\trianglelefteq$ sea un buen orden. ■

Así pues, la existencia de un buen orden $\Sigma^1_2(a)$ en $\mathcal{N}$ equivale a que $\mathcal{N} \subset L[a]$ y, a su vez, esto equivale a la existencia de un buen orden en $\mathcal{N}$ que cumpla las propiedades del teorema 7.12. Una de las razones por las que esta equivalencia es interesante es que puede usarse sin necesidad de estar familiarizado con la teoría sobre conjuntos constructibles. Observemos que todos los resultados que vamos a deducir de $\mathcal{N} \subset L[a]$ las obtendremos en realidad a partir de 7.12.

Por ejemplo, el teorema 4.43 implica que, si $\mathcal{N} \subset L[a]$, existen conjuntos $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ que no son medibles Lebesgue ni tienen la propiedad de Baire. Veamos una versión efectiva:

Teorema 7.15 ($\mathcal{N} \subset L[a]$) *Existe un subconjunto* $\Delta_2^1(a)$ *de* $\mathcal{N}$ *que no es universalmente medible ni tiene la propiedad de Baire.*

Demostración: Obviamente es equivalente encontrar un subconjunto de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ en las condiciones del enunciado, y vamos a ver que sirve

$$A = \trianglelefteq_a = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid x \trianglelefteq_a y\},$$

que ciertamente es $\Delta_2^1(a)$. Vamos a probar que si μ_1 es una medida de Borel continua y no nula en $\mathcal{N}$ y μ_2 es la medida producto en $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, entonces A no es μ_2-medible.

Si lo fuera, como las secciones $A_y = \{x \in \mathcal{N} \mid (x, y) \in A\}$ son numerables (porque $\trianglelefteq_a$ tiene ordinal $\aleph_1$), todas ellas son nulas, luego, por el teorema de Fubini, A es nulo. Ahora bien, el conjunto

$$B = (\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \setminus A = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid y \triangleleft_a x\}$$

también sería medible, y sus secciones B^x son todas numerables, luego nulas, luego B también sería nulo, y todo $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tendría medida nula.

La prueba de que A no tiene la propiedad de Baire es totalmente análoga, usando el teorema de Kuratowski-Ulam 2.55 en lugar del teorema de Fubini. ■

Nota Observemos que, si cambiamos $\Delta_2^1(a)$ por $\boldsymbol{\Delta}_2^1$, la demostración del teorema anterior es válida cambiando $\mathcal{N}$ por cualquier espacio polaco no numerable.

Para probar la existencia de un conjunto $\Pi_1^1(a)$ no numerable sin subconjuntos perfectos nos basta una hipótesis más débil que $\mathcal{N} \subset L[a]$:

Teorema 7.16 *Si* $a \in \mathcal{N}$ *cumple que* $\aleph_1^{L[a]} = \aleph_1$, *existe un subconjunto* $\Pi_1^1(a)$ *de* $\mathcal{N}$ *no numerable que no contiene subconjuntos perfectos.*

Demostración: Sea $A \subset \mathcal{N}$ el conjunto dado por

$$x \in A \leftrightarrow x \in \mathcal{N}^{L[a]} \land x \in \mathrm{BO} \land \bigwedge y \trianglelefteq_a x\, (y \in \mathrm{BO} \to \|y\| \neq \|x\|).$$

Usando las relaciones que prueban que $\|\ \|$ es una norma en Π_1^1, podemos expresar esta relación en la forma

$$x \in \mathcal{N}^{L[a]} \land x \in \mathrm{BO} \land \bigwedge y \trianglelefteq_a x\, (y \notin \mathrm{BO} \lor (y \in \mathrm{BO} \land \neg(x \leq_{\Sigma_1^1} y \land y \leq_{\Sigma_1^1} x))).$$

Así es claro que la relación tras $\bigwedge y \trianglelefteq_a x$ es Σ_2^1, luego usando 7.11 vemos que A es $\Sigma_2^1(a)$.

Observamos ahora que la aplicación $A \longrightarrow \aleph_1$ dada por $x \mapsto \|x\|$ es biyectiva. La inyectividad se sigue inmediatamente de la definición de A, y la suprayectividad se debe a que si $\alpha < \aleph_1 = \aleph_1^{L[a]}$, existe un $x \in \mathrm{BO} \cap L[a]$ tal que $\|x\| = \alpha$ y el mínimo para $\trianglelefteq_a$ cumple que $x \in A$. En particular, vemos que $|A| = \aleph_1$.

Vamos a probar que A no posee subconjuntos analíticos no numerables. En efecto, si $B \subset A$ fuera analítico y no numerable, el conjunto $\{\|x\| \mid x \in B\}$ no estaría acotado en $\aleph_1$, pero entonces

$$\mathrm{BO} = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee z(z \in B \land x \leq_{\Sigma^1_1} z)\}$$

(recordemos que, para $z \in \mathrm{BO}$, se cumple $x \leq_{\Sigma^1_1} z \leftrightarrow x \in \mathrm{BO} \land \|x\| \leq \|z\|$), lo que implicaría que BO es $\mathbf{\Sigma}^1_1$, y esto es falso.

Sea ahora $C \subset \mathcal{N}\times\mathcal{N}$ un conjunto $\Pi^1_1(a)$ tal que $x \in A \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\ (x, y) \in C$. Como la clase $\Pi^1_1(a)$ tiene la propiedad de uniformización, podemos suponer que

$$\bigwedge x \in A \overset{1}{\bigvee} y \in \mathcal{N}\ (x, y) \in C,$$

y es claro que C no tiene subconjuntos perfectos, pues si $P \subset C$ fuera perfecto, entonces $\pi[P] \subset A$ sería un conjunto analítico no numerable.

Así hemos encontrado un subconjunto de $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ que es $\Pi^1_1(a)$ y no tiene subconjuntos perfectos. Obviamente esto implica que existe un conjunto similar en $\mathcal{N}$ y en cualquier espacio producto. Más aún, todo espacio polaco no numerable contiene un subconjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable sin subconjuntos perfectos. ■

Teorema 7.17 ($\mathcal{N} \subset L[a]$) *La clase $\Sigma^1_n(a)$ (definida sobre los espacios producto no numerables) tiene la propiedad de uniformización para $n \geq 2$.*

Demostración: Sea $A \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ un conjunto $\Pi^1_{n-1}(a)$ y sea

$$A^*(x, y) \leftrightarrow A(x, y) \land \bigwedge z \trianglelefteq_a y\ (z = y \lor \neg A(x, z)).$$

Obviamente A^* uniformiza a A, y es $\Sigma^1_n(a)$. Hemos probado que todo subconjunto $\Pi^1_{n-1}(a)$ de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ puede ser uniformizado por un conjunto $\Sigma^1_n(a)$. Obviamente, esto implica que lo mismo es cierto para cualquier producto de espacios producto no numerables.

Sea ahora $A \subset X \times Y$ una relación $\Sigma^1_n(a)$, de modo que existe un conjunto $B \subset X \times Y \times \mathcal{N}$ que es $\Pi^1_{n-1}(a)$ y $A(x, y) \leftrightarrow \bigvee z\, B(x, y, z)$. Según acabamos de probar, B admite una uniformización B^* de clase $\Sigma^1_n(a)$, respecto de la primera coordenada, es decir,

$$\bigvee yz\ (x, y, z) \in B \leftrightarrow \overset{1}{\bigvee} yz\ (x, y, z) \in B^*.$$

Es fácil ver que $A^* = \bigvee z\, B^*$ uniformiza a A y es claramente $\Sigma^1_n(a)$. ■

Como es habitual, considerando isomorfismos de Borel, de aquí se sigue que, para $n \geq 2$, la clase $\mathbf{\Sigma}^1_n$ (definida sobre todos los espacios polacos no numerables) tiene la propiedad de uniformización.

Recordemos que en el capítulo anterior hemos visto que las clases $\Sigma^1_1(a)$ y $\mathbf{\Sigma}^1_1$ no tienen la propiedad de uniformización, sino que son sus complementarias las que la poseen.

Teorema 7.18 ($\mathcal{N} \subset L[a]$) *La clase $\Sigma^1_n(a)$ es normada para $n \geq 2$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio producto y $A \subset X$ un conjunto $\Sigma^1_n(a)$. Entonces existe un conjunto $B \subset X \times \mathcal{N}$ de clase $\Pi^1_{n-1}(a)$ tal que $A = \bigvee y\, B$. Sea $\rho : \mathcal{N} \longrightarrow \aleph_1$ la semejanza determinada por $\trianglelefteq_a$. Para cada $x \in B$ definimos

$$\phi(x) = \mathrm{mín}\{\rho(y) \mid (x, y) \in B\}.$$

Así, las relaciones

$$x \leq^* x' \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\,(B(x, y) \wedge \bigwedge z \trianglelefteq_a y(z = y \vee \neg B(x', z)))$$

$$x <^* x' \leftrightarrow \bigvee y \in \mathcal{N}\,(B(x, y) \wedge \bigwedge z \trianglelefteq_a y\, \neg B(x', y))$$

son ambas $\Sigma^1_n(a)$. ■

De aquí se sigue a su vez de forma inmediata la versión para las clases de Lusin para todo espacio polaco (compárese con 6.29):

Teorema 7.19 *Las clases de Lusin*

$$\begin{array}{cccc} & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 & \boldsymbol{\Sigma}^1_4 \quad \cdots \\ \boldsymbol{\Pi}^1_1 & & & \end{array}$$

son normadas, pero sus complementarias no lo son.

Por consiguiente, las clases indicadas en el teorema tienen la propiedad de reducción generalizada y sus complementarias tienen la propiedad de separación generalizada. Las clases $\Sigma^1_n(a)$ tienen la propiedad de reducción y las clases $\Pi^1_n(a)$ tienen la propiedad de separación (y todos estos resultados se invierten para $n = 1$).

No es difícil probar que si $\mathcal{N} \subset L[a]$ las clases $\Sigma^1_n(a)$ tienen escalas, pero no vamos a necesitar este hecho, así que no presentamos la demostración.

Con esto hemos probado que el axioma $\mathcal{N} \subset L[a]$ resuelve todas las cuestiones que en los temas anteriores habían quedado abiertas. En todo caso, podemos añadir una última observación trivial: la mera hipótesis del continuo $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ implica que todo subconjunto de cualquier espacio polaco es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel (sus puntos, que son cerrados), y no solamente los subconjuntos $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$, como hemos probado en ZF+ED.

7.3 El axioma de Martin

Cabe preguntarse si los resultados que hemos demostrado en la sección anterior a partir del axioma $\mathcal{N} \subset L[a]$ no podrían demostrarse también sin dicho axioma, es decir, en ZFC + ED (o, al menos, en ZFC). La respuesta sería obviamente negativa si tuviéramos garantizado que ADP es consistente con los axiomas de ZFC, pues sabemos que este axioma implica la negación de todas las propiedades que hemos demostrado a partir de $\mathcal{N} \subset L[a]$. Dejando para más adelante la discusión sobre la consistencia de ADP, en esta sección veremos que el axioma de Martin nos lleva a dicha conclusión en algunos casos. En la sección siguiente trataremos otros por otros medios.

Medibilidad de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ Sabemos que en ZF+ED puede demostrarse que los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_1$ y $\mathbf{\Pi}^1_1$ son universalmente medibles, mientras que en la sección anterior hemos probado que si $\mathcal{N} \subset L$ existen conjuntos Δ^1_2 que no son universalmente medibles (que, de hecho, no son medibles para ninguna medida de Borel continua no nula). Esto puede interpretarse como que en ZFC no puede demostrarse que todo conjunto Δ^1_2 es universalmente medible, pero ¿puede probarse en ZFC (sin suponer axiomas adicionales, como $\mathcal{N} \subset L$) que existe un conjunto $\mathbf{\Delta}^1_2$ que no sea universalmente medible?

La respuesta es nuevamente negativa (siempre suponiendo que ZFC sea consistente). De hecho, si ZFC es consistente, también lo es ZFC + "todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ y, por lo tanto, todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_2$, es universalmente medible". Esto es consecuencia de que el axioma de Martin implica que toda medida de Borel continua es $2^{\aleph_0}$-completa, es decir, que la unión de menos de $2^{\aleph_0}$ conjuntos medibles es medible.[6] Combinando esto con el teorema 4.56, según el cual todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, podemos concluir:

Teorema 7.20 (AM($\aleph_1$)) *Los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ y $\mathbf{\Pi}^1_2$ son universalmente medibles.*

En definitiva:

> *(Si* ZFC *es consistente) la existencia de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ o $\mathbf{\Pi}^1_2$ no universalmente medibles es independiente de los axiomas de* ZFC, *(es decir, no puede demostrarse ni refutarse a partir de ellos).*

Por otro lado, podemos señalar que la existencia de un conjunto Σ^1_2 no universalmente medible no implica que $\mathcal{N} \subset L$. Por el contrario, el teorema [PC 10.19] afirma que hay tres posibilidades para $\mathbb{R} \cap L$: que sea todo $\mathbb{R}$, que sea nulo o que no sea medible Lebesgue, y el teorema [PC 10.20] afirma que la tercera posibilidad es consistente con cualquier valor razonable para $2^{\aleph_0}$. Así pues, si ZFC es consistente, también lo es ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_{27}$ + "$\mathbb{R} \cap L$ no es medible Lebesgue", y es fácil ver que $\mathbb{R} \cap L$ es $\mathbf{\Sigma}^1_2$ (porque se corresponde a través de un homeomorfismo con $\mathcal{N} \cap L$).

La propiedad de Baire en los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ La situación para la propiedad de Baire es totalmente análoga:

> *(Si* ZFC *es consistente) la existencia de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ o $\mathbf{\Pi}^1_2$ sin la propiedad de Baire es independiente de los axiomas de* ZFC.

Esto es consecuencia de 7.15 y del teorema siguiente (combinado con 4.56):

Teorema 7.21 (AM(κ)) *La unión de κ conjuntos de primera categoría (resp. con la propiedad de Baire) es de primera categoría (resp. tiene la propiedad de Baire).*

[6] En [PC 10.18] está demostrado para la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, pero la prueba se generaliza trivialmente a cualquier medida de Borel continua en cualquier espacio polaco.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que la unión de κ conjuntos de primera categoría en un espacio polaco X es de primera categoría. Obviamente, una unión de κ conjuntos de primera categoría es también una unión de κ conjuntos diseminados,[7] luego basta probar que la unión de κ conjuntos diseminados es diseminada. Más aún, sustituyendo cada conjunto por su clausura tenemos un conjunto diseminado mayor, luego basta probar que si $\{C_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una familia de cerrados de interior vacío, entonces $C = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ es de primera categoría.

Basta probar que existe una familia $\{D_j\}_{j<\omega}$ de abiertos densos tal que $C \cap \bigcap\limits_{n\in\omega} D_n = \varnothing$, ya que entonces $C \subset \bigcup\limits_{j\in\omega} (X \setminus D_j)$ es de primera categoría.

Sea $\{V_k\}_{k\in\omega}$ una base numerable de X y sea $\mathbb{P}$ el conjunto de las sucesiones finitas $\{(U_i, E_i)\}_{i<n}$ tales que:

a) U_i es una unión de un número finito de abiertos básicos.

b) $E_i \subset \kappa$ es finito.

c) $U_i \cap \bigcup\limits_{\alpha\in E_i} C_\alpha = \varnothing$.

Consideramos en $\mathbb{P}$ el orden parcial dado por

$$p \leq q \leftrightarrow \ell(q) \leq \ell(p) \land \bigwedge i < \ell(q)(U_i^q \subset U_i^p \land E_i^q \subset E_i^p).$$

Vamos a probar que $\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena numerable. Ello se debe a que posibles conjuntos U_i hay una cantidad numerable, al igual que es numerable el conjunto de todas las sucesiones finitas $\{U_i\}_{i<n}$. Por lo tanto, si $A \subset \mathbb{P}$ es no numerable, ha de haber dos elementos $p, q \in A$, $p \neq q$ tales que $\ell(p) = \ell(q) = n$ y $\{U_i^p\}_{i<n} = \{U_i^q\}_{i<n}$, y entonces $\{(U_i^p, E_i^p \cup E_i^q)\}_{i<n}$ es una extensión común de p y q, luego A no es una anticadena.

Para cada $\alpha < \kappa$, $j, k < \omega$ sean

$$F_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee i < \ell(p)\ \alpha \in E_i^p\}, \quad E_{jk} = \{p \in \mathbb{P} \mid j < \ell(p) \land U_j^p \cap V_k \neq \varnothing\}.$$

Veamos que estos conjuntos son densos en $\mathbb{P}$. Dado $p \in \mathbb{P}$, si $C_\alpha \cap V_k \neq \varnothing$ para todo $k \in \omega$, entonces C_α sería denso y, al ser cerrado, sería $C_\alpha = X$, pero C_α tiene interior vacío. Así pues, existe un $k_0 \in \omega$ tal que $C_\alpha \cap V_{k_0} = \varnothing$. Añadiendo a p el par $(I_{k_0}, \{\alpha\})$ tenemos una extensión de p en F_α.

Tomemos ahora $j, k < \omega$ y $p \in \mathbb{P}$. Extendiendo p con pares repetidos podemos suponer que $j < \ell(p)$. Tenemos que $U_j^p \cap \bigcup\limits_{\alpha\in E_j^p} C_\alpha = \varnothing$ y la unión tiene interior vacío por el teorema de Baire. Por lo tanto $V_k \not\subset \bigcup\limits_{\alpha\in E_j^p} C_\alpha$, luego podemos tomar un k' tal que $V_{k'} \subset V_k$ y $V_{k'} \cap \bigcup\limits_{\alpha\in E_j^p} C_\alpha = \varnothing$. Sustituyendo U_j^p por $U_j^p \cup V_{k'}$ obtenemos una extensión de p en E_{jk}.

[7]Aquí usamos AE. En general, en todos los resultados en los que usemos AM usaremos también libremente AE.

Por AM(κ) existe un filtro G que corta a todos los conjuntos densos que hemos definido. Sea D_j la unión de todos los abiertos U_j^p con $p \in G$ y $j < \ell(p)$.

Como $E_{jk} \cap G \neq \varnothing$, tenemos que $D_j \cap V_k \neq \varnothing$ para todo $k \in \omega$, luego D_j es un abierto denso.

Como $F_\alpha \cap G \neq \varnothing$, existe un $p \in G$ tal que $\alpha \in E_j^p$, para cierto $j < \ell(p)$. Si $q \in G$, entonces p y q tienen una extensión común r en G y $\alpha \in E_j^p \subset E_j^r$, luego $U_j^r \cap C_\alpha = \varnothing$. Como $U_j^q \subset U_j^r$, también $U_j^q \cap C_\alpha = \varnothing$. Por consiguiente, $D_j \cap C_\alpha = \varnothing$, luego $\bigcap\limits_{j\in\omega} D_j \cap C_\alpha = \varnothing$. Esto vale para todo α, luego concluimos que $C \cap \bigcap\limits_{j\in\omega} D_j = \varnothing$, como había que probar.

Veamos ahora que la unión de κ conjuntos con la propiedad de Baire tiene la propiedad de Baire. En caso contrario, sea $\mu \leq \kappa$ el menor cardinal para el que existe una familia $\{B_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ de conjuntos con la propiedad de Baire cuya unión no la posee. Cambiando B_α por $B_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta$ tenemos igualmente abiertos con la propiedad de Baire con la misma unión (que, por lo tanto, no tiene la propiedad de Baire), pero ahora los conjuntos son disjuntos dos a dos.

Sea U_α un abierto en X tal que $B_\alpha \,\Delta\, U_\alpha$ sea de primera categoría. Si $\alpha < \beta < \mu$, como $B_\alpha \cap B_\beta = \varnothing$, tenemos que $U_\alpha \cap U_\beta \subset (U_\alpha \setminus B_\alpha) \cup (U_\beta \setminus B_\beta)$, luego $U_\alpha \cap U_\beta$ es un abierto de primera categoría, luego $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$. Ahora bien, X cumple la condición de cadena numerable, luego todos los abiertos U_α son vacíos salvo a lo sumo una cantidad numerable de ellos. Equivalentemente, todos los B_α son de primera categoría salvo a lo sumo una cantidad numerable de ellos.

Por lo tanto, la unión de los B_α que son de primera categoría es de primera categoría (y, en particular, tiene la propiedad de Baire) por la parte ya probada, mientras que la unión de los B_α que no son de primera categoría tiene la propiedad de Baire porque se trata de una unión numerable. Concluimos que la unión de todos los B_α tiene la propiedad de Baire, en contradicción con lo supuesto. ■

En particular, AM implica que la σ-álgebra $\mathrm{Ba}(X)$ es $2^{\aleph_0}$-aditiva. Por otra parte, esta aditividad no puede demostrarse en ZFC (ni siquiera la $\aleph_2$-aditividad), ya que entonces podríamos demostrar que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_2^1$ tiene la propiedad de Baire (por 4.56) y no es el caso.

Uniones de conjuntos de Borel Hemos observado que la hipótesis del continuo implica que todo subconjunto de cualquier espacio polaco es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel. Ahora veremos que, con la ayuda del axioma de Martin, podemos demostrar que es consistente que sólo los conjuntos $\mathbf{\Sigma}_2^1$ puedan expresarse como uniones de $\aleph_1$ conjuntos de Borel (cf. 4.56) La clave es el teorema siguiente:

Teorema 7.22 (AM) *Si X es un espacio de Hausdorff* 2AN *y $|X| < 2^{\aleph_0}$, entonces todo subconjunto de X es $\mathbf{\Pi}_2^0$.*

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X y sea $A \subset X$ arbitrario. Definimos $\mathbb{P}$ como el conjunto de todos los conjuntos finitos p cuyos elementos son de una de las dos formas siguientes:

a) Pares (x, n), con $x \in X \setminus A$ y $n \in \omega$. [Conviene pensar en cada uno de estos pares como si representara una "afirmación" de tipo $x \notin \check{U}_n$ donde $\check{U}_n$ es el nombre de un "abierto genérico" en X que pretendemos definir.]

b) Pares (B, n), con $B \in \mathcal{B}$ y $n \in \omega$. [Estos pares representan "afirmaciones" $B \subset \check{U}_n$.]

Exigimos además que las condiciones p sean "consistentes" en el sentido de que si $x \in B \setminus A$ los pares (x, n) y (B, n) no estén simultáneamente en p. [Es decir, que la condición no "fuerce" al mismo tiempo $x \notin \check{U}_n$ y $B \subset \check{U}_n$.]

Consideramos a $\mathbb{P}$ como c.p.o. con la relación inversa de la inclusión.

Para aplicarle AM hemos de probar que cumple la condición de cadena numerable. En efecto, dada una familia no numerable de condiciones, puesto que sólo hay una cantidad numerable de pares (B, n) y, por consiguiente, sólo una cantidad numerable de conjuntos finitos de tales pares, ha de haber dos condiciones distintas en la familia, digamos p y q, que contengan exactamente los mismos pares de tipo (B, n), pero entonces $p \cup q \in \mathbb{P}$ es una extensión común, luego la familia dada no era una anticadena.

Para cada $x \in X \setminus A$ definimos $D_x = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee n \in \omega \ (x, n) \in p\}$, que obviamente es denso en $\mathbb{P}$. Similarmente, para cada $x \in A$ y $n \in \omega$ definimos $E_x^n = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee B \in \mathcal{B}(x \in B \land (B, n) \in p)\}$. Veamos que también es denso.

Sea $Y \subset X \setminus A$ el conjunto finito de puntos que aparecen como primera componente de un par de p. Como $x \in A$ y X es un espacio de Hausdorff, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \cap Y = \varnothing$. Entonces $q = p \cup \{(B, n)\} \in \mathbb{P}$ es una extensión de p en E_x^n.

Como $|X| < 2^{\aleph_0}$, podemos aplicar AM para concluir que existe un filtro G en $\mathbb{P}$ que corta a todos los conjuntos densos que hemos definido. Llamamos $U_n = \{B \mid \bigvee p \in G \ (B, n) \in p\}$, que es un abierto en X. Basta observar que $A = \bigcap\limits_{n \in \omega} U_n$. En efecto:

Si $x \in A$ y $n \in \omega$, existe un $p \in E_x^n \cap G$, luego existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $(B, n) \in q$, luego $x \in B \subset U_n$, luego $x \in \bigcap\limits_{n \in \omega} U_n$.

Si $x \in X \setminus A$, existe $q \in D_x \cap G$, luego existe un $n \in \omega$ tal que $(x, n) \in q$, luego si $p \in G$ cumple $(B, n) \in q$, entonces (x, n) y (B, n) están en una extensión común de p y q, luego $x \notin B$, luego $x \notin U_n$, luego $x \notin \bigcap\limits_{n \in \omega} U_n$. ■

Observemos que [PC 9.25] prueba la consistencia de las hipótesis del teorema siguiente:

Teorema 7.23 (AM + "$2^{\aleph_0} > \aleph_1$" + "$\aleph_1^L = \aleph_1$") *En todo espacio polaco no numerable, los subconjuntos de cardinal $\aleph_1$ son $\mathbf{\Pi}_1^1$.*

Demostración: Claramente, basta demostrar el teorema para subconjuntos de $\mathcal{C}$. En la prueba del teorema 7.16 se ve que el conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable $A \subset \mathcal{N}$ que se construye tiene concretamente cardinal $\aleph_1$. Obviamente, podemos tomar un conjunto $A \subset \mathcal{C}$ con las mismas características ($\mathbf{\Pi}^1_1$ de cardinal $\aleph_1$). Sea $B \subset \mathcal{C}$ un conjunto arbitrario de cardinal $\aleph_1$. Enumeremos ambos conjuntos: $A = \{a_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1}$, $B = \{b_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1}$.

Por el teorema anterior, el conjunto $U'_n = \{b_\alpha \mid a_\alpha(n) = 1\}$ es $\mathbf{\Pi}^0_2(B)$, luego existe un conjunto U_n de clase $\mathbf{\Pi}^0_2(\mathcal{C})$ tal que $U'_n = U_n \cap B$. Esto significa que

$$\bigwedge \alpha < \aleph_1 \bigwedge n \in \omega\ (a_\alpha(n) = 1 \leftrightarrow b_\alpha \in U_n).$$

Igualmente, existen conjuntos V_n de clase $\mathbf{\Pi}^0_2(\mathcal{C})$ tales que

$$\bigwedge \alpha < \aleph_1 \bigwedge n \in \omega\ (b_\alpha(n) = 1 \leftrightarrow a_\alpha \in V_n).$$

Pero entonces:

$$b \in B \leftrightarrow \bigwedge a \in \mathcal{C}\big[\bigwedge n \in \omega\, (a(n) = 1 \leftrightarrow b \in U_n)$$

$$\rightarrow (a \in A \wedge \bigwedge n \in \omega\, (b(n) = 1 \leftrightarrow a \in V_n))\big].$$

En efecto, para probar la implicación $\leftarrow$ tomamos $b \in \mathcal{C}$ y definimos $a \in \mathcal{C}$ mediante

$$\bigwedge n \in \omega\, (a(n) = 1 \leftrightarrow b \in U_n).$$

Entonces tenemos que $a \in A$, luego $a = a_\alpha$, para cierto $\alpha < \aleph_1$, y la segunda parte de la implicación se traduce en que $b = b_\alpha$.

Recíprocamente, si $b \in B$, entonces $b = b_\alpha$ y la hipótesis del miembro derecho equivale a que $a = a_\alpha$, luego se cumple la consecuencia indicada.

Con esto tenemos una definición para B de tipo $\bigwedge a[\mathbf{\Pi}^0_3 \rightarrow (\mathbf{\Pi}^1_1 \wedge \mathbf{\Pi}^0_3)]$, con lo que concluimos que B es $\mathbf{\Pi}^1_1$. ■

Teorema 7.24 (AM + “$2^{\aleph_0} > \aleph_1$” + “$\aleph_1^L = \aleph_1$”) *Toda unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel en un espacio polaco es $\mathbf{\Sigma}^1_2$.*

Demostración: Basta probar el teorema para $\mathcal{C}$. Para ello fijamos un conjunto U $\mathcal{C}$-universal para $\mathbf{\Pi}^1_1(\mathcal{C})$. Sea $\{B_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1}$ una familia arbitraria de $\aleph_1$ conjuntos de Borel en $\mathcal{C}$ y sea $x_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $V_\alpha = U_{x_\alpha}$. Sea $A = \{x_\alpha \mid \alpha < \aleph_1\}$, que es $\mathbf{\Pi}^1_1$, por el teorema anterior si es no numerable y trivialmente si es numerable. Entonces

$$x \in \bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha \leftrightarrow \bigvee x(x \in A \wedge (x, y) \in U),$$

con lo que tenemos una definición de tipo $\bigvee x(\mathbf{\Pi}^1_1 \wedge \mathbf{\Pi}^1_1)$, luego la unión es $\mathbf{\Sigma}^1_2$.
■

7.4 Cardinales inaccesibles

Conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$ sin subconjuntos perfectos Consideremos ahora el caso de los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerables que no contienen subconjuntos perfectos. Hemos visto (teorema 7.16) que si $\aleph_1^{L[a]} = \aleph_1$ entonces existe un conjunto $\Pi^1_1(a)$ no numerable sin subconjuntos perfectos. Hemos afinado la demostración para usar esta hipótesis y no $\mathcal{N} \subset L[a]$ porque sucede que así el recíproco también es cierto. Esto es consecuencia inmediata de los teoremas 5.22 y 7.13. En efecto, por 5.22, todo conjunto $A \subset \mathcal{N}$ de clase $\Sigma^1_2(a)$ es de la forma $A = p[R]$, donde R es un árbol en $\omega \times \aleph_1$ tal que $R \subset L[a]$ (con lo que $L[R] \subset L[a]$). Claramente $R \subset L[R]$, luego $R = R \cap L[R] \in L[R]$. Combinando esto con 7.13 obtenemos:

Teorema 7.25 (Mansfield-Solovay) *Si $a \in \mathcal{N}$ y A es un subconjunto $\Sigma^1_2(a)$ de $\mathcal{N}$, entonces $A \subset L[a]$ o bien A contiene un subconjunto perfecto.*

Y de aquí se deduce a su vez la equivalencia que anunciábamos:

Teorema 7.26 *Para cada $a \in \mathcal{N}$, las afirnaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\aleph_1^{L[a]} < \aleph_1$.

b) Todo conjunto $\Pi^1_1(a)$ no numerable contiene un subconjunto perfecto.

c) Todo conjunto $\Sigma^1_2(a)$ no numerable contiene un subconjunto perfecto.

Demostración: a) $\rightarrow$ c) es consecuencia del teorema anterior: si suponemos $\aleph_1^{L[a]} < \aleph_1$ y A es un conjunto $\Sigma^1_2(a)$ no numerable, no puede ser $A \subset \mathcal{N}^{L[a]}$, pues el conjunto $\mathcal{N}^{L[a]}$ es numerable, luego por el teorema anterior A contiene un subconjunto perfecto.

Por otra parte, c) $\rightarrow$ b) es trivial y b) $\rightarrow$ a) es el teorema 7.16. ■

De aquí se sigue obviamente esta versión clásica:

Teorema 7.27 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\bigwedge a \in \mathcal{N}\ \aleph_1^{L[a]} < \aleph_1$.

b) Todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto.

c) Todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ no numerable en un espacio polaco contiene un subconjunto perfecto.

Y de aquí deducimos algo crucial. En principio, cabría esperar un resultado de este tipo:

> *(Si* ZFC *es consistente) la existencia de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerables sin subconjuntos perfectos es independiente de los axiomas de* ZFC.

Sin embargo, aunque uno podría jugarse el cuello a que esto es cierto, ¡no es posible demostrarlo! Ciertamente, el teorema 7.16 nos asegura que no es posible demostrar en ZFC que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable contiene un subconjunto perfecto. La cuestión es si podemos asegurar que tampoco se puede demostrar lo contrario. Esto equivaldría a encontrar en ZFC un modelo en el que se cumpla la condición a) del teorema anterior. ¿Es esto posible? El teorema siguiente nos muestra el problema:

Teorema 7.28 *Si se cumplen las condiciones del teorema anterior entonces, para todo $a \in \mathcal{N}$, se cumple que $\aleph_1$ es un cardinal inaccesible*$^{L[a]}$.

DEMOSTRACIÓN: Obviamente $\aleph_1$ es un cardinal regular no numerable en $L[a]$. Sólo hemos de probar que es un cardinal límite. Supongamos, por el contrario, que $\aleph_1 = (\kappa^+)^{L[a]}$, para un cierto $\kappa < \aleph_1$. Sea $f : \omega \longrightarrow \kappa$ biyectiva, sea $E \subset \omega \times \omega$ el buen orden que hace que $f : (\omega, E) \longrightarrow \mu$ sea una semejanza y sea $b \in \mathcal{N}$ tal que $E = E_b$. Así $E_b \in L[b]$ y, por consiguiente, $f \in L[b] \subset L[a, b]$.

Sea $c \in \mathcal{N}$ tal que $c(2n) = a(n)$, $c(2n + 1) = b(n)$. Así, $a, b \in L[c]$, luego $L[a] \subset L[a, b] \subset L[c]$ y $f \in L[c]$. Por consiguiente, κ es numerable en $L[c]$.

Si $\kappa < \alpha < \aleph_1$, entonces $(|\alpha| = |\mu|)^{L[a]}$, luego $(|\alpha| = |\mu|)^{L[c]}$, luego α es numerable$^{L[c]}$. Esto significa que $\aleph_1 = \aleph_1^{L[c]}$, en contradicción con la condición a) del teorema anterior. ■

Así pues, si pudiéramos construir en ZFC un modelo de ZFC + "todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable posee un subconjunto perfecto", esto nos daría un modelo de ZFC + "existe un cardinal inaccesible", y con ello habríamos demostrado la consistencia de ZFC en ZFC. Por el teorema de incompletitud de Gödel, ZFC sería contradictorio.

Concluimos que si es consistente que todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ no numerable posea un subconjunto perfecto, dicha consistencia no puede demostrarse a partir de la mera consistencia de ZFC. Lo máximo a lo que podemos aspirar es a demostrarla suponiendo la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible", es decir, suponiendo la existencia de un cardinal inaccesible o bien partiendo de un modelo de ZFC en el que haya un cardinal inaccesible. Así lo haremos en el capítulo siguiente. Veamos otro caso similar:

Medibilidad de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_3$ Ya hemos visto que en ZFC no puede demostrarse ni refutarse la existencia de conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$ que no sean universalmente medibles, luego tampoco puede demostrarse que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ lo sea, pero, ¿puede demostrarse la existencia de un conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ que no sea universalmente medible? Equivalentemente, ¿podemos probar que si ZFC es consistente, también lo es ZFC + "todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ es universalmente medible"?

La respuesta es análoga a la del problema sobre la existencia de conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$ sin subconjuntos perfectos:

Teorema 7.29 (Shelah) *Sea $a \in \mathcal{N}$. Si todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ es medible Lebesgue, entonces $\bigwedge a \in \mathcal{N}\ \aleph_1^{L[a]} < \aleph_1$, luego $\aleph_1$ es inaccesible*$^{L[a]}$ *para todo $a \in \mathcal{N}$.*

Demostración: Consideremos en el espacio de Cantor $\mathcal{C}$ la medida m descrita en la sección 3.2. Si todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_3^1$ (de $\mathbb{R}$ y, en particular de, $\mathbb{I}$) es medible Lebesgue, el teorema 2.43 nos da que todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}_3^1$ de $\mathcal{C}$ es medible para la medida m, así como que todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}_3^1$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es medible para la medida producto.

Supongamos que $\aleph_1^{L[a]} = \aleph_1$. Entonces $X = \mathcal{C} \cap L[a]$ es un subconjunto $\mathbf{\Sigma}_2^1$ de $\mathcal{N}$ de cardinal $\aleph_1$. Más precisamente, en X está definido el buen orden $\trianglelefteq_a$, que es también $\mathbf{\Sigma}_2^1$ y $(X, \trianglelefteq_a)$ tiene ordinal $\aleph_1$. Vamos a refinar la prueba del teorema 3.22.

En primer lugar demostramos que se cumple la condición (N) del teorema 3.21. Para ello tomamos $H \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ un conjunto G_δ con secciones nulas y hemos de probar que $H(X)$ es nulo. El argumento de 3.22 es válido salvo por el hecho de que requiere que el conjunto $\tilde{H}(X)$ sea medible, y para asegurarlo en el contexto actual hemos de demostrar que es $\mathbf{\Sigma}_3^1$.

Recordemos que $H(X) = \bigcup\limits_{x \in X} H_x$, $\lambda(x) = \text{mín}\{y \in \mathcal{C} \mid y \in X \land x \in H_y\}$ y

$$\tilde{H}(X) = \{(x, y) \in H(X) \times H(X) \mid \lambda(x) \lhd_a \lambda(y)\}.$$

Por lo tanto:

$$(x, y) \in \tilde{H}(X) \leftrightarrow \bigvee zw(z \in X \land w \in X \land (x, z) \in H \land (y, v) \in H \land$$
$$\bigwedge u(u \in X \land (y, u) \in H \rightarrow \neg u \trianglelefteq_a z)).$$

La estructura de esta relación es:

$$\bigvee zw(\mathbf{\Sigma}_2^1 \land \mathbf{\Sigma}_2^1 \land \mathbf{\Delta}_1^1 \land \mathbf{\Delta}_1^1 \land \bigwedge u(\mathbf{\Sigma}_2^1 \land \mathbf{\Delta}_1^1 \rightarrow \mathbf{\Pi}_2^1))$$

Por lo tanto, la relación tras $\bigwedge u$ es $\mathbf{\Pi}_2^1$, luego con $\bigwedge u$ también lo es, luego la relación tras $\bigvee zw$ es $\mathbf{\Sigma}_3^1$ y con $\bigvee zw$ también lo es.

Igualmente se prueba que el conjunto D definido en 3.22 es $\mathbf{\Sigma}_3^1$, lo que nos permite concluir que X cumple la propiedad (N). A su vez, eso garantiza que el filtro $\mathcal{F}_X$ es rápido, por lo que el conjunto $\tilde{\mathcal{F}}_X \subset \mathcal{C}$ no es medible. Sólo necesitamos probar que $\tilde{\mathcal{F}}_X$ es también $\mathbf{\Sigma}_3^1$.

Para ello consideramos un conjunto $U \subset \mathcal{C}^3$ que sea $\mathcal{C}^2$-universal[8] para $\mathbf{\Sigma}_1^1$, de modo que cada subconjunto de Borel de $\mathcal{C}^2$ está determinado por dos puntos $x, y \in \mathcal{N}$ tales que $U_x = \mathcal{N} \setminus U_y$. Así:

$$p \in \tilde{\mathcal{F}}_X \leftrightarrow p \in \mathcal{C} \land \bigvee R(R \text{ es una relación de equivalencia de Borel en } \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$
$$\land |\mathcal{C}/R| \leq \aleph_0 \land Z_R \subset p^{-1}[\{1\}]).$$
$$\leftrightarrow p \in \mathcal{C} \land \bigvee xy \in \mathcal{C}(\bigwedge uv \in \mathcal{C}((u, v) \in U_x \leftrightarrow (u, v) \notin U_y) \land$$
$$U_x \text{ es una R.E. en } \mathcal{C} \times \mathcal{C}) \land |\mathcal{C}/U_x| \leq \aleph_0 \land Z_{U_x} \subset p^{-1}[\{1\}]).$$

Vamos a analizar cada parte de esta relación:

[8]El teorema 4.39 prueba la existencia de conjuntos universales para $\mathcal{C}$, pero el isomorfismo natural $\mathcal{C}^2 \cong \mathcal{C}$ implica inmediatamente la existencia de conjuntos universales para $\mathcal{C}^2$.

- $\bigwedge uv \in \mathcal{C}((u,v) \in U_x \leftrightarrow (u,v) \notin U_y) \leftrightarrow$

$$\bigwedge uv(u \in \mathcal{C} \wedge v \in \mathcal{C} \rightarrow ((u,v,x) \in U \leftrightarrow (u,v,y) \notin U))$$

  es $\mathbf{\Pi}^1_2$, luego $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

- U_x es una R.E. en $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \leftrightarrow$

$$\bigwedge uvw \in \mathcal{C}((u,u,x) \in U \wedge ((u,v,x) \in U \rightarrow (v,u,x) \in U) \wedge$$

$$((u,v,x) \in U \wedge (v,w,x) \in U \rightarrow (u,w,x) \in U))$$

  es $\mathbf{\Pi}^1_2$, luego $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

- $|\mathcal{C}/U_x| \leq \aleph_0 \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \bigwedge u \in \mathcal{C} \bigvee n \in \omega \bigvee w \in \mathcal{C}(w = z_n \wedge (w,u,x) \in U)$ es $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

- $Z_{U_z} \subset p^{-1}[\{1\}] \leftrightarrow \bigwedge uv(u \in X \wedge v \in X \wedge u \neq v \wedge (u,v,x) \in U \rightarrow$

$$\bigvee n \in \omega(u|_n = v|_n \wedge u(n) \neq v(n) \wedge p(n) = 1))$$

  es $\mathbf{\Pi}^1_2$, luego $\mathbf{\Sigma}^1_3$.

En total, $p \in \tilde{\mathcal{F}}_X$ es de la forma $\mathbf{\Delta}^1_1 \wedge \bigvee xy\ \mathbf{\Sigma}^1_3$, luego es $\mathbf{\Sigma}^1_3$, como había que probar. La última parte del enunciado es el teorema 7.28. ■

Así pues, para probar la consistencia de que todo subconjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ de $\mathbb{R}$ sea medible Lebesgue o, más en general, de que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_3$ de un espacio polaco sea universalmente medible, es necesario suponer como mínimo la consistencia de ZFC + “existe un cardinal inaccesible”. Nuevamente, en el próximo capítulo demostraremos que esta condición necesaria es también suficiente para garantizar la consistencia de la medibilidad de los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_3$ y, de hecho, de todos los conjuntos proyectivos.

Extensiones de medidas de Borel Discutimos ahora una propiedad cuya consistencia requiere más que la consistencia de un cardinal inaccesible.

Sabemos que el axioma de elección implica que existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ no medibles Lebesgue y, más en general, que, para toda medida de Borel continua en un espacio polaco no numerable existen conjuntos no medibles. Sin embargo, un problema diferente es determinar si la medida de Lebesgue puede extenderse a una medida definida sobre todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ (lo que claramente equivale a que lo mismo suceda con toda medida de Borel continua en todo espacio polaco). El ejemplo de Vitali demuestra que no pueden existir extensiones invariantes por traslaciones, pero deja abierta la posibilidad de que existan extensiones sin esta propiedad. Sabemos [PC 10.27] que esto equivale a que exista un cardinal $\mathbb{R}$-medible $\leq 2^{\aleph_0}$. Teniendo en cuenta que los cardinales $\mathbb{R}$-medibles son débilmente inaccesibles, es inmediato que es consistente que no existan extensiones de la medida de Lebesgue a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Por otra parte, Solovay demostró [PC 15.51, 15.55] que la consistencia de que exista un cardinal $\mathbb{R}$-medible $\leq 2^{\aleph_0}$ es equivalente a la consistencia de que exista un cardinal medible.

Esto significa que no es posible demostrar que, si ZFC es consistente, también lo es ZFC + "la medida de Lebesgue puede extenderse a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$", sino que la consistencia de que dicha extensión sea posible requiere (y, según acabamos de decir, es de hecho equivalente a) la consistencia de que exista un cardinal medible, la cual a su vez no puede ser demostrada ni siquiera suponiendo la consistencia de que exista un cardinal inaccesible, o infinitos de ellos.

La consistencia de ADP En el capítulo X demostraremos la consistencia de ADP suponiendo la consistencia de que existan infinitos cardinales de Woodin y un cardinal medible sobre ellos. Los cardinales de Woodin los definiremos y estudiaremos en el capítulo IX, pero de momento diremos únicamente que esta hipótesis es más fuerte que la existencia de una clase propia de cardinales medibles y más débil que la existencia de un cardinal supercompacto.

Sucede que la mera $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}_1^1)$ ya implica la existencia de cardinales grandes, de modo que la consistencia de ADP no puede probarse a partir de la mera consistencia de ZFC o de ZFC + "existe un cardinal inaccesible", por lo que las pruebas de consistencia que hemos obtenido a partir del axioma de Martin, o las que veremos en el capítulo siguiente mediante extensiones genéricas, son más potentes que las que podríamos obtener del hecho de que el resultado en cuestión se deduce de ADP, puesto que AM y, más en general, las extensiones genéricas, proporcionan pruebas de consistencia relativas a la mera consistencia de ZFC (o de ZFC más cualquier hipótesis adicional que se suponga en el modelo base, que en el capítulo siguiente será la mera existencia de un cardinal inaccesible), mientras que, según estamos señalando, una prueba de consistencia basada en ADP supone mucho más que eso. ■

7.5 El modelo $L(\mathcal{N})$

Dedicamos esta última sección a estudiar el modelo $L(\mathcal{N})$, es decir, el menor modelo de ZF que contiene a todos los ordinales y a $\mathcal{N}$. Observemos en primer lugar que

$$L(\mathcal{P}\omega) = L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{N}) = L(\mathbb{R}).$$

En efecto, cada una de estas clases es el menor modelo de ZF que contiene a todos los ordinales y a $\mathcal{P}\omega$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$ o $\mathbb{R}$, respectivamente, pero todo modelo que contenga a $\mathcal{P}\omega$ contiene a $\mathcal{C}$, ya que cada $A \in \mathcal{P}\omega$ puede codificarse por su función característica $\chi_A \in \mathcal{C}$, de modo que $A \in L(\mathcal{C})$, luego $\mathcal{P}\omega \subset L(\mathcal{C})$, luego $\mathcal{P}\omega = \mathcal{P}\omega \cap L(\mathcal{C}) = (\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{C})} \in L(\mathcal{C})$. Esto prueba que $L(\mathcal{P}\omega) \subset L(\mathcal{C})$, y el recíproco se prueba análogamente.

La igualdad $L(\mathcal{P}\omega) = L(\mathcal{N})$ se demuestra de forma similar. Ahora necesitamos una biyección absoluta $\omega \times \omega \longrightarrow \omega$, por ejemplo, la biyección canónica

$\langle\ ,\ \rangle$ definida en 1.23. Así, si $x \in \mathcal{N}$, podemos considerar el conjunto

$$A = \{n \in \omega \mid \bigvee uv \in \omega (n = \langle u, v\rangle \wedge x(u) = v)\}.$$

Como $A \in L(\mathcal{P}\omega)$, también $x \in L(\mathcal{P}\omega)$, luego $\mathcal{N} \subset L(\mathcal{P}\omega)$, luego $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{L(\mathcal{P}\omega)} \in L(\mathcal{P}\omega)$ y $L(\mathcal{N}) \subset L(\mathcal{P}\omega)$. Para la inclusión contraria podemos usar funciones características, como antes.

Por último, a partir de un homeomorfismo canónico (por ejemplo, el definido por las fracciones continuas) $\mathcal{N} \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se razona que $L(\mathcal{N}) = L(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = L(\mathbb{R})$, ya que $\mathbb{Q}$ está en todo modelo transitivo de ZF.

El interés de $L(\mathcal{N})$ reside en que, según demostraremos en el capítulo XI, si existen infinitos cardinales de Woodin y un cardinal medible sobre ellos, no sólo se cumple ADP (tal y como anunciábamos al final de la sección anterior, sino también $\mathrm{AD}^{L(\mathcal{N})}$.

El hecho de que (en presencia de cardinales grandes) $L(\mathcal{N})$ cumpla AD convierte a $L(\mathcal{N})$ en "el modelo natural" del axioma de determinación, de modo que ZFD + $V = L(\mathcal{N})$ proporciona una teoría descriptiva de conjuntos todavía más precisa que ZFD.

En particular vemos que $L(\mathcal{N})$ no cumple necesariamente AE, aunque esto lo tenemos demostrado ya en [PC 6.13], donde se ve que si ZF es consistente (lo que equivale a que ZFC sea consistente), también lo es ZFC + $\neg\mathrm{AE}^{L(\mathcal{P}\omega)}$. (Más concretamente, se prueba la consistencia de que $\mathcal{P}\omega$ no pueda ser bien ordenado$^{L(\mathcal{P}\omega)}$.)

Ahora vamos a probar (en ZF + ED) que $L(\mathcal{N})$ cumple ED. Esto se traduce en que en ZF + ED (o incluso en ZF + ED + $V = L(\mathcal{N})$) no puede demostrarse que $\mathcal{N}$ (o, equivalentemente, $\mathcal{P}\omega$ o $\mathbb{R}$) pueda ser bien ordenado. En particular, AE no puede demostrarse en ZF + ED (siempre suponiendo que ZF sea consistente).

Necesitamos el siguiente resultado auxiliar:

Teorema 7.30 (ZF + $V = L(\mathcal{N})$) *Para cada ordinal α existe un ordinal λ_α y una aplicación $\pi_\alpha : \lambda_\alpha \times \mathcal{N} \longrightarrow L_\alpha(\mathcal{N})$ suprayectiva.*

Demostración: Como no podemos usar ninguna forma de axioma de elección, se trata de construir explícitamente la función π_α, sin que la construcción dependa de ninguna elección arbitraria que no podamos precisar. Construiremos las aplicaciones π_α por recurrencia sobre α, de modo que, aunque existan infinitas aplicaciones que cumplan el teorema, π_α será la única aplicación tal que existe una sucesión de aplicaciones $\{\pi_\delta\}_{\delta \leq \alpha}$ en la que π_0 se define concretamente como veremos, y en la que $\pi_{\delta+1}$ se obtiene a partir de π_δ de la forma concreta en que veremos y en la que, para un límite λ, π_λ se obtiene a partir de $\{\pi_\delta\}_{\delta<\lambda}$ de la forma concreta que veremos.

Tenemos que $L_0(\mathcal{N})$ es la unión de $\{\mathcal{N}\}$ y clausura transitiva de $\mathcal{N}$, luego, concretamente,

$$L_0(\mathcal{N}) = \{\mathcal{N}\} \cup \mathcal{N} \cup (\omega \times \omega) \cup [\omega]^2 \cup [\omega]^1 \cup \omega,$$

donde $[\omega]^n$ representa al conjunto de los subconjuntos de ω con n elementos.

Es fácil definir (explícitamente[9]) una función $f:\omega \longrightarrow (\omega\times\omega)\cup[\omega]^2\cup[\omega]^1\cup\omega$ suprayectiva y a partir de ella definimos $\pi_0 : 3\times\mathcal{N} \longrightarrow L_0(\mathcal{N})$ mediante

$$\pi_0(i,x) = \begin{cases} f(x(0)) & \text{si } i=0, \\ \mathcal{N} & \text{si } i=1, \\ x & \text{si } i=2. \end{cases}$$

Así, tomamos $\lambda_0 = 3$ y π_0 es claramente suprayectiva.

Supuesta definida π_α, tenemos que $L_{\alpha+1}(\mathcal{N}) = \mathcal{D}L_\alpha(\mathcal{N})$ (véase [PC 3.5] para la definición del conjunto de partes definibiles). En general, si X es un conjunto, tenemos aplicaciones suprayectivas (explícitas)

$$\bigcup_{n\in\omega} X^n\times\omega \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega}(X^n\times \mathrm{Df}(X,n+1)) \longrightarrow \mathcal{D}X.$$

Por otra parte, π_α permite definir (explícitamente) una aplicación suprayectiva

$$(\lambda_\alpha)^n\times\mathcal{N}^n \longrightarrow L_\alpha(\mathcal{N})^n.$$

A su vez, por una parte, podemos definir (explícitamente) una biyección $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^n$ y, por otra parte, en $(\lambda_\alpha)^n$ podemos definir (explícitamente) un buen orden y considerar su ordinal λ'_n, de modo que tenemos una (única) semejanza $\lambda'_n \longrightarrow (\lambda_\alpha)^n$. Si λ' es el supremo de los λ'_n, tenemos aplicaciones suprayectivas

$$\lambda'\times\mathcal{N} \longrightarrow L_\alpha(\mathcal{N})^n.$$

A su vez, éstas nos permiten definir

$$\omega\times\omega\times\lambda'\times\mathcal{N} \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} L_\alpha(\mathcal{N})^n\times\omega.$$

Considerando de nuevo un buen orden (explícito) en $\omega\times\omega\times\lambda'$ y su ordinal $\lambda_{\alpha+1}$, la semejanza correspondiente nos da una aplicación suprayectiva

$$\lambda_{\alpha+1}\times\mathcal{N} \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} L_\alpha(\mathcal{N})^n\times\omega.$$

Componiendo con la primera aplicación que hemos considerado (particularizada a $X = L_\alpha(\mathcal{N})$) obtenemos finalmente

$$\pi_{\alpha+1} : \lambda_{\alpha+1}\times\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{D}L_\alpha(\mathcal{N}) = L_{\alpha+1}(\mathcal{N}).$$

Ahora suponemos construidas $\{\pi_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ y definimos una aplicación suprayectiva

$$\pi' : \lambda\times\lambda'\times\mathcal{N} \longrightarrow \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha(\mathcal{N}) = L_\lambda(\mathcal{N}),$$

[9]Esta situación será típica a lo largo de toda la prueba: existen infinitas definiciones posibles de f y no vamos a especificar ninguna porque es irrelevante la que escojamos, pero la demostración exige especificar una en concreto para que la construcción esté completamente determinada.

donde λ' es el supremo de $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$. Concretamente,

$$\pi'(\alpha,\beta,x) = \begin{cases} \pi_\alpha(\beta,x) & \text{si } \beta < \lambda_\alpha, \\ \varnothing & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Una vez más consideramos una semejanza $\lambda_\lambda \longrightarrow \lambda \times \lambda'$ (respecto de un buen orden explícito) y al componer obtenemos π_λ. ■

Observemos que es posible dar un paso más en la prueba del teorema anterior para concluir lo siguiente:

Teorema 7.31 *Existe una fórmula (metamatemática) $\phi(\alpha,x,v)$, sin más variables libres que las indicadas, de modo que*

$$(\bigwedge u \bigvee \alpha \in \omega \bigvee x \in \mathcal{N} \bigwedge v(v = u \leftrightarrow \phi(\alpha,x,v)))^{L(\mathcal{N})}.$$

En otras palabras, todo elemento de $L(\mathcal{N})$ es (explícitamente) definible a partir de un ordinal y de un elemento de $\mathcal{N}$.

Demostración: La demostración del teorema anterior muestra que existe una fórmula $\psi(f,\alpha)$ con las variables libres indicadas, de modo que

$$\bigwedge \alpha \in \Omega \bigwedge f(\psi(f,\alpha) \leftrightarrow f = \pi_\alpha)^{L(\mathcal{N})}.$$

Más precisamente, ψ es la fórmula que afirma que existe una función F cuyo dominio es $\alpha+1$, de modo que $F(0)$ cumple la definición que hemos dado de π_0, y para todo $\delta < \alpha$ se cumple que $F(\delta+1)$ se define a partir de $F(\delta)$ como hemos indicado, y para todo límite $\lambda \leq \alpha$ se cumple que $F(\lambda)$ se define a partir de $\{F(\delta)\}_{\delta<\lambda}$ como hemos indicado y $f = F(\alpha)$.

Consideramos el buen orden canónico en $\Omega\times\Omega$, que determina una semejanza $\langle\ ,\ \rangle : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$. Definimos $\phi(\alpha,x,v)$ como la fórmula:

$$\alpha \in \Omega \wedge x \in \mathcal{N} \wedge \bigvee \pi \bigvee \beta\gamma \in \Omega(\alpha = \langle\beta,\gamma\rangle \wedge \psi(\pi,\beta) \wedge$$
$$(((\gamma,x) \in \mathcal{D}\pi \wedge v = \pi(\gamma,x)) \vee ((\gamma,x) \notin \mathcal{D}\pi \wedge v = \varnothing)))).$$

■

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado que anunciábamos:

Teorema 7.32 $L(\mathcal{N})$ *cumple* ED.

Demostración: El teorema 7.30 relativizado a $L(\mathcal{N})$ implica que, para cada ordinal α, existe un ordinal λ_α y una aplicación $\pi_\alpha \in L(\mathcal{N})$ de manera que $\pi_\alpha : \lambda_\alpha \times \mathcal{N} \longrightarrow L_\alpha(\mathcal{N})$ suprayectiva.

Tomemos ahora A, $R \in L(\mathcal{N})$ que cumplan las hipótesis de ED. Consideramos un ordinal α tal que A, $R \in L_\alpha(\mathcal{N})$. Utilizando ED (en V), podemos afirmar que existe $f_0 : \omega \longrightarrow A$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ f_0(n+1)\, R\, f_0(n)$. Lo que no podemos asegurar en principio es que $f_0 \in L(\mathcal{N})$.

Como (en V) podemos hacer elecciones numerables, sabemos que existen sucesiones $\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ y $\{x_n\}_{n\in\omega}$ de modo que $\bigwedge n \in \omega\ \pi_\alpha(\beta_n, x_n) = f_0(n)$. Como la sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega} \in \mathcal{N}^\omega$ puede codificarse por un único elemento de $\mathcal{N} \subset L(\mathcal{N})$, resulta que $\{x_n\}_{n\in\omega} \in L(\mathcal{N})$.

No podemos asegurar que $\{\beta_n\}_{n\in\omega} \in L(\mathcal{N})$, pero podemos razonar como sigue: consideramos en $\omega \times \alpha$ la relación

$$(n, \beta)\, R\, (n', \beta') \leftrightarrow n = n' + 1 \land R(\pi_\alpha(\beta', x_{n'}), \pi_\alpha(\beta, x_n)).$$

Claramente, $R \in L(\mathcal{N})$ y no está bien fundada en V, pues tenemos la sucesión

$$\cdots\, R\, (\beta_3, x_3)\, R\, (\beta_2, x_2)\, R\, (\beta_1, x_1)\, R\, (\beta_0, x_0).$$

Entonces tampoco puede estar bien fundada en $L(\mathcal{N})$ (en el sentido de que todo subconjunto no vacío de $\omega \times \alpha$ tenga un R-minimal), pues esto permitiría construir (en $L(\mathcal{N})$, sin hacer uso del axioma de elección) una aplicación rango $\rho : \omega \times \lambda \longrightarrow \Omega$, que a su vez daría lugar a una sucesión decreciente de ordinales (en V)

$$\cdots < \rho(\beta_3, x_3) < \rho(\beta_2, x_2) < \rho(\beta_1, x_1) < \rho(\beta_0, x_0).$$

Así pues, existe un conjunto $X \in L(\mathcal{N})$ tal que $X \subset \omega\times\lambda$ y no tiene elemento R-minimal (es decir, todo elemento tiene un anterior). Finalmente, como $\omega \times \lambda$ puede ser bien ordenado en $L(\mathcal{N})$, podemos construir una función $g \in L(\mathcal{N})$ tal que $g : \omega \longrightarrow X$ y $\bigwedge n \in \omega\ g(n + 1)\, R\, g(n)$. A su vez, si $g = \{(\beta_i, n_i)\}_{i\in\omega}$, podemos definir $f : \omega \longrightarrow A$ mediante $f(i) = \pi_\alpha(\beta_i, x_{n_i})$. Así $f \in L(\mathcal{N})$ y $\bigwedge i \in \omega\ f(i + 1)\, R\, f(i)$. ■

Por consiguiente, todos los teoremas que hemos demostrado en ZF + ED son válidos en $L(\mathcal{N})$. En particular esto nos da una prueba más de independencia:

Buenos órdenes proyectivos Hemos demostrado que si $\mathcal{N} \subset L[a]$ existe un buen orden $\mathbf{\Delta}^1_2$ en $\mathcal{N}$ y, por consiguiente, en cualquier espacio polaco. La pregunta es: ¿puede demostrarse la existencia de dicho buen orden en ZFC, sin suponer $\mathcal{N} \subset L[a]$? Y la respuesta es negativa. Más aún:

> *(Si* ZFC *es consistente) la existencia de un buen orden proyectivo en* $\mathcal{N}$ *(o, equivalentemente, en cualquier espacio polaco no numerable) es independiente de los axiomas de* ZFC.

En efecto, que no puede refutarse ya lo hemos probado, pues si pudiéramos demostrar que no existe un buen orden proyectivo en $\mathcal{N}$ tendríamos que la teoría ZFC + $V = L$ sería contradictoria, y con ella también ZFC.

Por otra parte, en [PC 6.13] construimos un modelo transitivo de ZFC en el que $\mathcal{P}\omega$ no puede ser bien ordenado en $L(\mathcal{P}\omega) = L(\mathcal{N})$, es decir, que en dicho modelo, $\mathcal{P}\omega$ y, por consiguiente, $\mathcal{N}$, no admite un buen orden que pertenezca a $L(\mathcal{N})$, pero el teorema 5.39 afirma que todos los conjuntos proyectivos están en $L(\mathcal{N})$, luego en dicho modelo $\mathcal{N}$ no admite buenos órdenes proyectivos y, por consiguiente, no es posible demostrar que existan. ■

La relativización de AD a $L(\mathcal{N})$ Terminamos con una observación sobre el significado de la relativización $\mathrm{AD}^{L(\mathcal{N})}$. En principio, significa que para todo $A \subset \mathcal{N}$ tal que $A \in L(\mathcal{N})$, el juego $J(A)$ está determinado$^{L(\mathcal{N})}$, es decir, que existe una estrategia$^{L(\mathcal{N})}$ $\sigma \in L(\mathcal{N})$ para uno de los dos jugadores. Ahora bien, teniendo en cuenta que cada jugador juega una sucesión en $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{L(\mathcal{N})}$ es inmediato que "ser una estrategia para $J(A)$" es absoluto para $L(\mathcal{N})$ y, como toda estrategia (a través de la biyección canónica $\omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$) puede identificarse con un elemento de $\mathcal{N}$, concluimos que es redundante exigir $\sigma \in L(\mathcal{N})$, de modo que "$J(A)$ está determinado" es una fórmula absoluta para $L(\mathcal{N})$.

En definitiva, $\mathrm{AD}^{L(\mathcal{N})}$ es equivalente a $\mathrm{Det}_\omega((\mathcal{P}\mathcal{N})^{L(\mathcal{N})})$, es decir, a que no sólo estén determinados los conjuntos proyectivos (como afirma ADP), sino tódos los subconjuntos de $\mathcal{N}$ que pertenecen a $L(\mathcal{N})$, que son muchos más, y esta afirmación (supuesta la consistencia de ciertos cardinales grandes) es consistente con ZFC, por lo que la contradicción entre AD y ZFC es meramente superficial.

Capítulo VIII

Modelos transitivos

En este capítulo presentaremos el modelo de Solovay que demuestra, entre otras cosas, la consistencia con ZFC de que todo subconjunto proyectivo de $\mathbb{R}$ sea medible Lebesgue, o incluso la consistencia de ZF + ED y que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ sea medible Lebesgue. Demostraremos esto en la sección 8.6, de modo que las secciones previas pueden considerarse como preliminares a esta prueba, si bien todas ellas contienen resultados de interés en sí mismos.

8.1 Relaciones absolutas

En esta sección demostraremos que las fórmulas Σ_1^1 y Π_1^1 son absolutas para modelos transitivos de ZF + ED y que, bajo alguna hipótesis adicional, lo mismo sucede con las fórmulas Σ_2^1 y Π_2^1. Nos ocupamos primero de este segundo caso porque así la prueba del primero puede verse como una simplificación de la segunda:

Teorema 8.1 (Schoenfield) *Sea M un modelo transitivo de* ZF + ED *tal que $\aleph_1 \in M$ y sea $\phi[n_1,\ldots,n_r,x_1,\ldots,x_s,y,z]$ una fórmula aritmética de $\mathcal{L}_a$. Entonces*

$$\bigwedge t \in \omega^r \bigwedge x \in \mathcal{N}^s \cap M(\ \vDash^M \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t,x] \leftrightarrow\ \vDash \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t,x]\ ).$$

Demostración: Trataremos primero el caso $r=0$. El conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathcal{N}^{s+2} \mid\ \vDash \neg\phi[x,y,z]\}$$

es aritmético, luego existe $R_\phi \subset V_\omega$ aritmético tal que $\vDash \neg\phi[x,y,z]$ equivale a

$$Cn_1 \cdots Cn_r\, R_\phi(n_1,\ldots,n_r,x|_{n_1},\ldots,x|_{n_r},y|_{n_1},\ldots,y|_{n_r},z|_{n_1},\ldots,z|_{n_r}), \quad (8.1)$$

donde las C's representan cuantificadores $\bigwedge$ o $\bigvee$. El hecho de que R_ϕ sea aritmético significa que

$$p \in R_\phi \leftrightarrow p \in V_\omega \wedge V_\omega \vDash \psi[p],$$

para cierta fórmula ψ del lenguaje de la teoría de conjuntos.

Un análisis de la prueba del teorema 5.36 permitiría definir explícitamente ψ a partir de ϕ, al igual que la sucesión de cuantificadores que requiere (8.1), y es claro que dichas definiciones tienen que ser absolutas para modelos transitivos de ZF.

El miembro derecho de la equivalencia anterior es también absoluto para modelos transitivos de ZF. (Esto se prueba trivialmente por inducción sobre la longitud de ψ. La clave es que V_ω está contenido en cualquier modelo transitivo de ZF.) Por lo tanto $R_\phi \in M$ y, como las definiciones de ψ y de la sucesión de cuantificadores de (8.1) son absolutas, concluimos que, para $x, y, z \in \mathcal{N} \cap M$, la relación $\vDash^M \neg\phi[x, y, z]$ equivale también a (8.1).

Similarmente, el conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathcal{N}^{s+1} \mid \ \vDash \bigvee z \neg\phi[x, y]\}$$

es Σ^1_1, luego

$$\vDash \bigvee z \neg\phi[x, y] \leftrightarrow \bigvee z \bigwedge n\ U(x|_n, y|_n, z|_n),$$

para cierto $U \subset V_\omega$ aritmético. Esto es por el teorema 5.10. De nuevo un análisis de la prueba nos daría una definición de U a partir de R_ϕ y de la sucesión de cuantificadores de (8.1), de modo que la construcción de U es absoluta para modelos transitivos de ZF + ED. Por lo tanto, $U \in M$ y, para $x, y \in \mathcal{N} \cap M$,

$$\vDash^M \bigvee z \neg\phi[x, y] \leftrightarrow \bigvee z \in \mathcal{N} \cap M \bigwedge n\ U(x|_n, y|_n, z|_n).$$

Tal y como se razona al principio de la sección 5.3 (nuestro conjunto U es allí R), podemos suponer que U es un árbol en ω^{s+2}. Entonces

$$\vDash \bigwedge z\, \phi[x, y] \leftrightarrow \bigwedge z \bigvee n \neg U(x|_n, y|_n, z|_n) \leftrightarrow U_{(x,y)} \text{ está bien fundado}$$

e igualmente, para $x, y \in \mathcal{N} \cap M$,

$$\vDash^M \bigwedge z\, \phi[x, y] \leftrightarrow U_{(x,y)} \text{ está bien fundado.}$$

(Notemos que no relativizamos la fórmula de la derecha porque, por [PC 1.37], “estar bien fundado” es absoluto para modelos transitivos de ZF.)

Finalmente, el teorema 5.22 nos da un árbol R en $\omega^s \times \aleph_1$ tal que

$$\vDash \bigvee y \bigwedge z\, \phi[x] \leftrightarrow \bigvee f \in \aleph_1^\omega \bigwedge n\ (x|_n, f|_n) \in R$$

o, equivalentemente,

$$\vDash \bigvee y \bigwedge z\, \phi[x] \leftrightarrow R_x \text{ no está bien fundado.}$$

Nuevamente nos apoyamos en que R se construye explícitamente a partir de U, así como en que la construcción no usa en ningún momento que $\aleph_1$ sea precisamente $\aleph_1$ (es decir, el menor ordinal no numerable), sino que es válida igualmente si tomamos desde el principio cualquier otro ordinal no numerable en su lugar. Esto es importante porque no podemos asegurar que $\aleph_1^M = \aleph_1$, pero sí que es cierto que $\aleph_1$ es un ordinal no numerable^M. Por consiguiente, podemos concluir que $R \in M$ y, para todo $x \in \mathcal{N} \cap M$,

$$\models^M \bigvee y \bigwedge z\, \phi[x] \leftrightarrow R_x \text{ no está bien fundado.}$$

Las dos últimas equivalencias nos dan el resultado para $r = 0$. En general, dada la fórmula ϕ del enunciado, definimos

$$\psi(w, x, y, z) \equiv \phi(w(1), \ldots, w(r), x, y, z),$$

donde $1, \ldots, r$ son las constantes de $\mathcal{L}_a$. Tenemos el teorema probado para ψ, y, si $t \in \omega^r$ y $x \in \mathcal{N}^s \cap M$, fijamos un $w \in \mathcal{N} \cap M$ que extienda a t, de modo que

$$\models^M \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t, x] \leftrightarrow\ \models^M \bigvee y \bigwedge z\, \psi[w, x] \leftrightarrow\ \models \bigvee y \bigwedge z\, \psi[w, x] \leftrightarrow\ \models \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t, x].$$

■

Sin más que simplificar la prueba del teorema anterior obtenemos una demostración del resultado siguiente:

Teorema 8.2 *Consideremos un modelo transitivo M de* ZF + ED *y una fórmula aritmética $\phi[n_1, \ldots, n_r, x_1, \ldots, x_s, z]$ de $\mathcal{L}_a$. Entonces*

$$\bigwedge t \in \omega^r \bigwedge x \in \mathcal{N}^s \cap M(\ \models^M \bigvee z\, \phi[t, x] \leftrightarrow\ \models \bigvee z\, \phi[t, x]\ ).$$

En particular, las relaciones $\Sigma^1_2(a)$ son absolutas en el sentido siguiente:

Teorema 8.3 *Si $a \in \mathcal{N}$, $A \subset \omega^r \times \mathcal{N}^s$ es un conjunto $\Sigma^1_2(a)$ y M es un modelo transitivo de* ZF + ED *tal que $a, \aleph_1 \in M$, entonces $A^M = A \cap M \in M$, y es el conjunto $\Sigma^1_2(a)^M$ definido en M por cualquiera de las fórmulas de $\mathcal{L}_a$ que definen a A (en V).*

Demostración: Basta tener en cuenta que

$$A = \{(t, x) \in \omega^r \times \mathcal{N}^s \mid\ \models \bigvee y \bigwedge z\, \phi[t, x, a]\},$$

para cierta fórmula aritmética $\phi(t, x, a, y, z)$. ■

Observaciones Obviamente lo mismo vale para las relaciones $\Pi^1_2(a)$ y en el caso de relaciones $\Sigma^1_1(a)$ o $\Pi^1_1(a)$ podemos suprimir la hipótesis de que $\aleph_1 \in M$. Por otro lado, el teorema de Schoenfield no puede generalizarse a fórmulas Σ^1_3, ya que, por ejemplo, la afirmación $\phi(x) \equiv \bigvee w(w \notin L \land x = x)$ es Σ^1_3 y, si $V \neq L$, no es absoluta para L. ■

Terminamos con una consecuencia sencilla del teorema de Schoenfield:

Teorema 8.4 *Si $a \in \mathcal{N}$, todo subconjunto $\Sigma^1_2(a)$ (o $\Pi^1_2(a)$) de ω pertenece a $L[a]$. En particular, todo subconjunto Σ^1_2 o Π^1_2 de ω es constructible.*

Demostración: Basta aplicar el teorema anterior. El modelo $M = L[a]$ cumple los requisitos y $A = A \cap L[a] = A^M \in L[a]$. ■

8.2 Códigos de Borel

Un problema técnico que nos encontramos a la hora de comparar los conjuntos de Borel de dos modelos transitivos de ZF + ED es que sus definiciones no son absolutas. Pensemos en un caso tan simple como el intervalo abierto $]0,1[$ en $\mathbb{R}$. Si tenemos un modelo M y una extensión genérica $M[G]$ en la que hay subconjuntos de ω (y, por consiguiente, números reales) que no están en M, tenemos que $]0,1[^M \subsetneq\ ]0,1[^{M[G]}$ y $]0,1[^M$ no es abierto en $M[G]$. Vamos a ver que para tratar con este tipo de situaciones es conveniente definir unas codificaciones absolutas de los conjuntos de Borel.

Definición 8.5 Sea $\langle\ ,\ \rangle : \omega\times\omega \longrightarrow \omega$ la semejanza canónica. Para cada $i\in\omega$ definimos las funciones $u, v_i : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ dadas por

$$u(c)(n) = c(n+1), \qquad v_i(c)(n) = c(\langle i,n\rangle + 1).$$

Claramente son absolutas para modelos transitivos de ZF. Para cada ordinal $0<\alpha<\aleph_1$ definimos como sigue los conjuntos Σ^c_α, $\Pi^c_\alpha \subset \mathcal{N}$:

a) $c\in\Sigma^c_1$ si y sólo si $c(0)\geq 2$.

b) $c\in\Sigma^c_\alpha$ si y sólo si $c\in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha}(\Sigma^c_\delta\cup\Pi^c_\delta)$ o bien

$$c(0) = 1 \land \bigwedge i\in\omega\ v_i(c) \in \bigcup_{0<\delta<\alpha}(\Sigma^c_\delta\cup\Pi^c_\delta)$$

c) $c\in\Pi^c_\alpha$ si y sólo si $c\in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha}(\Sigma^c_\delta\cup\Pi^c_\delta)$ o bien $c(0)=0\land u(c)\in\Sigma^c_\alpha$.

Llamaremos *códigos de Borel* a los elementos de

$$\mathrm{CB} = \bigcup_{0<\alpha<\aleph_1}\Sigma^c_\alpha = \bigcup_{0<\alpha<\aleph_1}\Pi^c_\alpha.$$

La definición y el teorema siguientes explican la definición anterior:

Definición 8.6 Sea $\{s_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$ dada por la biyección canónica definida en 1.23. Para cada $c\in\mathrm{CB}$ definimos $B_c\subset\mathcal{N}$ como sigue:

a) Si $c(0)>1$ entonces $B_c = \bigcup\{B_{s_n} \mid c(n+1)=1\}$.

b) Si $c(0)=1$ entonces $B_c = \bigcup\limits_{i\in\omega} B_{v_i(c)}$.

c) Si $c(0)=0$ entonces $B_c = \mathcal{N}\setminus B_{u(c)}$.

De este modo, los códigos de Borel codifican los conjuntos de Borel de $\mathcal{N}$:

Teorema 8.7 *Si $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{N}$, se cumple que*

$$\mathcal{B} = \{B_c \mid c\in\mathrm{CB}\}.$$

Demostración: Vamos a probar, más precisamente, que para cada $\alpha < \aleph_1$ no nulo:

$$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \{B_c \mid c \in \Sigma^c_\alpha\}, \qquad \mathbf{\Pi}^0_\alpha = \{B_c \mid c \in \mathbf{\Pi}^c_\alpha\}.$$

En efecto, los códigos $c \in \Sigma^c_1$ son los que cumplen $c(0) \geq 2$ y, por lo demás, son arbitrarios, y entonces $B_c = \bigcup\{B_{s_n} \mid c(n+1) = 1\}$. Es claro que, cuando c recorre Σ^c_1, los conjuntos B_c recorren todas las uniones numerables de abiertos básicos de $\mathcal{N}$, es decir, recorren todos los abiertos, todos los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_1$ de $\mathcal{N}$, luego la igualdad de la izquierda es cierta para $\alpha = 1$.

Se cumple que $c \in \Pi^c_1$ si y sólo si $c(0) = 0$ y $u(c) \in \Sigma^c_1$, de modo que cualquier código de Σ^c_1 es de la forma $u(c)$, para un $c \in \Pi^1_1$. Por lo tanto, como $B_c = \mathcal{N} \setminus B_{u(c)}$, tenemos que, cuando c recorre Π^c_1, los conjuntos B_c recorren todos los complementarios de los conjuntos de $\mathbf{\Sigma}^0_1$, es decir, recorren todos los cerrados, los conjuntos $\mathbf{\Pi}^0_1$ de $\mathcal{N}$, luego tenemos ambas igualdades probadas para $\alpha = 1$. Supongamos que ambas igualdades son ciertas para $0 < \delta < \alpha$.

Si $c \in \Sigma^c_\alpha$, o bien $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$, en cuyo caso, por hipótesis de inducción,

$$B_c \in \bigcup_{0<\delta<\alpha} (\mathbf{\Sigma}^0_\delta \cup \mathbf{\Pi}^0_\delta) \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha,$$

o bien $c(0) = 1$ y $\bigwedge i \in \omega\ v_i(c) \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$, luego por hipótesis de inducción

$$\bigwedge i \in \omega\ B_{v_i(c)} \in \bigcup_{0<\delta<\alpha} (\mathbf{\Sigma}^0_\delta \cup \mathbf{\Pi}^0_\delta) \subset \mathbf{\Sigma}^0_\alpha,$$

luego

$$B_c = \bigcup_{i\in\omega} B_{v_i(c)} \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha.$$

Más aún, si $\{A_i\}_{i\in\omega}$ es una familia de conjuntos en $\bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\delta$, por hipótesis de inducción cada uno de ellos será de la forma $A_i = B_{c_i}$, con $c_i \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\mathbf{\Sigma}^0_\delta \cup \mathbf{\Pi}^0_\delta)$ y es claro que podemos construir $c \in \mathcal{N}$ tal que $c(0) = 1$ y $v_i(c) = c_i$ para todo i, con lo que $c \in \Sigma^c_\alpha$ y

$$B_c = \bigcup_{i\in\omega} B_{v_i(c)} = \bigcup_{i\in\omega} A_i.$$

Esto prueba que, cuando c recorre Σ^c_α, los conjuntos B_c recorren todo $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.

Finalmente, si $c \in \Pi^c_\alpha$, o bien $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$, en cuyo caso, por hipótesis de inducción,

$$B_c \in \bigcup_{0<\delta<\alpha} (\mathbf{\Sigma}^0_\delta \cup \mathbf{\Pi}^0_\delta) \subset \mathbf{\Pi}^0_\alpha,$$

o bien $c(0) = 0$ y $u(c) \in \Sigma^c_\alpha$, con lo que $B_{u(c)} \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ por lo que acabamos de probar y $B_c = \mathcal{N} \setminus B_{u(c)} \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. Por otra parte, hemos visto que todo elemento de $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ es de la forma B_c, para cierto $c \in \Sigma^c_\alpha$, y es fácil construir $c' \in \mathcal{N}$ tal que $c'(0) = 0$ y $u(c') = c$, con lo que $c' \in \Pi^c_\alpha$ y $B_{c'} = \mathcal{N} \setminus B_c$, luego cuando c recorre Π^c_α tenemos que B_c recorre todo $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$. ■

Nota Los códigos de Borel codifican igualmente los conjuntos de Borel de cualquier espacio polaco "razonable". Por ejemplo, si en la definición 8.6 partimos de una enumeración de $2^{<\omega}$ obtenemos una codificación de los conjuntos de Borel del espacio de Cantor $\mathcal{C}$, y si partimos de una enumeración[1] $\{(p_n, q_n))\}_{n\in\omega}$ de los pares de números racionales tales que $p_n < q_n$ (absoluta para modelos transitivos de ZF) y cambiamos B_{s_n} por $]p_n, q_n[\ \subset \mathbb{R}$, obtenemos una codificación de los subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$. La prueba del teorema anterior vale literalmente en ambos casos (así como las de los teoremas siguientes). ■

Los teoremas siguientes muestran que los códigos de Borel definen relaciones absolutas para modelos transitivos de ZF + ED, gracias a las cuales podremos manipular cómodamente los conjuntos de Borel en los modelos que consideraremos.

Teorema 8.8 *El conjunto* CB *es* Π^1_1.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos en $\mathcal{N}$ la relación E dada por:

$$x\,E\,y \leftrightarrow (y(0) = 0 \land x = u(y)) \lor (y(0) = 1 \land \bigvee i \in \omega\ x = v_i(y)).$$

Claramente E es aritmética y claramente cumple lo siguiente:

a) Si $y \in \Sigma^c_1$, entonces y es E-minimal.

b) Si $y \in \Pi^c_\alpha$ y $x\,E\,y$, entonces $x \in \Sigma^c_\alpha$.

c) Si $y \in \Sigma^c_\alpha$ con $\alpha > 1$ y $x\,E\,y$, entonces $x \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma^c_\delta \cup \Pi^c_\delta)$.

Veamos que

$$y \in \mathrm{CB} \leftrightarrow \neg\bigvee z \in \mathcal{N}(z_0 = y \land \bigwedge i \in \omega\ z_{i+1}\,E\,z_i). \tag{8.2}$$

En efecto, si $y \in \mathrm{CB}$ pero existiera la sucesión decreciente $\{z_i\}_{i\in\omega}$, las propiedades anteriores implican que cada $z_i \in \mathrm{CB}$ y, si tomamos el mínimo α_i tal que $z_i \in \Sigma^c_{\alpha_i} \cup \Pi^c_{\alpha_i}$, la sucesión de ordinales $\{\alpha_i\}_{i\in\omega}$ sería decreciente, lo cual es absurdo.

Recíprocamente, si se cumple la condición indicada, la relación E está bien fundada en la clausura de y respecto a E, con lo que podemos razonar por inducción sobre E que todo elemento de dicha clausura (en particular y) está en CB.

Finalmente, es claro que (8.2) prueba que CB es Π^1_1. ■

---

[1] Por ejemplo, todo número racional no nulo se expresa de forma única como $r = \pm(p/q)$, donde p y q son números naturales primos entre sí, $q \neq 0$. Definimos $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \omega$ como $f(r) = \langle \epsilon, p, q\rangle$, donde $\epsilon = 0$ si $r > 0$ y $\epsilon = 1$ si $r < 0$, y $f(0) = \langle 0, 0, 1\rangle$. Claramente f es inyectiva y absoluta para modelos transitivos de ZF. Si $P = \{(r, s) \in \mathbb{Q}^2 \mid r < s\}$, definimos $g : P \longrightarrow \omega$ mediante $g(r, s) = \langle f(r), f(s)\rangle$, con lo que nuevamente tenemos una aplicación inyectiva y absoluta. Su imagen es un conjunto infinito en ω, y existe una única semejanza entre él y ω. Componiendo g con dicha semejanza tenemos una biyección $h : P \longrightarrow \omega$, nuevamente absoluta para modelos transitivos de ZF. Basta tomar como $\{(p_n, q_n))\}_{n\in\omega}$ la biyección inversa.

Teorema 8.9 *Existen relaciones P y Q en $\mathcal{N}^2$ que son Σ^1_1 y Π^1_1 respectivamente tales que, si $x \in \mathcal{N}$ y $c \in \mathrm{CB}$, entonces*[2]

$$x \in B_c \leftrightarrow P(x,c) \leftrightarrow Q(x,c).$$

DEMOSTRACIÓN: Fijemos $x \in \mathcal{N}$ y $c \in \mathrm{CB}$, y sea $T \subset \mathcal{N}$ la clausura de c en $\mathcal{N}$ respecto de la relación E definida en la prueba del teorema anterior (a la que añadimos el propio c). Como la extensión respecto a E de cada elemento de $\mathcal{N}$ es numerable, es claro que T es numerable. Además sabemos que E está bien fundada en T. Sea $h : T \longrightarrow 2$ la función definida como sigue por E-recursión:

a) Si $y(0) \geq 2$, entonces $h(y) = 1 \leftrightarrow \bigvee n \in \omega(y(n) = 1 \wedge x \in B_{s_n})$ (donde $\{s_n\}_{n\in\omega}$ es la enumeración de $\omega^{<\omega}$ considerada en la definición 8.6).

b) Si $y(0) = 1$, entonces $h(y) = 1 \leftrightarrow \bigvee i \in \omega\ h(v_i(y)) = 1$.

c) Si $y(0) = 0$, entonces $h(y) = 1 \leftrightarrow h(u(y)) = 0$.

Claramente, para cada $y \in T$ se cumple que $x \in B_y \leftrightarrow h(y) = 1$.

Ahora podemos definir:

$$P(a,c) \leftrightarrow \bigvee Th(T \subset \mathcal{N} \wedge T \text{ es numerable} \wedge c \in T \wedge$$
$$\bigwedge yz(y\,E\,z \wedge z \in T \to y \in T) \wedge h : T \longrightarrow 2 \wedge (*) \wedge h(c) = 1),$$
$$Q(a,c) \leftrightarrow \bigwedge Th(T \subset \mathcal{N} \wedge T \text{ es numerable} \wedge c \in T \wedge$$
$$\bigwedge yz(y\,E\,z \wedge z \in T \to y \in T) \wedge h : T \longrightarrow 2 \wedge (*) \to h(c) = 1),$$

donde $(*)$ es la conjunción de las tres fórmulas a), b), c) anteriores (precedida de $\bigwedge y \in T$). Es claro que P y Q equivalen a $x \in B_c$ (suponiendo que $c \in \mathrm{CB}$). Falta probar que son Σ^1_1 y Π^1_1 respectivamente. La clave es que T puede codificarse como $\{w_i\}_{i\in\omega}$, para cierto $w \in \mathcal{N}$, lo cual convierte en cuantificaciones sobre ω todas las cuantificaciones sobre T:

$$P(a,c) \leftrightarrow \bigvee wh \in \mathcal{N}$$
$$\bigwedge i \in \omega((w_i(0) = 0 \to \bigvee j \in \omega\ w_j = u(w_i)) \wedge (w_i(0) = 1 \to \bigvee jk(w_j = v_k(w_i)))$$
$$\wedge \bigwedge i \in \omega((*) \wedge (\bigvee i \in \omega\ (c = w_i \wedge h(i) = 1)),$$

donde $(*)$ abrevia ahora a la conjunción de

[2]Éste es el único resultado de los que vamos a ver aquí cuya adaptación a $\mathbb{R}$ no es trivial. Definimos $r : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$r(x) = x(0) - x(1) + \sum_{n=0}^{\infty} \min\{x(n+2), 1\}\, 2^{-n}.$$

Claramente r es una aplicación continua y suprayectiva. Podemos definir una aplicación análoga sobre $\omega^{<\omega}$ con una suma finita. Entonces, podemos demostrar un enunciado análogo cambiando $x \in B_c$ por $r(x) \in B_c$. El único cambio en la prueba consiste en sustituir $x \in B_{s_n}$ en a) por $p_n < r(x) < q_n$, lo cual, a su vez, por continuidad, equivale a

$$\bigvee m_0 \in \omega \bigwedge m \in \omega(m \geq m_0 \to p_n < r(x|_m) < q_n).$$

Es fácil ver que esta relación es aritmética igualmente.

a) $w_i(0) \geq 2 \rightarrow (h(i) = 1 \leftrightarrow \bigvee n(w_i(n) = 1 \land x \in B_{s_n}))$.

b) $w_i(0) = 1 \rightarrow (h(i) = 1 \leftrightarrow \bigvee jk(w_j = v_k(w_i) \land h(j) = 1))$.

c) $w_i(0) = 0 \rightarrow (h(i) = 1 \leftrightarrow \bigvee j(w_j = u(w_i) \land h(j) = 0))$.

Ahora es evidente que toda la fórmula que define a P tras los cuantificadores $\bigvee wh$ define un conjunto aritmético, luego P es Σ^1_1. El caso de Q se trata con variaciones mínimas. ■

Teorema 8.10 *Las relaciones siguientes son* Π^1_1*:*

a) $c \in \mathrm{CB}$,

b) $c \in \mathrm{CB} \land x \in B_c$,

c) $c, d \in \mathrm{CB} \land B_c \subset B_d$,

d) $c, d \in \mathrm{CB} \land B_c = B_d$,

e) $c \in \mathrm{CB} \land B_c = \varnothing$.

Demostración: a) es el teorema 8.8. Para las restantes basta considerar las relaciones P y Q dadas por el teorema anterior:

$$\begin{array}{rcl} c \in \mathrm{CB} \land x \in B_c & \leftrightarrow & c \in \mathrm{CB} \land Q(x, c). \\ c, d \in \mathrm{CB} \land B_c \subset B_d & \leftrightarrow & c, d \in \mathrm{CB} \land \bigwedge x \in \mathcal{N}(P(x, c) \rightarrow Q(x, d)), \\ c, d \in \mathrm{CB} \land B_c = B_d & \leftrightarrow & c, d \in \mathrm{CB} \land B_c \subset B_d \land B_d \subset B_c, \\ c \in \mathrm{CB} \land B_c = \varnothing & \leftrightarrow & c \in \mathrm{CB} \land \bigwedge x \in \mathcal{N} \neg P(c, x). \end{array}$$

■

Teorema 8.11 *Las relaciones del teorema anterior son absolutas para modelos transitivos de* ZF + ED, *al igual que lo son las siguientes:*

a) $c, d, e \in \mathrm{CB} \land B_e = B_c \cup B_d$,

b) $c, d, e \in \mathrm{CB} \land B_e = B_c \cap B_d$,

c) $c, d \in \mathrm{CB} \land B_d = \mathcal{N} \setminus B_c$,

d) $c, d, e \in \mathrm{CB} \land B_e = B_c \,\Delta\, B_d$,

e) $\{c_n\}_{n\in\omega} \subset \mathrm{CB} \land d \in \mathrm{CB} \land B_d = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{c_n}$.

f) $\{c_n\}_{n\in\omega} \subset \mathrm{CB} \land d \in \mathrm{CB} \land B_d = \bigcap\limits_{n\in\omega} B_{c_n}$.

Demostración: Las relaciones del teorema anterior son absolutas porque[3] son Π^1_1 (teorema 8.2).

Sea M un modelo transitivo de ZF + ED. Veamos primero el apartado e). Para ello suponemos que $\{c_n\}_{n\in\omega} \in M$ es una sucesión de códigos de Borel (en M y en V) y definimos $e \in \mathcal{N}$ como la única sucesión que cumple $e(0) = 1$ y $\bigwedge i \in \omega\ v_i(e) = c_i$. Claramente $e \in \mathrm{CB}^M$ y

$$(B_d = \bigcup_{n\in\omega} B_{c_n})^M \leftrightarrow (B_d = B_e)^M \leftrightarrow B_d = B_e \leftrightarrow B_d = \bigcup_{n\in\omega} B_{c_n}.$$

De aquí se sigue a) como caso particular. La prueba de c) es similar y a partir de a) y c) se demuestran las demás reduciendo la intersección y la diferencia simétrica a uniones y complementos. ■

Nota Si M es un modelo transitivo de ZF + ED, el carácter absoluto de la relación $c \in \mathrm{CB}$ es equivalente a que $\mathrm{CB}^M = \mathrm{CB} \cap M$. Similarmente, si $c \in \mathrm{CB}^M$, el carácter absoluto de $x \in B_c$ equivale a que $(B_c)^M = B_c \cap M$. En particular, CB y B_c no son absolutos como conjuntos (como términos), salvo para modelos que cumplan $\mathcal{N} \subset M$. ■

Definición 8.12 Sean $M \subset N$ modelos transitivos de ZF + ED. Si $B \in M$ es un subconjunto de Borel^M de $\mathcal{N}^M$, entonces existe $c \in \mathrm{CB}^M$ tal que $B = B_c^M$. Definimos entonces $B^N = B_c^N$. Notemos que esta definición no depende de la elección de c, pues si $d \in \mathrm{CB}^M$ y $B_c^M = B_d^M$, entonces $B_c = B_d$ y $B_c^N = B_d^M$.

Obviamente tenemos las propiedades siguientes:

$$B = B^N \cap M, \quad (B \cup C)^N = B^N \cup C^N, \quad (B \cap C)^N = B^N \cap C^N,$$

$$(B \,\Delta\, C)^N = B^N \,\Delta\, C^N, \quad \varnothing^N = \varnothing, \quad (\mathcal{N}^M)^N = \mathcal{N}^N, \quad (\mathcal{N}^M \setminus B)^N = \mathcal{N}^N \setminus B^N.$$

Teorema 8.13 *Sea m la medida en $\mathcal{C}$ considerada en la sección 3.2 y sea M un modelo transitivo de* ZF + ED. *Si $B \in M$ es un subconjunto de Borel de $\mathcal{C}$, entonces*[4] $m^M(B) = m(B^V)$.

---

[3]No está de más hacer alguna reflexión sobre este uso del teorema 8.2. Consideremos por ejemplo la relación $R = \{(x, c) \in \mathcal{N}^2 \mid c \in \mathrm{CB} \wedge x \in B_c\}$. Aquí R es un designador del lenguaje (metamatemático) $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos y $\vdash_{\mathrm{ZF+ED}} R \in \Pi^1_1(\mathcal{N}^2)$. La prueba de esto consiste en mostrar explícitamente una definición Π^1_1 de R, con la cual podríamos construir explícitamente una fórmula α (otro designador de $\mathcal{L}$) tal que

$$\vdash_{\mathrm{ZF+ED}} \ \bigwedge xc(R(x, c) \leftrightarrow \ \vDash \bigvee y \bigwedge n\ \alpha[x, c]).$$

Al relativizar esto a un modelo M tenemos que $\bigwedge xc \in M(R^M(x, c) \leftrightarrow R(x, c))$, pues la fórmula de la derecha es absoluta por 8.2.

[4]El resultado también es válido para subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ y la medida de Lebesgue. Las únicas dificultades adicionales en la prueba son las típicas debidas a que la medida no es finita.

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{C}$, sea $\mathcal{B}^M$ su relativización a M y sea $\mathcal{A} = \{B^V \mid B \in \mathcal{B}^M\}$. Las propiedades que hemos enunciado justo antes de este teorema implican que $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $\mathcal{B}$. (Aquí usamos además que, como es fácil comprobar, $(\mathcal{C}^M)^V = \mathcal{C}$.)

Observemos que la aplicación $\mathcal{B}^M \longrightarrow \mathcal{A}$ dada por $B \mapsto B^V$ es un isomorfismo de álgebras, pues su inverso es el dado por $B \mapsto B \cap M$. En general, $\mathcal{A}$ no es una σ-álgebra, pues $\mathcal{B}^M$ no tiene por qué serlo (sólo es una σ-álgebra^M).

En cualquier caso, la medida m^M en $\mathcal{B}^M$ induce una medida finitamente aditiva $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, a saber, la dada por $\lambda(B) = m^M(B \cap M)$.

Vamos a probar que λ es una medida en $\mathcal{A}$, es decir, que si $\{B_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos tal que $B = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\lambda(B) = \sum_{n\in\omega} \lambda(B_n).$$

Esto sería trivial si pudiéramos suponer que la sucesión dada está en M, pero no podemos. La aditividad finita implica, en cualquier caso, la desigualdad $\geq$. Para probar la contraria tomamos un $\epsilon > 0$.

Como cada $B_n \cap M \in M$, usando la regularidad de m^M obtenemos un abierto^M tal que $B_n \cap M \subset G_n \subset \mathcal{C}^M$ y $m^M(G_n) - m^M(B_n) < \epsilon/2^{n+2}$. Puesto que G_n y G_n^V tienen el mismo código de Borel y éste ha de estar en $(\Sigma_1^1)^M$, tenemos que G_n^V es abierto en $\mathcal{C}$ y

$$B_n \subset B_n^V \subset \mathcal{C}, \qquad \lambda(G_n^V) - \lambda(B_n) < \epsilon/2^{n+2}.$$

Por otra parte, como $B \cap M \in M$, existe un compacto^M tal que $C \subset B \cap M$ y $\lambda(B \cap M) - \lambda(C) < \epsilon/2$. De nuevo por la conservación de los códigos de Borel, tenemos que C^V es un cerrado en $\mathcal{C}$ (luego compacto) y

$$C^V \subset B, \qquad \lambda(B) - \lambda(C^V) < \epsilon/2.$$

Así tenemos que

$$C^V \subset B \subset \bigcup_{n\in\omega} G_n^V,$$

luego, por compacidad, existe un $m \in \omega$ tal que $C^V \subset \bigcup\limits_{n<m} G_n^V$. Por consiguiente:

$$\lambda(B) = \lambda(B \setminus C^V) + \lambda(C^V) \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n<m} \lambda(G_n^V)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n<m} \lambda(B_n) + \sum_{n<m} \frac{\epsilon}{2^{n+2}} \leq \sum_{n\in\omega} \lambda(B_n) + \epsilon,$$

y, como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, tenemos la desigualdad $\leq$ que perseguíamos.

Ahora estamos en condiciones de aplicar el teorema de Caratheodory 2.67, según el cual λ se extiende a una medida μ sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.

Ahora bien, $\mathcal{A}$ contiene a todos los abiertos básicos $B_s \subset \mathcal{C}$. En efecto. Si $s = s_k$, entonces un código de Borel para B_s es la sucesión c_k dada por $c_k(0) = 2$ y $c_k(n+1) = 1 \leftrightarrow n = k$, y claramente $c_k \in M$. Así pues, $B_s = B_{c_k}$ y, relativizando esto a M, $B_s^M = B_{c_k}^M$, por lo que $B_s = (B_s^M)^V \in \mathcal{A}$.

Esto implica que la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ contiene a todos los abiertos de $\mathcal{C}$, luego no es sino la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$, y así tenemos una medida de Borel $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ que extiende a λ.

Por otra parte, si B_s es un abierto básico, tenemos que

$$\mu(B_s) = \lambda(B_s) = m^M(B_s \cap M) = m^M(B_s^M) = 2^{-\ell(s)},$$

de modo que μ satisface la propiedad que determina a m y, por consiguiente, $\mu = m$ y, como había que probar, $m^M(B) = \lambda(B^V) = m(B^V)$. ■

Equivalentemente, lo que afirma el teorema anterior es que si $c \in \mathrm{CB}^M$ y $B_c \subset \mathcal{C}$, entonces $m(B_c)^M = m(B_c)$.

Veamos ahora el análogo para la categoría:

Teorema 8.14 *"B_c es de primera categoría" es absoluto para modelos transitivos de* ZF + ED.

Demostración: Sea M un modelo transitivo de ZF + ED. Veamos en primer lugar que si $c \in (\Pi_1^c)^M$, entonces B_c^M es diseminado^M si y sólo si B_c es diseminado.

En efecto, si B_c no es diseminado, existe un abierto básico B_s de modo que $B_s \subset B_c$. Si $s = s_k$, en la prueba del teorema anterior hemos visto que $B_s = B_{c_k}$, donde el código c_k está en M. Por consiguiente, $B_{c_k} \subset B_c$ y la inclusión es absoluta, luego $B_{c_k}^M \subset B_c^M$ y $B_{c_k}^M$ es un abierto básico (no vacío) en M, luego B_c^M tampoco es diseminado. La prueba del recíproco es idéntica.

Supongamos ahora que B_c^M es de primera categoría^M. Entonces existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\omega} \in M$ de conjuntos diseminados^M tal que $B_c^M = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$.

Entonces $\overline{F}_n^M$ es también diseminado^M y cerrado^M. Por ED^M existe una sucesión $\{c_n\}_{n\in\omega} \in M$ de códigos de Borel $(\Pi_1^c)^M$ de modo que $\overline{F}_n^M = B_{c_n}^M$.

Podemos construir explícitamente un código de Borel $c' \in \mathrm{CB}^M$ tal que $B_{c'}^M = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{c_n}^M$, con lo que $B_c^M \subset B_{c'}^M$, luego $B_c \subset B_c' = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_{c_n}$ y hemos probado que cada conjunto B_{c_n} es diseminado, luego B_c es de primera categoría.

Supongamos ahora que B_c^M es de segunda categoría^M. Puesto que B_c^M es de Borel^M, tiene la propiedad de Baire^M, luego existe un $G \in M$ abierto^M no vacío tal que $B_c^M \,\Delta\, G$ es de primera categoría^M.

Tomemos códigos de Borel $d \in (\Sigma_1^c)^M$, $e \in \mathrm{CB}^M$ tales que $G = B_d^M$ y $B_e^M = B_c^M \,\Delta\, B_d^M$. Entonces $B_e = B_c \,\Delta\, B_d$, B_d es abierto no vacío y, por la parte ya probada, B_e es de primera categoría. Esto implica que B_c es de segunda categoría. ■

Teorema 8.15 *Sean $M \subset N$ dos modelos transitivos de* ZF + ED *tales que $\mathcal{N}^M = \mathcal{N}^N$. Entonces, para todo $A \in M$, $A \subset \mathcal{N}^M$:*

a) $A \subset \mathcal{C}^M$ es m-medible^M si y sólo si es m-medible^N.

b) A tiene la propiedad de Baire^M si y sólo si tiene la propiedad de Baire^N.

c) A es numerable^M si y sólo si es numerable^N.

d) A contiene un subconjunto perfecto^M si y sólo si contiene un subconjunto perfecto^N.

Demostración: Tenemos que $\mathrm{CB}^M = \mathrm{CB}^N$ y, para todo $c \in \mathrm{CB}^M$, se cumple que $A_c^M = A_c \cap \mathcal{N}^M = A_c \cap \mathcal{N}^N = A_c^N$. Por lo tanto, $\mathcal{N}^M$ y $\mathcal{N}^N$ tienen los mismos conjuntos de Borel y, si $B \in M$ es un subconjunto de Borel de $\mathcal{N}^M$, entonces $B^N = B$.

Llamemos $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{N}$ tanto en M como en N. El teorema anterior nos garantiza que, si $B \in \mathcal{B}$ y $B \subset \mathcal{C}^M$, entonces $m(B)$ es el mismo calculado en M o en N, por lo que representaremos esta medida simplemente por $m(B)$. En particular, B es nulo en M si y sólo si es nulo en N. Igualmente, un $B \in \mathcal{B}$ es de primera categoría en M si y sólo si lo es en N.

a) Sea $A \in M$, $A \subset \mathcal{C}^M$. Si A es m-medible^M, entonces $A = B \cup N$, donde $B \in \mathcal{B}$ y $N = A \setminus B$ es nulo^M. Basta observar que N también es nulo^N, ya que esto equivale a que, para todo $\epsilon > 0$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $N \subset B \subset \mathcal{C}$ y $m(B) < \epsilon$, y esto sucede en M si y sólo si sucede en N. Por lo tanto, A es medible^N (y su medida en N es la misma que en M, a saber, la de B). El recíproco se prueba igualmente.

El razonamiento para b) es completamente análogo, cambiando "nulo" por "de primera categoría".

c) Si A es numerable en N, entonces existe $x \in \mathcal{N}^N$ tal que $A = \{x_n\}_{n\in\omega}$. Como $x \in M$, también A es numerable^M. El recíproco es obvio.

d) A contiene un subconjunto perfecto en M si y sólo si contiene un conjunto de Borel no numerable^M, si y sólo si contiene un conjunto de Borel no numerable^N, si y sólo si contiene un subconjunto perfecto en N.

■

El teorema anterior se aplica, por ejemplo, a $M = L(\mathcal{N})$ y $N = V$. Vemos así que, por ejemplo, la afirmación (Todo subconjunto de $\mathcal{C}$ es m-medible)$^{L(\mathcal{N})}$ (que contradice al axioma de elección en $L(\mathcal{N})$) es equivalente a "todo subconjunto de $\mathcal{C}$ que esté en $L(\mathcal{N})$ es m-medible", que no contradice al axioma de elección en V, sino que determina una familia de conjuntos medibles (una familia bastante amplia, pues contiene a todos los conjuntos proyectivos).

Ejercicio: Demostrar que $L(\mathcal{N})$ contiene a la σ-álgebra generada por el álgebra de los subconjuntos proyectivos de $\mathcal{N}$. (Ayuda: Asignar a cada uno de sus elementos un código en $\mathcal{N}$.)

8.3 Reales aleatorios y genéricos

Consideremos las álgebras de medida y categoría $\mathcal{B}_m$ y $\mathcal{B}_c$ definidas en 2.44 y 2.47, respectivamente. Sabemos que $\mathcal{B}_m$ es un álgebra de Boole completa con la condición de cadena numerable, y lo mismo es válido para $\mathcal{B}_c$. La completitud la probamos ya en 2.50 y, en cuanto a la condición de cadena numerable, observamos que, si construimos $\mathcal{B}_c$ a partir del espacio de Cantor $\mathcal{C}$, y llamamos $\mathbb{P}$ al c.p.o. de las funciones parciales finitas de ω en 2, la aplicación $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{B}_m$ dada por $i(s) = [B_s]$ es una inmersión densa (donde $B_s = \{x \in \mathcal{C} \mid x|_{\mathcal{D}s} = s\}$). (Por la propiedad de Baire, todo elemento de $\mathcal{B}_c$ es la clase de un abierto no vacío y todo abierto no vacío contiene un conjunto B_s.) Así pues:

> *El álgebra de categoría $\mathcal{B}_c$ es la compleción del conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ formado por las funciones parciales finitas de ω en 2.*

En particular toda extensión genérica mediante $\mathcal{B}_c$ es también una extensión genérica mediante $\mathbb{P}$. Vamos a describir a continuación las extensiones genéricas que se obtienen con las dos álgebras:

Teorema 8.16 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC, *sea $\mathbb{B}$ (la relativización a M de) cualquiera de las álgebras $\mathcal{B}_m$ o $\mathcal{B}_c$ y sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M. Entonces existe un único $x_G \in \mathcal{C}^{M[G]}$ tal que, para todo $B \in \mathcal{B}$ (el álgebra de Borel de $\mathcal{C})^M$, se cumple $x_G \in B^{M[G]} \leftrightarrow [B] \in G$.*

Demostración: Veamos en primer lugar la unicidad. Si x, $y \in \mathcal{C}^{M[G]}$ con $x \neq y$, existe un $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $x \in B_s^{M[G]}$, $y \notin B_s^{M[G]}$. Se cumple que $B_s^{M[G]} = (B_s^M)^{M[G]}$ y, o bien $B_s^M \in G$ o bien $\mathcal{C} \setminus B_s^M \in G$ (pero no pueden darse los dos casos). Por lo tanto, uno de los puntos x o y no cumple la condición del enunciado.

Para probar la existencia consideramos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{C^{M[G]} \mid C \in \mathcal{B} \text{ es cerrado} \land [C] \in G\} \in M[G].$$

Se cumple que $\mathcal{F} \neq \varnothing$, pues todo conjunto medible de medida no nula contiene un cerrado de medida no nula (resp., por la propiedad de Baire, toda clase de $\mathcal{B}_m$ es la clase de un abierto no vacío, y éste contiene un cerrado de interior no vacío, luego de segunda categoría), luego las clases de los cerrados son densas en $\mathbb{B}$, luego G contiene al menos una. Además la intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{F}$ es no vacía, luego, por compacidad, existe

$$x \in \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C \in M[G].$$

De este modo, x cumple la condición del enunciado para conjuntos B cerrados. Vamos a probar que, de hecho, la cumple para conjuntos de Borel arbitrarios. Supongamos en primer lugar que $c \in (\Sigma_1^c)^M$. Entonces podemos tomar $d \in (\Pi_1^c)^M$ de modo que $B_c = \mathcal{C} \setminus B_d$ y sabemos que la condición del enunciado se cumple para B_d porque es cerrado. Entonces

$$x \in B_c^{M[G]} \leftrightarrow x \in \mathcal{C}^{M[G]} \setminus B_d^{M[G]} \leftrightarrow [B_d] \notin G \leftrightarrow [B_c] \in G.$$

Así tenemos que x cumple el enunciado para conjuntos con códigos $(\Sigma_1^c)^M$ y $(\Pi_1^c)^M$. Supongamos que se cumple para códigos en $\bigcup\limits_{0<\delta<\alpha}(\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, con $\alpha < \aleph_1^M$ y sea $c \in (\Sigma_\alpha^c)^M$.

Si $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha}(\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, aplicamos la hipótesis de inducción. En caso contrario sea $c_n = v_n(c) \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha}(\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, con lo que la equivalencia del enunciado se cumple para cada B_{c_n} y

$$x \in B_c^{M[G]} \leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\omega} B_{c_n}^{M[G]} \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ x \in B_{c_n}^{M[G]} \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ [B_{c_n}] \in G$$

$$\leftrightarrow \bigvee\{[B_{c_n}] \mid n \in \omega\} \in G \leftrightarrow [\bigcup_{n\in\omega} B_{c_n}] \in G \leftrightarrow [B_c] \in G.$$

Por último, si $c \in (\Pi_\alpha^c)^M$, o bien $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha}(\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, en cuyo caso aplicamos la hipótesis de inducción, o bien $d = u(c) \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha}(\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, luego

$$x \in B_c^{M[G]} \leftrightarrow x \in \mathcal{C}^{M[G]} \setminus B_d^{M[G]} \leftrightarrow [B_d] \notin G \leftrightarrow [B_c] \in G.$$

Esto prueba que x cumple el teorema. ■

Definición 8.17 Un $x \in \mathcal{C}$ es un *real* [5] *aleatorio* (resp. *de Cohen*) sobre un modelo transitivo M de ZFC si es de la forma x_G (según el teorema anterior) para un cierto ultrafiltro G del álgebra $\mathcal{B}_m^M$ (resp. $\mathcal{B}_c^M$) genérico sobre M.

Observemos que, según el teorema anterior, G puede reconstruirse a partir de x_G, por lo que $M[G] = M[x_G]$ (en el sentido de [PC 7.35]). La inmersión densa natural $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{B}_m$ que hemos considerado al principio de la sección muestra claramente que los reales de Cohen son los mismos que se obtienen a partir de cada filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Respecto de los reales aleatorios, deben su nombre a que, por el teorema siguiente, la medida de un conjunto de Borel $B \subset \mathcal{C}$ puede verse como la probabilidad de que un real aleatorio esté en B, de modo que un número aleatorio no pertenece a ningún conjunto de medida 0 y pertenece a todos los conjuntos de medida 1:

Teorema 8.18 *Un real $x \in \mathcal{C}$ es aleatorio sobre un modelo transitivo M de* ZFC *si y sólo si no pertenece a ningún conjunto de Borel nulo con código en M y es de Cohen sobre M si y sólo si no pertenece a ningún conjunto de Borel de primera categoría con código en M.*

[5] Es costumbre llamar “reales” a los elementos de $\mathcal{N}$ porque, en este contexto, los estamos usando como sustitutos de los números reales por pura comodidad. Naturalmente, también podemos definir auténticos números reales aleatorios y de Cohen representando las álgebras de medida y categoría sobre $\mathbb{R}$ en lugar de $\mathcal{C}$ y con la medida de Lebesgue.

DEMOSTRACIÓN: Si x es aleatorio (resp. de Cohen) sobre M, de modo que $x = x_G$ para cierto ultrafiltro G, y B_c es nulo (resp. de primera categoría), entonces $[B_c^M] = \mathbb{O} \notin G$, luego $x_G \notin B_c$.

Recíprocamente, si x cumple la condición del enunciado, observamos que si B_c y B_d son dos conjuntos de Borel con código en M y $[B_c^M] = [B_d^M]$, entonces $B_c^M \,\Delta\, B_d^M$ es nulo (resp. de primera categoría), luego lo mismo le sucede a $B_c \,\Delta\, B_d$, luego $x \notin B_c \,\Delta\, B_d$, luego $x \in B_c \leftrightarrow x \in B_d$. Esto nos permite definir

$$G = \{[B_c^M] \mid x \in B_c\},$$

que claramente es un ultrafiltro en $\mathbb{B}$. Sólo hemos de probar que es $\mathbb{B}$-genérico sobre M.

Para ello tomamos $X \in M$, $X \subset G$, y hemos de probar que $\bigwedge X \in G$. Sea $Y = \{p \in \mathbb{B} \mid \bigvee q \in X\ q \leq p\}$, de modo que $X \subset Y \subset G$. Sea $A \in M$ una anticadena maximal de Y (que será numerable^M, ya que $\mathbb{B}$ cumple la condición de cadena numerable^M). Veamos que $\bigwedge A = \bigwedge X$.

Por una parte, $\bigwedge A$ es una cota inferior de X, pues si existiera $q \in X$ tal que $\bigwedge A \not\leq q$, entonces $\mathbb{O} \neq p = q \wedge (\bigwedge A)' \leq q$, luego p sería un elemento de Y incompatible con todos los elementos de A, contradicción.

Por otra parte, toda cota inferior de X es cota inferior de Y, luego de A, luego es menor o igual que $\bigwedge A$. Esto prueba que $\bigwedge A$ es el ínfimo de X.

Equivalentemente, podemos suponer que X es numerable^M. Pongamos que $X = \{B_{c_n}^M\}_{n\in\omega}$. Como $[B_{c_n}^M] \in G$, tenemos que $x \in B_{c_n}$, luego $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} B_{c_n}$, luego $\left[\bigcap\limits_{n\in\omega} B_{c_n}^M\right] = \bigwedge X \in G$. ■

8.4 Las clases HD(Ω) y HD(Ω^ω)

La clase $L(\mathcal{N})$ es la menor clase propia que es un modelo transitivo de ZF+ED que contiene a $\mathcal{N}$. No obstante, los resultados que vamos a obtener se aplican a una clase que en general es más amplia, a saber, la clase de los conjuntos hereditariamente definibles por sucesiones de ordinales. Esta clase fue introducida por Solovay como generalización de otra debida a Gödel, a saber, la clase de los conjuntos hereditariamente definibles por ordinales. Aquí presentaremos las dos.

En esta sección trabajamos en ZF (sin ED).

Recordemos [PC 3.1, 3.4] que $\mathrm{Df}(X, n) \subset X^n$ es el conjunto de las relaciones n-ádicas en X definibles mediante una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos, es decir, que $R \in \mathrm{Df}(X, n)$ si y sólo si existe $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ con a lo sumo las variables libres $x_1, \ldots, x_n$ tal que $R = \{s \in X^n \mid X \vDash \phi[s]\}$.

Definición 8.19 Se dice que un conjunto a es *definible por ordinales* si existen $\beta > \mathrm{rang}\,(a)$, $n \in \omega$, $s \in \beta^n$ y $R \in \mathrm{Df}(V_\beta, n+1)$ tales que

$$\bigwedge x \in V_\beta (x = a \leftrightarrow s^\frown x \in R).$$

Llamaremos $\mathrm{D}(\Omega)$ a la clase de todos los conjuntos definibles por ordinales.

En lugar de R, podemos tomar una fórmula ϕ de $\mathcal{L}$ y escribir la condición en la forma

$$\bigwedge x \in V_\beta (x = a \leftrightarrow V_\beta \vDash \phi[s, x]).$$

De este modo, un conjunto es definible por ordinales si en un V_β suficientemente grande puede definirse mediante una fórmula cuyos parámetros sean ordinales. La introducción de V_β es un tecnicismo para evitar el problema de que $V \vDash \phi[s, x]$ no puede definirse en ZFC. No obstante, aunque técnicamente es imprescindible, en el fondo es redundante, pues todo conjunto definible mediante una fórmula (metamatemática) con parámetros en Ω está en $\mathrm{D}(\Omega)$:

Teorema 8.20 *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n, x)$ una fórmula (metamatemática) con a lo sumo las variables libres indicadas. Entonces*

$$\bigwedge \alpha_1 \cdots \alpha_n a (\bigwedge x (x = a \leftrightarrow \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)) \rightarrow a \in \mathrm{D}(\Omega)).$$

DEMOSTRACIÓN: Fijemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, a$ y supongamos

$$\bigwedge x (x = a \leftrightarrow \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)).$$

Por el teorema de reflexión [PC 1.25] existe un $\beta > \text{máx}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \operatorname{rang}(a)\}$ tal que ϕ es absoluta para $V_\beta - V$. Esto implica que

$$\bigwedge x \in V_\beta (x = a \leftrightarrow \phi^{V_\beta}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)).$$

Si llamamos

$$R = \{t \in V_\beta^{n+1} \mid \phi^{V_\beta}(t(0), \ldots, t(n))\} = \{t \in V_\beta^{n+1} \mid V_\beta \vDash \ulcorner\phi\urcorner[t]\},$$

(donde $\ulcorner\phi\urcorner \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es la fórmula que representa a la fórmula metamatemática ϕ) se cumple que $R \in \mathrm{Df}(V_\beta, n+1)$ y, llamando

$$s = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \beta^n.$$

tenemos que

$$\bigwedge x \in V_\beta (x = a \leftrightarrow s^\frown x \in R),$$

luego $a \in \mathrm{D}(\Omega)$. ■

Por ejemplo, considerando $\phi \equiv x = \alpha$ obtenemos que $\Omega \subset \mathrm{D}(\Omega)$. Con $\phi(\alpha, x) \equiv \bigwedge y (y \in x \leftrightarrow y : \alpha \longrightarrow \alpha)$ y tomando $\alpha = \omega$ obtenemos que $\mathcal{N} \in \mathrm{D}(\Omega)$. Sin embargo, no está claro que podamos probar que $\mathcal{N} \subset \mathrm{D}(\Omega)$. En particular, no está claro que $\mathrm{D}(\Omega)$ sea transitiva (veremos que es consistente que no lo sea).

Definición 8.21 Se dice que un conjunto a es *definible por una sucesión de ordinales* si existen $s \in \Omega^\omega$, $\beta > \text{máx}\{\operatorname{rang}(a), \operatorname{rang}(s)\}$, $n \in \omega$ y $R \in \mathrm{Df}(V_\beta, 2)$ tales que

$$\bigwedge x \in V_\beta (x = a \leftrightarrow (s, x) \in R).$$

Llamaremos $\mathrm{D}(\Omega^\omega)$ a la clase de todos los conjuntos definibles por sucesiones de ordinales.

La demostración de 8.20 se adapta fácilmente para el caso en que $\mathrm{D}(\Omega)$ se sustituye por $\mathrm{D}(\Omega^\omega)$, aunque una adaptación aún más directa de la prueba nos da el teorema siguiente:

Teorema 8.22 *Sea $\phi(s,x)$ una fórmula (metamatemática) con a lo sumo las variables libres indicadas. Entonces*

$$\bigwedge s \in \Omega^\omega \bigwedge a(\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \phi(s,x)) \to a \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)).$$

Por ejemplo, con $\phi \equiv x = s$ obtenemos que $\Omega^\omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, mientras que con $\phi \equiv x = s(0)$ obtenemos que $\Omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$. También es fácil ver que $\mathcal{N} \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, pero ahora es inmediato que $\mathcal{N} \subset \Omega^\omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$.

Podemos suponer que los signos del lenguaje $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos son números naturales, y entonces $\mathrm{Form}(\mathcal{L}) \subset \omega^{<\omega}$, pero a través de la biyección canónica $\omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$ podemos suponer incluso que $\mathrm{Form}(\mathcal{L}) \subset \omega$. Con este convenio podemos plantear la definición siguiente:

Definición 8.23 Si $s \in \Omega^{<\omega}$ (resp. $s \in \Omega^\omega$), definimos $E_\Omega(s)$ (resp. $E_{\Omega^\omega}(s)$) como sigue:

a) Si $s = (\beta, \phi)^\frown t$, donde $t \in \Omega^n$ (resp. $t \in \Omega^\omega$), $t \in V_\beta$, $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ con a lo sumo $n+1$ (resp. 2) variables libres y existe un (necesariamente único) $a \in V_\beta$ tal que
$$\bigwedge x \in V_\beta(x = a \leftrightarrow V_\beta \vDash \phi[t,x]),$$
entonces $E(s) = a$.

b) Si no se dan las condiciones anteriores, $E(s) = \varnothing$.

Teniendo en cuenta que, evidentemente, $\varnothing \in \mathrm{D}(\Omega) \cap \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, es obvio que

$$\mathrm{D}(\Omega) = \{E_\Omega(s) \mid s \in \Omega^{<\omega}\}, \qquad \mathrm{D}(\Omega^\omega) = \{E_{\Omega^\omega}(s) \mid s \in \Omega^\omega\}.$$

En el caso de $\mathrm{D}(\Omega)$ podemos simplificar un poco la representación observando que $\Omega^{<\omega}$ se puede biyectar con Ω. Para ello definimos en $\Omega^{<\omega}$ el orden dado por $s < t$ si y sólo si

a) $\max s < \max t$ (donde, si $\ell(s) = n$, representamos $\max s = \max s[n]$) o

b) $\max s = \max t \wedge \ell(s) < \ell(t)$ o

c) $\max s = \max t \wedge \ell(s) = \ell(t) \wedge \bigvee k < \ell(s)\ (s|_k = t|_k \wedge s(k) < t(k))$.

Es fácil ver que este orden es un buen orden en el que los segmentos iniciales son conjuntos, por lo que existe una única semejanza $F : \Omega \longrightarrow \Omega^{<\omega}$. Si llamamos E_Ω a la composición de F con el E_Ω definido previamente tenemos aplicaciones suprayectivas

$$E_\Omega : \Omega \longrightarrow \mathrm{D}(\Omega), \qquad E_{\Omega^\omega} : \Omega^\omega \longrightarrow \mathrm{D}(\Omega^\omega).$$

Notemos que hemos definido explícitamente ambas funciones, de modo que tenemos fórmulas (metamatemáticas)

$$\Phi_\Omega(\alpha, x) \equiv \alpha \in \Omega \land x = E_\Omega(\alpha), \qquad \Phi_{\Omega^\omega}(s, x) \equiv s \in \Omega^\omega \land x = E_{\Omega^\omega}(s)$$

de modo que, para todo $a \in \mathrm{D}(\Omega)$ existe un $\alpha \in \Omega$ tal que

$$\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \Phi_\Omega(\alpha, x)), \tag{8.3}$$

e igualmente con Ω^ω, con lo que tenemos recíprocos de los teoremas 8.20 y 8.22, es decir, todo conjunto definible por ordinales o sucesiones de ordinales se puede definir mediante una fórmula metamatemática explícita (la misma para todos).

Teorema 8.24 *Se cumple:*

a) $\Omega \subset \mathrm{D}(\Omega)$.

b) Si $u, v \in \mathrm{D}(\Omega)$*, entonces* $\{u, v\} \in \mathrm{D}(\Omega)$.

c) Si $u \in \mathrm{D}(\Omega)$*, entonces* $\bigcup\limits_{x \in u} x$*,* $\mathcal{P}u \in \mathrm{D}(\Omega)$.

Todo esto vale también para $\mathrm{D}(\Omega^\omega)$ *y además* $\Omega^\omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$*,* $\mathrm{D}(\Omega) \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$.

Demostración: Ya hemos visto que $\Omega \subset \mathrm{D}(\Omega) \cap \mathrm{D}(\Omega^\omega)$ y que $\Omega^\omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$. La última inclusión se debe a que si $a \in \mathrm{D}(\Omega)$ existe un $\alpha \in \Omega$ que cumple (8.3), luego, llamando $s \in \Omega^\omega$ a la sucesión constante igual a α,

$$\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \phi(s, x)),$$

donde $\phi(s, x) \equiv \Phi_\Omega(s(0), x)$, luego $a \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, por 8.22.

b) Si u, v cumplen (8.3) con ordinales α_1 y α_2 respectivamente, entonces $\{u, v\}$ cumple 8.20 con

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2, x) \equiv \bigwedge y(y \in x \leftrightarrow \Phi_\Omega(\alpha_1, y) \lor \Phi_\Omega(\alpha_2, y)).$$

En el caso de Ω^ω tenemos $s_0, s_1 \in \Omega^\omega$, y entonces tomamos

$$\phi(s, x) \equiv \bigwedge y(y \in x \leftrightarrow \Phi_\Omega(s_0, y) \lor \Phi_\Omega(s_1, y)).$$

donde $s_i(n) = s(2n + i)$.

Las dos afirmaciones de c) son similares. Demostramos la segunda: Si u cumple (8.3) con un ordinal α, entonces $\mathcal{P}u$ cumple 8.20 con

$$\phi(\alpha, x) \equiv \bigvee z(\Phi_\Omega(\alpha, z) \land x = \mathcal{P}z).$$

Para Ω^ω basta cambiar α por una sucesión s. ■

Luego veremos que no podemos garantizar que las clases $\mathrm{D}(\Omega)$ y $\mathrm{D}(\Omega^\omega)$ sean transitivas, por lo que si queremos obtener modelos transitivos de ZF hemos de "transitivizarlas", en el sentido siguiente:

Definición 8.25 Diremos que un conjunto a es *hereditariamente definible por ordinales* (resp. por sucesiones de ordinales) si $a \in \mathrm{D}(\Omega)$ y $\mathrm{ct}(a) \subset \mathrm{D}(\Omega)$ (resp. si $a \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$ y $\mathrm{ct}(a) \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$), donde ct representa a la clausura transitiva. Llamaremos $\mathrm{HD}(\Omega)$ y $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ a las clases de los conjuntos hereditariamente definibles por ordinales y sucesiones de ordinales, respectivamente.

Las inclusiones siguientes son inmediatas:

$$\Omega \subset \mathrm{HD}(\Omega) \subset \mathrm{D}(\Omega), \qquad \Omega,\ \Omega^\omega \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega) \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega), \qquad \mathrm{HD}(\Omega) \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega).$$

Además, $\mathrm{HD}(\Omega)$ y $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ son claramente clases transitivas. Esto a su vez implica el siguiente hecho elemental, que enunciamos para referencias posteriores:

Teorema 8.26 *Si $a \in \mathrm{D}(\Omega)$ y $a \subset \mathrm{HD}(\Omega)$ entonces $a \in \mathrm{HD}(\Omega)$, y lo mismo vale para Ω^ω.*

Teorema 8.27 $\mathrm{HD}(\Omega)$ *y* $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ *son modelos transitivos de* ZF.

DEMOSTRACIÓN: La prueba es idéntica para ambas clases. La veremos únicamente para Ω. La clase $\mathrm{HD}(\Omega)$ cumple el axioma de extensionalidad porque es transitiva, y cumple el axioma de regularidad porque todas las clases lo cumplen.

El axioma del par se cumple porque si $u, v \in \mathrm{HD}(\Omega)$, entonces $\{u, v\} \in \mathrm{D}(\Omega)$ por 8.24, luego $\{u, v\} \in \mathrm{HD}(\Omega)$ por 8.26. El mismo razonamiento se aplica al axioma de la unión y al axioma de partes. El axioma del conjunto vacío y el de infinitud se cumplen porque $\varnothing, \omega \in \mathrm{HD}(\Omega)$. Falta probar el axioma del reemplazo. Para ello fijamos una fórmula $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ y conjuntos $x_1, \ldots, x_n, a \in \mathrm{HD}(\Omega)$ y suponemos que

$$\bigwedge xyz \in \mathrm{HD}(\Omega)(\phi^{\mathrm{HD}(\Omega)}(x, y) \land \phi^{\mathrm{HD}(\Omega)}(x, z) \rightarrow y = z).$$

Sea $b = \{y \in \mathrm{HD}(\Omega) \mid \bigvee x \in a\ \phi^{\mathrm{HD}(\Omega)}(x, y)\}$, que es un conjunto por el axioma del reemplazo. Se cumple que $b \in \mathrm{D}(\Omega)$, pues

$$\bigwedge x(x = b \leftrightarrow \bigwedge v(v \in x \leftrightarrow v \in \mathrm{HD}(\Omega) \land \bigvee u \in a\ \phi^{\mathrm{HD}(\Omega)}(u, v))).$$

Esto prueba el axioma del reemplazo en $\mathrm{HD}(\Omega)$. ■

Teorema 8.28 $\mathrm{HD}(\Omega)$ *es un modelo transitivo de* ZFC.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que todo conjunto $A \in \mathrm{HD}(\Omega)$ puede ser bien ordenado$^{\mathrm{HD}(\Omega)}$. Puesto que "ser un buen orden" es absoluto para modelos transitivos de ZF, basta probar que existe un buen orden R sobre A tal que $R \in \mathrm{HD}(\Omega)$. Para ello basta definir

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid \bigvee \alpha(x = E_\Omega(\alpha) \land \bigwedge \beta < \alpha\ y \neq E_\Omega(\beta))\}.$$

Claramente R es un buen orden en A (el que establece que un conjunto es menor que otro si aparece antes en la enumeración determinada por E_Ω). Es fácil ver que si A es definible a partir de un ordinal γ, lo mismo le sucede a R, luego $R \in \mathrm{D}(\Omega)$ y, por la transitividad de $\mathrm{HD}(\Omega)$, tenemos que $R \in \mathrm{HD}(\Omega)$. ■

Puesto que el teorema anterior se demuestra en ZF, tenemos así una prueba alternativa de la consistencia de AE basada en la clase $\mathrm{HD}(\Omega)$ en lugar de en L. El argumento del teorema anterior no es adaptable a $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, pues no podemos definir explícitamente un buen orden en Ω^ω. De hecho, sabemos que es consistente que $L(\mathcal{N})$ no contenga ningún buen orden de $\mathcal{N}$, y en tal caso $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ tampoco puede contener uno. Lo máximo que podemos hacer es demostrar que $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ satisface ED, para lo cual nos basamos en lo siguiente:

Teorema 8.29 (ED) $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)^\omega \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$.

Demostración: Sea $f : \omega \longrightarrow \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$. Por transitividad, $f \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, luego sólo hemos de probar que $f \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$. Para cada $n \in \omega$ existe $s_n \in \Omega^\omega$ tal que $f(n) = E_{\Omega^\omega}(s_n)$. Sea $s \in \Omega^\omega$ la aplicación dada por $s(\langle m, n\rangle) = s_m(n)$. De este modo:

$$\bigwedge x(x = f \leftrightarrow x : \omega \longrightarrow \mathrm{HD}(\Omega^\omega) \land \bigwedge n \in \omega\ x(n) = E_{\Omega^\omega}(s_n)),$$

y esta equivalencia demuestra que $f \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$. ■

Teorema 8.30 (ED) $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ *es un modelo transitivo de* ZF + ED.

Demostración: Sean $A, R \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ en las hipótesis de ED, es decir, $R \subset A \times A$ y $\bigwedge x \in A \bigvee y \in A\ y\,R\,x$. Por ED existe $f : \omega \longrightarrow A$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ f(n+1)\,R\,f(n)$ y por el teorema anterior $f \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$. Así pues, $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ cumple ED. ■

Ahora son inmediatas las inclusiones:

$$L \subset \mathrm{HD}(\Omega) \subset \mathrm{D}(\Omega) \subset V, \qquad L \subset L(\mathcal{N}) \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega) \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega) \subset V.$$

Naturalmente, si $V = L$ todas ellas son igualdades, luego es consistente que ése sea el caso. Otra observación sencilla a este respecto es la siguiente:

Teorema 8.31 *La clase* $\mathrm{D}(\Omega)$ *es transitiva si y sólo si* $\mathrm{HD}(\Omega) = \mathrm{D}(\Omega) = V$, *y lo mismo vale para* Ω^ω.

Demostración: Basta observar que, para cada $\alpha \in \Omega$, se cumple que $V_\alpha \in \mathrm{D}(\Omega)$, pues V_α es definible a partir de α. Por lo tanto, si $\mathrm{D}(\Omega)$ es transitiva, tenemos que $V_\alpha \subset \mathrm{D}(\Omega)$ para todo α, luego $V = \mathrm{D}(\Omega)$, y obviamente también $\mathrm{HD}(\Omega) = \mathrm{D}(\Omega)$. El mismo argumento vale para Ω^ω. ■

Más aún, se cumple que $V_\alpha, V_\alpha \cap \mathrm{D}(\Omega) \in \mathrm{D}(\Omega)$ y ambos conjuntos tienen los mismos elementos en $\mathrm{D}(\Omega)$. Por lo tanto, $\mathrm{D}(\Omega)$ cumple el axioma de extensionalidad si y sólo si $V_\alpha \subset \mathrm{D}(\Omega)$ para todo α, es decir, si y sólo si $V = \mathrm{D}(\Omega)$.

Nota El hecho de que $\mathcal{N} \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ implica inmediatamente que $\mathbb{R} \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ y el teorema 8.22 implica que si $\phi(x, s)$ es una fórmula metamatemática sin más variables libres que las indicadas, entonces, para todo $s \in \Omega^\omega$, el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x, s)\}$$

pertenece a $\mathrm{D}(\Omega^\omega)$ y, por 8.26, también $A \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$. Lo mismo vale para un conjunto de la forma

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\},$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega$ y, en particular, para un conjunto de la forma

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x)\}$$

(y, por supuesto, también vale si cambiamos $\mathbb{R}$ por $\mathcal{N}$ o por ω o por cualquier conjunto que esté en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$). Esto significa que $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ contiene a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ (o de $\mathcal{N}$, o de ω, etc.) que se pueda considerar "definible explícitamente" en el más amplio sentido del término. De aquí el interés de esta clase. ■

Terminamos la sección con algunas pruebas de consistencia referentes a la definibilidad por ordinales.

Teorema 8.32 (AE) *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, $\mathbb{P} \in M$ *un c.p.o. casi homogéneo*^{M} *y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces se cumple que* $\mathrm{HD}(\Omega)^{M[G]} \subset M$ *y si $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado*^{M} *también* $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]} \subset M$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe un $x \in \mathrm{HD}(\Omega)^{M[G]} \setminus M$. Podemos tomarlo de rango mínimo δ, con lo que $x \subset \mathrm{HD}(\Omega)^{M[G]}$. Sea $\alpha \in \Omega^M$ tal que $(\bigwedge u(u = x \leftrightarrow \Phi_\Omega(\alpha, u)))^{M[G]}$. Así, $\bigwedge y \in M(y \in x \leftrightarrow \Psi^{M[G]}(\alpha, y))$, donde $\Psi(\alpha, y) \equiv \bigvee u(y \in u \land \Phi_\Omega(\alpha, u))$. De este modo, si $y \in x$, tenemos que $\Psi^{M[G]}(\alpha, y)$, luego existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \Psi(\check{\alpha}, \check{y})$, y por [PC 6.10] tenemos que, de hecho, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \Psi(\check{\alpha}, \check{y})$. El recíproco es trivial, luego

$$x = \{y \in V_{\delta+1} \mid \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \Psi(\check{\alpha}, \check{y})\}^M \in M,$$

contradicción.

Si consideramos $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ la situación es la misma salvo que ahora tenemos una sucesión $s \in (\Omega^\omega)^{M[G]}$ en lugar de un $\alpha \in \Omega^M$, pero si $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado^M entonces $s \in M$ y el argumento se aplica igualmente. ■

Así, por ejemplo, si aplicamos el teorema anterior a[6] $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\aleph_0, 2, \aleph_0)$ y a un modelo de ZFC + $V = L$ obtenemos una extensión genérica en la que $V = L[a]$, para un cierto $a \in \mathcal{N}$ y $\mathrm{HD}(\Omega) = L$. Más concretamente, la demostración del teorema anterior muestra que $a \notin \mathrm{D}(\Omega)$, con lo que, aunque claramente

[6] Recordemos [PC 5.13] que $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ es el c.p.o. de las funciones parciales de I en J de cardinal menor que κ. Estos c.p.o.s son casi-homogéneos por [PC 6.11].

$\mathcal{N} \in \mathrm{D}(\Omega)$, es consistente que haya elementos de $\mathcal{N}$ que no sean definibles por ordinales.

Usando $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\aleph_1, 2, \aleph_1)^M$ obtenemos el resultado análogo para $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ (aunque ahora $a : \aleph_1 \longrightarrow \aleph_1$, ya que $\mathcal{N} \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$).

Ahora demostramos que, al contrario de lo que sucede con "$x \in L$", la fórmula "$x \in \mathrm{HD}(\Omega)$" no es absoluta para modelos transitivos de ZFC. De hecho, ni siquiera es absoluta para $\mathrm{HD}(\Omega)$.

Teorema 8.33 *Si* ZFC *es consistente, también lo es*

$$\mathrm{ZFC} + L \subsetneq \mathrm{HD}(\Omega) \subsetneq V + \mathrm{HD}(\Omega)^{\mathrm{HD}(\Omega)} = L.$$

DEMOSTRACIÓN: Razonamos en ZFC. Partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC + $V = L$ y tomamos $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\aleph_0, 2, \aleph_0) \in M$ y un filtro H $\mathbb{Q}$-genérico sobre M. De este modo, si llamamos $a = \bigcup\limits_{p \in G} p$ a la función genérica determinada por H, tenemos un modelo $N = M[H] = M[a]$ que, según el teorema anterior, cumple que $\mathrm{HD}(\Omega)^N \subset M$ y, como $M = L^N$, de hecho, $(\mathrm{HD}(\Omega) = L)^N$. Por otra parte, $(V = L[a])^N$. Además, como M cumple la HCG, lo mismo le sucede a N.

Sea ahora $A = \{\aleph_n^N \mid n \in \omega\} \in N$ y definamos

$$E(\aleph_n) = \begin{cases} \aleph_{n+1} & \text{si } a(n) = 1, \\ \aleph_{n+2} & \text{si } a(n) = 0. \end{cases}$$

Tomamos $\mathbb{P} = (\prod\limits_{n \in \omega} \mathrm{Fn}(E(\aleph_n), 2, \aleph_n))^N$ y un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre N. Entonces, según [PC 6.35] la extensión $N[G]$ tiene los mismos cardinales que N y, según [PC 6.37],

$$\bigwedge n \in \omega \ (2^{\aleph_n})^{N[G]} = E(\aleph_n).$$

Esto hace que $a \in \mathrm{D}(\Omega)^{N[G]}$, pues

$$(\bigwedge x(x = a \leftrightarrow x \in \mathcal{C} \land \bigwedge n \in \omega(a(n) = 1 \leftrightarrow 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1})))^{N[G]}.$$

Claramente entonces $a \in \mathrm{HD}(\Omega)^{N[G]}$, luego $(N = L[a] \subset \mathrm{HD}(\Omega))^{N[G]}$. Por otra parte, es inmediato comprobar que un producto de c.p.o.s casi homogéneos es casi homogéneo, luego el teorema anterior nos da la inclusión opuesta. Así pues, $(\mathrm{HD}(\Omega) = L[a] \subsetneq V)^{N[G]}$, mientras que, según habíamos visto,

$$(\mathrm{HD}(\Omega)^{\mathrm{HD}(\Omega)})^{N[G]} = \mathrm{HD}(\Omega)^N = M = L^{N[G]}.$$

■

Notas La demostración anterior se adapta fácilmente al caso de Ω^ω (excluyendo $n = 0$, para que $\mathbb{P}$ sea $\aleph_1$-cerrado). Por otra parte, no es difícil adaptar el argumento para que $(2^{\aleph_0} = \aleph_2)^N$, y así vemos que es consistente que $(2^{\aleph_0} = \aleph_2)^{\mathrm{HD}(\Omega)}$, por lo que, al contrario que L, la clase $\mathrm{HD}(\Omega)$ no puede usarse para probar la consistencia de la hipótesis del continuo. ■

Ejercicio: Definir las clases de los conjuntos definibles y hereditariamente definibles a partir de $\Omega \cup \mathcal{N}$ y demostrar que cumplen resultados análogos a los de $\mathrm{D}(\Omega^\omega)$ y $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$. Obtener una demostración alternativa del teorema 7.31.

8.5 Los c.p.o.s Col(κ) y Lv(κ)

Según el teorema 7.29, si todo conjunto $\mathbf{\Sigma}_3^1$ es medible Lebesgue entonces $\aleph_1$ es inaccesible en L, por lo que si queremos construir un modelo en el que todos los conjuntos proyectivos sean universalmente medibles, en dicho modelo tendrá que cumplirse que $\aleph_1$ sea inaccesible en L. La forma más elemental de conseguir esto es mediante el orden colapsante de Lévy, que colapsa todos los cardinales no numerables menores que un cardinal inaccesible para que éste pase a ser $\aleph_1$. Solovay demostró que esto basta para asegurar que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ sean medibles Lebesgue. Lo veremos en la sección siguiente, pero antes estudiaremos el orden de Lévy con más detalle.

Previamente obtendremos algunos resultados sobre el c.p.o. $\mathrm{Fn}(\aleph_0, \kappa, \aleph_0)$, que colapsa (vuelve numerable) a un cardinal κ, aunque, dado que está formado por condiciones finitas, es más cómodo trabajar con $\mathrm{Col}(\kappa) = \kappa^{<n}$, que obviamente es denso en $\mathrm{Fn}(\aleph_0, \kappa, \aleph_0)$, luego equivalente a la hora de construir extensiones genéricas. Llamaremos $\overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$ a la compleción de $\mathrm{Col}(\kappa)$.

NOTA: En esta sección trabajamos en ZFC (es decir, no indicaremos explícitamente el uso de AE).

Necesitamos una caracterización del álgebra $\overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$, que esencialmente está contenida en el teorema siguiente:

Teorema 8.34 *Sea $\mathbb{Q}$ un conjunto parcialmente ordenado separativo de cardinal no numerable κ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash \check{\kappa}$ es numerable. Entonces $\mathbb{Q}$ tiene un subconjunto denso isomorfo a* $\mathrm{Col}(\kappa)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta demostrar el teorema relativizado a un modelo transitivo numerable arbitrario M de ZFC.

Observemos que $\mathbb{Q}$ no puede cumplir la condición de cadena κ, pues entonces[7] conservaría cardinales $\geq \kappa$. Más aún, si $q \in \mathbb{Q}$, el conjunto

$$\mathbb{Q}_q = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq q\}$$

tampoco puede cumplir dicha condición. En efecto: si G es un filtro $\mathbb{Q}_q$-genérico sobre M, tenemos que G genera un filtro G^* en $\mathbb{Q}$, que claramente es $\mathbb{Q}$-genérico y $M[G] = M[G^*]$, pues $G = G^* \cap \mathbb{Q}_q \in M[G^*]$ y $G^* \in M[G]$. Así pues, también se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_q} \Vdash \check{\kappa}$ es numerable.

[7]Según [PC 5.6] tendríamos que exigir que κ fuera regular^M, pero en realidad puede probarse que el máximo cardinal μ tal que un c.p.o. cumple la condición de cadena μ es siempre regular, por lo que la hipótesis es en realidad redundante. No obstante, nosotros sólo vamos a aplicar este teorema al caso en que κ es regular.

Seguidamente observamos que, si G es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M, como $G \subset \mathbb{Q}$, ha de ser numerable$^{M[G]}$. Sea $\sigma \in M^{\mathbb{Q}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma : \omega \longrightarrow \Gamma$ suprayectiva.

Vamos a definir (en M) una aplicación $q : \mathrm{Col}(\kappa) \longrightarrow \mathbb{Q}$ que sea un isomorfismo entre $\mathrm{Col}(\kappa)$ y un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$. Definimos $q(p)$ por recurrencia sobre la longitud de p. Hacemos $q(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ y veamos a continuación cómo definir q sobre las condiciones de longitud 1.

Para ello consideramos una anticadena $W \subset \mathbb{Q}$. Para cada $w \in W$, podemos tomar un filtro G $\mathbb{Q}$-genérico sobre M tal que $w \in G$. Si $\sigma_G(0) = q$, existe $w' \leq w$ tal que $w' \Vdash \sigma(\check{0}) = \check{q}$. Sustituyendo cada $w \in W$ por un w' en estas condiciones, podemos suponer que para cada $w \in W$ existe un $q_w \in \mathbb{Q}$ tal que $w \Vdash \sigma(\check{0}) = \check{q}_w$. Sea $W_\varnothing$ una anticadena en $\mathbb{Q}$ maximal respecto de esta propiedad, digamos $W_\varnothing = \{w_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ y, para cada condición $p \in \mathrm{Col}(\kappa)$ de longitud 1, definimos $q(p) = w_{p(0)}$.

Supongamos definida q sobre las condiciones de longitud n. Dada una condición $p \in \mathrm{Col}(\kappa)$ de longitud $n+1$, tomamos una anticadena $W_{p|_n}$ en $\mathbb{Q}$ formada por condiciones $w \leq q(p|_n)$ tales que exista un $q_w \in \mathbb{Q}$ tal que $w \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{q}_w$ y que sea maximal respecto de estas propiedades. Puesto que $\mathbb{Q}_{q(p|_n)}$ no cumple la condición de cadena κ (y la existencia de q_w se puede exigir siempre), tenemos que $|W_{p|_n}|^M = \kappa$. Elegimos una enumeración $W_{p|_n} = \{w_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ y definimos $q(p) = w_{p(n)}$.

Así es evidente que el conjunto $D = \{q(p) \mid p \in \mathrm{Col}(\kappa)\}$ es isomorfo a $\mathrm{Col}(\kappa)$. Sólo falta probar que es denso en $\mathbb{Q}$. Para ello tomamos $q \in \mathbb{Q}$. Si G es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M que contenga a q, tenemos que $\sigma_G : \omega \longrightarrow G$, luego existe un $n \in \omega$ tal que $\sigma_G(n) = q$, luego existe un $r \leq q$ tal que $r \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{q}$.

La condición r ha de ser compatible con alguna condición de la anticadena $W_\varnothing$, digamos que con la asignada a p_1. A su vez, ha de ser compatible con alguna condición de la anticadena W_{p_1}, digamos con la asignada a p_2 y, repitiendo el argumento, concluimos que r ha de ser compatible con $q(p)$, para cierta condición $p \in \mathrm{Col}(\kappa)$ de longitud $n+1$. En principio, existe un $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $q(p) \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{q}'$. Ahora bien, como podemos tomar un filtro genérico G que contenga a $q(p)$ y a r, en $M[G]$ tendremos que $\sigma_G(n) = q' = q$, de modo que $q(p) \Vdash \sigma(n) = \check{q}$. En particular $q(p) \Vdash \check{q} \in \Gamma$.

Finalmente observamos que $q(p) \leq q$, ya que, en caso contrario, como $\mathbb{Q}$ es separativo, existiría $q' \leq q(p)$ tal que $q' \perp q$, y si G es un filtro genérico que contiene a q', como $q' \Vdash \check{q} \in G$, tendríamos también que $q \in G$, lo cual es imposible. Así hemos probado que D es denso en $\mathbb{Q}$. ■

Equivalentemente, podríamos enunciar el teorema anterior con la conclusión $\mathbb{B}(\mathbb{Q}) \cong \overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$ (donde $\mathbb{B}(\mathbb{Q})$ es la compleción de $\mathbb{Q}$), o también como que toda álgebra de Boole completa que contenga un subconjunto denso no numerable de cardinal κ y tal que $\|\check{\kappa}$ es numerable$\| = \mathbb{1}$ es isomorfa a $\overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$. Otra consecuencia sencilla es la siguiente:

Teorema 8.35 *Si κ es un cardinal no numerable y $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa con un subconjunto denso de cardinal $\leq \kappa$, entonces existe una inmersión completa $i : \mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$.*

Demostración: Sea $\mathbb{P}$ denso en $\mathbb{B}$ con $|\mathbb{P}| \leq \kappa$. Entonces $\mathbb{Q} = \mathbb{P} \times \mathrm{Col}(\kappa)$ es un c.p.o. de cardinal κ que obviamente colapsa κ, luego su compleción es isomorfa a $\overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$, luego tenemos inmersiones completas

$$\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \times \mathrm{Col}(\kappa) \longrightarrow \overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$$

cuya composición induce una inmersión completa $\mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$. ■

El caso numerable es más simple:

Teorema 8.36 *Se cumple:*

a) Dos álgebras de Boole no atómicas numerables cualesquiera son isomorfas entres sí.

b) Toda álgebra de Boole completa no atómica que posea un subconjunto denso numerable es isomorfa al álgebra de categoría $\mathcal{B}_c$.

Demostración: a) Un álgebra de Boole es no atómica y numerable si y sólo si su espacio de Stone[8] es un espacio compacto cero-dimensional 2AN sin puntos aislados. Por los teoremas 1.15 y 1.17 tales espacios son siempre metrizables, luego espacios polacos. Así pues, basta probar que dos espacios polacos perfectos cero-dimensionales cualesquiera son homeomorfos, pero todos ellos son homeomorfos al espacio de Cantor $\mathcal{C}$.

b) Un conjunto denso numerable en un álgebra de Boole no atómica genera un álgebra de Boole densa no atómica numerable, luego dos álgebras en las condiciones del enunciado tienen (por el apartado anterior) subálgebras densas isomorfas, luego ambas son isomorfas a la compleción de una misma álgebra, luego son isomorfas entre sí. Como $\mathcal{B}_c$ cumple las hipótesis, cualquier otra álgebra que las cumpla es isomorfa a $\mathcal{B}_c$. ■

Con esto podemos probar:

Teorema 8.37 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea δ un cardinal infinito^M, sea $\mathbb{Q} = \mathrm{Col}(\delta)$, sea G un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y sea $A \in M[G]$ tal que $A \subset M$. Entonces $M[A] = M[G]$ o bien existe un filtro G_0 $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[A]$ tal que $M[G] = M[A][G_0]$.*

Demostración: Sea $\mathbb{B} \in M$ la compleción^M de $\mathbb{Q}$ y llamemos G^* al ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M generado por G en $\mathbb{B}$. En la demostración del teorema [PC 7.35] se ve que existe una subálgebra completa $\mathbb{C}$ de $\mathbb{B}$ tal que, si llamamos $H = G^* \cap \mathbb{C}$, entonces $M[A] = M[H]$.

La inclusión $i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{B}$ es una inmersión completa y $H = i^{-1}[G^*]$. Por el teorema [PC 9.14] sabemos que G^* es también un filtro $\mathbb{B}/H$-genérico sobre $M[H]$ y que $M[G] = M[G^*] = M[H][G^*]$.

Tenemos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{B}$ y en la demostración de [PC 9.15] se ve que entonces $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{B}/H)$ es denso en $\mathbb{B}/H$, luego llamando $G' = G \cap \mathbb{Q}'$, tenemos que $M[G] = M[A][G']$, donde G' es un filtro $\mathbb{Q}'$-genérico sobre $M[A]$.

[8]Véase [PC], sección 7.5.

Por otra parte, $|\mathbb{Q}'|^{M[A]} \leq |\delta|^{M[A]}$. Si δ es no numerable$^{M[A]}$, como δ es numerable$^{M[G]}$, tenemos que $\mathbb{Q}'$ colapsa a $|\delta|^{M[A]}$, luego necesariamente $|\mathbb{Q}'|^{M[A]} = |\delta|^{M[A]}$. Más aún, para todo filtro G' $\mathbb{Q}'$-genérico sobre $M[A]$ (no necesariamente el que tenemos fijado) se cumple que G' es $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y $M[A][G'] = M[G']$, luego δ es numerable$^{M[A][G']}$. Así pues, se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}'} \Vdash \check{\delta}$ es numerable y por 8.34 tenemos que $\mathbb{Q}'$ contiene un subconjunto denso isomorfo a $\mathrm{Col}(|\delta|^{M[A]})$, que a su vez es isomorfo a $\mathrm{Col}(\delta)$. Por consiguiente, $M[A][G'] = M[A][G_0]$, para un cierto filtro G_0 $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[A]$.

Supongamos ahora que δ es numerable$^{M[A]}$ y que $M[A] \subsetneq M[G]$. Entonces las compleciones$^{M[A]}$ de $\mathbb{Q}'$ y $\mathbb{Q}$ son isomorfas por el teorema anterior, ya que ambos c.p.o.s son numerables$^{M[A]}$ (y no atómicos, luego las compleciones también). Así pues, $M[A][G'] = M[A][G_0]$ en las mismas condiciones que en el caso anterior. ■

Consideramos ahora el c.p.o. $\mathbb{P} = \mathrm{Lv}(\kappa)$, donde κ es un cardinal (débilmente) inaccesible, formado por las funciones definidas sobre subconjuntos finitos de $\kappa \times \omega$ tales que $p(\alpha, n) < \alpha$.

Así, si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, κ es un cardinal débilmente inaccesible^M y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, éste determina en $M[G]$ una familia de κ funciones que colapsan todos los ordinales (y en particular los cardinales) menores que κ hasta $\aleph_0$, de modo que $\kappa = \aleph_1^{M[G]}$. Además, según [PC 5.33], se cumple que $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)^{M[G]}$ y, para todo cardinal$^{M[G]}$ $\mu > \kappa$, tenemos que $(2^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^M$.

Esto significa que podemos conseguir que en $M[G]$ se cumpla cualquier determinación razonable de la exponenciación cardinal, salvo por el hecho de que se cumple necesariamente la hipótesis del continuo. Para evitar esta restricción vamos a considerar un c.p.o. ligeramente más general que el de Lévy:

Fijemos un cardinal^M μ de cofinalidad $\geq \kappa$ y consideramos los c.p.o.s

$$\mathbb{P}_1 = \mathrm{Lv}(\kappa), \qquad \mathbb{P}_2 = \mathrm{Fn}(\mu, 2, \aleph_0), \qquad \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2,$$

de modo que un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M es de la forma $G_1 \times G_2$, donde G_1 es $\mathbb{P}_1$-genérico sobre M y G_2 es $\mathbb{P}_2$-genérico sobre $M[G_1]$, y entonces se cumple que $M[G] = M[G_1][G_2]$. Es claro que en esta extensión $2^{\aleph_0} = \mu$ (lo cual se puede concretar en $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ o $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$, etc.).

El teorema siguiente es una generalización obvia de [PC 5.29]:

Teorema 8.38 $\mathbb{P}$ *cumple la condición de cadena κ.*

Demostración: Supongamos que $\mathbb{P}$ admite una anticadena de cardinal κ. Podemos ver cada par $(p, q) \in \mathbb{P}$ como una función de un subconjunto finito de $\kappa \times \omega \times \mu$ en $\kappa \times 2$. Si la familia de dominios tiene cardinal $< \kappa$, como κ es regular, la anticadena tiene un subconjunto de cardinal κ cuyos miembros tienen todos el mismo dominio. Si la familia tiene cardinal κ, entonces podemos tomar un subconjunto de cardinal κ cuyos dominios formen una subfamilia cuasidisjunta de raíz r (por [PC 5.12]). Esto último es válido trivialmente en el primer caso. Si $(\alpha, n, \beta) \in r$, entonces su imagen por cada elemento de la anticadena está en $\alpha \times 2$, luego, si $\alpha < \kappa$ es el supremo de las primeras componentes de las ternas de r, tenemos que todas las condiciones de la anticadena se restringen a funciones de r en $(\alpha+1) \times 2$, y el número de posibilidades es $< \kappa$, luego existen κ condiciones en la anticadena cuya restricción a r es la misma, pero entonces son compatibles, contradicción. ■

El resultado fundamental que necesitamos es la variante siguiente de 8.37:

Teorema 8.39 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal (débilmente) inaccesible^M, sea μ un cardinal^M de cofinalidad^M $\geq \kappa$, sean $\mathbb{P}_1 = \mathrm{Lv}(\kappa)$, $\mathbb{P}_2 = \mathrm{Fn}(\mu, 2, \aleph_0)$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $X \in M[G]$ un conjunto numerable$^{M[G]}$ tal que $X \subset M$. Entonces podemos descomponer $\mathbb{P} = \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$ de modo que $|\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$, $X \in M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$ y existe un filtro H $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[X]$ tal que $M[G] = M[X][H]$. Además κ y μ cumplen las mismas hipótesis en $M[X]$.*

Demostración: Podemos tomar $\alpha \in M$ tal que $X \subset V_\alpha^{M[G]} \cap M = V_\alpha^M$. Sea $f : \omega \longrightarrow X$ biyectiva, $f \in M[G]$. Como $\mathbb{P}$ cumple^M la condición de cadena κ, por [PC 5.5] existe una función $F \in M$ tal que $F : \omega \longrightarrow \mathcal{P}V_\alpha^M$ y $\bigwedge n \in \omega(|F(n)|^M < \kappa \land f(n) \in F(n))$. Así pues, tomando $B = \bigcup\limits_{n\in\omega} F(n) \in M$, tenemos que $X \subset B$ y $|B|^M < \kappa$.

Por [PC 5.19] tenemos que $X = \tau_G$, donde

$$\tau = \bigcup_{x\in B} \{\check{x}\} \times A_x \in M$$

y cada A_x es una anticadena en $\mathbb{P}$, luego $|A_x|^M < \kappa$. Es claro entonces que existen un cardinal^M $\nu < \kappa$ y un conjunto $A \subset \mu$, $A \in M$, $|A|^M \leq \nu$ tales que $\tau \in M^{\mathbb{Q}_1}$, donde

$$\mathbb{Q}_1 = \{p \in \mathbb{P}_1 \mid \mathcal{D}p \subset (\nu+1) \times \omega\} \times \mathrm{Fn}(A, 2, \aleph_0).$$

Por lo tanto, $X \in M[\mathbb{Q}_1 \cap G^*]$ y, si llamamos

$$\mathbb{Q}_2 = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathcal{D}p \subset (\kappa \setminus (\nu+1)) \times \omega\} \times \mathrm{Fn}(\mu \setminus A, 2, \aleph_0),$$

claramente $\mathbb{P}$ puede identificarse con $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$.

Ahora observamos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_1} \Vdash \check{\nu}$ es numerable y $|\mathbb{Q}_1|^M = \nu$, luego el teorema 8.34 nos da[9] que $\mathbb{Q}_1$ tiene un subconjunto denso isomorfo a $\mathrm{Col}(\nu)$. Esto nos permite aplicar 8.37, de modo que existe un filtro K $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre $M[X]$ tal que $M[\mathbb{Q}_1 \cap G] = M[X][K]$. Por lo tanto,

$$M[G] = M[X][K][\mathbb{Q}_2 \cap G] = M[X][H],$$

[9]Notemos que ν puede elegirse regular^M, de acuerdo con la nota al pie en la demostración de 8.34.

donde $H = K \times (\mathbb{Q}_2 \cap G^*)$ es un filtro $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$-genérico sobre $M[X]$, que obviamente se puede sustituir por un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[X]$.

Para que κ y μ sigan cumpliendo las hipótesis en $M[X]$ basta con que las sigan cumpliendo en $M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$, es decir, tras una extensión por $\mathrm{Col}(\nu)$, con $\nu < \kappa$, lo cual es fácil de comprobar. ■

8.6 El modelo de Solovay

Nota En esta sección trabajamos también en ZFC.

Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC + $V = L$. Supondremos también que existe un $\kappa \in M$ tal que κ es un cardinal (fuertemente) inaccesible^M.

En lo sucesivo mantendremos la notación descrita en el teorema 8.39, es decir, M será un modelo transitivo numerable de ZFC, μ será un cardinal^M de cofinalidad^M $\geq \kappa$, $\mathbb{P} = \mathrm{Lv}(\kappa) \times \mathrm{Fn}(\mu, 2, \aleph_0)$ y G será un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Así se cumple que $\aleph_1^{M[G]} = \kappa$ y $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = \mu$.

Definimos además $N = \mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]}$, de modo que, por 8.30, N es un modelo transitivo numerable de ZF + ED. Llamaremos $S = (\Omega^\omega)^{M[G]}$.

Teorema 8.40 *Para cada $s \in S$, el conjunto de los $x \in \mathcal{N}^{M[G]}$ que no son aleatorios sobre $M[s]$ es nulo y el conjunto de los $x \in \mathcal{N}^{M[G]}$ que no son genéricos sobre $M[s]$ es de primera categoría.*

Demostración: Por 8.18, el conjunto de los $x \in M[G]$ que no son aleatorios sobre $M[s]$ es el conjunto

$$B = (\bigcup\{B_c \mid c \in \mathcal{N}^{L[s]} \wedge B_c \text{ es nulo}\})^{M[G]},$$

que claramente está en $M[G]$. Sólo hemos de demostrar que $(n^{L[s]})^{M[G]} = \mathcal{N}^{M[s]}$ es numerable$^{M[G]}$, pues entonces B será (en $M[G]$) una unión numerable de conjuntos nulos, luego será nula.

Ahora bien, por 8.39 sabemos que $s \in M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$, con $|\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$. Como κ es fuertemente inaccesible^M, es inmediato que el conjunto de buenos $\mathbb{Q}_1$-nombres para subconjuntos de $\check{\omega}$ en M tiene cardinal $< \kappa$, luego $(2^{\aleph_0})^{M[\mathbb{Q}_1 \cap G]} < \kappa$, luego $\mathcal{N}^{M[s]} \subset \mathcal{N}^{M[\mathbb{Q}_1 \cap G]}$ tiene cardinal$^{M[G]}$ $< \kappa = \aleph_1^{M[G]}$, luego es numerable$^{M[G]}$.

La demostración para los reales aleatorios es idéntica. ■

Teorema 8.41 *Existe una fórmula (metamatemática) $\phi(s, x)$ tal que para todo conjunto $X \in N$, $X \subset \mathcal{N}$ existe una sucesión $s \in S$ tal que, para todo $x \in \mathcal{N}^{M[G]}$,*

$$x \in X \leftrightarrow \phi(s, x)^{M[s][x]}.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $X \in N$, existe $s \in S$ tal que

$$(\bigwedge y(X = y \leftrightarrow \Phi_{\Omega^\omega}(s, y)))^{M[G]}.$$

Llamemos $\psi(s, x) \equiv \bigvee y(x \in y \wedge \Phi_{\Omega^\omega}(s, y))$, de modo que

$$\bigwedge x \in M[G]\ (x \in X \leftrightarrow \psi^{M[G]}(s, x)).$$

Definimos $\phi(x, s) \equiv \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \psi(\check{s}, \check{x})$. Fijamos $x \in \mathcal{N}^{M[G]}$ y vamos a probar que cumple la equivalencia del enunciado o, lo que es lo mismo,

$$\psi^{M[G]}(s, x) \leftrightarrow (\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \psi(\check{s}, \check{x}))^{M[s][x]}.$$

Para ello aplicamos el teorema 8.39 (al conjunto $X = s \times \{0\} \cup x \times \{1\}$), según el cual existe un filtro H $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[X] = M[s, x]$ de modo que $M[G] = M[s, x][H]$. Ahora basta tener presente que $\mathbb{P}$ es claramente casi-homogéneo, por lo que

$$\psi^{M[G]}(s, x) \leftrightarrow \psi^{M[s,x][H]}(s, x) \leftrightarrow \bigvee p \in \mathbb{P}\ (p \Vdash \psi(\check{s}, \check{x}))^{M[s,x]}$$
$$\leftrightarrow (\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \psi(\check{s}, \check{x}))^{M[s][x]}.$$

■

Como consecuencia:

Teorema 8.42 *Todo $X \in N$ tal que $X \subset \mathcal{C}$ es m-medible y tiene la propiedad de Baire en $M[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $X \in N$ en las condiciones del enunciado, sea $s \in S$ en las condiciones del teorema anterior. Llamemos $\mathcal{B}_m$ al álgebra de medida en $M[s]$ y consideremos $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}^{M[s]}$, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}^{M[s]}$. Consideremos además la fórmula

$$\psi = \bigvee x \in \mathcal{C}(\bigwedge c \in \check{\mathcal{N}}_0(x \in B_c \leftrightarrow \bigvee C \in \Gamma\ B_c \cap \check{\mathcal{C}}_0 \in C) \wedge \phi(\check{s}, x)),$$

donde Γ es el nombre canónico del ultrafiltro genérico y ϕ es la fórmula dada por el teorema anterior. Notemos que ψ afirma que, en una extensión genérica $M[s][H]$, el real aleatorio x_H cumple la propiedad ϕ. Entonces $\|\psi\|^{M[s]} \in \mathcal{B}_m$, luego existe un $d \in \mathcal{N}_0$ tal que $[B_d]^{M[s]} = \|\psi\|^M$.

Definimos $B = B_d^{M[G]}$, que es un conjunto de Borel$^{M[G]}$ en $\mathcal{C}^{M[G]}$. Vamos a probar que si llamamos $\mathrm{Al}(M[s])$ al conjunto de los puntos de $\mathcal{C}^{M[G]}$ aleatorios sobre $M[s]$ (que pertenece a $M[G]$, según hemos visto en 8.40), entonces

$$X \cap B = \mathrm{Al}(M[s]) \cap B.$$

En efecto, dado $x \in \mathrm{Al}(M[s])$, existe un ultrafiltro H $\mathcal{B}_m$-genérico sobre $M[s]$ tal que $x = x_H$, con lo que

$$x \in X \leftrightarrow \phi(s, x)^{M[s][x]} \leftrightarrow \phi(s, x)^{M[s][H]} \leftrightarrow \|\psi\|^{M[s]} \in H$$
$$\leftrightarrow [B_d]^{M[s]} \in H \leftrightarrow x_H \in B_d^{M[G]} \leftrightarrow x \in B.$$

Teniendo en cuenta que, según 8.40, el complementario de $\mathrm{Al}(M[s])$ tiene medida nula, ahora es claro que $X \,\Delta\, B$ es nulo, por lo que X es m-medible$^{M[G]}$. El razonamiento para la propiedad de Baire es idéntico. ■

Teorema 8.43 *Todo $X \in N$ tal que $X \subset \mathcal{C}$ no numerable$^{M[G]}$ contiene un subconjunto perfecto$^{M[G]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado X, tomamos $s \in S$ según el teorema 8.41. Por 8.39 existe un filtro H $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[s]$ tal que $M[G] = M[s][H]$ y κ sigue siendo fuertemente inaccesible$^{M[s]}$. Por lo tanto, cambiando M por $M[s]$ podemos simplificar la notación y suponer que $s \in M$.

Como $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}^M$ es numerable$^{M[G]}$, existe $x \in X \setminus \mathcal{C}_0$. De nuevo por 8.39 tenemos que $x \in M[G_1]$, donde $G_1 = \mathbb{Q}_1 \cap G$ y $|\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$. Así,

$$(\bigvee x \in \mathcal{C}(x \notin \mathcal{C}_0 \wedge \phi^{L[s,x]}(s,x)))^{M[G_1]},$$

luego existen un nombre $\sigma \in M^{\mathbb{Q}_1}$ y una condición $p \in G_1$ tales que

$$p \Vdash (\sigma \in \mathcal{C} \setminus \check{\mathcal{C}}_0 \wedge \phi^{L[\check{s},\sigma]}(\check{s},\sigma)).$$

Puesto que $(\mathcal{P}\mathbb{Q}_1)^M$ es numerable$^{M[G]}$, podemos considerar una enumeración $\{D_n\}_{n\in\omega} \in M[G]$ de los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}_1$. Ahora construimos en $M[G]$ una familia $\{p_t\}_{t\in 2^{<\omega}}$ de condiciones en $\mathbb{Q}_1$ que extienden a p y de manera que $t_1 \subset t_2 \rightarrow p_{t_2} \leq p_{t_1}$. Para ello tomamos $p_\varnothing \leq p$ tal que $p_\varnothing \in D_0$. Supuesto definido $p_t \leq p$, existe $n_t \in \omega$ tal que p_t no decide $\sigma(\check{n}_t)$, es decir, tal que

$$\neg p_t \Vdash \sigma(\check{n}_t) = 0 \wedge \neg p_t \Vdash \sigma(\check{n}_t) = 1,$$

pues en caso contrario $p_t \Vdash \sigma = \check{x} \in \check{\mathcal{C}}_0$, donde

$$\check{x} = \{(n,i) \in \omega \times 2 \mid p_t \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{i}\} \in \mathcal{C}_0.$$

Por consiguiente, existen condiciones $p_{t\frown 0}$ y $p_{t\frown 1}$ que extienden a p_t (y que podemos tomar en $D_{\ell(t)}$) tales que

$$p_{t\frown i} \Vdash \sigma(\check{n}_t) = \check{i}.$$

Para cada $z \in \mathcal{C}^{M[G]}$, definimos

$$G_z = \{p \in \mathbb{P}_{\nu+1} \mid \bigvee t \in 2^{<\omega}(t \subset z \wedge p_t \leq p)\}.$$

Así $G_z \in M[G]$ es un filtro en $\mathbb{Q}_1$ y $p_{z|_n} \in G_z \cap D_n$, luego se trata de un filtro $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre M. Como $p \in G_z$, tenemos que $\sigma_{G_z} \in \mathcal{C}^{M[G_z]} \subset \mathcal{C}^{M[G]}$ y $\phi^{M[x]}(s, \sigma_{G_z})$, lo cual equivale a que $\sigma_{G_z} \in X$.

Por consiguiente, podemos definir $f : \mathcal{C}^{M[G]} \longrightarrow X$ mediante $f(z) = \sigma_{G_z}$. Basta probar que f es inyectiva y continua, pero esto es claro: si $z_1 \neq z_2$, entonces existe un $t \in 2^{<\omega}$ de modo que $t \subset z_1 \cup z_2$, $t^\frown 0 \subset z_1$ $t^\frown 1 \subset z_2$ (o viceversa). Por lo tanto, $t^\frown 0 \in G_{z_1}$ y, en consecuencia, $\sigma_{z_1}(n_t) = 0$, mientras que $\sigma_{z_2}(n_t) = 1$, es decir, $f(z_1) \neq f(z_2)$.

La continuidad en cada $z_0 \in \mathcal{C}^{M[G]}$ se debe a que, para cada $n \in \omega$, llamando $h = \sigma_{G_{z_0}}|_n$, existe $q \in G_{z_0}$ tal que $q \Vdash \sigma|_{\check{n}} = \check{h}$, luego existe un $t \in 2^{<\omega}$, $t \subset z_0$ tal que $p_t \leq q$, y entonces $z_0 \in B_t \subset f^{-1}[B_h]$, ya que si $z \in B_t$, entonces $p_t \in G_z$, luego $q \in B_z$, luego $f(z)|_n = h$. ■

El teorema siguiente es ahora inmediato:

Teorema 8.44 (Solovay) *Las teorías siguientes son equiconsistentes:*

a) ZFC + *"existe un cardinal inaccesible".*

b) ZFC + *"en* $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ *se cumple que todo subconjunto de todo espacio polaco no numerable es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

c) Lo mismo que b) pero con $L(\mathcal{N})$ *en lugar de* $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$*.*

d) ZFC + *"todo conjunto proyectivo en todo espacio polaco no numerable es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

e) ZF + ED + $V = L(\mathcal{N})$ + *"todo subconjunto de todo espacio polaco no numerable es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

DEMOSTRACIÓN: Que b) – e) implican la consistencia de a) o, en otras palabras, que la hipótesis sobre la existencia de un cardinal inaccesible en M es necesaria[10] para la construcción de un modelo con las características indicadas, es consecuencia tanto de 7.28 como de 7.29.

Trabajando en a) podemos construir el modelo de Solovay $M[G]$, en el que hemos probado que todos los subconjuntos de $\mathcal{C}$ que están en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ tienen las tres propiedades (cambiando "universalmente medible" por m-medible). Ahora bien, por 8.15 esto es cierto también relativizado a $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, que es un modelo de ZF + ED y, razonando en ZF + ED y teniendo en cuenta que dos espacios polacos no numerables son Borel-isomorfos, así como que el isomorfismo se puede elegir para que transforme cualquier medida de Borel en cualquier medida de Borel, es claro que el hecho de que $\mathcal{C}$ cumpla las tres propiedades (la primera para la medida m) implica que cualquier espacio polaco no numerable las cumple para cualquier medida de Borel, luego tenemos que $M[G]$ es un modelo de b).

La consistencia de c) se deduce de la de b) teniendo en cuenta la inclusión $L(\mathcal{N}) \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ y 8.15, o bien se razona a partir de a) exactamente igual que hemos hecho en b).

Hemos probado que $M[G]$ cumple d) para los subconjuntos proyectivos de $\mathcal{C}$ y la medida m, pues todos ellos están en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, y a su vez esto implica que se cumple d) para los subconjuntos proyectivos de cualquier espacio polaco no numerable, por la existencia de isomorfismos de Borel.

La consistencia de e) se sigue inmediatamente de la de c) sin más que tener en cuenta que $L(\mathcal{N})$ es un modelo de ZF + ED + $V = L(\mathcal{N})$. ■

[10] Sin embargo, Shelah ha demostrado que la consistencia de que todo subconjunto de un espacio polaco tenga la propiedad de Baire es equivalente a la consistencia de ZFC, sin necesidad de cardinales inaccesibles.

Notas

- En realidad hemos demostrado la consistencia de una teoría ligeramente más general que d): si entendemos que un espacio polaco X está en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ cuando lo está como espacio topológico, es decir, cuando el par $(X, \mathcal{T}) \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, donde $\mathcal{T}$ es la topología de X (y esto les sucede claramente a todos los espacios que estamos manejando, $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}$, etc.) entonces es consistente con ZFC que todo subconjunto en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ de todo espacio polaco no numerable X en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ tenga las tres propiedades consideradas en el teorema anterior. En efecto, razonando en b), dado $X \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, existe un $f \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ tal que $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ es un isomorfismo de $\mathrm{Borel}^{\mathrm{HD}(\Omega^\omega)}$, pero la σ-álgebra de Borel de X en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ es la misma que en V (porque contiene a todos los abiertos de X), lo que implica que f es un isomorfismo de Borel, que biyecta los subconjuntos de X en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ con los de $\mathcal{C}$, luego todos ellos tienen las tres propiedades del teorema.

- De acuerdo con las observaciones hechas al principio de la sección, en los apartados b), c), d) del teorema de Solovay podemos añadir que $2^{\aleph_0}$ es cualquier cardinal de cofinalidad no numerable.

- Teniendo en cuenta el teorema 3.10 (o 3.22) en el modelo de Solovay N se cumple (o, más en general, a partir de d) se puede demostrar) que $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$, de modo que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que admiten un buen orden son los numerables. Por otro lado, mientras que con AE puede probarse que todo espacio polaco tiene exactamente $2^{\aleph_0}$ conjuntos de Borel, a partir de d) se demuestra que $|\mathcal{B}| > 2^{\aleph_0}$. En efecto, la desigualdad $2^{\aleph_0} \leq |\mathcal{B}|$ es elemental, pues los conjuntos con un punto son una familia de $2^{\aleph_0}$ conjuntos de Borel, pero en las condiciones de d) no puede darse la igualdad ya que, según acabamos de observar, se cumple que $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$, mientras que 4.27 implica que $\aleph_1 \leq |\mathcal{B}|$. Así pues, si es consistente la existencia de un cardinal inaccesible, también es consistente ZF + ED + $V = L(\mathcal{N})$ + $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$ + $2^{\aleph_0} < |\mathcal{B}|$. Notemos también que los códigos de Borel definen una aplicación suprayectiva $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{B}$. Con AE esto implica que $|\mathcal{B}| \leq 2^{\aleph_0}$, pero ahora vemos que sin AE no es así necesariamente.

Así pues, tenemos que es consistente (con ZFC) que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ definible por sucesiones de ordinales sea medible Lebesgue. En particular es consistente que ninguna fórmula (metamatemática) sin parámetros defina un conjunto no medible Lebesgue, lo que responde a la pregunta de Lebesgue citada en la página iii. Por supuesto, también sabemos que si $V = L$ podemos definir “explícitamente” un conjunto $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ no medible Lebesgue, con lo que también es consistente que haya conjuntos “definibles” no medibles. El teorema 3.12 implica ahora que lo mismo vale para la existencia de Bases de Hamel (pues se comprueba sin dificultad que una base de Hamel que pertenezca a $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ es una base de Hamel en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$).

8.7 Uniones de conjuntos de Borel

Los teoremas 4.56 y 7.24 prueba la consistencia de que los únicos conjuntos que pueden expresarse como unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel son los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Por otro lado, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ es trivial que todo subconjunto de cualquier espacio polaco no numerable es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel. No obstante, este caso es demasiado trivial. En esta sección demostramos que, en el modelo de Solovay construido en la sección precedente (donde $2^{\aleph_0}$ puede tomar cualquier valor prefijado de cofinalidad no numerable) se cumple igualmente que todo conjunto proyectivo es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel. Más en general:

Teorema 8.45 *En $M[G]$ se cumple que todo conjunto $X \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, $X \subset \mathcal{N}$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X \in N = \mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]}$, $X \subset \mathcal{N}$, sea $s \in S$ de modo que se cumpla el teorema 8.41. Factorizando $M[G]$ como en el teorema 8.43 podemos suponer que $s \in M = L[s]^M$. Como $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$, podemos descomponer $M[G] = M[H_1][H_2]$. Vamos a probar lo siguiente:

$(*)$ *Para todo $x \in X$, existe un $c \in \mathrm{CB}^{M[H_1]}$ tal que $x \in B_c^{M[G]} \subset X$.*

Admitiendo esto de momento, podemos concluir que X es unión de conjuntos de Borel con códigos en $\mathcal{N}^{M[H_1]}$. Ahora bien, sabemos que $M[H_1]$ cumple la hipótesis del continuo, luego $|\mathcal{N}|^{M[H_1]} = \aleph_1^{M[H_1]} \leq \aleph_1^{M[G]}$, luego el cardinal de $\mathrm{CB}^{M[H_1]}$ en $M[G]$ es a lo sumo $\aleph_1^{M[G]}$, luego X es unión de (a lo sumo) $\aleph_1$ conjuntos de Borel y el teorema queda probado.

Aplicamos a x el teorema 8.39, según el cual $\mathbb{P} = \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$, donde

$$\mathbb{Q}_1 = \{p \in \mathbb{P}_1 \mid \mathcal{D}p \subset (\nu + 1) \times \omega\} \times \mathrm{Fn}(A, 2, \aleph_0),$$

para cierto cardinal^M $\nu < \kappa$ y cierto $A \subset \mu$ con cardinal^M $\leq \nu$, de modo que $x \in M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$. Sabemos además que $\mathbb{Q}_1$ tiene un subconjunto denso isomorfo a $\mathrm{Col}(\nu)$. Por ello, a partir de aquí llamaremos $\mathbb{Q}_1 = \mathrm{Col}(\nu)$, con lo que ahora tenemos una inmersión completa $i : \mathbb{Q}_1 \longrightarrow \mathbb{P}$ (tal que $i \in M$). En estos términos, $x \in M[i^{-1}[G]] \subset M[G]$, pues $M[i^{-1}[G]]$ es la misma extensión que hasta ahora llamábamos $M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$.

Sea ahora $G_1 \in M[G]$ un filtro $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre M arbitrario. (Un ejemplo sería $G_1 = i^{-1}[G]$, pero necesitamos considerar uno arbitrario.) El filtro G_1 determina una función genérica $f_{G_1} : \omega \longrightarrow \nu$ tal que $M[G_1] = M[f_{G_1}] \subset M[G]$. Podemos aplicar a f_{G_1} el teorema 8.39, de modo que existe un filtro G_2 $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[G_1]$ tal que $M[G] = M[G_1][G_2]$.

En el caso particular en que $G_1 = i^{-1}[G]$, por 8.41 tenemos $\phi(s, x)^{M[x]}$, luego también $(\phi(s, x)^{L[s,x]})^{M[G_1]}$, y, si $x = \sigma_{G_1}$ existe $p_0 \in i^{-1}[G]$ tal que

$$p_0 \Vdash \sigma \in \mathcal{N} \wedge \phi^{L[\check{s},\sigma]}(\check{s}, \sigma). \tag{8.4}$$

Así, si $G_1 \in M[G]$ es cualquier filtro $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre M tal que $p_0 \in G_1$, se cumple $\sigma_{G_1} \in \mathcal{N}$ y $\phi^{M[\sigma_{G_1}]}(s, \sigma_{G_1})$, luego, por 8.41, $\sigma_{G_1} \in X$. Definimos

$$T = \{\sigma_{G_1} \mid p_0 \in G_1 \wedge G_1 \text{ es un filtro } \mathbb{Q}_1\text{-genérico sobre } L[s]\}^{M[G]}.$$

Así tenemos que $x \in T \subset X$. Para concluir $(*)$ basta probar que, en $M[G]$, el conjunto T se descompone en unión de conjuntos de Borel con código en $M[\mathbb{P}_1 \cap G]$. De hecho, probaremos que se descompone en unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel con dicha condición. Sea $Q \in M$ el conjunto de los pares (p, w) tales que:

a) $p \in \mathbb{Q}_1$, $w : \ell(p) \longrightarrow \omega$,

b) p es compatible con p_0,

c) para todo $k < \ell(p)$ y todo $l < \omega$, si $p \Vdash \sigma(\check{k}) = \check{l}$ entonces $w(k) = l$.

Es claro que si (p, w), (p', w') son pares que cumplen a), $p' \leq p$, $w \subset w'$ y $(p', w') \in Q$, entonces $(p, w) \in Q$.

Veamos ahora que

$$T = \{t \in \mathcal{N} \mid \bigvee G_1 \in M[G](G_1 \text{ es un filtro } \mathbb{Q}_1\text{-genérico sobre } M$$
$$\wedge \bigwedge n \in \omega\ (f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q)\}. \tag{8.5}$$

Para probarlo llamamos T' al término derecho de la igualdad anterior. Si $t \in T$, entonces $t = \sigma_{G_1}$, para un cierto filtro genérico G_1 tal que $p_0 \in G_1$. Hemos de probar que, si $n \in \omega$, se cumple que $(f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q$. Obviamente se cumple la propiedad a) de la definición de Q y, como $p_0, f_{G_1}|_n \in G_1$, también se cumple la propiedad b). Para probar c) tomamos $k < n$ y suponemos que $f_{G_1}|_n \Vdash \sigma(\check{k}) = \check{l}$. Entonces, $t(k) = \sigma_{G_1}(k) = l$, luego $t|_n(k) = l$. Con esto tenemos probado que $T \subset T'$.

Tomemos ahora $t \in T'$ y sea $G_1 \in M[G]$ un filtro genérico según la definición de T'. Hemos de probar que $p_0 \in G_1$ y $t = \sigma_{G_1}$. Sea $n = \ell(p_0)$. Como $(f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q$, por la propiedad b) tenemos que $f_{G_1}|_n$ es compatible con p_0, luego ha de ser $p_0 = f_{G_1}|_n \in G_1$.

Para probar que $t = \sigma_{G_1}$, supongamos que, por el contrario, existen $k, l \in \omega$ tales que $\sigma_{G_1}(k) = l$ pero $t(k) \neq l$.

El conjunto de las condiciones $p \in \mathbb{Q}_1$ tales que $\ell(p) > k$ y $p \Vdash \sigma(\check{k}) = \check{l}$ o $p \Vdash \sigma(\check{k}) \neq \check{l}$ es denso en $\mathbb{Q}_1$, luego una de ellas, que será de la forma $f_{G_1}|_n$, está en G_1 y, necesariamente, $f_{G_1}|_n \Vdash \sigma(\check{k}) = \check{l}$. Como $(f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q$, por la propiedad c), $t(k) = l$, contradicción.

Definimos inductivamente en $M[G]$ conjuntos $F_\gamma \subset \mathbb{Q}_1 \times \mathcal{N}^{M[G]}$ mediante:

a) $(p, t) \in F_0 \leftrightarrow (p, t|_{\ell(p)}) \notin Q$.

b) Para $\gamma > 0$, $(p, t) \in F_\gamma$ si y sólo si existe $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ tal que para todo $p' \in D$ tal que $p' \leq p$ existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p', t) \in F_\beta$.

Observemos que $\beta < \gamma \rightarrow F_\beta \subset F_\gamma$. En efecto, si $\beta = 0$ y $(p,t) \in F_0$, tomamos $D = \mathbb{Q}_1$ y así, para toda extensión p' de p se cumple que $(p',t) \in F_0$, pues $(p', t|_{\ell(p')}) \notin Q$ o, de lo contrario, tendríamos que $(p, t|_{\ell(p)}) \in Q$. Para $\beta > 0$ es obvio.

Veamos que si $t \in \mathcal{N}^{M[G]}$, entonces

$$t \in T \leftrightarrow \bigwedge \gamma \in \Omega^M \ (\mathbb{1}, t) \notin F_\gamma. \tag{8.6}$$

Supongamos que $t \in T$ y sea $G_1 \in M[G]$ según (8.5). Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un γ tal que $(\mathbb{1}, t) \in F_\gamma$. Como $\mathbb{1} \in G_1$, podemos tomar el menor ordinal $\gamma \in \Omega^M$ tal que existe un $p \in G_1$ tal que $(p,t) \in F_\gamma$. Sea $n = \ell(p)$, de modo que $p = f_{G_1}|_n$. Por (8.5) tenemos que $(p, t|_n) \in Q$, luego $(p,t) \notin F_0$, luego $\gamma > 0$. Por consiguiente, existe un $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ según la parte b) de la definición de F_γ. Existe entonces un $p' \in G_1 \cap D$, que podemos tomar $p' \leq p$, luego existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p', t) \in F_\beta$, en contradicción con la minimalidad de γ.

Antes de probar el recíproco veamos que si una condición $p \in \mathbb{Q}_1$ cumple que $\bigwedge \gamma \in \Omega^M \ (p,t) \notin F_\gamma$, entonces para todo conjunto $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ existe una condición $p' \in D$, $p' \leq p$ y $\bigwedge \gamma \in \Omega^M \ (p', t) \notin F_\gamma$.

En efecto, dado $\gamma > 0$, existe un $p'_\gamma \leq p$, $p'_\gamma \in D$ tal que $\bigwedge \beta < \gamma \ (p'_\gamma, t) \notin F_\beta$. Como $D \in M$, existe un $p' \in D$ tal que $p' = p'_\gamma$ para un conjunto de ordinales γ no acotado en Ω^M. Entonces $(p', t) \notin F_\beta$ para todo $\beta < \Omega^M$.

Supongamos ahora que $\bigwedge \gamma \in \Omega^M \ (\mathbb{1}, t) \notin F_\gamma$ y veamos que $t \in T$. Para ello construiremos un filtro G_1 según 8.5. Como $|\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$ y κ es fuertemente inaccesible^M, tenemos que $|\mathcal{P}\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$, luego $(\mathcal{P}\mathbb{Q}_1)^M$ es numerable$^{M[G]}$, luego podemos tomar una enumeración $\{D_n\}_{n<\omega} \in M[G]$ de los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}_1$ en M. Definimos ahora una sucesión $\{q_n\}_{n\in\omega} \in M[G]$ de elementos de $\mathbb{Q}_1$. Para ello tomamos $q_0 = \mathbb{1}$, con lo que, por hipótesis, $\bigwedge \gamma \in \Omega^M \ (q_0, t) \notin F_\gamma$. Supongamos definido q_n de modo que $\bigwedge \gamma \in \Omega^M \ (q_n, t) \notin F_\gamma$. Según acabamos de probar, existe un $q_{n+1} \leq q_n$, $q_{n+1} \in D_n$ y $\bigwedge \gamma \in \Omega^M \ (q_{n+1}, t) \notin F_\gamma$.

La sucesión construida de este modo genera un filtro $G_1 \in M[G]$, concretamente, $G_1 = \{q \in \mathbb{Q}_1 \mid \bigvee n \in \omega \ q_n \leq q\}$, que obviamente es $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre M.

Falta probar que $\bigwedge n \in \omega \ (f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q$. Como $f_{G_1}|_n \in G_1$, existe un m tal que $q_m \leq f_{G_1}|_n$ (con lo que $r = \ell(q_m) \geq n$). Si $(f_{G_1}|_n, t|_n) \notin Q$, entonces $(q_m, t|_r) \notin Q$, luego $(q_m, t) \in F_0$, en contradicción con la construcción de q_m. Esto prueba que $t \in T$.

Veamos ahora que si $\gamma \in \Omega^{M[G]}$ cumple

$$\bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\gamma \rightarrow \bigvee \beta < \gamma \ (p,t) \in F_\beta), \tag{8.7}$$

entonces

$$\bigwedge \delta < \Omega^M \bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\delta \rightarrow \bigvee \beta < \gamma \ (p,t) \in F_\beta).$$

En efecto, hay que probar la conclusión para $\delta > \gamma$, pues para $\delta < \gamma$ es trivial y para $\delta = \gamma$ es la hipótesis. Razonamos por inducción sobre δ, de modo que la hipótesis de inducción es que, para todo $\eta < \delta$

$$\bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\eta \rightarrow \bigvee \beta < \gamma \ (p,t) \in F_\beta).$$

Suponemos ahora que $(p,t) \in F_\delta$, con $\delta > \gamma$. Por definición de F_δ existe $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ tal que para toda extensión $p' \in D$ de p existe un $\beta < \delta$ tal que $(p',t) \in F_\beta$, pero, por hipótesis de inducción, también existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p',t) \in F_\beta$ y, por definición de F_γ, esto significa que $(p,t) \in F_\gamma$, luego, por (8.7) existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p,t) \in F_\beta$.

Ahora podemos probar que para todo $t \in \mathcal{N}^{M[G]}$ existe un $\gamma < \mu$ tal que

$$\bigwedge p \in \mathbb{Q}_1(\bigvee \delta < \Omega^M \ (p,t) \in F_\delta \rightarrow \bigvee \delta < \gamma \ (p,t) \in F_\delta). \tag{8.8}$$

Aplicamos a t el teorema 8.39, según el cual existe un ordinal $\nu' < \mu$ (que podemos tomar $\nu' > \nu$, el ordinal con el que construimos $\mathbb{Q}_1$) de modo que $t \in M' = M[i'^{-1}[G]]$, donde $i' : \mathbb{Q}'_1 \longrightarrow \mathbb{P}$ es la inmersión completa análoga a i (y $\mathbb{Q}'_1 = \mathrm{Col}(\nu')$).

Tenemos que ν' es numerable en M', luego ν también, mientras que μ es inaccesible$^{M'}$, luego $\nu < \gamma = \aleph_1^{M'} < \mu$, y $\mathbb{Q}_1$ es numerable$^{M'}$. Ahora basta probar que γ cumple (8.7). Suponemos, pues, que $(p,t) \in F_\gamma$. Entonces existe $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ tal que si $p' \in D$, $p' \leq p$, existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p',t) \in F_\beta$. Sea $\beta_{p'} < \gamma$ el mínimo ordinal tal que $(p',t) \in F_{\beta_{p'}}$.

Ahora observamos que $Y = \{\beta_{p'} \mid p' \in D \land p \leq p'\} \in M'$, porque $t \in M'$ y la fórmula "$(p,t) \in F_\gamma$" es absoluta para modelos transitivos. Como Y es numerable$^{M'}$ y $\gamma = \aleph_1^{M'}$, se cumple que Y tiene una cota superior $\delta < \gamma$. Así $(p,t) \in F_\delta$ por definición, como había que probar.

Con esto llegamos a la caracterización definitiva del conjunto T: si $t \in \mathcal{N}^{M[G]}$, se cumple que $t \in T$ si y sólo si

$$\bigvee \gamma < \mu \bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\gamma \rightarrow \bigvee \delta < \gamma \ (p,t) \in F_\delta) \land \bigwedge \delta < \gamma \ (\mathbb{1},t) \notin F_\delta$$

Supongamos en primer lugar que se cumple esta condición (para un cierto $\gamma < \mu$) y demostraremos que $t \in T$ mediante (8.6). En efecto, si existe $\delta < \Omega^M$ tal que $(\mathbb{1},t) \in F_\delta$, como γ cumple (8.7), podemos tomar $\delta < \gamma$, pero esto contradice la segunda parte de la condición.

Recíprocamente, si $t \in T$, tomamos $\gamma < \mu$ que cumpla (8.8), lo cual, junto a (8.6), nos da la condición.

Ahora podemos definir

$$B_\gamma = \{t \in \mathcal{N}^{M[G]} \mid \bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\gamma \rightarrow \bigvee \delta < \gamma \ (p,t) \in F_\delta)$$
$$\land \bigwedge \delta < \gamma \ (\mathbb{1},t) \notin F_\delta\},$$

de modo que $\{B_\gamma\}_{\gamma<\mu} \in M[G]$, y acabamos de probar que $T = \bigcup\limits_{\gamma<\mu} B_\gamma$. Como $x \in T$, la afirmación $(*)$ quedará probada si demostramos que cada B_γ es un conjunto de Borel con código en $M[H_1]$.

Empezamos demostrando que esto es cierto para los conjuntos

$$C_\gamma(p) = \{t \in \mathcal{N}^{M[G]} \mid (p,t) \in F_\gamma\},$$

donde $p \in \mathbb{Q}_1$ y $\gamma < \mu$. Más precisamente, vamos a construir en $M[H_1]$ aplicaciones $c_\gamma : \mathbb{Q}_1 \longrightarrow \mathrm{CB}^{M[H_1]}$ de modo que $c_\gamma(p)$ sea un código de Borel para $C_\gamma(p)$.

En primer lugar observamos que si $I_p = \{h \in \omega^{\ell(p)} \mid (p,h) \notin Q\}$, entonces

$$C_0(p) = \bigcup_{h \in I_p} B_h^{M[G]}.$$

Como $\{I_p\}_{p\in\mathbb{Q}_1} \in M$, es fácil definir la aplicación $c_0 \in M \subset M[H_1]$. Supongamos construida la sucesión $\{c_\beta\}_{\beta<\gamma} \in M[H_1]$. Entonces, de la definición de F_γ se sigue que

$$C_\gamma(p) = \bigcup_D \bigcap_{p'} \bigcup_{\beta<\gamma} C_\beta(p'),$$

donde D recorre los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}_1$ en M (que, desde el punto de vista de $M[H_1]$ son los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}_1$ en $L[s]$) y p' recorre las extensiones de p en D. Teniendo en cuenta que $(\mathcal{P}\mathbb{Q}_1)^{M[H_1]}$, D y γ son numerables$^{M[H_1]}$, a partir de esta expresión, definir códigos de Borel $c_\gamma(p)$ en $M[H_1]$ es una simple rutina. Por último:

$$B_\gamma = \bigcap_{p\in\mathbb{Q}_1} ((\mathcal{N}^{M[G]} \setminus C_\gamma(p)) \cup \bigcap_{\beta<\gamma} C_\beta(p)) \cap \bigcap_{\beta<\gamma} (\mathcal{N}^{M[G]} \setminus C_\beta(\mathbb{1})).$$

Teniendo en cuenta nuevamente la numerabilidad$^{M[H_1]}$ de $(\mathcal{P}\mathbb{Q}_1)^{M[H_1]}$ y γ, también es fácil definir en $M[H_1]$ códigos de Borel para los conjuntos B_γ. ■

Más en general, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 8.46 (Lévy-Solovay) *Si es consistente* ZFC *más la existencia de un cardinal inaccesible, también lo es* ZFC *más cualquier determinación posible de* $2^{\aleph_0}$ *(es decir, de cofinalidad no numerable) más la sentencia "todo subconjunto proyectivo de todo espacio polaco no numerable es unión de* $\aleph_1$ *conjuntos de Borel".*

La primera nota tras el teorema 8.44 se aplica también a este caso: el teorema es válido para subconjuntos en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ de espacios polacos en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$.

Si $2^{\aleph_0} > \aleph_2$ ningún subconjunto de cardinal $\aleph_2$ en un espacio polaco puede expresarse como unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, pues esto le obligaría a tener cardinal $\leq \aleph_1$ o $2^{\aleph_0}$. Suponiendo únicamente que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ tenemos igualmente la existencia de conjuntos que no pueden expresarse como unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, a saber, los conjuntos de Bernstein, ya que sólo contienen conjuntos de Borel numerables (o de lo contrario contendrían conjuntos perfectos) y, por lo tanto, si se pudieran expresar como unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, tendrían cardinal $\aleph_1$, cuando, por definición, tienen cardinal $2^{\aleph_0}$. Ahora bien, para demostrar la existencia de subconjuntos de un espacio polaco de cardinal $\aleph_1$ o la existencia de subconjuntos de Bernstein es necesario AE. Vamos a probar que, sin el axioma de elección, es consistente que todo subconjunto de un espacio polaco no numerable se descomponga en unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel.

Teorema 8.47 *En N se cumple que todo subconjunto de $\mathcal{N}$ es unión de a lo sumo $\aleph_1$ conjuntos de Borel.*

Demostración: Observemos en primer lugar que $\aleph_1^N = \aleph_1^{M[G]} = \kappa$. Para ello basta observar que si $\alpha < \kappa$ entonces α es numerable$^{M[G]}$, y un buen orden en ω de ordinal α puede codificarse por un elemento de $\mathcal{N}$, luego está en N, luego α es numerable^N.

En la prueba del teorema 8.45 hemos visto que todo subconjunto X de $\mathcal{N}$ en N es unión de una familia $\mathcal{F}$ de a lo sumo $\aleph_1$ conjuntos de Borel. Vamos a probar que $\mathcal{F} \in N$ y que $\mathcal{F}$ admite un buen orden en N. Observemos que esto implica que $(|\mathcal{F}| \leq \aleph_1)^N$. En efecto, como $\mathcal{F}$ admite un buen orden en N, existe una biyección $f : \xi \longrightarrow \mathcal{F}$ tal que $f \in N$, donde ξ es un cardinal^N, luego también es un cardinal^M, luego es numerable$^{M[G]}$ si $\xi < \kappa$ o bien es un cardinal$^{M[G]}$ en caso contrario. Por otra parte, $(|\xi| \leq \aleph_1)^{M[G]}$, luego $\xi \leq \kappa$ en cualquier caso, y así $|\mathcal{F}|^N = \xi \leq \kappa = \aleph_1^N$. Como los elementos de $\mathcal{F}$ siguen siendo conjuntos de Borel^N, concluimos que X es unión de a lo sumo $\aleph_1$ conjuntos de Borel en N.

Para probar que $\mathcal{F} \in N$ basta observar que si X es definible a partir de la sucesión $s \in (\Omega^\omega)^{M[G]}$, entonces lo mismo le sucede a $\mathcal{F}$ (notemos que, como $\mathcal{F} \subset N$, si es definible a partir de una sucesión de ordinales, es hereditariamente definible, luego está en N). Más concretamente, analizando la demostración del teorema 8.45 podemos concluir que $\mathcal{F}$ tiene una definición en $M[G]$ de esta forma:

$$\bigwedge y(y = \mathcal{F} \leftrightarrow \bigwedge B(B \in y \leftrightarrow \bigvee \nu\sigma p_0\gamma \in L[s]\ \Phi(B, \nu, \sigma, p_0, \gamma, s)))^{M[G]}, \qquad (8.9)$$

donde Φ es la fórmula que describe la construcción del conjunto que hemos llamado B_γ, si bien depende de todos los parámetros indicados. Notemos que (aunque no habría problema en hacerlo) no necesitamos incluir a κ y μ entre los parámetros porque $\kappa = \aleph_1^{M[G]}$ y $\mu = (2^{\aleph_0})^{M[G]}$. Lo que sí es crucial es que entre los parámetros no necesitamos incluir a G. Podría parecer lo contrario al analizar la elección del nombre σ y la condición p_0, pero basta pedir que σ y p_0 cumplan $\sigma \in L[s]^{\mathbb{Q}_1}$ y (8.4). (El filtro G sólo interviene en la demostración de que todo $x \in X$ pertenecerá a uno de los conjuntos B construidos a partir de los parámetros indicados, pero no en la definición de los conjuntos B.)

Con esto podemos concluir que $\mathcal{F} \in N$, y sólo nos falta demostrar que admite un buen orden en N. Para ello observamos que la fórmula Φ determina unívocamente un conjunto de Borel B para cada elección de los parámetros ν, σ, p_0, γ que cumplan los requisitos que ella misma impone. Pero, como los cuatro parámetros están en $L[s]$, podemos considerar el orden lexicográfico que el orden constructible $\trianglelefteq_s$ induce sobre las cuádruplas de parámetros, de modo que cada conjunto B tiene asociada una cuádrupla mínima de parámetros, y podemos ordenar bien los elementos de $\mathcal{F}$ estableciendo que $B \preceq_s B'$ si y sólo si la cuádrupla mínima que define a B es menor o igual que la que define a B'. Esto es un buen orden en $M[G]$ definido únicamente a partir de s, luego está en $\mathrm{D}(\Omega^\omega)^{M[G]}$ y, obviamente, en $N = \mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]}$. ■

Nota Observemos que el teorema anterior es válido igualmente si sustituimos $N = \mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]}$ por $N' = L(\mathcal{N})^{M[G]}$. Para ello observamos en primer lugar que si partimos de un conjunto $X \in N'$ el teorema 7.31 nos permite tomar $s \in \mathcal{N}$, de modo que $L[s]^{M[G]} \subset N'$. En segundo lugar, un análisis más detallado de la demostración de 8.45 muestra que la fórmula Φ es absoluta para $N' - M[G]$. Esencialmente, se trata de observar que (8.4) y las definiciones de Q y $\{F_\gamma\}_\gamma$ son absolutas porque $M = L[s]^{M[G]} \subset N'$, y de aquí se sigue que también lo es la definición de B_γ (es decir, Φ).

Esto implica que $\mathcal{F} \in N'$ y que (8.9) se cumpla relativizada a N' en lugar de a $M[G]$. A su vez, esto permite definir un buen orden en $\mathcal{F}$ dentro de N' con el mismo criterio explicado en la demostración del teorema anterior, de donde se sigue a su vez (por el mismo argumento) que $(|\mathcal{F}| = \aleph_1)^{N'}$. ■

Extendiendo la conclusión de forma obvia a espacios polacos arbitrarios a través de los isomorfismos de Borel, tenemos lo siguiente:

Teorema 8.48 (Lévy-Solovay) *Si* ZFC + *"Existe un cardinal inaccesible" es consistente, también lo son las teorías indicadas en los apartados b), c), e) del teorema* 8.44 *añadiendo en cada una de ellas que* $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$ *y "todo subconjunto de todo espacio polaco es unión de a lo sumo* $\aleph_1$ *conjuntos de Borel".*

Observemos que la generalización descrita en la primera nota tras el teorema 8.44 (para espacios polacos en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$) es válida también en este caso.

Capítulo IX

Cardinales de Woodin

En este capítulo presentaremos los cardinales cuya existencia (o, mejor dicho, cuya consistencia) necesitaremos como hipótesis para demostrar la consistencia de los axiomas ADP y AD. Trabajaremos en todo momento en ZFC.

Empezamos recordando las relaciones entre algunos cardinales grandes y la existencia de inmersiones elementales. En primer lugar, conviene recordar la "definición" de inmersión elemental: una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ entre dos clases transitivas es una aplicación con la propiedad de que, para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ se cumple que

$$\bigwedge x_1 \ldots x_n \in M(\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^N(j(x_1), \ldots, j(x_n))).$$

Hemos escrito "definición" entre comillas porque no es una verdadera definición, al menos no si M y N no son conjuntos, pues en tal caso "para toda fórmula ϕ" sólo puede entenderse como "para toda fórmula metamatemática ϕ", y esto no puede expresarse[1] en ZFC (o en NBG).

No obstante, si tenemos definida explícitamente una función j entre dos clases transitivas, la afirmación "j es una inmersión elemental" es parcialmente expresable en ZFC, en el sentido de que se cumple la propiedad anterior para una cantidad finita arbitrariamente grande de fórmulas metamatemáticas ϕ.

Así, por ejemplo, si afirmamos que la identidad $I : V \longrightarrow V$ es una inmersión elemental, estamos diciendo que la propiedad anterior puede demostrarse (trivialmente) en ZFC para cualquier fórmula metamatemática ϕ.

Similarmente, el teorema de Kunen [PC 16.30] afirma que si M es una clase transitiva y $j : V \longrightarrow M$ es una inmersión elemental no trivial (es decir, distinta de la identidad), entonces $M \neq V$, y esto ha de entenderse como que si tenemos definida explícitamente una aplicación j y suponemos (o podemos demostrar en ZFC o una extensión suya) que cumple la propiedad anterior para un número finito de fórmulas ϕ suficientemente grande, entonces podemos demostrar también que $M \neq V$.

[1] En ZFC podemos definir el conjunto F de las fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos, pero no es posible definir $M \vDash \phi(x_1, \ldots, x_n)$ para una fórmula arbitraria $\phi \in F$ salvo que M sea un conjunto.

Cualquier resultado sobre inmersiones elementales entre clases propias se ha de interpretar de forma similar. Recordemos, por ejemplo, el teorema [PC 11.20], que enunciamos aquí en una forma equivalente para referencias posteriores:

Teorema 9.1 *Sea $j : M \longrightarrow N$ una inmersión elemental no trivial entre modelos transitivos de ZFC que sean clases propias. Entonces existe un (único) ordinal κ tal que*

$$\bigwedge \alpha < \kappa\ j(\alpha) = \alpha \land j(\kappa) > \kappa.$$

Además, j es la identidad sobre $V_\kappa^M = V_\kappa \cap M$. En particular, $V_\kappa^M = V_\kappa^N \subset N$.

Al ordinal κ lo llamaremos *punto crítico* de la inmersión elemental j. Tal y como acabamos de explicar, este teorema ha de entenderse como que, si tenemos definida una aplicación concreta j y suponemos (o podemos demostrar) que cumple la definición de inmersión elemental para una cantidad suficiente de fórmulas, entonces cumple también la tesis del teorema.

Más delicada es la situación de una definición como ésta:

> Un cardinal κ es *medible* si existe una clase transitiva M y una inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow M$ cuyo punto crítico es κ.

En principio, esta definición no es formalizable en ZFC, pues postula la existencia de una clase propia indeterminada j, mientras que en ZFC sólo es posible hablar de clases propias definidas explícitamente mediante fórmulas. En NBG puede ser formalizada parcialmente, pues puede entenderse como que κ es medible si existe una aplicación j que cumpla la definición de inmersión elemental para una cantidad suficientemente grande de fórmulas, que puede depender del contexto (para demostrar que un cardinal medible cumple una determinada propiedad P habría que suponer que j cumple la definición de inmersión elemental para una cantidad de fórmulas que dependería de P), y aun así, se trata de una definición muy precaria, pues requiere la existencia de una clase propia, y ello hace que la fórmula "κ es un cardinal medible" no pueda ser usada para definir conjuntos.

Afortunadamente, es posible dar una definición de cardinal medible totalmente satisfactoria, en cuanto que es expresable en ZFC y, al mismo tiempo, equivale en cierto sentido a la "definición" anterior. Se trata de la definición [PC 11.4], según la cual un cardinal κ es medible si existe una medida D en $\mathcal{P}\kappa$ (que puede tomarse normal por el teorema [PC 11.27]), donde una medida es un cierto subconjunto $D \subset \mathcal{P}\kappa$, es decir, un conjunto, al fin y al cabo. La equivalencia con la "definición" precedente consiste en que si κ es medible en el sentido de [PC 11.4], a partir de una medida U en κ es posible definir explícitamente una inmersión elemental con punto crítico κ, a saber, la inmersión natural en la ultrapotencia $j_D : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(V)$ (definición [PC 11.17]) y, recíprocamente, si tenemos definida explícitamente una inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow M$ en una clase transitiva M podemos demostrar que su punto crítico κ es un cardinal medible en el sentido de [PC 11.4]. Conviene que recordemos la forma en que se define una medida a partir de una inmersión elemental:

Definición 9.2 Si M es una clase transitiva y $j : V \longrightarrow M$ es una inmersión elemental de punto crítico κ, la *medida normal* en κ asociada a j es el conjunto

$$D = \{X \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in j(X)\}.$$

Tal y como estamos indicando, el teorema [PC 11.27] demuestra que si existe una inmersión elemental j con punto crítico κ, entonces κ es un cardinal medible y D es una medida normal en κ.

Las definiciones de cardinal supercompacto [PC 16.9] y cardinal enorme [PC 16.25] dan lugar a situaciones análogas. Ambas afirman la existencia de ciertas medidas en ciertos conjuntos, y son, por consiguiente, expresables en ZFC, pero equivalen a la existencia de inmersiones elementales en el mismo sentido que en el caso de los cardinales medibles. Recordemos estas equivalencias:

a) Un cardinal κ es *μ-supercompacto,* para un cardinal $\mu \geq \kappa$, si existe una clase transitiva M y una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $\mu < j(\kappa)$ y $M^\mu \subset M$.

b) Se dice que κ es *supercompacto* si es μ-supercompacto para todo cardinal $\mu \geq \kappa$.

c) Un cardinal κ es *enorme* si existe una clase transitiva M y una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $M^{j(\kappa)} \subset M$.

Las relaciones básicas entre estos cardinales son las siguientes:

a) Un cardinal κ es medible si y sólo si es κ-supercompacto.

b) Todo cardinal enorme κ es 2^κ-supercompacto (pero no necesariamente supercompacto).

c) Todo cardinal 2^κ supercompacto es límite de cardinales medibles.

Por otra parte, si κ es enorme V_κ es un modelo transitivo de ZFC en el que existe una clase propia de cardinales supercompactos. Por consiguiente, en cuanto a consistencia, la existencia de un cardinal enorme es mucho más fuerte que la existencia de un cardinal supercompacto, a pesar de que un cardinal enorme no tiene por qué ser supercompacto (de hecho, si existen un cardinal enorme y un cardinal supercompacto, el menor cardinal supercompacto es mayor que el menor cardinal enorme).

Nuestra intención es introducir y estudiar unos cardinales a los que llamaremos cardinales *fuertes* y *superfuertes,* que resultan de debilitar las "definiciones" respectivas de "cardinal supercompacto" y "cardinal enorme" en términos de inmersiones elementales. En la sección 9.1 daremos las "definiciones" correspondientes en términos de inmersiones elementales. Tal y como hemos explicado, esto no es riguroso, pero en la sección 9.2 introduciremos el concepto de "extensor", con ayuda del cual en la sección 9.3 daremos definiciones equivalentes expresables en ZFC y que darán sentido a las "definiciones" de la sección 9.1 y justificarán que los resultados demostrados a partir de ellas son realmente teoremas de ZFC.

El lector puede, si lo desea, posponer la lectura de la sección 9.1 hasta después de las observaciones al teorema 9.24, pues éstas justifican que las "definiciones" informales de cardinal fuerte y superfuerte son equivalentes a las presentadas en la sección 9.3.

9.1 Cardinales fuertes y superfuertes I

"Definición" 9.3 Sea κ un cardinal infinito.

a) κ es *α-fuerte,* donde α es un ordinal $\geq \kappa$, si existe una clase transitiva M y una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $\alpha < j(\kappa)$ y $V_\alpha \subset M$.

b) Se dice que κ es *fuerte* si es α-fuerte para todo $\alpha \geq \kappa$.

c) κ es *superfuerte* si existe una clase transitiva M y una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $V_{j(\kappa)} \subset M$.

Tal y como hemos explicado, el teorema 9.24 justificará que estas "definiciones" son expresables en ZFC y que todos los resultados que vamos a demostrar aquí a partir de ellas son realmente teoremas de ZFC. Nada de lo que probaremos en esta sección se usará antes de haber demostrado el teorema 9.24.

En primer lugar demostramos que, tal y como hemos afirmado, las "definiciones" de "cardinal fuerte" y "cardinal superfuerte" son versiones débiles de las "definiciones" de "cardinal supercompacto" y "cardinal enorme", respectivamente:

Teorema 9.4 *Todo cardinal supercompacto es fuerte y todo cardinal enorme es superfuerte.*

Demostración: Sea κ un cardinal supercompacto y sea $\alpha \geq \kappa$. Tomamos $\mu = |V_\alpha|$ y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental según la "definición" de cardinal μ-supercompacto, es decir, tal que $\mu < j(\kappa)$ y $M^\mu \subset M$.

Vamos a probar que $V_{\alpha+1} \subset M$ (que es un poco más de lo que necesitamos probar). Para ello demostraremos por inducción que

$$\bigwedge \beta \leq \alpha + 1 \; V_\beta \subset M.$$

Si $\beta = 0$ o β es un ordinal límite, es trivial. Supongamos, pues, que $\beta \leq \alpha$ cumple que $V_\beta \subset M$ y veamos que lo mismo es cierto para $\beta + 1$.

Para ello tomamos a su vez $x \in V_{\beta+1}$, de modo que $x \subset V_\beta \subset V_\alpha \cap M$. Así $|x| \leq \mu$, luego existe $f : \mu \longrightarrow x$ suprayectiva. Así $f \in M^\mu \subset M$, luego también $x \in M$. Esto termina la prueba para el caso de cardinales supercompactos.

Si suponemos que κ es enorme, entonces, como k es inaccesible, $j(\kappa)$ es inaccesible^M y, como $M^{j(\kappa)} \subset M$, podemos concluir que $j(\kappa)$ es inaccesible.

(Si $\mu < j(\kappa)$ es un cardinal, entonces $\mathcal{P}\mu \subset M$, luego $2^\mu \leq (2^\mu)^M < j(\kappa)$. Esto prueba que $j(\kappa)$ es un límite fuerte, y es fácil ver que también es regular.) Por consiguiente, $|V_{j(\kappa)}| = j(\kappa)$ y el argumento del caso anterior nos da que $V_{j(\kappa)+1} \subset M$. ■

Notemos que si κ es medible, entonces $|V_\kappa| = \kappa$, luego para probar que $V_{\kappa+1} \subset M$ según el argumento del teorema anterior sólo necesitamos la hipótesis de que κ es κ-supercompacto, y todo cardinal medible κ es κ-supercompacto. En definitiva:

Teorema 9.5 *Un cardinal κ es medible si y sólo si es $\kappa+1$-fuerte.*

Sin embargo, los cardinales $\kappa+2$-fuertes (en particular, los cardinales fuertes y superfuertes) son mucho más que cardinales medibles:

Teorema 9.6 *Si κ es un cardinal $\kappa+2$-fuerte, entonces existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es medible}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ y tal que $V_{\kappa+2} \subset M$. Esto implica que κ es medible^M. En efecto, por lo pronto, $\mathcal{P}\kappa = (\mathcal{P}\kappa)^M$ y, más aún, todos los subconjuntos de $\mathcal{P}\kappa$ están en M. En particular, si $U \subset \mathcal{P}\kappa$ es una medida en κ, tenemos que $U \in M$, y es inmediato comprobar que U es una medida^M. Por consiguiente,

$$\kappa \in j(\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es medible}\}) = \{\mu < j(\kappa) \mid \mu \text{ es medible}^M\},$$

y esto equivale a que el conjunto de los cardinales medibles menores que κ pertenezca a la medida D determinada por j. ■

Recordemos que los elementos de una medida normal en κ son conjuntos estacionarios en κ y, en particular, no acotados.

Otro ejemplo de que la existencia de un cardinal fuerte es más fuerte que la existencia de un cardinal medible lo proporciona el teorema siguiente:

Teorema 9.7 *Si existe un cardinal fuerte, entonces*[2] *$V \neq L(A)$, para todo conjunto A.*

DEMOSTRACIÓN: Sea κ un cardinal fuerte y supongamos que $V = L(A)$. Sea α tal que $A \in V_\alpha$ y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ y tal que $V_\alpha \subset M$. En particular $A \in M$. Pero entonces

$$V = L(A) = (L(A))^M \subset M \subset V,$$

con lo que $j : V \longrightarrow V$ es una inmersión elemental no trivial, en contradicción con el teorema de Kunen [PC 16.30]. ■

[2]Véase [PC Definición 3.25]

La relación entre los cardinales enormes y supercompactos con los cardinales fuertes y superfuertes es mucho más estrecha que la que proporciona el teorema 9.4. Todavía no estamos en condiciones de mostrarlo, pero para ello necesitaremos trabajar de forma auxiliar con una nueva clase de cardinales grandes, que introducimos a continuación:[3]

Definición 9.8 Un ordinal κ es 1-*extensible* si existe un ordinal α y una inmersión elemental $j : V_{\kappa+1} \longrightarrow V_\alpha$ con punto crítico κ.

Notemos que j es una inmersión elemental de modelos transitivos del lenguaje de la teoría de conjuntos (que no son modelos de ZFC).

También debemos observar que esta definición no adolece del mismo defecto que las "definiciones" provisionales que hemos dado de "cardinal fuerte" y "cardinal superfuerte", pues el concepto de inmersión elemental entre modelos que sean conjuntos puede definirse sin problemas en ZFC.

En la definición de 1-extensible no hemos exigido que κ sea un cardinal, sino meramente un ordinal. Sin embargo, a continuación demostramos que los "ordinales" 1-extensibles son en realidad cardinales medibles:

Teorema 9.9 *Los ordinales* 1*-extensibles son cardinales medibles.*

Demostración: Basta comprobar que la demostración de [PC 11.33] se generaliza sin dificultad a nuestro contexto. Sea $j : V_{\kappa+1} \longrightarrow V_\alpha$ una inmersión elemental. Como κ es el mayor ordinal$^{V_{\kappa+1}}$, tenemos también que $\lambda = j(\kappa)$ es el mayor ordinal$^{V_\alpha}$, lo que obliga a que $\alpha = \lambda + 1$.

Por otra parte κ es un ordinal límite, pues si j fija a un ordinal, también fija a su sucesor, y es un cardinal, pues si existen $\xi < \kappa$ y $f : \xi \longrightarrow \kappa$ biyectiva, entonces $f \in V_{\kappa+1}$, luego $j(f) : \xi \longrightarrow j(\kappa)$ es biyectiva, pero, como j fija a los ordinales $\delta < \xi$, es inmediato que $j(f)(\delta) = f(\delta)$, luego $j(f) = f$, luego $j(\kappa) = \kappa$, contradicción.

Ahora definimos $D = \{X \subset \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$ y se comprueba sin dificultad que es una medida normal en κ. Veremos únicamente la κ-completitud:

Sea $\beta < \kappa$ y sea $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ una familia de elementos de D, de modo que $\bigwedge \alpha < \beta\ \kappa \in j(X_\alpha)$. Sea $X = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} X_\beta$. Hemos de probar que $X \in D$.

Aquí nos encontramos con un problema técnico que nos va a aparecer en varias ocasiones en este capítulo, y es que, como los conjuntos X_α pueden tener rango κ, no podemos asegurar que $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in V_{\kappa+1}$, ya que la sucesión es un conjunto de pares ordenados (α, X_α) y la estructura de los pares ordenados incrementa el rango en varias unidades. Este problema se resuelve observando que la sucesión está completamente determinada por el conjunto

$$C = \bigcup_{\alpha<\beta} \{\alpha\} \times X_\alpha \in V_{\kappa+1},$$

[3]Comparar con la definición [PC 16.31] de cardinal extensible.

con lo que podemos considerar $j(C) \in V_{\lambda+1}$. Para calcular esta imagen vemos que

$$(\bigwedge x \in C \bigvee \alpha\gamma(x = (\alpha, \gamma) \wedge \alpha \in \beta)))^{V_{\kappa+1}},$$

luego

$$(\bigwedge x \in j(C) \bigvee \alpha\gamma(x = (\alpha, \gamma) \wedge \alpha \in \beta)))^{V_{\lambda+1}}.$$

Además:

$$(\bigwedge \gamma((\alpha, \gamma) \in C \leftrightarrow \gamma \in X_\alpha))^{V_{\kappa+1}},$$

luego también

$$(\bigwedge \gamma((\alpha, \gamma) \in j(C) \leftrightarrow \gamma \in j(X_\alpha)))^{V_{\lambda+1}}.$$

Todo esto implica que

$$j(C) = \bigcup_{\alpha<\beta} \{\alpha\} \times j(X_\alpha).$$

Por otra parte, $(\bigwedge \delta(\delta \in X \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \beta\ (\alpha, \delta) \in C))^{V_{\kappa+1}}$, luego

$$(\bigwedge \delta(\delta \in j(X) \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \beta\ (\alpha, \delta) \in j(C)))^{V_{\lambda+1}}$$

y esto equivale a que

$$j(X) = \bigcap_{\alpha<\beta} j(X_\alpha).$$

Por consiguiente $\kappa \in j(X)$, luego $X \in D$. ■

Mientras los cardinales extensibles son límites de cardinales supercompactos ([PC 16.34]), los cardinales supercompactos, y también los enormes, son límites de cardinales 1-extensibles:

Teorema 9.10 *Si κ es un cardinal 2^κ-supercompacto (en particular, si es enorme) existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es 1-extensible}\} \in D.$$

Demostración: Consideremos una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $2^\kappa < j(\kappa)$ y $M^{2^\kappa} \subset M$. En la prueba de 9.4 hemos visto que en estas circunstancias $V_{\kappa+1} \subset M$. Por lo tanto, $V_{\kappa+1} = V^M_{\kappa+1}$. Si llamamos $e = j|_{V_{\kappa+1}}$, entonces $e : V^M_{\kappa+1} \longrightarrow V^M_{j(\kappa)+1}$ y, como $|e| = 2^\kappa$, tenemos que $e \in M$. Más aún,

$$(e : V_{\kappa+1} \longrightarrow V_{j(\kappa)+1} \text{ es una inmersión elemental})^M.$$

En efecto, dada una fórmula[4] $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, dados $x_1, \ldots, x_n \in V^M_{\kappa+1}$,

$$(\phi^{V_{\kappa+1}}(x_1, \ldots, x_n))^M \to \phi^{V^M_{\kappa+1}}(x_1, \ldots, x_n) \to \phi^{V_{\kappa+1}}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\to (\phi^{V_{j(\kappa)+1}}(e(x_1), \ldots, e(x_n)))^M.$$

[4] De hecho, podemos considerar una fórmula ψ perteneciente al conjunto de fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos y aplicar el argumento a la fórmula $\phi(\kappa, s) \equiv V_{\kappa+1} \vDash \psi[s]$, con $s \in V^n_{\kappa+1}$. Así concluimos que e es una inmersión elemental^M en el sentido de la teoría de modelos.

Así pues, κ es 1-extensible^M. Si llamamos $A = \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es 1-extensible}\}$, entonces $j(A) = \{\mu < j(\kappa) \mid \mu \text{ es 1-extensible}^M\}$, luego $\kappa \in j(A)$, y esto significa que A pertenece a la medida normal asociada a j. ■

El interés de este resultado es que luego probaremos (teorema 9.25) que los cardinales 1-extensibles son superfuertes, con lo que todo cardinal enorme y todo cardinal supercompacto es límite de cardinales superfuertes.

9.2 Extensores

Cada medida U en un cardinal κ determina una inmersión elemental no trivial $j_U : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ con κ como punto crítico. Recíprocamente, una inmersión elemental arbitraria $j : V \longrightarrow M$ con κ como punto crítico determina una medida (normal) D en κ, a saber,

$$D = \{X \subset \kappa \mid \kappa \in j(X)\},$$

pero su inmersión elemental asociada j_D no es necesariamente j. Lo máximo que podemos decir [PC 11.33] es que existe una inmersión elemental k que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_D"'] & M \\ \mathrm{Ult}_D(V) \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Es por esto que no podemos definir un cardinal α-fuerte como un cardinal κ para el que existe una medida D cuya inmersión asociada $j_D : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(V)$ cumpla $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_D(V)$, pues podría existir una inmersión en estas condiciones que no fuera de la forma j_D para ninguna medida D en κ. El concepto de extensor, que vamos a introducir en esta sección, permite definir ultrapotencias más generales que las asociadas a medidas, de modo que si podemos construir de algún modo una inmersión elemental según la "definición" de cardinal fuerte o superfuerte, podremos exigir que sea la inmersión asociada a un extensor, lo que nos permitirá definir estos cardinales en términos de extensores.

Recordemos ([LTC 11.28]) que en $\Omega \times \Omega$ podemos definir un buen orden canónico respecto al cual $\Omega \times \Omega$ resulta ser semejante a Ω. Esto nos permite identificar cada par ordenado de ordinales (α, β) con el ordinal que le corresponde a través de la única semejanza $\Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$. La fórmula $\gamma = (\alpha, \beta)$ es absoluta[5] para modelos transitivos de ZF (sin necesidad incluso del axioma de partes ni del axioma de infinitud). Más aún, ([LTC 13.27]) si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa \times \kappa$ se corresponde con κ a través de la semejanza o, dicho de otro modo, κ es cerrado para el orden canónico, o también, $(\alpha, \beta) < \kappa \leftrightarrow \alpha < \kappa \wedge \beta < \kappa$.

Más en general, para cada número natural n, podemos identificar Ω^n con Ω identificando

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = ((\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-2}), \alpha_{n-1}).$$

[5]Es fácil ver que es Δ_1. Véase [PC 1.37].

En particular, si κ es un cardinal infinito o, más en general, un ordinal cerrado para el orden canónico, podemos ver a κ como el conjunto de los ordinales $< \kappa$, o como el conjunto de los pares de ordinales $< \kappa$, o como el conjunto de las ternas de ordinales $< \kappa$, etc.

Si A es un conjunto de sucesiones de ordinales de longitud n y $\sigma : n \longrightarrow n$ es una permutación de n, definimos σA como el conjunto formado por las sucesiones $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tales que $(\alpha_{\sigma^{-1}(0)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(n-1)}) \in A$. Así

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in A \leftrightarrow (\alpha_{\sigma(0)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n-1)}) \in \sigma A.$$

Si A es un conjunto de ordinales, definimos la *proyección acotada* de A como

$$\mathrm{pa}_n(A) = \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \mid \bigvee \alpha_n \in \alpha_0 \ (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \in A\}.$$

Una *fibra* a través de una sucesión de conjuntos de ordinales $\{A_i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de ordinales $\{\alpha_i\}_{i\in\omega}$ tal que $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}) \in A_i$ para todo $i \in \omega$.

Definición 9.11 Sean $\kappa < \lambda$ ordinales cerrados para el orden canónico. Un *extensor* (corto) de *punto crítico* κ y *soporte* λ (o, más brevemente, un extensor (κ, λ)) es una función $E : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ que cumple las propiedades siguientes:

a) $E(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha < \kappa$ y $E(\kappa) = \lambda$.

b) $E(A \times B) = E(A) \times E(B)$,
$E(A \cap B) = E(A) \cap E(B)$,
$E(A \setminus B) = E(A) \setminus E(B)$.

c) Si $\alpha \in A \subset \kappa$, entonces $E(\alpha) \in E(A)$.

d) $E(\{(\alpha, \beta) \in A \times A \mid \alpha = \beta\}) = \{(\alpha, \beta) \in E(A) \times E(A) \mid \alpha = \beta\}$, e igualmente cambiando $\alpha = \beta$ por $\alpha \in \beta$.

e) Si $A \subset \kappa^n$ y σ es una permutación de n, entonces $E(\sigma A) = \sigma E(A)$.

f) Si $A \subset \kappa^{n+1}$, entonces $E(p_n(A)) = p_n(E(A))$.

g) Para toda sucesión $\{A_i\}_{i\in\omega}$ de subconjuntos de κ, si existe una fibra a través de $\{E(A_i)\}_{i\in\omega}$, también existe una fibra a través de $\{A_i\}_{i\in\omega}$.

Diremos que E es un *preextensor* si cumple la definición anterior salvo a lo sumo la propiedad g). Cuando se cumple esta propiedad se dice que E es *numerablemente completo,* de modo que un extensor es un preextensor numerablemente completo.

Notemos que en las propiedades b) y d) Estamos considerando a $A \times A$ como un conjunto de ordinales a través de la identificación entre Ω^2 y Ω. Igualmente, en las propiedades e) y f) en realidad A es un subconjunto cualquiera de κ, al que podemos ver como conjunto de n-tuplas o de $n+1$-tuplas.

Veamos algunas consecuencias elementales de la definición de preextensor:

- Si $A \subset B \subset \kappa$, entonces $E(A) = E(A \cap B) = E(A) \cap E(B) \subset E(B)$.
- $E(A) \cap \kappa = A$.

  En efecto, la inclusión $A \subset E(A) \cap \kappa$ se sigue de a) y c). Para probar el recíproco observamos que si $\beta \in \kappa \setminus A$, entonces

  $$\beta = E(\beta) \in E(\kappa \setminus A) = \lambda \setminus E(A),$$

  luego $\beta \notin E(A) \cap \kappa$.
- Si A está acotado en κ tenemos que $E(A) = A$, pues existe un $\alpha \in \kappa$ tal que $A \subset \alpha$, luego $E(A) \subset E(\alpha)$.

Ahora probamos que toda inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow M$, donde M es una clase transitiva, determina un extensor. Para ello tomamos un ordinal $\kappa < \lambda \leq j(\kappa)$ cerrado para el orden canónico y definimos la λ-*restricción* de j como la aplicación $E : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ dada por $E(A) = j(A) \cap \lambda$.

Notemos que siempre podemos tomar $\lambda = j(\kappa)$, ya que el hecho de que κ sea cerrado para el orden canónico implica que $j(\kappa)$ también lo es.

La propiedad a) se cumple trivialmente con $E(\kappa) = \lambda$, las propiedades b), c), d), e) y f) se siguen inmediatamente del hecho de que j es una inmersión elemental y de que todos los conceptos implicados son absolutos para modelos transitivos. Por ejemplo, vamos a probar e). Para ello llamamos $B = \sigma A$, de modo que

$$\bigwedge \alpha_1 \ldots \alpha_n((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A \leftrightarrow (\alpha_{\sigma 1}, \ldots, \alpha_{\sigma_n}) \in B).$$

Aplicando j obtenemos que

$$\bigwedge \alpha_1 \ldots \alpha_n((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in j(A) \leftrightarrow (\alpha_{\sigma 1}, \ldots, \alpha_{\sigma_n}) \in j(B)).$$

(En realidad esta fórmula debería estar relativizada a M, pero es absoluta para modelos transitivos.) Tomando la intersección con λ en ambos miembros obtenemos

$$\bigwedge \alpha_1 \ldots \alpha_n((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E(A) \leftrightarrow (\alpha_{\sigma 1}, \ldots, \alpha_{\sigma_n}) \in E(B)),$$

lo que se traduce en que $E(B) = \sigma E(A)$, como había que probar.

Veamos ahora la propiedad g). Observamos que $\{E(A_i)\}_{i \in \omega} \in M$, puesto que $\lambda \in M$ y $\{j(A_i)\}_{i \in \omega} = j(\{A_i\}_{i \in \omega}) \in M$. Por lo tanto, podemos definir en M un árbol A cuyo nivel i-ésimo sea A_i de modo que, para $i < j$, un ordinal $\alpha \in A_i$ es menor que un ordinal $\beta \in A_j$ si, viendo a α como i-tupla y a β como j-tupla, la segunda extiende a la primera.

Así, la existencia de una fibra equivale a que el árbol A no esté bien fundado. Como la propiedad de estar bien fundado es absoluta para modelos transitivos,[6]

[6]Véase [PC 1.37].

el hecho de que exista una fibra implica que existe una fibra en M y, como j es una inmersión elemental, esto implica que la fórmula

$$\bigvee x(x:\omega \longrightarrow \Omega \land \forall i \in \omega \; x|_i \in j(A_i)),$$

que se cumple en M, también se cumple en V con A_i en lugar de $j(A_i)$, lo que significa que $\{A_i\}_{i\in\omega}$ tiene una fibra. ■

Ahora probaremos que un extensor $E : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ nos permite definir una ultrapotencia de V con una inmersión elemental no trivial asociada, aunque nos conviene trabajar en un contexto más general.

Definición 9.12 Sean $\kappa < \lambda$ ordinales cerrados para el buen orden canónico en $\Omega \times \Omega$ y sea Q un modelo de ZFC tal que $\kappa \in Q$. Un *preextensor sobre* Q con punto crítico κ y soporte λ es una aplicación $E : \mathcal{P}\kappa \cap Q \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ que cumple la definición de preextensor salvo por que su dominio es $(\mathcal{P}\kappa)^Q = \mathcal{P}\kappa \cap Q$ en lugar de $\mathcal{P}\kappa$.

Notemos que esta definición generaliza a la anterior, pues un preextensor es un preextensor sobre la clase universal V.

Por ejemplo, si $E \in Q$ es un preextensor$^Q(\kappa, \lambda)$, se cumple también que E es un preextensor sobre Q en el sentido de la definición precedente, pero nos va a interesar una situación algo más general. Para ello consideramos la definición siguiente:

Definición 9.13 Diremos que dos modelos P y Q de ZFC *concuerdan* hasta un ordinal $\kappa \in P \cap Q$ si $V^P_{\kappa+1} = V^Q_{\kappa+1}$.

Es claro entonces que si $E \in P$ es un preextensor^P, también es un preextensor sobre Q. (En cambio, aunque exigiéramos que E fuera un extensor^P, no por ello podríamos asegurar que E es numerablemente completo sobre $(\mathcal{P}\kappa)^Q$.)

Supongamos a partir de aquí que Q es un modelo de ZFC, que $\kappa \in Q$ y que $E : (\mathcal{P}\kappa)^Q \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ es un preextensor sobre Q con soporte $\lambda > \kappa$. Definimos

$$\mathcal{F} = \{f \in Q \mid f : \kappa \longrightarrow Q\}.$$

Así $\mathcal{F}$ es una clase propia en Q, en el sentido de que $f \in \mathcal{F}$ es equivalente a una fórmula relativizada a Q, a saber, $(f : \kappa \longrightarrow V)^Q$. Definimos también:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}} &= \{(f, a) \mid f \in \mathcal{F} \land a \in \lambda\}, \\ Z^{=}_{f,g} &= \{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\beta)\}, \\ Z^{\in}_{f,g} &= \{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid f(\alpha) \in g(\beta)\}. \end{aligned}$$

Si f, $g \in \mathcal{F}$, es claro que $Z^{=}_{f,g}$, $Z^{\in}_{f,g} \in \mathcal{P}\kappa \cap Q$ y $\overline{\mathcal{F}}$ es una clase propia en Q.

Consideramos en $\overline{\mathcal{F}}$ la relación de equivalencia dada por $(f, a) \sim (g, b)$ si y sólo si $(a, b) \in E(Z^{=}_{f,g})$. Veamos que realmente es una relación de equivalencia.

Para probar la reflexividad, tomamos $(f,a)\in\overline{\mathcal{F}}$ y observamos que

$$\{(\alpha,\beta)\in\kappa\times\kappa\mid\alpha=\beta\}\subset Z^{=}_{f,f},$$

luego, aplicando E,

$$\{(\alpha,\beta)\in\lambda\times\lambda\mid\alpha=\beta\}\subset E(Z^{=}_{f,f}),$$

de donde se sigue que $(a,a)\in E(Z^{=}_{f,f})$, luego $(f,a)\sim(f,a)$.

Si $(f,a)\sim(g,b)$, tomamos la permutación $\sigma:2\longrightarrow 2$ distinta de la identidad y observamos que $\sigma Z^{=}_{f,g}=Z^{=}_{g,f}$, por lo que

$$(b,a)=\sigma(a,b)\in\sigma E(Z^{=}_{f,g})=E(\sigma Z^{=}_{f,g})=Z^{=}_{g,f},$$

luego $(g,b)\sim(f,a)$.

Por último, si $(f,a)\sim(g,b)$ y $(g,b)\sim(h,c)$, observamos que

$$(Z^{=}_{f,g}\times\kappa)\cap(\kappa\times Z^{=}_{g,h})\subset\sigma(\kappa\times Z^{=}_{f,h}),$$

donde $\sigma:3\longrightarrow 3$ intercambia el 0 y el 1. Por lo tanto,

$$(E(Z^{=}_{f,g})\times E(\kappa))\cap(E(\kappa)\times E(Z^{=}_{g,h}))\subset\sigma(E(\kappa)\times E(Z^{=}_{f,h}))$$

y, consecuentemente, $(a,b,c)\in\sigma(E(\kappa)\times E(Z^{=}_{f,h})$, luego $(a,c)\in E(Z^{=}_{f,h})$, lo que prueba que $(f,a)\sim(h,c)$.

Definimos $\mathrm{Ult}_E(Q)$ como la clase cociente de $\overline{\mathcal{F}}$ respecto a la relación $\sim$. Aquí hay que entender que cada clase de equivalencia $[f,a]\in\mathrm{Ult}_E(Q)$ es, por definición, el conjunto de los pares $(g,b)\in\overline{\mathcal{F}}$ de rango mínimo^Q relacionados con (f,a). De este modo se cumple que

$$[f,a]=[g,b]\leftrightarrow(a,b)\in E(Z^{=}_{f,g}).$$

Definimos en $\mathrm{Ult}_E(Q)$ la relación R dada por

$$[f,a]\,R\,[g,b]\leftrightarrow(a,b)\in E(Z^{\in}_{f,g}).$$

La prueba de que R está bien definida es análoga a las pruebas precedentes, usando que

$$(Z^{=}_{f',f}\times Z^{=}_{g,g'})\cap(\kappa\times Z^{\in}_{f,g}\times\kappa)\subset\sigma(Z^{\in}_{f',g'}\times\kappa\times\kappa),$$

donde $\sigma(a,b,c,d)=(a,d,b,c)$.

Definición 9.14 Sea Q un modelo de ZFC y sea E un preextensor con punto crítico $\kappa\in Q$ y soporte λ. Definimos la *ultrapotencia* $\mathrm{Ult}_E(Q)$ como el modelo que acabamos de construir con la relación R como interpretación del relator de pertenencia.

El teorema siguiente implica en particular que las ultrapotencias que acabamos de construir son modelos de ZFC:

Teorema 9.15 (Teorema fundamental de las ultrapotencias) *En la situación anterior, si $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ es una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas, la ultrapotencia $M = \mathrm{Ult}_E(Q)$ cumple $\phi([f_1,a_1],\ldots,\phi[f_n,a_n])$ si y sólo si $(a_1,\ldots,a_n) \in E(Z_\phi)$, donde*

$$Z_\phi = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \kappa \mid \phi^Q(f_1(\alpha_1),\ldots,f_n(\alpha_n))\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre la longitud de ϕ. No perdemos generalidad si suponemos que ϕ no tiene descriptores.

Supongamos que $\phi \equiv x_i = x_j$ (y podemos suponer que $x_i \neq x_j$ o el resultado es trivial). Sea σ una permutación que lleve los índices i, j a las primeras posiciones. Entonces

$$Z_\phi = \sigma\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \kappa^n \mid f_i(\alpha_1) = f_j(\alpha_2)\} = \sigma(Z^{=}_{f_i,f_j} \times \kappa^{n-2}),$$

luego

$$E(Z_\phi) = \sigma(E(Z^{=}_{f_i,f_j}) \times \lambda^{n-2}),$$

por lo que

$$(a_1,\ldots,a_n) \in E(Z_\phi) \leftrightarrow (a_i,a_j) \in E(Z^{=}_{f_i,f_j}) \leftrightarrow [f_i,a_i] = [f_j,a_j]$$

$$\leftrightarrow \phi^M([f_1,a_1],\ldots,[f_n,a_n]).$$

Si $\phi \equiv x_i \in x_j$ el razonamiento es análogo. Si la relación es válida para ϕ, también lo es para $\neg\phi$, puesto que $Z_{\neg\phi} = \kappa \setminus Z_\phi$, luego

$$\neg\phi^M([f_1,a_1],\ldots,[f_n,a_n])$$

$$\leftrightarrow (a_1,\ldots,a_n) \in \lambda \setminus E(Z_\phi)$$

$$= E(\kappa \setminus Z_\phi) = E(Z_{\neg\phi}).$$

Similarmente, si la relación es cierta para ϕ y ψ, también se cumple para $\phi \wedge \psi$, pues $Z_{\phi\wedge\psi} = Z_\phi \cap Z_\psi$ y E conserva intersecciones. Sólo queda probar que si la relación es cierta para ϕ, también lo es para $\psi \equiv \bigvee x\phi$.

Supongamos $\psi^M([f_1,a_1],\ldots,[f_n,a_n])$. Entonces existe un $x = [f_0,a_0]$ tal que $\phi^M([f_1,a_1],\ldots,[f_n,a_n],[f_0,a_0])$, luego, por hipótesis de inducción, tenemos que $(a_1,\ldots,a_n,a_0) \in E(Z_\phi)$. Ahora bien, es claro que $Z_\phi \subset Z_\psi \times \kappa$, luego aplicando E concluimos que $(a_1,\ldots,a_n) \in E(Z_\psi)$.

Recíprocamente, supongamos que $(a_1,\ldots,a_n) \in E(Z_\psi)$.

Por definición de Z_ψ:

$$(\bigwedge\alpha_1\ldots\alpha_n((\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in Z_\psi \to \bigvee x\ \psi(f_1(\alpha_1),\ldots,f_n(\alpha_n),x)))^Q,$$

luego, por el axioma de elección^Q, existe $f_0 \in Q$ tal que

$$f_0 : \kappa \longrightarrow V \wedge \bigwedge \alpha_1 \dots \alpha_n ((\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Z_\psi$$
$$\to \psi^Q(f_1(\alpha_1), \dots, f_n(\alpha_n), f_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n)).$$

Así,

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Z_\psi \leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in Z_\phi$$

o, equivalentemente: $\alpha \in Z_\psi \leftrightarrow (\alpha, \alpha) \in Z_\phi$. Esto implica que

$$(Z_\psi \times Z_\psi) \cap \{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid \alpha = \beta\} \subset Z_\phi,$$

luego

$$(E(Z_\psi) \times E(Z_\psi)) \cap \{(\alpha, \beta) \in \lambda \mid \alpha = \beta\} \subset E(Z_\phi).$$

Por consiguiente, llamando $a_0 = (a_1, \dots, a_n) \in E(Z_\psi)$, tenemos que

$$(a_1, \dots a_n, a_0) = (a_0, a_0) \in E(Z_\phi),$$

luego, por hipótesis de inducción, $\phi^M([f_1, a_1], \dots, [f_n, a_n], [f_0, a_0])$ y también $\psi^M([f_1, a_1], \dots, [f_n, a_n])$. ■

Definición 9.16 En las condiciones anteriores, para cada $x \in Q$, llamemos $c_x : \kappa \longrightarrow Q$ a la aplicación constante dada por $c_x(\alpha) = x$. Definimos la *inmersión canónica* $j_E : Q \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(Q)$ mediante $j_E(x) = [c_x, 0]$.

El teorema fundamental implica que j_E es una inmersión elemental, pues

$$\phi^M(j_E(x_1), \dots, j_E(x_n)) \leftrightarrow 0 \in E(\{\alpha \in \kappa \mid \phi^Q(x_1, \dots, x_n)\}) \leftrightarrow \phi^Q(x_1, \dots, x_n).$$

Para que un modelo de ZFC en el que la pertenencia se interprete como una relación arbitraria R sea isomorfo a un modelo transitivo es necesario y suficiente que la relación R sea conjuntista, extensional y bien fundada. La extensionalidad la tenemos por el axioma de extensionalidad, y en el caso de las ultrapotencias el carácter conjuntista nos lo asegura el teorema siguiente:

Teorema 9.17 *En las condiciones anteriores, la relación R es conjuntista en $\mathrm{Ult}_E(Q)$, es decir, si $x \in \mathrm{Ult}_E(Q)$, la clase $\{y \in \mathrm{Ult}_E(Q) \mid y\,R\,x\}$ es un conjunto.*

DEMOSTRACIÓN: Pongamos que $x = [f, a]$, para cierta $f : \kappa \longrightarrow Q$ y cierto ordinal $a \in \lambda$.

Si $y = [g, b]\,R\,[f, a]$, con $g : \kappa \longrightarrow Q$, llamando $C = \bigcup\limits_{\alpha \in \kappa} f(\alpha)$,

$$(b, a) \in E(\{(\beta, \alpha) \in \kappa \times \kappa \mid g(\beta) \in f(\alpha)\})$$
$$\subset E(\{(\beta, \alpha) \in \kappa \times \kappa \mid g(\beta) \in C\}) = E(\{\beta \in \kappa \mid g(\beta) \in C\}) \times \lambda.$$

Por consiguiente, $b \in E(\{\beta \in \kappa \mid g(\beta) \in C\})$.

Tomemos cualquier $h \in (C^\kappa)^Q$ que coincida con g sobre el conjunto

$$D = \{\beta \in \kappa \mid g(\beta) \in C\}.$$

Vamos a probar que $y = [g, b] = [h, b]$. En efecto,

$$(b, b) \in \{(u, v) \in E(D) \times E(D) \mid u = v\} = E(\{(\beta, \gamma) \in D \times D \mid \beta = \gamma\})$$

$$\subset E(\{(\beta, \gamma) \in \kappa \times \kappa \mid g(\beta) = h(\gamma)\}).$$

Así pues, tenemos una aplicación suprayectiva

$$(C^\kappa)^Q \times \lambda \longrightarrow \{y \in \mathrm{Ult}_E(Q) \mid y\, R\, x\}$$

que prueba que la imagen es un conjunto. ■

Nota En la demostración del teorema anterior hemos probado un hecho que usaremos en numerosas ocasiones: Todo $x \in \mathrm{Ult}_E(Q)$ tal que $x\, R\, [f, a]$ es de la forma $x = [h, b]$, donde $h : \kappa \longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in \kappa} f(\alpha)$. ■

Hasta aquí hemos supuesto que el preextensor E es externo al modelo Q. En este contexto general no podemos asegurar que $\mathrm{Ult}_E(Q)$ sea una clase propia en Q, en el sentido de que $x \in \mathrm{Ult}_E(Q)$ no equivale a ninguna fórmula relativizada a Q, ya que en la definición de $\mathrm{Ult}_E(Q)$ interviene el extensor E, que es ajeno a Q. En cambio, si suponemos que $E \in Q$ es un preextensor^Q, es claro que tanto $x \in \mathrm{Ult}_E(Q)$ como $x\, R\, y$ (donde R es la pertenencia en $\mathrm{Ult}_E(Q)$) equivalen a fórmulas relativizadas a Q. Más en general, sucede que toda la construcción de la ultrapotencia es la relativización a Q de la construcción correspondiente en V (y en particular $\mathrm{Ult}_E(Q) \subset Q$), por lo que no perdemos generalidad si trabajamos en V, es decir, si suprimimos todas las relativizaciones a Q.

El teorema siguiente muestra la finalidad de la completitud numerable que hemos incluido en la definición de extensor:

Teorema 9.18 *Si E es un extensor, la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_E(V)$ está bien fundada.*

Demostración: Supongamos que existe una sucesión $\{[f_i, a_i]\}_{i \in \omega}$ tal que $[f_{i+1}, a_{i+1}]\, R\, [f_i, a_i]$. Definimos

$$A_i = \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}) \in \kappa \mid f_0(\alpha_0) \ni \cdots \ni f_{i-1}(\alpha_{i-1})\}.$$

Evidentemente, $\{A_i\}_{i \in \omega}$ no puede tener una sección, pero el teorema fundamental nos da que $\{E(A_i)\}_{i \in \omega}$ tiene por sección la sucesión $\{a_i\}_{i \in \omega}$. Así pues, E no es numerablemente completo. ■

Más en general, si $E \in Q$ es un extensor^Q, entonces $\mathrm{Ult}_E(Q)$ está bien fundada^Q, luego está bien fundada, porque "estar bien fundada" es una propiedad absoluta para modelos transitivos de ZFC.

En general, siempre que una ultrapotencia esté bien fundada (lo cual en ocasiones podremos garantizarlo incluso para ciertas ultrapotencias definidas por preextensores) la sustituiremos por su colapso transitivo, de modo que $\mathrm{Ult}_E(Q)$ será también un modelo transitivo de ZFC.

Para estudiar la inmersión canónica asociada a un extensor nos basaremos principalmente en el teorema siguiente:

Teorema 9.19 *Sea Q un modelo transitivo de* ZFC *y sea E un preextensor sobre Q con punto crítico κ y soporte λ tal que* $\mathrm{Ult}_E(Q)$ *esté bien fundada. Sea $d : \kappa \longrightarrow \kappa$ la identidad en κ. Entonces, cada ordinal $a < \lambda$ se representa en* $\mathrm{Ult}_E(Q)$ *como $a = [d, a]$.*

Demostración: Razonamos por inducción sobre a. En efecto, un elemento arbitrario de $[d, a]$ será de la forma $[f, b]$, para cierta $f : \kappa \longrightarrow Q$ y cierto $b \in \lambda$. Entonces

$$[f, b] \in [d, a] \leftrightarrow (a, b) \in E(\{(\gamma, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid f(\beta) \in \gamma\})$$

$$= E(\mathrm{pa}(\{(\gamma, \beta, \delta) \in \kappa \times \kappa \times \kappa \mid f(\beta) = \delta\}))$$

$$= \mathrm{pa}(E(\{(\gamma, \beta, \delta) \in \kappa \times \kappa \times \kappa \mid f(\beta) = d(\delta)\}))$$

$$\leftrightarrow \bigvee c \in a\ (a, b, c) \in \lambda\times E(\{(\beta, \delta) \in \kappa\times\kappa \mid f(\beta) = d(\delta)\} \leftrightarrow \bigvee c < a\ [f, b] = [d, c].$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $[d, c] = c$, luego hemos probado que los elementos de $[d, a]$ son exactamente los de a, es decir, $[d, a] = a$. ■

La primera aplicación de esta representación es la siguiente:

Teorema 9.20 *Sea Q un modelo transitivo de* ZFC *y sea E un preextensor sobre Q con punto crítico κ y soporte λ tal que la ultrapotencia* $\mathrm{Ult}_Q(E)$ *esté bien fundada. Entonces κ es el punto crítico de la inmersión canónica j_E y, de hecho, $\lambda \leq j_E(\kappa)$.*

Demostración: Sea $d : \kappa \longrightarrow \kappa$ la identidad. Observemos que, si $\alpha < \kappa$, se cumple $j_E(\alpha) = [c_\alpha, 0] = [d, \alpha]$. En efecto, esto equivale a que

$$(0, \alpha) \in E(\{(\beta, \gamma) \in \kappa \times \kappa \mid \alpha = \gamma\}) = E(\kappa \times \{(\alpha\}) = \lambda \times \{\alpha\}.$$

Por el teorema anterior concluimos que

$$\bigwedge \alpha < \kappa\ j_E(\alpha) = \alpha.$$

En cambio, si $a < \lambda$, tenemos las equivalencias

$$a = [d, a] \in j_E(\kappa) \leftrightarrow (a, 0) \in E(\{((\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid \alpha \in \kappa\}) = E(\kappa) = \lambda,$$

luego $\lambda \leq j_E(\kappa)$. ■

Ahora también es inmediato que, en las condiciones precedentes, para cada $A \subset \kappa$:

$$E(A) = j_E(A) \cap \lambda.$$

En efecto, para cada $a < \lambda$ se cumple que

$$\begin{aligned} a \in j_E(A) \leftrightarrow [d,a] \in [c_A, 0] \leftrightarrow (a,0) \in E(\{(\alpha,\beta) \in \kappa \times \kappa \mid \alpha \in A\}) \\ = E(A \times \kappa) = E(A) \times \lambda, \end{aligned}$$

luego $a \in j_E(A) \leftrightarrow a \in E(A)$. ■

Esto significa que la λ-restricción de la inmersión elemental j_E es el propio E. En cambio, no es cierto que si E es el extensor definido por una inmersión elemental j, entonces j_E coincida con j. La relación es la siguiente:

Teorema 9.21 *Sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental no trivial de punto crítico κ, sea E la λ-restricción definida por j y consideremos la inmersión canónica $j_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$. Entonces existe una inmersión elemental k que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_E"'] & M \\ \mathrm{Ult}_E(V) \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Además, si k no es trivial, su punto crítico es $\geq \lambda$.

Demostración: Definimos $k([f,a]) = j(f)(a)$. La definición es correcta, pues $j(f) : j(\kappa) \longrightarrow V$, luego está definido $j(f)(a)$. Además, si $[f,a] = [g,b]$, tenemos que

$$\begin{aligned} (a,b) \in E(\{(\alpha,\beta) \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\beta)\}) \\ = \{(\alpha,\beta) \in j(\kappa) \mid j(f)(\alpha) = j(g)(\beta)\} \cap \lambda, \end{aligned}$$

luego $j(f)(a) = j(g)(b)$.

Se cumple que k es una inmersión elemental, pues si $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{Ult}_E(V)^n$, de modo que $x_i = [f_i, a_i]$, para toda fórmula ϕ, tenemos que

$$\begin{aligned} & \phi^{\mathrm{Ult}}(x_1,\ldots,x_n) \\ \leftrightarrow & (a_1,\ldots,a_n) \in E(\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \kappa \mid \phi(f_1(\alpha_1),\ldots,f_n(\alpha_n))\}) \\ = & \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in j(\kappa) \mid \phi^M(j(f_1)(\alpha_1),\ldots,j(f_n)(\alpha_n))\} \cap \lambda \\ \leftrightarrow & \phi^M(j(f_1)(a_1),\ldots,j(f_n)(a_n)) \leftrightarrow \phi^M(k(x_1),\ldots,k(x_n)). \end{aligned}$$

El diagrama es conmutativo:

$$k(j_E(x)) = k([c_x, 0]) = j(c_x)(0) = c_{j(x)}(0) = j(x).$$

Si $a < \lambda$, sabemos que $a = [d,a]$ y $j(d)$ es la identidad en $j(\kappa)$, luego

$$k(a) = j(d)(a) = a.$$

■

Si aplicamos el teorema anterior tomando como j la propia inmersión j_E inducida por un extensor, resulta que k ha de ser la identidad, lo cual se traduce en que todo elemento de $\mathrm{Ult}_E(V)$ es de la forma $j_E(f)(a)$, para cierta función $f : \kappa \longrightarrow V$ y cierto $a \in \lambda$.

Nota La medida normal asociada a la inmersión canónica inducida por un extensor E es

$$D_\kappa = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in j_E(A)\} = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in E(A)\}.$$

Más en general, es fácil probar que, para cada $a \in \lambda$, el conjunto

$$D_a = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid a \in E(A)\}$$

es una medida en κ, y E está completamente determinado por las medidas $\{D_a\}_{a\in\lambda}$. Es posible dar una definición equivalente de extensor respecto a la cual un extensor sea una sucesión de medidas que satisfacen una serie de propiedades de compatibilidad. ■

Finalmente demostramos que las ultrapotencias definidas por medidas normales en cardinales medibles son un caso particular de las ultrapotencias definidas por extensores:

Teorema 9.22 *Sea κ un cardinal medible, sea D una medida normal en κ, sea $j_D : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(V)$ la inmersión canónica en la ultrapotencia, sea $\lambda = j_D(\kappa)$, sea E la λ-restricción de j_D y sea $j_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$ la inmersión canónica en la ultrapotencia. Entonces $\mathrm{Ult}_D(V) = \mathrm{Ult}_E(V)$ y $j_D = j_E$.*

Demostración: La medida normal asociada a j_E es

$$D_\kappa = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in j_D(A)\} = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid [d] \in [c_A]\} = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid A \in D\} = D.$$

Por consiguiente, el teorema 9.21 y [PC 11.33] nos dan inmersiones elementales k y k' que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j_D"] \arrow[dr, "j_E"'] & \mathrm{Ult}_D(V) \arrow[d, shift right, "k"'] \\ & \mathrm{Ult}_E(V) \arrow[u, shift right, "k'"'] \end{tikzcd}$$

Observamos además que

$$k'(k([f])) = k'(j_E(f)(\kappa)) = k'([f,\kappa]) = j_D(f)(\kappa) = [f],$$

es decir, que $k \circ k'$ es la identidad. Esto obliga a que k fije a todos los ordinales, pues no puede ser $\alpha < k(\alpha) \leq k'(k(\alpha)) = \alpha$, luego k es la identidad (por el teorema 9.1), luego[7] $\mathrm{Ult}_D(V) = \mathrm{Ult}_E(V)$ y $j_D = j_E$. ■

[7] Véase la observación previa a [PC 11.20].

9.3 Cardinales fuertes y superfuertes II

Ya estamos en condiciones de dar auténticas definiciones en ZFC de los conceptos de "cardinal fuerte" y "cardinal superfuerte":

Definición 9.23 Sea M una clase transitiva y $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental no trivial.

a) Diremos que la inmersión j es *α-fuerte* si $V_\alpha \subset M$.

b) La *fortaleza* de j es el mayor ordinal α tal que j es α-fuerte.[8]

c) Diremos que j es *superfuerte* si es $j(\kappa)$-fuerte, donde κ es el punto crítico de j.

d) Diremos que un extensor es *α-fuerte* (resp. *superfuerte*) si lo es la inmersión canónica j_E en la ultrapotencia que determina.

e) Un cardinal κ es *α-fuerte* (resp. *superfuerte*) si existe un extensor α-fuerte (resp. superfuerte) con punto crítico κ.

f) Un cardinal κ es *fuerte* si es α-fuerte para todo ordinal $\alpha \geq \kappa$.

Observamos que las definiciones de cardinal fuerte y superfuerte son expresables en ZFC, pues sólo involucran la existencia de extensores, que son conjuntos. La equivalencia con las "definiciones" en términos de inmersiones elementales se siguen del teorema siguiente:

Teorema 9.24 *Sea M una clase transitiva y $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ. Supongamos que j es α-fuerte, con $\alpha \leq j(\kappa)$. Sea $\alpha \leq \lambda \leq j(\kappa)$ cerrado para el buen orden canónico en $\Omega \times \Omega$. Entonces la λ-restricción de j es un extensor α-fuerte.*

DEMOSTRACIÓN: $V_\alpha = V_\alpha^M \subset V_\lambda^M = V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)} \subset \mathrm{Ult}_E(V)$, donde la última igualdad se sigue de 9.21 (por el teorema 9.1). ■

Así pues, si un cardinal κ es α-fuerte en el sentido que acabamos de definir, sabemos definir explícitamente una inmersión elemental en las condiciones de la "definición" de la sección 9.1, y si podemos definir como sea una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ en las condiciones de la "definición" de la sección 9.1, el teorema anterior con $\lambda = j(\kappa)$ nos da un extensor α-fuerte con punto crítico κ, es decir, nos da que κ es α-fuerte según la definición 9.23. Lo mismo es válido para cardinales superfuertes.

A partir de aquí podemos usar con pleno derecho todos los resultados que hemos demostrado en la sección 9.1. Vamos a probar que, tal y como habíamos anticipado, los cardinales 1-extensibles son superfuertes. De hecho, se cumple más que eso:

[8]Existe por el teorema de Kunen [PC 16.30].

Teorema 9.25 *Si κ es un cardinal 1-extensible, entonces es superfuerte y existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \textit{ es superfuerte}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V_{\kappa+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ una inmersión elemental con punto crítico κ, donde $\lambda = j(\kappa)$.

Se cumple que la aplicación $E : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ dada por $E(A) = j(A)$ es un extensor (μ, λ). Probaremos únicamente la completitud numerable, pues las propiedades restantes se comprueban sin dificultad.

Sea $\{A_i\}_{i\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos de κ. Como en la prueba del teorema 9.9, nos encontramos con el problema técnico de que la sucesión no está en $V_{\kappa+1}$, pero al igual que en la prueba de dicho teorema se prueba sin dificultad que

$$C = \bigcup_{i\in\omega} \{i\} \times A_i \in V_{\kappa+1}, \qquad j(C) = \bigcup_{i\in\omega} \{i\} \times j(A_i) \in V_{\lambda+1}.$$

Una fibra para $\{E(A_i)\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de ordinales $F = \{\alpha_i\}_{i\in\omega}$ menores que λ, con lo que $\{\alpha_i\}_{i\in\omega} \in V_{\lambda+1}$. De este modo:

$$(\bigvee f (f : \omega \longrightarrow \Omega \land \bigwedge i \in \omega\ (i, f|_i) \in j(C)))^{V_{\lambda+1}},$$

luego

$$(\bigvee f (f : \omega \longrightarrow \Omega \land \bigwedge i \in \omega\ (i, f|_i) \in C))^{V_{\kappa+1}},$$

y esto significa que la sucesión original tiene una fibra.

Por lo tanto, podemos considerar la inmersión canónica $j_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$, que tiene punto crítico κ. Veamos ahora que $j_E(\kappa) = \lambda$. En efecto, un elemento de $j_E(\kappa)$ es de la forma $[f, a]$, con $f : \kappa \longrightarrow \kappa$. Como $f \in V_{\kappa+1}$, podemos considerar $j(f) : \lambda \longrightarrow \lambda$. Sea $b = j(f)(a)$. Así se cumple que $[f, a] = [d, b] = b$, pues esto equivale a que

$$(a, b) \in E(\{(\alpha, \beta) \mid f(\alpha) = \beta\}) = \{(\alpha, \beta) \mid j(f)(\alpha) = \beta\},$$

es decir, a que $j(f)(a) = b$. Con esto hemos probado que $j_E(\kappa) \leq \lambda$, y la otra desigualdad es inmediata, pues λ es el soporte de E.

Así, para todo $A \subset \kappa$, se cumple que $j_E(A) \subset j_E(\kappa) = \lambda$, de modo que $j(A) = E(A) = j_E(A) \cap \lambda = j_E(A)$.

Como κ es un límite fuerte, existe una aplicación $f : \kappa \longrightarrow V_\kappa$ biyectiva. Sea $R \subset \kappa \times \kappa$ la relación que se corresponde a través de f con la relación de pertenencia en V_κ. Entonces V_κ es el colapso transitivo de (κ, R) y f es la función colapsante. Identificando a R con un subconjunto de κ, concluimos que $S = j(R) = j_E(R)$, luego, aplicando j, tenemos que V_λ es el colapso transitivo de λ con la relación S (esto es absoluto para $V_{\lambda+1}$), mientras que aplicando

j_E tenemos que dicho colapso es $V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)}$, y de aquí podemos concluir que $V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)} = V_\lambda$, es decir, que $V_\lambda \subset \mathrm{Ult}_E(V)$, con lo que κ es superfuerte.

Observemos que

$$C = \bigcup_{A \in \mathcal{P}\kappa} \{A\} \times E(A) \in V_{\lambda+1}$$

y determina completamente a E. Ahora es fácil ver que existe una fórmula $\phi(\mu, \lambda)$ de forma que, para todo ordinal límite $\lambda > \omega$, la relativización $\phi^{V_{\lambda+1}}(\mu, \lambda)$ equivale a que $\mu \in V_{\lambda+1}$ sea el punto crítico de un extensor superfuerte de soporte λ. En efecto, la fórmula ϕ es la que afirma lo siguiente:

a) Existe un $C \subset \mathcal{P}\mu \times \lambda$ que determina un extensor E de punto crítico μ y soporte λ. No importa que el extensor E, como aplicación $\mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$, no pertenezca a $V_{\lambda+1}$. Lo que importa es que, para todo $A \subset \kappa$, el conjunto $E(A) = \{\alpha \in \lambda \mid (A, \alpha) \in C\}$ puede calcularse a partir de C.

   Notemos que $\mathcal{P}\mu$ es absoluto para $V_{\lambda+1}$, al igual que ser un extensor. Lo único que podría no ser absoluto es la completitud numerable, pero lo es porque $V_{\lambda+1}$ contiene todas las sucesiones de subconjuntos de μ, todas las sucesiones de ordinales menores que λ, y puede codificar cada sucesión de subconjuntos de λ mediante un subconjunto de $\omega \times \lambda$.

b) El extensor E cumple que $j_E(\mu) = \lambda$. Esto equivale a una fórmula relativizada a $V_{\lambda+1}$ porque equivale a que para toda función $f : \mu \longrightarrow \mu$ y todo $a < \lambda$, exista un $b < \lambda$ tal que $[f, a] = [d, b]$, es decir, tal que

$$(a, b) \in E(\{(\alpha, \beta) \mid f(\alpha) = \beta\}),$$

   y todo esto puede comprobarse desde dentro de $V_{\lambda+1}$.

c) El extensor E cumple que $V_\lambda \subset \mathrm{Ult}_E(V)$. Esto equivale a una fórmula relativizada a $V_{\lambda+1}$ porque equivale a que existe una biyección $f : \mu \longrightarrow V_\mu$ tal que si $R \subset \mu \times \mu$ codifica a través de f la pertenencia en V_μ, entonces V_λ es el colapso transitivo de $(\lambda, E(R))$.

Tenemos entonces que κ cumple $\phi^{V_{\lambda+1}}(\kappa, \lambda)$, luego $\kappa \in j(A)$, donde

$$A = \{\mu < \kappa \mid \phi^{V_{\kappa+1}}(\mu, \kappa)\} \subset \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es superfuerte}\}.$$

Por consiguiente, el conjunto de la derecha pertenece a la medida normal D construida en el teorema 9.9. ■

De este modo tenemos perfectamente ubicados a los cardinales superfuertes en la jerarquía de los cardinales grandes: los cardinales supercompactos y enormes son límites de cardinales 1-extensibles, los cuales a su vez son límites de cardinales superfuertes, los cuales a su vez son límites de cardinales medibles. Sobre cardinales fuertes sólo sabemos que los cardinales supercompactos son fuertes y que los cardinales fuertes son límites de cardinales medibles.

Sucede que los cardinales superfuertes no son necesariamente fuertes ni viceversa, pero, en cuanto a consistencia, la existencia de un cardinal superfuerte implica la consistencia de que exista una clase propia de cardinales fuertes:

Teorema 9.26 *Si κ es un cardinal superfuerte, existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\delta < \kappa \mid \delta \text{ es fuerte}^{V_\kappa}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental de punto crítico κ tal que $V_{j(\kappa)} \subset M$. Entonces, la restricción de j a V_κ es una inmersión elemental $V_\kappa \longrightarrow V_{j(\kappa)}$. De hecho, la restricción es la identidad, luego lo que tenemos es simplemente que V_κ es un submodelo elemental de $V_{j(\kappa)}$. Basta probar que κ es fuerte$^{V_{j(\kappa)}}$, pues esto implica que el conjunto del enunciado pertenece a la medida normal D asociada a j.

Fijemos un ordinal $\kappa < \alpha < j(\kappa)$ y tomemos un cardinal$^{V_{j(\kappa)}}$ λ tal que $\kappa < \alpha < \lambda < j(\kappa)$. Sea E la λ-restricción de j. Por el teorema 9.24 tenemos que se trata de un extensor α-fuerte con punto crítico κ y soporte λ. Claramente $E \in V_{j(\kappa)}$ y sólo hemos de probar que E es un extensor α-fuerte$^{V_{j(\kappa)}}$. Que es un extensor$^{V_{j(\kappa)}}$ no presenta ninguna dificultad, y es α-fuerte$^{V_{j(\kappa)}}$ porque $V_\alpha^{\mathrm{Ult}_E(V_{j(\kappa)})} = V_\alpha^{\mathrm{Ult}_E(V)}$. En efecto, ambos conjuntos son el colapso transitivo del conjunto formado por las clases de equivalencia $[f, a]$, donde $f : \kappa \longrightarrow V_\alpha$, $a \in \lambda$ y las relaciones de igualdad y de pertenencia se definen en términos de E de forma absoluta para $V_{j(\kappa)}$. ■

De aquí se sigue, no ya que un cardinal fuerte no es necesariamente superfuerte, sino que la existencia de un cardinal fuerte no implica la existencia de cardinales superfuertes, pues si así fuera podríamos demostrar la consistencia de ZFC + "existe un cardinal fuerte" en esta misma teoría. Así pues, en términos de consistencia, tenemos la siguiente sucesión de cardinales grandes (donde la existencia de un cardinal de cada tipo implica la consistencia de una clase propia de cardinales del tipo siguiente):

enorme → supercompacto → 1-extensible → superfuerte → fuerte → medible

(Los cardinales extensibles, que no hemos tratado aquí, están entre los enormes y los supercompactos.)

No es difícil probar que un cardinal superfuerte no es necesariamente fuerte. Esto es consecuencia del teorema siguiente:

Teorema 9.27 *Si κ es un cardinal fuerte y $\xi \geq \kappa$ es un cardinal superfuerte, entonces κ es límite de cardinales superfuertes.*

DEMOSTRACIÓN: Sea E un extensor superfuerte con punto crítico ξ. Sea $\alpha > j_E(\xi)$ y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ tal que $\xi < j(\kappa)$ y $V_\alpha \subset M$. Es fácil ver que E es un extensor superfuerte^M (pues $\mathrm{Ult}_E(M)$ concuerda con $\mathrm{Ult}_E(V)$ hasta $j_E(\xi)$), con lo que ξ es superfuerte^M. Así pues, para todo $\delta < \kappa$ se cumple que $(\bigvee \xi (j(\delta) < \xi < j(\kappa) \land \xi \text{ es superfuerte}))^M$, luego también $\bigvee \xi(\delta < \xi < \kappa \land \xi \text{ es superfuerte})$. ■

En particular, si existen cardinales fuertes y superfuertes, el menor cardinal fuerte es mayor que el menor cardinal superfuerte (y éste es un ejemplo de cardinal superfuerte que no es fuerte).

Pueden existir inmersiones elementales $j : V \longrightarrow M$ cuya fortaleza sea mayor que $j(\kappa)$ (por ejemplo, las determinadas por cardinales enormes, que hemos visto que son $j(\kappa)+1$-fuertes), pero el teorema siguiente muestra que no pueden construirse mediante extensores:

Teorema 9.28 *Un extensor E con punto crítico κ es a lo sumo $j_E(\kappa)$-fuerte.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $j_E : V \longrightarrow M = \mathrm{Ult}_E(V)$ la inmersión canónica. Si $[f, a] \in j_E(\kappa^+)$, podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow \kappa^+$, mientras que $a \in \lambda \subset j_E(\kappa)$. Por consiguiente,

$$|j_E(\kappa^+)| \leq (\kappa^+)^\kappa \cdot j_E(\kappa) = 2^\kappa \cdot j_E(\kappa).$$

Si j_E es superfuerte, entonces $j_E(\kappa)$ es un cardinal límite fuerte. En efecto, κ es un cardinal medible, luego es un límite fuerte, luego $j_E(\kappa)$ es un límite fuerte^M, luego, si $\mu < \kappa$ es un cardinal, también es un cardinal^M, por lo que $(2^\mu)^M < j_E(\kappa)$, pero, como $(\mathcal{P}\mu)^M = \mathcal{P}\mu$, ha de ser $2^\mu < j_E(\kappa)$.

Por consiguiente, si j_E es superfuerte, tenemos que $|j_E(\kappa^+)| \leq j_E(\kappa)$. Pero $j_E(\kappa^+) = (j_E(\kappa)^+)^M$ es un cardinal^M. Esto implica que el buen orden de $j_E(\kappa)$ que lo hace semejante a $j_E(\kappa^+)$ no puede estar en M. Se trata de un subconjunto de $j_E(\kappa) \times j_E(\kappa)$, pero este conjunto se puede biyectar con $j_E(\kappa)$ en M. La imagen del buen orden en $j_E(\kappa)$ por una biyección en M es un elemento de $V^M_{j_E(\kappa)+1}$ que no puede estar en M, y así M no es $j_E(\kappa)+1$-fuerte (ni E tampoco). ■

9.4 Cardinales de Woodin

Introducimos ahora los cardinales de Woodin, cuya definición es algo técnica, pero proporcionan justo la hipótesis que vamos a necesitar para demostrar la consistencia de los axiomas ADP y AD.[9]

Definición 9.29 Sea H un conjunto y sea E un extensor de punto crítico κ. Sea $j_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$ la inmersión en la ultrapotencia y sea $\alpha \leq j(\kappa)$. Diremos que E es *α-fuerte respecto a H* si es α-fuerte y $j(H \cap \kappa) \cap \alpha = H \cap \alpha$.

Un cardinal κ es *α-fuerte respecto a H* si es el punto crítico de un extensor α-fuerte respecto a H.

Un cardinal κ es *$< \alpha$-fuerte respecto a H* si es β-fuerte respecto a H para todo $\beta < \alpha$.

Un cardinal δ es un *cardinal de Woodin* si para todo $H \subset \delta$ existe un $\kappa < \delta$ que es $< \delta$-fuerte respecto de H.

[9]Como veremos, la hipótesis será la existencia de un conjunto numerable de cardinales de Woodin con un cardinal medible sobre todos ellos. En particular, vamos a ver que esto sucede si existe un cardinal superfuerte.

Explícitamente, δ es un cardinal de Woodin si cumple:

$$\bigwedge H \subset \delta \bigvee \kappa < \delta \bigwedge \alpha < \delta \bigvee E (E \text{ es un extensor de punto crítico } \kappa$$
$$\wedge\, V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V) \wedge j_E(H \cap \kappa) \cap \alpha = H \cap \alpha).$$

Teorema 9.30 *Si δ es un cardinal de Woodin, entonces es inaccesible y el conjunto*

$$\{\kappa < \delta \mid \kappa \text{ es un cardinal medible}\}$$

es estacionario en δ. En particular δ es un cardinal de Mahlo.

DEMOSTRACIÓN: Se cumple que δ es un cardinal regular, pues si su cofinalidad fuera $\xi < \delta$, tomamos $H \subset \delta$ cofinal con cardinal ξ y tal que $H \cap \xi = \varnothing$. Sea $\kappa < \delta$ según la definición de cardinal de Woodin, sea $\alpha > \kappa$ tal que $H \cap \alpha$ contenga ordinales mayores que κ y sea E un extensor tal que

$$j_E(H \cap \kappa) \cap \alpha = H \cap \alpha.$$

Esto implica en particular que $H \cap \kappa \neq \varnothing$, luego $\xi < \kappa$, luego $|H \cap \kappa| \leq \xi < \kappa$, pero κ es un cardinal regular (es medible), luego $H \cap \kappa$ está acotado en κ, luego $j_E(H \cap \kappa) = H \cap \kappa = H \cap \alpha$, contradicción.

Ahora basta probar la segunda parte del teorema, pues entonces δ será límite de cardinales medibles, luego será un cardinal límite fuerte y, por consiguiente, inaccesible. Para ello tomamos un cerrado no acotado $H \subset \delta$ y hemos de probar que contiene un cardinal medible.

Sea $\kappa < \delta$ según la definición de cardinal de Woodin. Como H no está acotado en δ, podemos tomar $\kappa < \alpha < \delta$ tal que $H \cap \alpha$ contenga ordinales mayores que κ.

Si $H \cap \kappa$ estuviera acotado en κ, tendríamos que $j_E(H \cap \kappa) = H \cap \kappa = H \cap \alpha$, contradicción. Por lo tanto, $H \cap \kappa$ no está acotado en κ y, como H es cerrado, esto implica que $\kappa \in H$. ■

Enseguida veremos que un cardinal de Woodin no es necesariamente medible.

Teorema 9.31 *Un cardinal δ es de Woodin si y sólo si para todo conjunto $H \subset \delta$ existe un cardinal $\kappa < \delta$ tal que para todo $\alpha < \delta$ existe un extensor E de punto crítico κ con soporte inaccesible $\lambda < \delta$ y fortaleza $\lambda > \alpha$ tal que $j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda = H \cap \lambda$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos como $\lambda < \delta$ el menor cardinal inaccesible mayor que α, de modo que existe un extensor E de punto crítico κ que es λ-fuerte y $j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda = H \cap \lambda$.

Sea E_λ la λ-restricción de E. Observamos que E_λ cumple también la definición de cardinal de Woodin: sigue siendo λ-fuerte por 9.24 (en particular α-fuerte) y sigue cumpliendo la última condición por 9.21, pues si k es la inmersión definida en dicho teorema, se cumple que $k(j_{E_\lambda}(H \cap \kappa)) = j_E(H \cap \kappa)$ y k fija a los ordinales menores que λ, luego

$$j_{E_\lambda}(H \cap \kappa) = j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda = H \cap \lambda.$$

Así pues, cambiando E por E_λ, tenemos que E cumple el enunciado, salvo que falta probar que λ es también la fortaleza de E. Para ello adaptamos la prueba de 9.28: Observamos que $|j_E(\kappa^+)| \leq 2^\kappa \cdot \lambda \leq \lambda$ y, por otro lado, $\lambda \leq j_E(\kappa) < j_E(\kappa^+)$. Esto implica que $j_E(\kappa^+)$ tiene cardinal λ pero es un cardinal^M (donde $M = \mathrm{Ult}_E(V)$), de donde se sigue que el buen orden en λ que lo hace semejante a $j_E(\kappa^+)$ no puede estar en M, y esto a su vez implica que j_E no es λ^+-fuerte. ■

En particular, el teorema anterior implica que δ es un cardinal de Woodin si y sólo si

$$\bigwedge H \subset \delta \bigvee \kappa < \delta \bigwedge \alpha < \delta \bigvee E \in V_\delta (E \text{ es un extensor de punto crítico } \kappa$$

$$\wedge\, V_\alpha = V_\alpha^{\mathrm{Ult}_E(V)} \wedge j_E(H \cap \kappa) \cap \alpha = H \cap \alpha)^{V_\delta}.$$

En efecto, la condición $V_\alpha = V_\alpha^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ (es decir, que E es α-fuerte) puede comprobarse en V_δ porque $V_\alpha^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ es el colapso transitivo del conjunto formado por las clases de equivalencia de los pares (f, a), con $f : \kappa \longrightarrow V_\alpha$ y $a < \lambda$ respecto de una relación de equivalencia y una relación de pertenencia definibles a partir de $E \in V_\delta$. Igualmente, $j_E(H \cap \kappa)$ es el colapso transitivo de un conjunto definido a partir de funciones $f : \kappa \longrightarrow \kappa$, de E y de $\lambda < \delta$.

En resumen, existe una fórmula Δ_0, digamos $\phi(H)$, tal que δ es un cardinal de Woodin si y sólo si $\bigwedge H \subset V_\delta\ \phi(H)^{V_\delta}$. Ahora observamos que podemos considerar a $\bigwedge H \phi$ como una sentencia Π^1_1 en el sentido de [PC 12.19], y así es evidente que el mínimo cardinal de Woodin no es Π^1_1-indescriptible, lo que equivale a que no es débilmente compacto (y en particular no es medible).

Notemos ahora que la fórmula

$$\bigwedge \alpha < \delta \bigvee E \in V_\delta (E \text{ es un extensor de punto crítico } \kappa \wedge V_\alpha = V_\alpha^{\mathrm{Ult}_E(V)})^{V_\delta}.$$

implica en particular que κ es fuerte$^{V_\delta}$, y hemos probado que todos los cardinales κ dados por la definición de cardinal de Woodin cumplen esto. Por lo tanto:

Teorema 9.32 *Si δ es un cardinal de Woodin, el conjunto*

$$\{\kappa < \delta \mid \kappa \text{ es fuerte}^{V_\delta}\}$$

es estacionario en δ.

Por otra parte:

Teorema 9.33 *Todo cardinal superfuerte δ es un cardinal de Woodin y existe una medida normal D en δ tal que*

$$\{\kappa < \delta \mid \kappa \text{ es un cardinal de Woodin}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea δ un cardinal superfuerte y sea E un extensor superfuerte con punto crítico δ. Sea $\pi : V \longrightarrow M$ la inmersión en la ultrapotencia y sea $\delta^* = \pi(\delta)$. Tomemos $\alpha < \delta^*$ y veamos que δ es α-fuerte^M.

Para ello tomamos $\alpha \leq \lambda < \delta^*$ tal que λ sea cerrado para el orden canónico en $\Omega \times \Omega$. Así, según 9.24, la λ-restricción E_α de π es α-fuerte. Notemos que $E_\alpha \in V_{\delta^*} \subset M$. Es claro que E_α es un extensor^M. Además es α-fuerte^M, pues $V_\alpha^{\mathrm{Ult}_{E_\alpha}(M)} = V_\alpha^{\mathrm{Ult}_{E_\alpha}(V)}$. En efecto, todo elemento de $V_\alpha^{\mathrm{Ult}_{E_\alpha}(V)}$ es de la forma $[f, a]$, donde $f : \delta \longrightarrow V_\alpha$, luego $f \in V_{\delta^*} \subset M$, y las relaciones que definen la igualdad y la pertenencia en la ultrapotencia son las mismas en M o en V. Así pues, $V_\alpha^M = V_\alpha = V_\alpha^{\mathrm{Ult}_{E_\alpha}(V)} = V_\alpha^{\mathrm{Ult}_{E_\alpha}(M)}$.

Fijado $H \subset \delta$, vamos a probar que δ es α-fuerte^M respecto a $\pi(H)$. Para ello hemos de probar que $j_\alpha^M(\pi(H)\cap\delta)\cap\alpha = \pi(H)\cap\alpha$ o, lo que es lo mismo,que $j_\alpha^M(H)\cap\alpha = \pi(H)\cap\alpha$. Esto a su vez se sigue de que $j_\alpha^M(H)\cap\lambda = \pi(H)\cap\lambda$, que es equivalente a $E_\alpha(H) = \pi(H)\cap\lambda$, lo cual es cierto por definición de λ-restricción.

Con esto tenemos que δ es $< \delta^*$-fuerte respecto a $\pi(H)$ en M o, equivalentemente, que $(\bigvee\kappa < \pi(\delta)\ \kappa$ es $< \pi(\delta)$-fuerte respecto a $\pi(H))^M$. Consecuentemente, $\bigvee\kappa < \delta\ \kappa$ es $< \delta$-fuerte respecto a H, es decir, que δ es un cardinal de Woodin.

Con la notación previa al teorema, tenemos que $\bigwedge H \subset V_\delta\ \phi^{V_\delta}(H)$, pero $V_\delta = V_\delta^M$ y también $V_{\delta+1} = V_{\delta+1}^M$, por lo que los subconjuntos de V_δ son los mismos en M y en V. Esto implica que $(\bigwedge H \subset V_\delta\ \phi^{V_\delta}(H))^M$, luego δ es un cardinal de Woodin^M. Esto a su vez implica que el conjunto indicado en el enunciado pertenece a la medida normal asociada a j. ■

Así pues, en cuanto a consistencia, los cardinales de Woodin se sitúan entre los cardinales fuertes y los superfuertes.

9.5 Más sobre ultrapotencias de extensores

En esta sección recogemos algunos resultados adicionales sobre ultrapotencias que necesitaremos más adelante. Para empezar daremos una condición suficiente para que una ultrapotencia definida por un preextensor esté bien fundada.

Consideremos en general un modelo M de ZFC en el que la relación de pertenencia se interprete como una relación (conjuntista) arbitraria R. Llamaremos *parte bien fundada* de M a la clase M_{bf} formada por los $x \in M$ tales que no existe una sucesión infinita $\{x_i\}_{i\in\omega}$ tal que $\bigwedge i \in \omega\ x_{i+1}\, R\, x_i$.

Es obvio que la relación R está bien fundada en M_{bf} (y es extensional porque M cumple el axioma de extensionalidad) por lo que podemos sustituirla por su colapso de Mostowski y suponer que M_{bf} es una clase transitiva en la que R coincide con la relación de pertenencia.[10]

[10]Si $C = M \setminus M_{\mathrm{bf}}$, puede ocurrir que C no sea disjunto con el colapso transitivo de M_{bf}, en cuyo caso podemos sustituir los elementos de C por otros y pasar a un modelo isomorfo a M en el que M_{bf} pueda colapsarse sin entrar en conflicto con el resto del modelo.

Si M es un modelo de ZFC, es fácil ver que M_{bf} cumple los axiomas de ZFC salvo a lo sumo el de reemplazo y el de infinitud. Observemos que la transitividad de M_{bf} hace parcialmente absolutos a los conceptos básicos de la teoría de conjuntos en el sentido que ilustran los ejemplos siguientes:

a) $\varnothing^M = \varnothing \in M_{\mathrm{bf}}$.

En efecto, se cumple $\bigwedge y \in M \neg y\, R\, \varnothing^M$, pero esto implica que $\varnothing^M \in M_{\mathrm{bf}}$ y $\bigwedge y \in M_{\mathrm{bf}}\, y \notin \varnothing^M$. Como M_{bf} es transitivo, esto significa que $\varnothing^M = \varnothing$.

b) $\bigwedge xy \in M_{\mathrm{bf}}\ \{x, y\}^M = \{x, y\} \in M_{\mathrm{bf}}$.

En efecto, se cumple que

$$\bigwedge u \in M(u\, R\, \{x, y\}^M \leftrightarrow u\, R\, x \vee u\, R\, y),$$

y esto implica que $\{x, y\}^M \in M_{\mathrm{bf}}$, luego

$$\bigwedge u \in M_{\mathrm{bf}}(u \in \{x, y\}^M \leftrightarrow u \in x \vee u \in y).$$

Nuevamente la transitividad implica que

$$\bigwedge u(u \in \{x, y\}^M \leftrightarrow u \in x \vee u \in y),$$

luego $\{x, y\}^M = \{x, y\}$.

Similarmente comprobamos:

c) $\bigwedge xy \in M_{\mathrm{bf}}\ (x \cap y)^M = x \cap y \in M_{\mathrm{bf}}$.

d) $\bigwedge xy \in M_{\mathrm{bf}}\ (x \cup y)^M = x \cup y \in M_{\mathrm{bf}}$.

e) $\bigwedge xy \in M_{\mathrm{bf}}\ (x \setminus y)^M = x \setminus y \in M_{\mathrm{bf}}$.

f) $\bigwedge xy \in M_{\mathrm{bf}}\ (x, y)^M = (x, y) \in M_{\mathrm{bf}}$.

g) $\bigwedge xy \in M_{\mathrm{bf}}\ (x \times y)^M = x \times y \in M_{\mathrm{bf}}$.

h) $\bigwedge xy \in M_{\mathrm{bf}}\ ((x \subset y)^M \leftrightarrow x \subset y)$.

i) $\bigwedge fxy \in M_{\mathrm{bf}}\ ((f : x \longrightarrow y)^M \leftrightarrow f : x \longrightarrow y)$.

j) $\bigwedge \alpha \in M_{\mathrm{bf}}(\alpha$ es un ordinal$^M \leftrightarrow \alpha$ es un ordinal$)$.

k) $\bigwedge x \in M(x \in M_{\mathrm{bf}} \leftrightarrow \operatorname{rang}^M x \in M_{\mathrm{bf}}) \wedge \bigwedge x \in M_{\mathrm{bf}} \operatorname{rang}^M x = \operatorname{rang} x$.

l) $\bigwedge \alpha \in M_{\mathrm{bf}}\, V_\alpha^M = V_\alpha \cap M_{\mathrm{bf}}$.

Vamos a probar, por ejemplo, la propiedad k). Sea $\alpha = \operatorname{rang}^M x$ y sea $c \in M$ la clausura transitiva^M de x. Entonces existe una $f \in M$ tal que

$$(f : c \longrightarrow \alpha)^M \wedge \bigwedge uv \in M(u\, R\, v\, R\, c \rightarrow f(u)^M\, R\, f(v)^M\, R\, \alpha).$$

Por lo tanto, si $\alpha \in M_{\mathrm{bf}}$, también $x \in M_{\mathrm{bf}}$, ya que una sucesión R-decreciente desde x daría lugar a otra desde α. Por otra parte,

$$\bigwedge x \in M_{\mathrm{bf}}\, \mathrm{rang}^M x = \mathrm{rang}\, x \in M_{\mathrm{bf}}$$

se demuestra por $\in$-inducción sobre x. Basta comparar:

$$\mathrm{rang}\, x = \bigcup_{y \in x} (\mathrm{rang}\, y + 1)$$

con su relativización a M, que por hipótesis de inducción es la misma expresión y está en M_{bf}. ■

Teorema 9.34 *Sea Q un modelo transitivo de* ZFC*, sea $E \in Q$ un extensor^Q de punto crítico κ y soporte λ. Si $\alpha \in Q$ es un ordinal, entonces se cumple que $j_E(\alpha) \in \mathrm{Ult}_E(Q)_{\mathrm{bf}}$.*

Demostración: No perdemos generalidad si suponemos que $\lambda \leq \alpha$. Razonemos primeramente con un extensor en V y observemos que si $[f,a] \in j_E(\alpha)$, entonces podemos tomar $f : \kappa \longrightarrow \alpha$. Si $\beta, \gamma \in \alpha$, entonces $\{\beta, \gamma\} \in V_{\alpha+1}$, luego $(\beta, \gamma) = \{\{\beta\}, \{\beta, \gamma\}\} \in V_{\alpha+2}$, luego $f \in V_{\alpha+3}$, luego $(f, a) \in V_{\alpha+5}$ (pues $a \in \lambda \leq \alpha$), luego la clase de equivalencia (formada por elementos de rango mínimo) cumple $[f,a] \in V_{\alpha+6}$.

Por otra parte, es inmediato que si π es un colapso transitivo, entonces $\mathrm{rang}(\pi(x)) \leq \mathrm{rang}(x)$, luego al identificar $[f,a]$ con su colapso transitivo se cumple también que $[f,a] \in V_{\alpha+6}$. Por consiguiente, $j_E(\alpha) \in V_{\alpha+7}$.

Relativizamos esto que acabamos de probar al modelo Q del enunciado. Sabemos que $\mathrm{Ult}_E(Q)$ está bien fundada^Q, y acabamos de ver que el colapso transitivo^Q envía los elementos de $j_E(\alpha)$ a $V^Q_{\alpha+7}$, que es un conjunto transitivo, luego $j_E(\alpha) \in \mathrm{Ult}_E(Q)_{\mathrm{bf}}$. ■

Definición 9.35 Si μ es un cardinal, diremos que un modelo transitivo M es *μ-cerrado* si $M^\mu \subset M$.

Si M es un modelo no necesariamente bien fundado, diremos que es μ-cerrado si $\mu \in M_{\mathrm{bf}}$ y para cada aplicación $f : \mu \longrightarrow M$ existe $\bar{f} \in M$ tal que $(f : \mu \longrightarrow V)^M \wedge \bigwedge \alpha < \mu\ \bar{f}(\alpha)^M = f(\alpha)$.

Es claro entonces que si un modelo M es numerablemente cerrado en este sentido, entonces está bien fundado. En efecto, si existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\omega}$ de elementos de M tal que $\bigwedge i \in \omega\ x_{i+1}\, R\, x_i$, entonces existe $\bar{f} \in M$ tal que $(f : \omega \longrightarrow V)^M \wedge \bigwedge i \in \omega\, \bar{f}(i) = x_i$, luego $(\bigwedge i \in \omega\, \bar{f}(i+1) \in \bar{f}(i))^M$, lo que contradice al axioma de regularidad^M.

Teorema 9.36 *Sean P y Q modelos transitivos de* ZFC *que sean μ-cerrados y que concuerden hasta un ordinal $\kappa > \mu$, sea $E \in P$ un extensor^P de punto crítico κ y soporte λ. Supongamos que λ es inaccesible^P y que la fortaleza^P de E es precisamente λ. Entonces $\mathrm{Ult}_E(Q)$ es μ-cerrado.*

Demostración: Sean $P^* = \mathrm{Ult}_E(P)$ y $Q^* = \mathrm{Ult}_E(Q)$ y sean $j : P \longrightarrow P*$, $i : Q \longrightarrow Q^*$ las inmersiones canónicas. Sabemos que la ultrapotencia P^* está bien fundada, por lo que podemos considerarla como un modelo transitivo, pero en principio Q^* no tiene por qué estarlo. En cualquier caso, $\mu \leq i(\mu) \in Q^*_{\mathrm{bf}}$, luego $\mu \in Q^*_{\mathrm{bf}}$.

Consideremos una aplicación $f : \mu \longrightarrow Q^*$. Para cada ordinal $\xi < \mu$, tenemos que $f(\xi) = [f_\xi, a_\xi]$, para ciertas $f_\xi \in Q$ tales que $f_\xi : \kappa \longrightarrow Q$ y ciertos $a_\xi \in \lambda$.

Como Q es μ-cerrado se cumple que $\{f_\xi\}_{\xi\in\mu} \in Q$, como P es μ-cerrado, $\{a_\xi\}_{\xi<\mu} \in P$ y, como E es λ-fuerte^P, también tenemos que $\{a_\xi\}_{\xi<\mu} \in P^*$. (Notemos que la sucesión está acotada en λ, por lo que está en $V_\lambda^P = V_\lambda^{P^*}$.)

Como κ es inaccesible^P, tenemos que $(\kappa^\mu)^P = \kappa$. Para cada cardinal^P $\pi < \kappa$ tal que $\pi^\mu = \pi$, tomamos $h_\pi \in P$ tal que $h_\pi : ({}^\mu\pi)^P \longrightarrow \pi$ biyectiva. Sea $h = \{h_\pi\}_\pi \in V_{\kappa+1}^P = V_{\kappa+1}^Q$, luego $h \in P \cap Q$.

Tenemos que $j(h) \in P^*$ es de la forma $j(h) = \{j(h)_\pi\}_\pi$, donde π recorre los cardinales^{P*} menores que $j(\kappa)$ tales que $(\pi^\mu)^{P^*} = \pi$ y $j(h)_\pi : ({}^\mu\pi)^{P^*} \longrightarrow \pi$ biyectiva.

Ahora observamos que la sucesión $\{a_\xi\}_{\xi<\mu}$ está acotada por un $\pi < \lambda$ y, cambiando π por $(\pi^\mu)^P < \lambda$, podemos suponer que $(\pi^\mu)^P = \pi$, pero se cumple que $(\pi^\mu)^{P^*} = (\pi^\mu)^P = \pi < \lambda$ porque E es λ-fuerte^P. Por lo tanto, podemos tomar $a = (\pi, j(h)_\pi(\{a_\xi\}_{\xi<\mu})) \in \lambda$.

Definimos $F : \kappa \longrightarrow Q$ de modo que, para cada $\alpha < \kappa$, se cumple que $F(\alpha) : \mu \longrightarrow Q$ es la aplicación dada por

$$F(\alpha)(\xi) = \begin{cases} f_\xi(h_\pi^{-1}(\gamma)(\xi)) & \text{si } \alpha = (\pi, \gamma) \text{ con } \pi \in \mathcal{D}h \text{ y } \gamma < \pi, \\ \varnothing & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $F \in Q$, por lo que $[F, a] \in Q^*$. También es inmediato que $([F, a] : \mu \longrightarrow V)^{Q^*}$. Ahora vamos a comprobar que $([F, a](\xi))^{Q^*} = [f_\xi, a_\xi]$ o, lo que es lo mismo, $([F, a]([c_\xi, 0]) = [f_\xi, a_\xi])^{Q^*}$. Esto equivale a que

$$(a, a_\xi) \in E(\{(\alpha, \beta) \mid F(\alpha)(\xi) = f_\xi(\beta)\}).$$

Para probar esto basta ver que

$$(a, a_\xi) \in E(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid \bigvee \pi\gamma(\alpha = (\pi, \gamma) \wedge \pi \in \mathcal{D}h \wedge \gamma < \pi \wedge \beta = h_\pi^{-1}(\gamma)(\xi))\}).$$

Ahora usamos que $E(A) = j(A) \cap \lambda$, de modo que hemos de probar que

$$(a, a_\xi) \in \{(\alpha, \beta) \in \lambda \mid \bigvee \pi\gamma(\alpha = (\pi, \gamma) \wedge \pi \in \mathcal{D}h \wedge \gamma < \pi \wedge \beta = j(h)_\pi^{-1}(\gamma)(\xi))\}$$

o, equivalentemente, que

$$\bigvee \pi\gamma(a = (\pi, \gamma) \wedge \pi \in \mathcal{D}j(h) \wedge \gamma < \pi \wedge a_\xi = j(h)_\pi^{-1}(\gamma)(\xi)),$$

lo cual es cierto por la elección de a.

Así pues, llamando $\bar{f} = [F, a]$, hemos probado que $\bigwedge \xi < \mu \ \bar{f}(\xi)^{Q^*} = f(\xi)$. ■

Así pues, si partimos de modelos numerablemente cerrados, las ultrapotencias por preextensores están bien fundadas. A continuación contemplamos una situación aún más general:

Consideremos dos inmersiones elementales $\pi : P \longrightarrow P^*$, $\sigma : Q \longrightarrow Q^*$ entre modelos transitivos de ZFC . Supongamos que P y Q concuerdan hasta un ordinal κ, que π, σ coinciden sobre $V_{\kappa+1}^P = V_{\kappa+1}^Q$ (es decir, que toman el mismo valor sobre sus elementos y, además, que $\pi(V_{\kappa+1}^P) = \sigma(V_{\kappa+1}^Q)$, de modo que P^* y Q^* concuerdan hasta $\pi(\kappa) = \sigma(\kappa)$).

Sea $E \in P$ un extensor^P de punto crítico κ y soporte λ. Entonces $E^* = \pi(E)$ es un extensor$^{P^*}$ de punto crítico $\pi(\kappa)$ y soporte $\pi(\lambda)$. Tomemos $x \in \mathrm{Ult}_E(Q)$ y consideremos dos expresiones $x = [f, a] = [g, b]$. Entonces

$$(a, b) \in E(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\beta)\}).$$

Vamos a aplicar π a esta fórmula, teniendo en cuenta que el conjunto sobre el que actúa E está en $V_{\kappa+1}^P = V_{\kappa+1}^Q$, con lo que su imagen por π es la misma que su imagen por σ. Así pues:

$$(\pi(a), \pi(b)) \in E^*(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid \sigma(f)(\alpha) = \sigma(g)(\beta)\}).$$

Esto significa que $[\sigma(f), \pi(a)] = [\sigma(g), \pi(b)]$ como elementos de $\mathrm{Ult}_{E^*}(Q^*)$. Por consiguiente, podemos definir una aplicación $\tau : \mathrm{Ult}_E(Q) \longrightarrow \mathrm{Ult}_{E^*}(Q^*)$ mediante $\tau([f, a]) = [\sigma(f), \pi(a)]$. Se trata de una inmersión elemental, pues, si se cumple $\phi^{\mathrm{Ult}_E(Q)}([f_1, a_1], \ldots, [f_n, a_n])$, entonces

$$(a_1, \ldots, a_n) \in E(\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \kappa \mid \phi^Q(f_1(\alpha_1), \ldots, f_n(\alpha_n))\}),$$

al aplicar π obtenemos:

$$(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)) \in E^*(\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \kappa \mid \phi^{Q^*}(\sigma(f_1)(\alpha_1), \ldots, \sigma(f_n)(\alpha_n))\})$$

y esto equivale a $\phi^{\mathrm{Ult}_{E^*}(Q^*)}(\tau([f_1, a_1]), \ldots, \tau([f_n, a_n]))$.

Es claro que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Q^* \arrow[r, "j^*"] & \mathrm{Ult}_{E^*}(Q^*) \\ Q \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "j"'] & \mathrm{Ult}_E(Q) \arrow[u, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

Notemos también que si $\alpha < \lambda$ entonces $\alpha = [d, \alpha]$, con lo que $\tau(\alpha) = [d, \pi(\alpha)] = \pi(\alpha)$, es decir, que $\tau|_\lambda = \pi|_\lambda$.

Definición 9.37 En las condiciones anteriores diremos que $\mathrm{Ult}_{E^*}(Q^*)$ es la *copia* de $\mathrm{Ult}_E(Q)$ a través de las inmersiones π y σ.

Notemos que si P^* y Q^* son numerablemente cerrados, entonces la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_{E^*}(Q^*)$ está bien fundada, y la inmersión τ justifica que $\mathrm{Ult}_E(Q)$ también lo está. De este modo, para que una ultrapotencia por un preextensor esté bien fundada, no es necesario que los modelos de partida P y Q sean numerablemente cerrados, sino que basta con que se puedan sumergir en modelos numerablemente cerrados.

Terminamos con un teorema técnico sobre concordancia de inmersiones y ultrapotencias que necesitaremos más adelante.

Teorema 9.38 *Sean P y Q modelos transitivos de* ZFC *que concuerden sobre un ordinal κ, sea $E \in P$ un extensor$^P(\kappa, \lambda)$ y llamemos $i : P \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(P)$, $j : Q \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(Q)$ a las inmersiones canónicas. Entonces i, j coinciden sobre $V_{\kappa+1}^P = V_{\kappa+1}^Q$ y $\mathrm{Ult}_E(P)$, $\mathrm{Ult}_E(Q)$ concuerdan sobre $i(\kappa) = j(\kappa)$.*

Demostración: Llamemos P^* y Q^* a las ultrapotencias respectivas (supondremos que Q^* está bien fundada).

Todo $x = [f, a] \in V_{i(\kappa)+1}^P$ cumple que $[f, a] \subset V_{i(\kappa)}^P = i(V_\kappa^P)$, lo que implica que $a \in E(\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \subset V_\kappa^P\})$. Por consiguiente, podemos tomar f tal que $f : \kappa \longrightarrow \mathcal{P}V_\kappa^P$. Lo mismo vale si cambiamos P por Q e i por j.

Sea $C^P = \{f \mid f : \kappa \longrightarrow V_\kappa\}^P$ y análogamente con Q en lugar de P. Se cumple que $C^P = C^Q$, pues cada $f \in C^P$ está completamente determinada por el conjunto $A_f = \{(\alpha, x) \in \kappa \times V_\kappa \mid x \in f(\alpha)\}^P \in V_{\kappa+1}^P = V_{\kappa+1}^Q$, luego $A_f \in Q$, luego $f \in Q$, luego $f \in C^Q$. Igualmente se tiene la inclusión opuesta.

Si consideramos dos representaciones $x = [f, a] = [g, b]$ con $f, g \in C^P = C^Q$, se cumple que

$$[f, a] = [g, b] \leftrightarrow (a, b) \in E(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid f(\alpha) = g(\beta)\}).$$

Ahora bien, el conjunto sobre el que actúa E es el mismo relativizado a P o a Q, luego $[f, a] = [g, b]$ como elementos de P^* si y sólo si se da la igualdad como elementos de Q^*. Esto significa que la aplicación $k : V_{i(\kappa)+1}^{P^*} \longrightarrow V_{j(\kappa)+1}^{Q^*}$ dada por $k([f, a)] = [f, a]$ es una biyección bien definida y, por el mismo argumento cambiando la igualdad por la relación R que define la pertenencia en cada ultrapotencia, concluimos que k transforma la pertenencia en P^* en la pertenencia en Q^*. Como ambos conjuntos son transitivos, esto implica que $V_{i(\kappa)+1}^{P^*} = V_{j(\kappa)+1}^{Q^*}$. En particular

$$i(\kappa) = \Omega \cap V_{i(\kappa)}^{P^*} = \Omega \cap V_{j(\kappa)}^{Q^*} = j(\kappa).$$

Además, es claro que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
V_{\kappa+1}^P \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "i"'] & V_{\kappa+1}^Q \arrow[d, "j"] \\
V_{i(\kappa)+1}^{P^*} \arrow[r, "k"'] & V_{j(\kappa)+1}^{Q^*}
\end{tikzcd}$$

lo que significa que i y j coinciden sobre $V^P_{\kappa+1} = V^Q_{\kappa+1}$. ■

Consideremos el caso en que $\pi : P \longrightarrow P^*$, $\sigma : Q \longrightarrow Q^*$ son inmersiones entre modelos transitivos en las condiciones de la definición 9.37, de modo que podemos considerar las copias

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "i"'] & P^* \arrow[d, "i^*"] \\
\mathrm{Ult}_E(P) \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, dashed, "k"'] & \mathrm{Ult}_{E^*}(P^*) \arrow[d, dashed, "k^*"] \\
\mathrm{Ult}_E(Q) \arrow[r, "\tau"'] & \mathrm{Ult}_{E^*}(Q^*)
\end{tikzcd}$$

Aquí τ' es la copia a través de las inmersiones (π, π), mientras que τ es la copia a través de (π, σ). Las flechas verticales representan las aplicaciones definidas en el teorema anterior, que están definidas sobre $V_{i(\kappa)}^{\mathrm{Ult}_E(P)}$ y $V_{i(\kappa)}^{\mathrm{Ult}_{E^*}(P^*)}$ respectivamente, y no son sino la identidad. Ahora bien, las definiciones dadas en el teorema anterior implican que el diagrama es conmutativo.

Si el extensor E es α-fuerte^P, para $\alpha \leq i(\kappa)$, la conmutatividad del cuadrado superior se traduce en que τ' coincide con π sobre V^P_α, y la conmutatividad del cuadrado inferior se traduce a su vez en que lo mismo le sucede a τ. ■

Capítulo X

La consistencia de ADP

El resultado central de este capítulo es que si existe una sucesión de cardinales

$$\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n < \delta_{n+1} < \cdots < \kappa,$$

donde cada δ_i es un cardinal de Woodin y κ es un cardinal medible, entonces se cumple el axioma de determinación proyectiva. Más aún, demostraremos que $V_{\delta_1} \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Det}(\mathbf{P})$, donde $\mathbf{P}$ es la clase de todos los conjuntos proyectivos (de todos los espacios X^ω, para todo conjunto X). Así pues, si es consistente ZFC más la existencia de los cardinales indicados, también lo es ZFC + Det($\mathbf{P}$). En este capítulo trabajamos en ZFC.

10.1 Determinación $\mathbf{\Pi}^1_1$

La demostración de la consistencia de ADP es una generalización de la prueba debida a Martin según la cual la existencia de un cardinal medible implica la determinación de los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$. La prueba puede dividirse en dos partes: en la primera daremos una condición suficiente para que un conjunto esté determinado, y en la segunda probaremos que la cumplen los conjuntos $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Definición 10.1 Si κ es un cardinal infinito, una *medida* κ-completa en un conjunto A es un ultrafiltro $U \subset \mathcal{P}A$ cerrado para intersecciones de menos de κ conjuntos.

Sea γ un ordinal y sean $m < n < \omega$. Para cada $Z \subset \gamma^m$ definimos

$$Z^* = \{f \in \gamma^n \mid f|_m \in Z\}.$$

Diremos que una medida U sobre γ^n *extiende* a una medida U' sobre γ^m si para cada $Z \in U'$ se cumple que $Z^* \in U$.

Una *torre* de medidas sobre γ es una sucesión $\{U_n\}_{n\in\omega}$ tal que U_n es una medida sobre γ^n y si $m < n < \omega$ entonces U_n extiende a U_m. La torre es *numerablemente completa* si dada una sucesión $\{Z_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos tales que $\bigwedge n \in \omega\ Z_n \in U_n$, existe un $f \in \gamma^\omega$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ f|_n \in Z_n$.

Un árbol R en $X \times \gamma$ es *homogéneo* si existe una sucesión de medidas $\{U_s\}_{s\in X^{<\omega}}$ tal que

a) Para cada $s \in X^{<\omega}$, U_s es una medida en R_s (o, equivalentemente, en γ^n con $R_s \in U_s$, donde $n = \ell(s)$) y es $|X|^+$-completa.

b) Si $s \leq t$, entonces U_t extiende a U_s.

c) Si $x \in p[R]$, la torre $\{U_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ es numerablemente completa.

Notemos que la propiedad b) implica que la sucesión de c) es realmente una torre. Diremos que R es κ-homogéneo si las medidas U_s son κ-completas.

Si γ es un ordinal, un conjunto $A \subset X^\omega$ es de γ-*Suslin* si existe un árbol R en $X \times \gamma$ tal que $A = p[R]$.

Por ejemplo, en estos términos, los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^1_1$ son los conjuntos ω-Suslin, mientras que todo conjunto $A \subset X^\omega$ es γ-Suslin para $\gamma = |A|$. En efecto, basta numerar $A = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\gamma}$ y tomar $R = \{(x_\alpha|_n, c_\alpha|_n)\} \mid n \in \omega\}$, donde c_α es la sucesión constante igual a α.

Un conjunto $A \subset X^\omega$ es un *conjunto de Suslin homogéneo* si existe un ordinal γ tal que $A = p[R]$, donde R es un árbol homogéneo en $X \times \gamma$. Si R puede tomarse κ-homogéneo diremos que A es un *conjunto de Suslin κ-homogéneo.*

El resultado fundamental sobre determinación es el siguiente:

Teorema 10.2 (Martin) *Todo conjunto de Suslin homogéneo está determinado.*

Demostración: Sea $A \subset X^\omega$ un conjunto de Suslin homogéneo. Fijamos un árbol $R \subset (X\times\gamma)^{<\omega}$ y unas medidas $\{U_s\}_{s\in X^{<\omega}}$ según la definición anterior.

Definimos un juego G^* en el que dos jugadores construyen una sucesión con esta pauta:

$$\begin{array}{c|ccccccc} \mathrm{I} & x_0, \alpha_0 & & \alpha_1, x_2, \alpha_2 & & \alpha_3, x_4, \alpha_4 & & \cdots \\ \hline \mathrm{II} & & x_1 & & x_3 & & x_4 & \cdots \end{array}$$

Las reglas son las siguientes:

- $x_n \in X$.
- $((x_0, \ldots, x_{n-1}), (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})) \in R$.

El jugador I pierde la partida si no puede encontrar una jugada legal, y gana si llega a construirse una rama infinita de R.

El teorema de Gale-Stewart 6.3 implica que G^* está determinado, puesto que, como I gana siempre que se completa una partida infinita, es un juego de la forma $J(R^*, [R^*])$, donde R^* es el árbol determinado por las reglas del juego.

Ahora probamos que si I tiene una estrategia ganadora en G^*, también la tiene en $G(A)$.

Sea σ^* una estrategia ganadora para I en G^*. Diremos que una posición $p = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in X^n$ para el juego $G(A)$ es *buena* si puede extenderse a una posición $p^* = ((x_0, \ldots, x_{n-1}), (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}))$ acorde con σ^*, es decir, la que se obtendría si I jugara según σ^* y II replicara con x_1, x_3, ... Notemos que si existe tal extensión es única.

Definimos $\sigma(p)$ como la estrategia consistente en jugar la componente x_n de $\sigma^*(p^*)$ cuando p es una posición buena, y cualquier cosa en otro caso. Veamos que σ es una estrategia ganadora para I en $G(A)$. En efecto, si σ^* recomienda jugar (x_0, α_0) y I juega x_0 en $G(A)$, entonces, sea cual sea la respuesta x_1 de II, la jugada $((x_0, x_1), (\alpha_0))$ estará prevista por σ^*, por lo que existirá una respuesta ganadora $((x_0, x_1, x_2), (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2))$. Si I juega x_2 en $G(A)$, cualquiera que sea la respuesta de II dará lugar a una buena posición, y así el juego $G(A)$ se prolongará indefinidamente siempre de acuerdo con la estrategia σ. El resultado será un $x \in X^\omega$ tal que existirá un $f \in \gamma^\omega$ de modo que (x, f) es una rama infinita en R, luego $x \in p[R] = A$, y I gana la partida.

La parte delicada es probar que si II tiene una estrategia ganadora en G^* también la tiene en $G(A)$. Con esto quedará demostrado el teorema.

Sea σ^* una estrategia ganadora para II en G^* y consideremos una posición $s = (x_0, \ldots, x_{i-1})$ de longitud impar en el juego $G(A)$. Para cada $f = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}) \in R_s$, sea $h_s(f) \in X$ la jugada estipulada por σ^*. Tenemos que $R_s \in U_s$ y U_s es $|X|^+$-completo, luego ha de existir un $x_i \in X$ tal que $\{f \in R_s \mid h_s(f) = x_i\} \in U_s$. Definimos $\sigma(s) = x_i$ y vamos a probar que σ es una estrategia ganadora para II en $G(A)$.

Supongamos que $x \in X^\omega$ es una partida jugada de acuerdo con σ pero $x \in A$. Para cada $i \in \omega$ impar, tenemos que $Z_i = \{f \in R_{x|_i} \mid h_{x|_i}(f) = x_i\} \in U_{x|_i}$. Para i par definimos $Z_i = R_{x|_i} \in U_{x|_i}$. Por la numerabilidad completa de las torres de medidas, existe un $f \in \gamma^\omega$ de modo que $f|_i \in Z_i$, luego, para i impar, $h_{x|_i}(f|_i) = x_i$, luego (x, f) es una partida de G^* acorde con la estrategia σ^*, y esto es una contradicción, pues implica que I gana la partida. ■

Pasamos ahora a la segunda parte de la prueba:

Teorema 10.3 (Martin) *Si κ es un cardinal medible y $X \in V_\kappa$, entonces todo subconjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$ de X es un conjunto de Suslin κ-homogéneo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset X^{<\omega}$ un subconjunto $\mathbf{\Pi}^1_1$. Sea R un árbol en $X \times \omega$ tal que $p[R] = X^\omega \setminus A$. Veamos en primer lugar que existe una aplicación $s \mapsto \prec_s$ definida sobre $X^{<\omega}$ tal que:

a) Si $s \in X^n$, entonces $\prec_s$ es un orden total en n.

b) Si $s \leq t$, entonces $\prec_s \subset \prec_t$.

c) Para cada $x \in X^\omega$, se cumple que $x \in A$ si y sólo si $\prec_x = \bigcup\limits_{n \in \omega} \prec_{x|_n}$ está bien fundada en ω.

Es claro que, por recursión sobre el árbol $X^{<\omega}$, podemos asignar a cada $s \in X^{<\omega}$ una función f_s de modo que

a) $f_s : \bigcup\limits_{t \leq s} R_t \longrightarrow \omega$ es inyectiva.

b) Si $t < s$, entonces f_s extiende a f_t.

c) La imagen de f_s tiene complemento infinito en ω y, si $R_s \neq \varnothing$, entonces dicha imagen contiene a los números menores que $\ell(s)$.

De este modo, si $x \in X^\omega$, las aplicaciones $f_{x|_n}$ se extienden a una aplicación inyectiva $f_x : R_x \longrightarrow \omega$ (que será biyectiva si R_x tiene altura infinita).

Para cada $s \in X^n$ definimos como sigue la relación $\prec_s$: dados $u, v < n$,

a) Si u, v están ambos en la imagen de f_s, entonces $u \prec_s v$ si y sólo si $f_s^{-1}(u) \prec f_s^{-1}(v)$, donde $\prec$ es el orden de Brouwer-Kleene en $\omega^{<\omega}$.

b) Si u está en la imagen de f_s pero v no, entonces $u \prec_s v$.

c) Si u, v no están en la imagen de f_s, entonces $u \prec_s v$ si y sólo si $u < v$.

Así tenemos que $\prec_s$ es un orden total en n que extiende a los anteriores, porque si un u no está en la imagen de f_s es porque $R_s = \varnothing$, con lo que $R_t = \varnothing$ para toda extensión t de s, luego u tampoco estará en la imagen de f_t. Además, dado $x \in X^\omega$, la aplicación $f_x : R_x \longrightarrow \omega$ es una semejanza entre R_x con el orden de Brouwer-Kleene y un segmento inicial de $(\omega, \prec_x)$, y los números naturales por encima de dicho segmento están bien ordenados por $\prec_x$ (pues en ellos coincide con la relación de orden usual). Por consiguiente, $\prec_x$ está bien fundada en ω si y sólo si R_x está bien fundado respecto al orden de Brouwer-Kleene, si y sólo si (teorema 5.20) R_x no posee ramas infinitas, si y sólo si $x \notin p[R]$, si y sólo si $x \in A$.

Definimos ahora $S \subset (X \times \kappa)^{<\omega}$ como el árbol formado por los pares (s, f) tales que, si $s \in X^n$, para cada $i, j < n$ se cumple que $f(i) < f(j)$ si y sólo si $i \prec_s j$.

Se cumple entonces que $p[S] = A$. En efecto, si $x \in p[S]$, entonces existe un $f \in \kappa^{<\omega}$ tal que $(x, f) \in S$, pero entonces $f : \omega \longrightarrow \Omega$ es creciente para el orden $\prec_x$, luego éste está bien fundado, luego $x \in A$. Recíprocamente, si $x \in A$ entonces $\prec_x$ está bien fundado en ω y, como es un orden total, de hecho es un buen orden, luego existe una aplicación $f : \omega \longrightarrow \Omega$ que transforma $\prec_x$ en el orden usual, luego $(x, f) \in S$, luego $x \in p[S]$.

Sea D una medida normal en κ y, para cada $s \in X^n$, sea U_s el conjunto de los $Z \subset \kappa^n$ tales que existe un $C \in D$ tal que $C^n \cap S_s \subset Z$. Vamos a probar que U_s es una medida κ-completa en κ^n. Es inmediato que se trata de un filtro κ-completo.

Para probar que es un ultrafiltro consideramos $Z \subset \kappa^n$ y sea $F : [\kappa]^n \longrightarrow 2$ la aplicación que a cada subconjunto $u \subset \kappa$ con n elementos le asigna 1 la n-tupla

$v \in \kappa^n$ que resulta de ordenar los elementos de u según s (de modo que $v \in S_s$) está en Z y 0 en caso contrario. Como κ es débilmente compacto, la partición F tiene un conjunto homogéneo C de cardinal κ. Más aún, podemos tomar[1] $C \in D$. La homogeneidad significa que F es constante en $[C]^n$, de modo que $C^n \cap S_s \subset Z$ o bien $C^n \cap S_s \subset \kappa^n \setminus Z$, luego $Z \in U_s$ o bien $\kappa^n \setminus Z \in U_s$.

Obviamente, $S_s \in U_s$.

Veamos ahora que si $s \leq t \in \kappa^m$, entonces U_t extiende a U_s. Para ello tomamos $Z \in U_s$ y el correspondiente conjunto $C \in D$. Queremos ver que $C^m \cap S_t \subset Z^*$, lo cual equivale a probar que si $f \in C^m \cap S_t$ entonces $f|_n \in Z$, pero es que $f|_n \in C^n \cap S_s \subset Z$.

Para probar que el árbol S es homogéneo sólo falta ver que si $x \in A = p[S]$ la torre $\{U_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ es numerablemente completa. Para ello tomamos conjuntos $Z_n \in U_n$ y sus correspondientes $C_n \in D$. Sustituyéndolos por su intersección, podemos suponer que todos ellos son iguales a un mismo conjunto $C \in D$. Como $x \in A$, sabemos que $\prec_x$ es un buen orden en ω, luego existe una aplicación $f : \omega \longrightarrow C$ que transforma $\prec_x$ en el orden usual. Es claro entonces que $f|_n \in Z_n$ para todo n.

Con esto hemos probado que A es un conjunto de Suslin κ-homogéneo. ■

Así pues, combinando los dos teoremas anteriores obtenemos que la existencia de un cardinal medible κ implica $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Pi}^1_1)$ o, equivalentemente, $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_1)$. Más aún, implica que $V_\kappa \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_1)$.

En particular, según los resultados del capítulo VI, la existencia de un cardinal medible implica que todo conjunto $\mathbf{\Sigma}^1_2$ en un espacio polaco es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto. (Lo destacable es que implica estos hechos, no la mera consistencia de estos hechos.)

Puede probarse que la existencia de un cardinal medible no implica $\mathrm{Det}_\omega(\mathbf{\Sigma}^1_2)$ ni tan sólo la medibilidad de los conjuntos $\mathbf{\Delta}^1_3$. No daremos aquí los detalles pues son muy prolijos, pero la idea es muy simple: Si U es una medida en un cardinal κ según la definición de cardinal medible, entonces κ sigue siendo un cardinal medible en el modelo $L[U]$, en el cual está definido el buen orden $\trianglelefteq_U$ y Silver demostró que su restricción a $\mathcal{N}$ define un subconjunto $\mathbf{\Delta}^1_3$ de $\mathcal{N}^2$. A partir de aquí, todos los argumentos vistos en el capítulo VII bajo la hipótesis $\mathcal{N} \subset L$ se trasladan a este contexto salvo un salto de una posición en la jerarquía de Lusin: existen conjuntos $\mathbf{\Delta}^1_3$ no medibles Lebesgue, etc.

Nuestro propósito es demostrar que, en presencia de una sucesión de cardinales como la indicada al principio del capítulo, todo conjunto proyectivo en $\mathcal{N}$ es un conjunto de Suslin homogéneo, lo que, en virtud del teorema 10.2, implica ADP. Para llegar a este resultado necesitaremos una caracterización de los árboles homogéneos en términos de inmersiones elementales que probaremos en la sección 10.3, pero antes necesitamos algunos preliminares.

[1]Véase [PC 12.27] para la propiedad de Ramsey, que es más general.

10.2 Modelos e inmersiones elementales

Nota Nuestra intención es trabajar con modelos transitivos de ZFC, pero en ocasiones nos encontraremos con modelos M más generales, en los que la relación de pertenencia se interpreta como una cierta relación $R \subset M \times M$. En tales casos, si podemos garantizar que la relación R está bien fundada en M (y es conjuntista, aunque esta propiedad se cumplirá en todos los casos) pasaremos a identificar M con su colapso transitivo, que es un modelo isomorfo.

Un primer caso en el que nos encontramos con modelos que, en principio, no tienen por qué estar bien fundados, es al construir el límite inductivo de una familia de modelos transitivos, tal y como recordamos a continuación:

Definición 10.4 Un *sistema inductivo* de modelos transitivos de ZFC es un sistema $(\{M_\mu\}_{\mu<\alpha}, \{j_{\mu,\nu}\}_{\mu\leq\nu<\alpha})$, donde los M_μ son modelos y las aplicaciones $j_{\mu,\nu}$ son inmersiones elementales que, para $\mu \leq \nu \leq \xi$, dan lugar a diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} M_\nu \arrow[r, "j_{\nu,\xi}"] & M_\xi \\ M_\mu \arrow[u, "j_{\mu,\nu}"] \arrow[ur, "j_{\mu\xi}"'] & \end{tikzcd}$$

(y donde $j_{\mu,\mu}$ es la identidad en M_μ).

Definimos $M = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} \{\xi\} \times M_\xi$ y consideramos en M la relación de equivalencia dada por

$$(\xi, x) \sim (\xi', x') \quad \text{si y sólo si} \quad j_{\xi,\mu}(x) = j_{\xi',\mu}(x'), \qquad \text{donde} \quad \mu = \text{máx}\{\xi, \xi'\}.$$

Llamemos M^* al conjunto cociente, al que consideraremos como modelo interpretando la pertenencia mediante la relación R dada por $[\xi, x]\, R\, [\xi', x']$ si y sólo si $j_{\xi,\mu}(x) \in j_{\xi',\mu}(x')$, donde nuevamente $\mu = \text{máx}\{\xi, \xi'\}$. Es fácil ver que R está bien definida. Diremos que M^* es el *límite inductivo* del sistema dado.

Podemos definir $j_\xi : M_\xi \longrightarrow M^*$ mediante $j_\xi(x) = [\xi, x]$, de modo que las aplicaciones j_ξ conmutan con las aplicaciones $j_{\nu,\xi}$ de forma natural. Vamos a probar que son inmersiones elementales. Esto significa que, para cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, se cumple que

$$\bigwedge x_1 \ldots x_n \in M_\xi (\phi^{M_\xi}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^{M^*}(j_\xi(x_1), \ldots, j_\xi(x_n))).$$

Esto se demuestra por inducción sobre la longitud de ϕ, y el único caso no trivial se da cuando suponemos que $\phi \equiv \bigvee x \psi$.

Si suponemos que $\bigvee x \in M_\xi\ \psi^{M_\xi}(x, x_1 \ldots, x_n)$, la hipótesis de inducción nos da que $\psi^{M^*}(j_\xi(x), j_\xi(x_1), \ldots, j_\xi(x_n))$, luego también $\phi^{M^*}(j_\xi(x_1), \ldots, j_\xi(x_n))$.

Recíprocamente, si $\bigvee x \in M^*\ \psi^{M^*}(x, x_1 \ldots, x_n)$, un tal x será de la forma $x = j_\mu(x_\mu)$, para cierto $x_\mu \in M_\mu$. Cambiando x_μ por un $j_{\mu\mu'}(x_\mu)$ podemos suponer que $\xi \leq \mu$. Así $j_\xi(x_i) = j_\mu(j_{\xi,\mu}(x_i))$. Por hipótesis de inducción se cumple $\psi^{M_\mu}(x_\mu, j_{\xi,\mu}(x_1), \ldots, j_{\xi,\mu}(x_n))$, luego $\phi^{M_\mu}(j_{\xi,\mu}(x_1), \ldots, j_{\xi,\mu}(x_n))$. Por último, como $j_{\xi,\mu}$ es una inmersión elemental, llegamos a $\phi^{M_\xi}(x_1, \ldots, x_n)$. ■

Es inmediato que la relación de pertenencia en el límite inductivo es conjuntista y extensional, pero no está necesariamente bien fundada.

Observemos también que, por simplicidad, hemos tomado un ordinal arbitrario α como conjunto de índices de un sistema inductivo de modelos. En la práctica usaremos también subconjuntos (sin máximo) de ordinales como conjuntos de índices, lo cual no supone más que un cambio de notación trivial.

Teorema 10.5 *Sea* $\{M_\mu\}_{\mu<\alpha}$ *un sistema inductivo de modelos transitivos de* ZFC, *sea* M *su límite inductivo y sea* $\pi_\mu : M_\mu \longrightarrow N$ *una familia de inmersiones elementales en un modelo* N *que haga conmutativos los diagramas siguientes:*

$$\begin{tikzcd} M_\xi \arrow[r, "\pi_\xi"] & N \\ M_\mu \arrow[u, "j_{\mu\xi}"] \arrow[ur, "\pi_\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces existe una única inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow N$ *que hace conmutativos los diagramas*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & N \\ M_\xi \arrow[u, "j_\xi"] \arrow[ur, "\pi_\xi"'] & \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN: Todo elemento de M es de la forma $j_\xi(x_\xi)$, para cierto $x_\xi \in M_\xi$. Definimos $\pi(j_\xi(x_\xi)) = \pi_\xi(x_\xi)$. La definición es correcta porque si $j_\xi(x_\xi) = j_\mu(x_\mu)$, por ejemplo con $\mu < \xi$, entonces $x_\xi = j_{\mu\xi}(x_\mu)$, por la conmutatividad de las inmersiones correspondientes y porque las inmersiones elementales son inyectivas. Por consiguiente, $\pi_\xi(x_\xi) = \pi_\xi(j_{\mu\xi}(x_\mu)) = \pi_\mu(x_\mu)$.

Falta probar que π es una inmersión elemental. Ahora bien, fijada una fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ y elementos $x_1, \ldots, x_n \in M$, existe un $\xi < \alpha$ tal que $x_i = j_\xi(x_{i\xi})$, para ciertos $x_{i\xi} \in M_\xi$, Por lo tanto

$$\phi^M(j_\xi(x_{1\xi}), \ldots, j_\xi(x_{n\xi})) \leftrightarrow \phi^{M_\xi}(x_{1\xi}, \ldots, x_{n\xi}) \leftrightarrow \phi^N(\pi_\xi(x_{1\xi}), \ldots, \pi_\xi(x_{n\xi})),$$

es decir,

$$\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^N(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)).$$

■

En particular, si N es un modelo transitivo, podemos concluir que el límite inductivo está bien fundado e identificarlo con su colapso transitivo.

A continuación refinamos la técnica para obtener un submodelo elemental numerable de un modelo dado P.

Definición 10.6 Sea P un conjunto y $h : \omega \longrightarrow \omega$ la aplicación que a cada $n = (u, v) \in \omega$ le asigna $h(n) = u$. De este modo

$$\bigwedge um \in \omega \bigvee r \in \omega (r \geq m \wedge h(r) = u).$$

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de la teoría de conjuntos, sea $\{x_0, x_1, \ldots\}$ el conjunto de sus variables y sea $\{\phi_i\}_{i\in\omega}$ una enumeración de las fórmulas de $\mathcal{L}$ con alguna variable libre.

Llamaremos *árbol de intentos de construir un submodelo elemental de P* al conjunto $A \subset P^{<\omega}$ formado por las funciones f tales que si $\mathcal{D}f = n$, para todo $r \in \omega$ tal que $2r < n$ se cumple:

> Si $h(r) = (u, v)$, ϕ_u es una fórmula con $m + 1$ variables libres, $v = (n_1, \ldots, n_m)$ con $n_1, \ldots, n_m < 2r$ y
>
> $$\bigvee x \in P \; P \vDash \phi_u[f(n_1), \ldots, f(n_m), x],$$
>
> entonces $P \vDash \phi_u[f(n_1), \ldots, f(n_m), f(2r)]$.

Teorema 10.7 *Si A es el árbol de intentos de construir un submodelo elemental de un conjunto P y f es una rama infinita en A, entonces $Q = \{f(n) \mid n \in \omega\}$ es un submodelo elemental de P.*

Demostración: Aplicaremos el teorema [PC 1.7], según el cual basta ver que para toda fórmula ϕ_u con $m + 1$ variables libres y para todos los $f(n_1), \ldots, f(n_m) \in Q$ tales que

$$\bigvee x \in P \; P \vDash \phi_u[f(n_1), \ldots, f(n_m), x]$$

existe un $f(2r) \in Q$ tal que $P \vDash \phi_u[f(n_1), \ldots, f(n_m), f(2r)]$. En efecto, basta tomar $v = (n_1, \ldots, n_m)$, elegir un $r > \max\{n_1, \ldots, n_m\}$ tal que $h(r) = (u, v)$ y tener en cuenta que $f|_{2r+1} \in A$. ■

Nota Observemos que la demostración del teorema anterior sólo utiliza que los valores que toman los nodos de A sobre los números naturales pares suficientemente grandes cumplen la definición 10.6. Por lo tanto, la prueba es válida igualmente si en lugar de considerar todo el árbol A consideramos un subárbol resultante de imponer condiciones arbitrarias sobre los valores que toman los nodos sobre los números naturales impares, o incluso si modificamos la definición de A para que la condición impuesta sobre los valores pares sea satisfecha únicamente cuando r es mayor que un $r_0 \in \omega$ fijo. De este modo podemos obtener submodelos elementales de P que contengan elementos de P prefijados.

Por último demostramos un resultado sobre el carácter absoluto de la existencia de una inmersión elemental:

Teorema 10.8 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC*, sea $i : P \longrightarrow Q$ una inmersión elemental entre modelos transitivos del lenguaje de la teoría de conjuntos tales que P, $Q \in M$ y P sea numerable^M. Entonces existe una inmersión elemental $j : P \longrightarrow Q$ tal que $j \in M$.*

DEMOSTRACIÓN: Partimos de la misma aplicación $h : \omega \longrightarrow \omega$ considerada en la definición 10.6. Notemos que $h \in M$ e igualmente podemos suponer que el lenguaje $\mathcal{L} \in M$ y considerar una enumeración $\{\phi_i\}_{i\in\omega} \in M$ de sus fórmulas con una variable libre y otra de sus variables.

Sea $p : \omega \longrightarrow P$ una biyección tal que $p \in M$, de modo que $P = \{p_i\}_{i\in\omega}$. Sea $I_r = \{p_i \mid i < r\}$. Llamemos A al conjunto de todas las aplicaciones de un conjunto I_k en Q, y consideramos en A la relación de orden dada por $f \prec g$ si y sólo si:

a) $f \subset g$.

b) Si $\mathcal{D}f = I_r$, $k \leq r$, $h(k) = (u, v)$, ϕ_u es una fórmula con $m + 1$ variables libres, $v = (n_1, \ldots, n_m)$ con $n_1, \ldots, n_m < k$ y

$$\bigvee x \in Q \; Q \vDash \phi_u[f(p_{n_1}), \ldots, f(p_{n_m}), x],$$

entonces existe un $p \in \mathcal{D}g$ tal que $Q \vDash \phi_u[g(p_{n_1}), \ldots, g(p_{n_m}), g(p)]$.

Es inmediato que $(A, \prec) \in M$ y toda cadena infinita

$$f_0 \prec f_1 \prec f_2 \prec \cdots$$

determina una inmersión elemental $f = \bigcup\limits_{i\in\omega} f_i : P \longrightarrow Q$. En efecto, la unión es ciertamente una aplicación de P en Q. Para ver que es una inmersión elemental observamos que esto equivale a que $f[P]$ sea un submodelo elemental de Q, y para probar esto aplicamos el teorema [PC 1.7], según el cual basta ver que para toda fórmula ϕ_u con $m + 1$ variables libres y para todos los $p_{n_1}, \ldots, p_{n_m} \in P$ tales que $\bigvee x \in Q \; Q \vDash \phi_u[f(p_{n_1}), \ldots, f(p_{n_m}), x]$, existe un $p \in P$ tal que $Q \vDash \phi_u[f(p_{n_1}), \ldots, f(p_{n_m}), f(p)]$.

Para probar esto a su vez tomamos $v = (n_1, \ldots, n_m)$, y $k > n_1, \ldots, n_m$ tal que $f(k) = (u, v)$. Sea $i \in \omega$ tal que $I_k \subset \mathcal{D}f_i$ y sea $j \in \omega$ tal que $f_i \prec f_j$. Así $\bigvee x \in Q \; Q \vDash \phi_u[f_i(p_{n_1}), \ldots, f_i(p_{n_m}), x]$, luego existe un $p \in \mathcal{D}f_j$ tal que $Q \vDash \phi_u[f_j(p_{n_1}), \ldots, f_j(p_{n_m}), f_j(p)]$, es decir, $Q \vDash \phi_u[f(p_{n_1}), \ldots, f(p_{n_m}), f(p)]$.

Recíprocamente, $\bigwedge r \in \omega \; i|_{I_r} \in A$ y para todo $r \in \omega$ existe un $r' \in \omega$ tal que $i|_{I_r} \prec i|_{I_{r'}}$, luego A tiene cadenas infinitas. Esto implica que A tiene cadenas infinitas en M (pues si no las tuviera, la inversa de la relación $\prec$ estaría bien fundada^M, luego existiría una función rango $\operatorname{rang} : A \longrightarrow \Omega$ en M tal que $f \prec g \rightarrow \operatorname{rang} g < \operatorname{rang} f$, luego no existirían cadenas infinitas^V). De una cadena infinita en M obtenemos una inmersión elemental $j \in M$. ■

10.3 Caracterización de los árboles homogéneos

Vamos a probar que la homogeneidad de un árbol es equivalente a la existencia de una familia de modelos transitivos de ZFC conectados adecuadamente por inmersiones elementales.

Sea R un árbol de Suslin κ-homogéneo. Definimos $M_s = \mathrm{Ult}_{U_s}(V)$ (de modo que $M_\varnothing = V$) y sea $j_{\varnothing s} : V \longrightarrow M_s$ la inmersión canónica. Sea $f_s = [d] \in M_s$, donde $d : \gamma^n \longrightarrow \gamma^n$ es la identidad y $n = \ell(s)$.

Notemos que $f_s \in j_{\varnothing s}(R_s)$, pues esto equivale a que $\{i \in \gamma^n \mid i \in R_s\} \in U_s$, lo cual es cierto. En particular, $f_s \in j_s(\gamma)^n$.

Notemos también que todo elemento de M_s es de la forma $j_{\varnothing s}(g)(f_s)$, donde $g : \gamma^n \longrightarrow V$. En efecto, en principio será de la forma $[g]$, para cierta función g, y la igualdad $[g] = j_{\varnothing s}(g)[f_s]$ (es decir, $[g] = [c_g]([f_s])$) equivale a que

$$\{i \in \gamma^n \mid g(i) = g(i)\} \in U_s.$$

Ahora observamos que si $s \leq t$ y $j_{\varnothing,s}(g)(f_s) = j_{\varnothing s}(h)(f_s)$, también se cumple que $j_{\varnothing t}(g)(f_t|_n) = j_{\varnothing t}(h)(f_t|_n)$. En efecto, ambas afirmaciones equivalen respectivamente a que

$$\{i \in \gamma^n \mid g(i) = h(i)\} \in U_s, \qquad \{i \in \gamma^m \mid g(i|_n) = h(i|_n)\} \in U_t$$

y la primera afirmación implica la segunda porque U_t extiende a U_s.

Por consiguiente, si $s \leq t$, podemos definir $j_{s,t} : M_s \longrightarrow M_t$ mediante $j_{s,t}(j_{\varnothing,s}(g)(f_s)) = j_{\varnothing t}(g)(f_t|_n)$. Es fácil ver que, cuando $s = \varnothing$, la aplicación $j_{\varnothing,t}$ es la que ya teníamos definida, que $j_{s,s}$ es la identidad y que si $s \leq t \leq u$ entonces $j_{s,t} \circ j_{t,u} = j_{s,u}$. Además, $j_{s,t}$ es una inmersión elemental, pues,

$$\phi^{M_s}(j_{\varnothing s}(g_1)(f_s), \ldots, j_{\varnothing s}(g_r)(f_s)) \leftrightarrow \{i \in \gamma^n \mid \phi(g_1(i), \ldots, g_r(i))\} \in U_s,$$

$$\phi^{M_t}(j_{\varnothing t}(g_1)(f_t|_n), \ldots, j_{\varnothing t}(g_r)(f_t|_n)) \leftrightarrow \{i \in \gamma^m \mid \phi(h_1(i), \ldots, h_r(i))\} \in U_t,$$

donde $h_u(i) = g_u(i|_m)$ (pues así $j_{\varnothing t}(g_u)(f_t|_n) = [h_u]$), y la primera afirmación implica la segunda porque U_t extiende a U_s.

Teorema 10.9 *Si R es un árbol κ-homogéneo en un conjunto $X \times \gamma$ (donde $\kappa \geq |X|^+$), existen modelos transitivos M_s de* ZFC *para cada $s \in X^{<\omega}$ (con $M_\varnothing = V$), conectados por inmersiones elementales $j_{s,t} : M_s \longrightarrow M_t$ (para $s \leq t$) y existen sucesiones $f_s \in j_{\varnothing s}(R_s)$ tales que:*

- *Las inmersiones $j_{s,t}$ fijan a los ordinales menores que κ y conmutan de forma natural (es decir, si $s \leq t \leq u$, entonces $j_{s,t} \circ j_{t,u} = j_{s,u}$).*
- *Si $s < t$ entonces $j_{s,t}(f_s) < f_t$.*
- *Para cada $x \in p[R]$, el límite inductivo de los modelos $\{M_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ está bien fundado.*

Demostración: Ya hemos construido todos los objetos cuya existencia afirma el teorema. Falta probar que cumplen todas las condiciones indicadas. La condición sobre los ordinales fijados no es sino [PC 11.22].

La condición sobre los f_s se cumple debido a que $f_d = [d]$, donde d es la identidad en γ^n, luego $f_s = j_{\varnothing s}(d)(f_s)$, luego $j_{s,t}(f_s) = j_{\varnothing t}(d)(f_t|_n)$, pero $j_{\varnothing t}(d)$ es la identidad, luego $j_{s,t}(f_s) = f_t|_n < f_t$.

Tomemos ahora $x \in p[R]$ y supongamos que el límite directo M de los modelos $\{M_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ no estuviera bien fundado, es decir, que existiera una sucesión $\{[m_{n_k}]\}_{k\in\omega}$ decreciente para la pertenencia en M. Podemos exigir que $m_{n_k} \in M_{x|_{n_k}}$, donde la sucesión $\{n_k\}_{k\in\omega}$ es estrictamente creciente. Así, si $k < k'$, tenemos que $m_{n_{k'}} \in j_{x|_{n_k},x|_{n_{k'}}}(m_{n_k})$. Pongamos que $m_{n_k} = [g_{n_k}]$, de modo que la condición anterior se traduce a que

$$Z_{n_{k'}} = \{i \in \gamma^{n_{k'}} \mid g_{n_{k'}}(i) \in g_{n_k}(i|_{n_k})\} \in U_{n_{k'}}.$$

Entonces tenemos definida una sucesión $\{Z_n\}_{n\in\omega}$, donde $Z_n = \gamma^n$ cuando $n \neq n_k$ para ningún k y, como la torre $\{U_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ es numerablemente completa, existe una sucesión de ordinales $i = \{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ tal que $i|_n \in Z_n$. En particular

$$\cdots \in g_{n_2}(i|_{n_2}) \in g_{n_1}(i|_{n_1}) \in g_{n_0}(i|_{n_0}),$$

lo cual es imposible. ■

Teorema 10.10 *Dado un árbol R en $X \times \gamma$, si existen modelos en las condiciones del teorema anterior, entonces R es κ-homogéneo.*

Demostración: Definimos $U_s = \{Z \subset \gamma^n \mid f_s \in j_{\varnothing s}(Z)\}$. Es obvio que U_s es un ultrafiltro en γ^n. Veamos que U_s es κ-completo (y como estamos suponiendo que $\kappa \geq |X|^+$) esto implica en particular una de las condiciones de la definición de árbol homogéneo).

Tomamos una sucesión $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ de elementos de U_s, para cierto cardinal $\xi < \kappa$ y sea $Z = \bigcap\limits_{\alpha<\xi} Z_\alpha$.

Si llamamos $S = \{Z_\alpha\}_{\alpha<\xi}$, tenemos que $j(S)$ es una sucesión de conjuntos de longitud $j_{\varnothing,s}(\xi) = \xi$ y, para todo $\alpha < \xi$, de $(\alpha, Z_\alpha) \in S$ se sigue que $(\alpha, j_{\varnothing,s}(Z_\alpha)) \in j_{\varnothing,s}(S)$. En definitiva, $j_{\varnothing,s}(\{Z_\alpha\}_{\alpha<\xi}) = \{j_{\varnothing,s}(Z_\alpha)\}_{\alpha<\xi}$. Como

$$\bigwedge i(i \in Z \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \xi\ i \in Z_\alpha),$$

también se cumple que

$$\bigwedge i(i \in j_{\varnothing s}(Z) \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \xi\ i \in j_{\varnothing s}(Z_\alpha)),$$

de modo que $j_{\varnothing s}(Z) = \bigcap\limits_{\alpha<\xi} j(Z_\alpha)$. De aquí se sigue que $f_s \in j_{\varnothing s}(Z)$, es decir, que $Z \in U_s$.

Supongamos ahora que $s \leq t$ y sea $Z \in U_s$. Entonces, $\bigwedge i(i \in Z^* \leftrightarrow i|_n \in Z)$, luego $\bigwedge i(i \in j_{\varnothing t}(Z^*) \leftrightarrow i|_n \in j_{\varnothing t}(Z))$. Aplicamos esto a $i = f_t$, de modo que $f_t \in j_{\varnothing t}(Z^*) \leftrightarrow f_t|_n \in j_{\varnothing t}(Z)$, pero $f_t|_n = j_{s,t}(f_s)$, luego

$$Z \in U_s \to f_s \in j_{\varnothing s}(Z) \to f_t|_n \in j_{\varnothing t}(Z) \to f_t \in j_{\varnothing t}(Z^*) \to Z^* \in U_t.$$

Por último, tomamos $x \in p[R]$ y una sucesión $\{Z_n\}_{n\in\omega}$ tal que $Z_n \in U_{x|_n}$. Esto significa que $f_{x|_n} \in j_{\varnothing x|_n}(Z_n)$. Sea M el límite inductivo de los modelos $\{M_{x|_n}\}_n$, que está bien fundado y sea $f_n = j_{x|_n}(f_{x|_n}) \in M$. La propiedad de compatibilidad entre los $f_{x|_n}$ implica que cada f_n extiende a los anteriores, y la unión de todos ellos determina una aplicación $f : \omega \longrightarrow \Omega$, de modo que $f|_n \in j(Z_n)$, donde $j : V = M_{x|_0} \longrightarrow M$ es la inmersión canónica en el límite inductivo.

Sea B el árbol de las sucesiones finitas de ordinales $s \in \gamma^{<\omega}$ tales que si $s \in \gamma^n$ y $m \leq n$, entonces $s|_m \in Z_m$. Basta probar que B tiene una rama infinita o, lo que es lo mismo, que no está bien fundado con la relación inversa de la inclusión, pero esto equivale a que $j(B)$ no esté bien fundado^M, que a su vez (teniendo en cuenta que M está bien fundado) equivale a que $j(B)$ no esté bien fundado, y esto es cierto, porque $\{f_n\}_n$ es una rama infinita en $j(B)$ (no necesariamente en M). ■

Necesitaremos también este hecho:

Teorema 10.11 *En las condiciones del teorema* 10.9, *si x es una rama infinita en $X^{<\omega}$ tal que el límite inductivo M_x de los modelos $M_{x|_n}$ está bien fundado, entonces $x \in p[R]$.*

Demostración: Como en la prueba del teorema anterior, consideramos las funciones $f_n = j_{x|_n}(f_{x|_n}) \in M_x$, que determinan una función $f : \omega \longrightarrow \Omega$.

Como $f_{x|_n} \in j_{\varnothing x|_n}(R_{x|_n})$, se cumple que $f_n \in j_\varnothing(R_{x|_n})$, luego f determina una rama infinita en el árbol $j_\varnothing(R_x)$. Dicha rama no está necesariamente en M_x, pero, como el modelo está bien fundado, podemos concluir que $j_\varnothing(R_x)$ no está bien fundado^{M_x}, luego R_x no está bien fundado.[2] Esto significa que existe una rama infinita en R_x que determina una sucesión $g \in \gamma^\omega$ tal que $(x, g) \in R$, luego $x \in p[R]$.

A su vez, esto implica que la condición c) en la definición de árbol homogéneo es una coimplicación, pues si se cumple que la torre de medidas es numerablemente completa, el argumento del teorema 10.9 prueba que el modelo M_x está bien fundado, y acabamos de ver que esto implica que $x \in p[R]$. ■

10.4 Iteraciones de modelos

Definición 10.12 Un *árbol de índices* es una relación de orden parcial $\trianglelefteq$ en ω que cumpla las propiedades siguientes:

a) $\bigwedge mn \in \omega \ (m \trianglelefteq n \rightarrow m \leq n)$.

b) $\bigwedge n \in \omega \ 0 \trianglelefteq n$.

c) Para todo $n \in \omega$, el conjunto (finito) $\{m \in \omega \mid m \trianglelefteq n\}$ está totalmente ordenado (luego, de hecho, bien ordenado) y tiene a 0 como mínimo elemento.

[2]Recordemos que estar bien fundado es una propiedad absoluta para modelos transitivos de ZFC, porque es Δ_1 ([PC] 1.37).

Un *árbol de iteraciones* $\mathcal{A}$ de un modelo transitivo M es un par $(\trianglelefteq, \{E_n\}_{n\in\omega})$ donde $\trianglelefteq$ es un árbol de índices y existen sucesiones $\{M_n\}_{n\in\omega}$, $\{j_{m,n}\}_{m\trianglelefteq n}$ de modo que se cumplan las propiedades siguientes (las cuales, de hecho, determinan completamente las sucesiones $\{M_n\}_{n\in\omega}$ y $\{j_{m,n}\}_{m\trianglelefteq n}$):

a) Cada M_n es un modelo transitivo de ZFC y $M_0 = M$.

b) Para cada $n \in \omega$, o bien $E_n = \varnothing$, o bien $E_n \in (M_n)$ es un extensor^{M_n}.

c)
   1. Si $E_n = \varnothing$, entonces $n+1$ es inmediatamente posterior a n en el árbol de índices, $M_{n+1} = M_n$ y $j_{n,n+1}$ es la identidad en M_n.
   2. Si $E_n \neq \varnothing$, entonces, llamando m al anterior de $n+1$ en el árbol de índices, se cumple que M_m y M_n concuerdan hasta el punto crítico de E_n (de modo que E_n es un preextensor sobre M_m), $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$ y $j_{m,n} : M_m \longrightarrow M_{n+1}$ es la inmersión canónica en la ultrapotencia.

d) Si $j_{n,n}$ es la identidad en M_n y si $m \lhd n$, $j_{m,n}$ es la composición de las inmersiones determinadas por el apartado anterior para cada par de nodos consecutivos en el árbol de índices. Así, si $m \trianglelefteq n \trianglelefteq p$, se cumple que $j_{m,n} \circ j_{n,p} = j_{m,p}$.

En los árboles de iteraciones que vamos a considerar supondremos siempre las propiedades adicionales siguientes:

a) Si $E_n \neq \varnothing$, su soporte λ_n es un cardinal inaccesible^{M_n} y coincide con su fortaleza^{M_n}.

b) Si $m < n$ y E_m, $E_n \neq \varnothing$, entonces la fortaleza de E_m es estrictamente menor que la de E_n.

c) Si $E_n \neq \varnothing$, m es el anterior de $n+1$ en el árbol de índices y $M_m \neq M_n$, entonces[3] el punto crítico de E_n es menor que λ_m.

Así, en las condiciones del punto c) 2. de la definición anterior, tenemos que M_m y M_n concuerdan hasta el punto crítico κ_n de E_n, luego, por 9.38, las ultrapotencias $\mathrm{Ult}_{E_n}(M_n)$ y $\mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$ concuerdan hasta $j_{m,n}(\kappa_n) \geq \lambda_n$. Por la propiedad adicional a) tenemos que $V_{\lambda_n}^{M_n} = V_{\lambda_n}^{\mathrm{Ult}_{E_n}(M_n)}$, luego también $V_{\lambda_n}^{M_n} = V_{\lambda_n}^{M_{n+1}}$. Teniendo en cuenta la propiedad adicional b), concluimos que, en general, los modelos de todo árbol de iteraciones cumplen lo siguiente:

Si $n < n'$, entonces $V_{\lambda_n}^{M_n} = V_{\lambda_n}^{M_{n'}}$.

A su vez la propiedad adicional c) hace que la condición impuesta en c) 2. de que M_m y M_n coincidan hasta el punto crítico de E_n se cumpla trivialmente, pues éste está por debajo de λ_m y ya sabemos que $V_{\lambda_m}^{M_m} = V_{\lambda_m}^{M_n}$.

[3]La condición $M_m \neq M_n$ ha de entenderse, más precisamente, como que no existe una cadena de índices $m = i_0 \lhd \cdots \lhd i_r = n$ tal que $E_{i_j} = \varnothing$ para todo j.

Más explícitamente: si estamos construyendo recurrentemente un árbol de iteraciones y tenemos definidos los modelos, inmersiones y extensores hasta M_n de modo que se cumpla la definición de árbol de iteraciones con las propiedades adicionales, en ese punto tenemos garantizado que $V_{\lambda_m}^{M_m} = V_{\lambda_m}^{M_n}$, luego al tomar un extensor $E_n \in M_n$ con la condición de que su punto crítico sea menor que λ_m ya tenemos asegurado que los modelos M_m y M_n coinciden hasta dicho punto crítico.

Teorema 10.13 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC *numerablemente cerrado, entonces los modelos de todo árbol de iteraciones sobre M son numerablemente cerrados.*

Demostración: Comprobamos por inducción que cada uno de los modelos M_n es numerablemente cerrado. Si es cierto para $m \leq n$, entonces $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$, donde E_n es un extensor^{M_n} y M_n concuerda con M_m hasta el punto crítico de E_n. Por hipótesis de inducción tanto M_n como M_m son numerablemente cerrados. El teorema 9.36 implica que M_{n+1} también es numerablemente cerrado. ■

Notemos que el teorema es válido igualmente si cambiamos "numerablemente cerrado" por $2^{\aleph_0}$-cerrado.

En la práctica, la demostración inductiva del teorema anterior implica que si estamos construyendo un árbol de iteraciones por recurrencia partiendo de un modelo transitivo numerablemente cerrado, no tendremos que preocuparnos por que las ultrapotencias que vamos construyendo estén bien fundadas, tal y como exige la definición de árbol de iteraciones, sino que, si tenemos definidos los modelos (bien fundados) y la relación de orden $\trianglelefteq$ hasta n y podemos elegir un número natural m sobre el que situar el nodo $n+1$ y un extensor E_n en M_n con punto crítico menor que λ_m, etc., la ultrapotencia $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$ será numerablemente cerrada y estará automáticamente bien fundada.

Obviamente, un modelo transitivo numerable de ZFC no puede ser numerablemente cerrado, pero podemos dar un otro criterio de buena fundación:

Teorema 10.14 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *tal que exista una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V$ y sea $\mathcal{A}$ un árbol de iteraciones sobre M. Entonces existe un árbol de iteraciones $\pi\mathcal{A}$ sobre V con el mismo árbol de índices que $\mathcal{A}$ y una familia de inmersiones elementales $\pi_n : M_n \longrightarrow M_n^*$, donde los modelos M_n^* son los correspondientes a $\pi\mathcal{A}$, de forma que, si $m \trianglelefteq n$ en dicho árbol de índices, el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "\pi_n"] & M_n^* \\ M_m \arrow[u, "j_{m,n}"] \arrow[r, "\pi_m"'] & M_m^* \arrow[u, "j^*_{m,n}"'] \end{tikzcd}$$

Más aún, $\pi_0 = \pi$ y los extensores de $\pi\mathcal{A}$ son los dados por $E_n^* = \pi_n(E_n)$.

Nota La demostración siguiente muestra que, si construimos el árbol $\mathcal{A}$ recurrentemente, la construcción de $\pi\mathcal{A}$ puede realizarse simultáneamente, de modo que, como V es numerablemente cerrado, los modelos M_n^* resultan estar bien fundados automáticamente, y la existencia de las inmersiones π_n hace que los modelos M_n también lo estén.

DEMOSTRACIÓN: Definimos $M_0^* = V$ y $\pi_0 = \pi : M \longrightarrow V$. Supongamos que ya hemos definido los modelos $\{M_m^*\}_{m\leq n}$, las inmersiones $\{\pi_m\}_{m\leq n}$ y los extensores $\{E_m^*\}_{m<n}$. Tomaremos también como parte de la hipótesis de inducción que si $u < v$ entonces π_u y π_v coinciden sobre $V_{\lambda_u}^{M_u}$.

Llamamos $E_n^* = \pi_n(E_n)$. Si $E_n = \varnothing$, también tenemos que $E_n^* = \varnothing$ y M_{n+1}^* se define de acuerdo con la definición de árbol de iteraciones. Si $E_n \neq \varnothing$, entonces resulta que E_n^* es un extensor$^{M_n^*}$ con soporte y fortaleza iguales a $\pi_n(\lambda_n)$. Es claro que así E_n^* cumple las tres propiedades adicionales que estamos exigiendo a los árboles de iteraciones.

Sea m el anterior a $n+1$ en el árbol de índices. Entonces M_m y M_n coinciden hasta κ_n y $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_m)$. Queremos definir M_{n+1}^* como la copia de esta ultrapotencia a través de las inmersiones π_m y π_n (definición 9.37). Para que esto tenga sentido es necesario que ambas inmersiones coincidan sobre $V_{\kappa_m+1}^{M_m} = V_{\kappa_n+1}^{M_n}$, lo cual es cierto porque, por hipótesis de inducción, ambas coinciden sobre $V_{\lambda_m}^{M_n}$ y por la propiedad adicional c) de la definición de extensor $\kappa_n < \lambda_m$ (salvo que $M_m = M_n$, en cuyo caso también $M_m^* = M_n^*$ y no hay problema).

Definimos $\pi_{n+1} : M_{n+1} \longrightarrow M_{m+1}^*$ como la inmersión natural asociada a la copia. Como E es λ_n fuerte^{M_n}, la observación tras el teorema 9.38 implica que π_{n+1} coincide con π_n sobre $V_{\lambda_n}^{M_n}$. Además, tenemos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} M_{n+1} \arrow[r, "\pi_{n+1}"] & M_{n+1}^* \\ M_m \arrow[u, "j_{m,n}"] \arrow[r, "\pi_m"'] & M_m^* \arrow[u, "j_{m,n}^*"'] \end{tikzcd}$$

y de aquí se sigue la conmutatividad de todos los diagramas análogos construidos hasta este punto. ■

Definición 10.15 Una *rama* r en un árbol de iteraciones es una rama de su árbol de índices. Si r es una rama infinita, llamamos M_r al límite inductivo del sistema formado por los modelos $\{M_n\}_{n\in r}$ y las inmersiones $\{j_{m,n}\}_{m\trianglelefteq n}$. Para cada $n \in r$, representaremos mediante $j_{n,r} : M_n \longrightarrow M_r$ a la inmersión elemental natural en el límite inductivo.

Diremos que una rama infinita r está *bien fundada* si lo está el modelo M_r.

Vamos a demostrar un hecho que no es trivial en absoluto, y es que todo árbol de iteraciones con al menos una rama infinita tiene al menos una rama infinita bien fundada. Veremos que el problema se puede reducir a estudiar el caso extremo siguiente:

Definición 10.16 Un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ está *continuamente mal fundado* si existe una sucesión de ordinales $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\alpha_n \in M_n$ y, siempre que $m \lhd n$, se cumple $j_{m,n}(\alpha_m) > \alpha_n$.

Un árbol de iteraciones continuamente mal fundado no puede tener ramas infinitas bien fundadas, pues si r es una rama infinita es claro que la sucesión $\{j_{n,r}(\alpha_n)\}_{n\in r}$ es decreciente para la relación de pertenencia en M_r. Ahora bien:

Teorema 10.17 *Sea $\mathcal{B}$ un árbol de iteraciones (en V) que tenga al menos una rama infinita. Entonces $\mathcal{B}$ no está continuamente mal fundado.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{B}$ está continuamente mal fundado y sea $\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de ordinales según la definición 10.16. Sea η tal que $\mathcal{B} \in V_\eta$ y sea β'_n el β_n-simo cardinal regular^{M_n} mayor que $j_{0,n}(\eta)$. Observamos que la sucesión $\{\beta'_n\}_{n\in\omega}$ también cumple la definición 10.16. En efecto, si $m \lhd n$, tenemos que (β'_m es el β_m-simo cardinal regular mayor que $j_{0,m}(\eta))^{M_m}$, luego $j_{m,n}(\beta'_m)$ es el $j_{m,n}(\beta_m)$-simo cardinal regular^{M_n} mayor que $j_{0,n}(\eta)$, luego es menor que el β_n-simo cardinal regular^{M_n} mayor que $j_{0,n}(\eta)$, es decir, que β'_n, ya que $j_{m,n}(\beta_m) > \beta_n$. Por lo tanto, cambiando β_n por β'_n podemos suponer que β_n es un cardinal regular^{M_n} y que $\beta_n > j_{0,n}(\eta)$.

Por el teorema de reflexión existe un ordinal θ tal que $\mathcal{B}$, $\{\beta_n\}_{n\in\omega} \in V_\theta$ y V_θ es un modelo de ZFC en el que $\mathcal{B}$ y $\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ cumplen todo lo anterior. Sea N el núcleo de Skolem de V_θ que contiene a $\mathcal{B}$ y a $\{\beta_n\}_{n\in\omega} \in V_\theta$ (definición [PC 1.8]), sea M su colapso transitivo que es un modelo transitivo numerable de ZFC, y sea $\pi : M \longrightarrow V_\theta$ la inversa de la función colapsante, que es una inmersión elemental. Llamemos $\mathcal{A} = \pi^{-1}(\mathcal{B})$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\omega} = \pi^{-1}(\{\beta_n\}_{n\in\omega})$.

De este modo, se cumple que $\mathcal{A}$ es un árbol de iteraciones en M continuamente mal fundado, la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ cumple la definición 10.16 y α_n es regular^{M_n}. Más aún, para todo par de naturales m y n se cumple que $E_n \in V_{\alpha_m}^{M_m}$. En efecto, por la elección de η tenemos que

$$E_n^{\mathcal{B}} \in V_\eta \subset V_{j_{0,m}(\eta)} \subset V_{\beta_m},$$

luego esto sigue siendo cierto en N y se cumple en M cambiando $\mathcal{B}$ por $\mathcal{A}$ y β_m por α_m.

A partir de aquí se entenderá que todos los extensores, modelos, inmersiones, etc. se refieren al árbol de iteraciones $\mathcal{A}$. Llamaremos ρ_n a la fortaleza del extensor E_n. Sabemos que si $n < n'$ entonces $V_{\rho_n}^{M_n} = V_{\rho_n}^{M_{n'}}$. Además, para todo par de naturales m y n, como $E_n \in V_{\alpha_m}^{M_m}$ y ρ_n es también el soporte de E_n, se cumple que $\rho_n < \alpha_m$.

Ahora vamos a construir recurrentemente una familia de inmersiones elementales $\sigma_n : V_{\alpha_n}^{M_n} \longrightarrow P_n$ de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

a) $V_{\aleph_1} \subset P_n$.

b) Si $k < n$, entonces σ_k y σ_n coinciden en $V_{\rho_k}^{M_k}$

c) $\sigma_n \in P_n$.

d) Para todo $n \in \omega$, $P_{n+1} \in P_n$.

La última propiedad es una contradicción que probará el teorema.

Notemos que, como M es un modelo transitivo numerable de ZFC, se cumple que $M \in V_{\aleph_1}$, luego M pertenece a todos los modelos P_n y es numerable en todos ellos.

Definimos $P_0 = V_{\beta_0}$ y $\sigma_0 = \pi|_{V_{\alpha_0}^{M_0}}$. Como $\pi(\alpha_0) = \beta_0$ y $\pi : M_0 \longrightarrow V_\theta$ es una inmersión elemental, es claro que $\sigma_0 : V_{\alpha_0}^{M_0} \longrightarrow V_{\beta_0}$ también es una inmersión elemental. Como β_0 es un cardinal regular no numerable, se cumple también que $V_{\aleph_1} \subset M_0$.

Supongamos construidas las inmersiones σ_i para $i \leq n$ y veamos cómo construir σ_{n+1}.

Sea k el anterior a $n+1$ en el árbol de índices. Así[4] $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{E_n}(M_k)$. Llamemos $\gamma = j_{k,n+1}(\alpha_k)$. Entonces $V_\gamma^{M_{n+1}} = \mathrm{Ult}_{E_n}(V_{\alpha_k}^{M_k})$. Notemos que $V_{\alpha_k}^{M_k}$ no cumple necesariamente el axioma de reemplazo, pero esto no impide construir la ultrapotencia. En realidad, sabemos que los elementos de $V_\gamma^{M_{n+1}}$ son los de la forma $[f,a]$ con $f : \kappa_n \longrightarrow V_{\alpha_k}^{M_k}$ y $a \in \rho_n$, y en este sentido podemos entender la igualdad anterior.

Las inmersiones σ_k y σ_n coinciden sobre $V_{\rho_k}^{M_k}$ y el punto crítico de E_n es menor que ρ_k. Por lo tanto, se cumplen las condiciones necesarias para construir la copia P_n^* de la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_{E_n}(V_{\alpha_k}^{M_k})$, es decir, $P_n^* = \mathrm{Ult}_{F_n}(P_k)$, donde $F_n = \sigma_n(E_n) \in P_n$. Sea $\sigma_n^* : V_\gamma^{M_{n+1}} \longrightarrow P_n^*$ la inmersión elemental correspondiente y sea $\phi_n = \sigma_n(\rho_n)$, de modo que F_n es ϕ_n-fuerte^{P_n}. Por 9.38 tenemos que $V_{\phi_n}^{P_n} = V_{\phi_n}^{\mathrm{Ult}_{F_n}(P_n)} = V_{\phi_n}^{P_n^*}$. En particular, $V_{\aleph_1} \subset V_{\phi_n}^{P_n} \subset P_n^*$.

Por la observación tras el teorema 9.38, como E_n es ρ_n-fuerte^{M_n}, tenemos que σ_n^* coincide con σ_n en $V_{\rho_n}^{M_n}$.

Puesto que $\{\alpha_n\}_n$ cumple 10.16, tenemos que $\alpha_{n+1} < j_{k,n+1}(\alpha_k) = \gamma$, luego está definido $\alpha_n^* = \sigma_n^*(\alpha_{n+1}) \in P_n^*$ (y es un ordinal grande en P_n^*, pues tiene por debajo cardinales inaccesibles$^{P_n^*}$).

De este modo, $\sigma_n^*|_{V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}}} : V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}} \longrightarrow V_{\alpha_n^*}^{P_n^*}$ es una inmersión elemental tal que si la tomáramos como σ_{n+1} cumpliría las propiedades a) y b). No obstante, para garantizar las otras dos propiedades hemos de hacer algunas manipulaciones más.

Por hipótesis de inducción $\sigma_n \in P_n$ y, como ϕ_n es inaccesible^{P_n}, es claro que $\sigma_n^*|_{\rho_n} = \sigma_n|_{\rho_n} \in V_{\phi_n}^{P_n} = V_{\phi_n}^{P_n^*}$. Veamos que $\tau = \sigma_n^*|_{V_{\rho_n}^{M_{n+1}}} \in P_n^*$.

[4]La definición de árbol de iteraciones contempla la posibilidad de que $E_n = \varnothing$. En este caso definimos $\sigma_{n+1} = \sigma_n$. El decrecimiento de la sucesión de modelos P_n se cumple en realidad para aquellos valores de n para los que $E_n \neq \varnothing$.

En efecto, ante todo, $\rho_n \leq \sigma_n(\rho_n) = \phi_n$, pero, de hecho, $\rho_n < \phi_n$, porque, como $\rho_n \in M$, sucede que ρ_n es numerable^{P_n}, mientras que, como ρ_n es inaccesible^{M_n}, se cumple que ϕ_n es inaccesible^{P_n}.

Por otra parte, ρ_n es inaccesible^{M_n} y la igualdad $V_{\rho_n}^{M_n} = V_{\rho_n}^{M_{n+1}}$ implica que ρ_n es límite fuerte$^{M_{n+1}}$. Por lo tanto, existe $f \in M_{n+1}$ tal que $f : \rho_n \longrightarrow V_{\rho_n}^{M_{n+1}}$ biyectiva.

De hecho, $f \in V_{\rho_n+1}^{M_{n+1}} \subset V_{\phi_n}^{M_{n+1}} \subset P_n^*$ y también $f \in V_\gamma^{M_{n+1}}$, de donde $g = \sigma_n^*(f) \in P_n^*$. Así, si $x \in V_{\rho_n}^{M_{n+1}}$, existe un $\delta < \rho_n$ tal que $x = f(\delta)$, luego $\tau(x) = g(\sigma_n^*(\delta))$. En suma, $\tau = f^{-1} \circ \sigma_n^*|_{\rho_n} \circ g \in P_n^*$.

Veamos que existe una inmersión elemental $\sigma_n^{**} : V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}} \longrightarrow V_{\alpha_n^*}^{P_n^*}$ tal que:

- $\sigma_n^{**}|_{V_{\rho_n}^{M_{n+1}}} = \tau$.
- $\sigma_n^{**}(\rho_n) = \phi_n$.
- $\sigma_n^{**} \in P_n^*$.

Notemos que $\sigma_n^*|_{V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}}} : V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}} \longrightarrow V_{\alpha_n^*}^{P_n^*}$ es una inmersión elemental que cumple las dos primeras condiciones, pero no necesariamente la tercera. A su vez, una inmersión σ_n^{**} que cumpla estas tres condiciones cumpliría las propiedades a), b), c) si la tomáramos como σ_{n+1}.

La existencia de σ_n^{**} se sigue de una leve adaptación de la prueba del teorema 10.8, consistente en no considerar el conjunto A de todas las aplicaciones de un segmento finito de $V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}}$ en $V_{\alpha_n^*}^{P_n^*}$, sino únicamente aquellas que sobre los elementos de $V_{\rho_n}^{M_{n+1}}$ coinciden con τ y sobre ρ_n (si es que está en su dominio) toman el valor ϕ_n. Como $\tau \in P_n^*$, sigue siendo cierto que $A \in P_n^*$ y la demostración del teorema indicado vale sin ningún otro cambio.

Ahora hemos de hacer un último ajuste para garantizar que $P_{n+1} \in P_n$. Notemos que la mala fundación del árbol de partida la hemos usado al probar que $\alpha_{n+1} < \gamma$ y que, en consecuencia existe $\alpha_n^* \in P_n^*$. Esto a su vez implica que $P_n^{**} = V_{\alpha_n^*}^{P_n^*} \in P_n^*$. Sea H el núcleo de Skolem de $P_n^{**}|_{\phi_n} \cup \{\phi_n, \sigma_n^{**}\}$ en P_n^{**}. Definimos P_{n+1} como el colapso transitivo de H y sea $j : P_{n+1} \longrightarrow P_n^{**}$ la inversa de la función colapsante, que es una inmersión elemental.

Así, es claro que $\phi_n \in P_{n+1}$ y $V_{\phi_n}^{P_{n+1}} = V_{\phi_n}^{P_n^{**}}$, lo que implica que P_{n+1} cumple la propiedad a).

Sea $\sigma_{n+1} \in P_{n+1}$ tal que $j(\sigma_{n+1}) = \sigma_n^{**}$. Como j es una inmersión elemental, tenemos que $\sigma_{n+1} : V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}} \longrightarrow P_{n+1}$ es una inmersión elemental y se cumple la propiedad c).

Más explícitamente, si $x \in V_{\alpha_{n+1}}^{M_{n+1}}$ y $\sigma_{n+1}(x) = y$, entonces, aplicando j, vemos que $\sigma_n^{**}(x) = j(y)$, pues j es la identidad sobre $V_{\phi_n}^{P_{n+1}}$. Por esto mismo, dado que $\sigma_{n+1} = \sigma_n^{**} \circ j^{-1}$, se cumple que $\sigma_{n+1}|_{V_{\rho_n}^{M_n}} = \sigma_n^{**}|_{V_{\rho_n}^{M_n}} = \sigma_n|_{V_{\rho_n}^{M_n}}$ y se cumple la propiedad b).

Terminaremos la demostración probando que $P_{n+1} \in P_n$.

Como P_n^{**} y $\sigma_n^{**} \in P_n^*$, tenemos que $H \in P_n^*$ y el cardinal$^{P_n^*}$ de H es ϕ_n, ya que ϕ_n es un límite fuerte$^{P_n^*}$. Por consiguiente, también $|P_{n+1}|^{P_n^*} = \phi_n$ y podemos expresar P_{n+1} como el colapso transitivo de un conjunto $A \subset \phi_n$, $A \in P_n^*$. Basta probar que $A \in P_n$. Ahora bien, $P_n^* = \mathrm{Ult}_{F_n}(P_k)$ y P_k y P_n concuerdan sobre el punto crítico κ de F_n, luego por 9.38 las ultrapotencias P_n^* y $\mathrm{Ult}_{F_n}(P_n)$ concuerdan sobre $i(\kappa)$, pero como F_n es ϕ_n-fuerte, el teorema 9.28 nos da que $\phi_n \leq i(\kappa)$, luego

$$A \in V_{\phi_n+1}^{P_n^*} \subset V_{i(k)+1}^{P_n^*} = V_{i(\kappa)+1}^{\mathrm{Ult}_{F_n}(P_n)} \subset P_n,$$

donde la última inclusión se debe a que la ultrapotencia es definible en P_n, ya que $F_n \in P_n$. ■

Ahora ya es fácil probar:

Teorema 10.18 *Todo árbol de iteraciones con una rama infinita tiene una rama bien fundada.*

Demostración: Consideremos un árbol con una rama infinita y supongamos que no tiene ramas bien fundadas. No perdemos generalidad si suponemos que $M_0 = V$. Para cada rama infinita r sea $\{\alpha_n^r\}_{n\in r}$ una sucesión de ordinales tal que, si $m \lhd n$ están en r, se cumple que $j_{m,n}(\alpha_m^r) > \alpha_n^r$. Sea θ un ordinal mayor que todos los ordinales α_n^r para toda rama infinita r y todo $n \in \omega$.

Para cada $n \in \omega$, sea R_n el conjunto de todas las ramas infinitas que contienen a n, sea F_n el conjunto de funciones de R_n en θ y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los pares (n, f) tales que $n \in \omega$ y $f \in F_n$. Definimos en $\mathcal{C}$ la relación dada por $(n, f) \prec (m, g)$ si y sólo si $m \lhd n$ y $f(r) < g(r)$ para todo $r \in R_n$.

Observemos que la relación $\prec$ está bien fundada, pues si $\{(n_i, f_i)\}_{i\in\omega}$ fuera una sucesión decreciente, entonces existe una rama r que contiene a todos los n_i, y $\{f_i(r)\}_{i\in\omega}$ sería una sucesión decreciente de ordinales.

Para cada $n \in \omega$ sea $\phi_n : R_n \longrightarrow \theta$ la función dada por $\phi_n(r) = \alpha_n^r$. Por la observación tras 10.13 sabemos que cada modelo M_n es $2^{\aleph_0}$-cerrado, luego $\phi_n \in M_n$. La inmersión $j_{0,n}$ fija al árbol de índices, luego $j_{0,n}(R_n) = R_n$ y claramente $(n, \phi_n) \in j_{0,n}(\mathcal{C})$. Llamemos $\prec_n = j_{0,n}(\prec)$. Vamos a probar que si $m \lhd n$ entonces $(n, \phi_n) \prec_n (m, j_{m,n}(\phi_m)) = j_{m,n}(n, \phi_m)$. En efecto, esto significa que $\phi_n(r) < j_{m,n}(\phi_m)(r)$ para toda rama $r \in R_n$, lo que equivale a su vez a que $\alpha_n^r < j_{m,n}(\alpha_m^r)$, y con esta condición hemos elegido los ordinales α_n^r.

Como la relación $\prec_n$ está bien fundada, podemos considerar el rango γ_n de (n, ϕ_n) respecto a ella, y acabamos de probar que $\gamma_n < j_{m,n}(\gamma_m)$. Así pues, la sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ demuestra que el árbol está continuamente mal fundado, en contradicción con el teorema anterior. ■

El resto de esta sección no será necesario para la demostración de la consistencia de ADP, pero nos hará falta en el capítulo siguiente para probar la consistencia de AD.

Definición 10.19 Una *iteración* de longitud α de un modelo transitivo M es una sucesión de objetos M_ξ, $\mathcal{A}_\xi$, r_ξ para $\xi < \alpha$ y una sucesión de inmersiones elementales $j_{\mu,\xi} : M_\mu \longrightarrow M_\xi$ para $\mu < \xi < \alpha$ de modo que:

a) $M_0 = M$.

b) Para cada $\xi < \alpha$, se cumple que $\mathcal{A}_\xi$ es un árbol de iteraciones de M_ξ, r_ξ es una rama infinita bien fundada en $\mathcal{A}_\xi$, $M_{\xi+1}$ es el límite inductivo de $\mathcal{A}_\xi$ a lo largo de r_ξ y $j_{\xi,\xi+1} : M_\xi \longrightarrow M_{\xi+1}$ es la inmersión asociada al límite inductivo.

c) Para cada ordinal límite $\lambda < \alpha$ el modelo M_λ es el límite inductivo (que ha de estar bien fundado) del sistema $\{M_\xi\}_{\xi<\lambda}$ con las inmersiones elementales $\{j_{\mu,\xi}\}_{\mu<\xi<\lambda}$.

d) Las inmersiones restantes $j_{\mu,\xi}$ son las determinadas por composición para que conmuten entre sí de forma natural.

Llamaremos *juego de iteraciones* de un modelo transitivo $M = M_0$ de ZFC al juego siguiente entre dos jugadores, a los que podemos llamar “bueno” y “malo”. El jugador malo construye un árbol de iteraciones $\mathcal{A}_0$ de M_0 que tenga al menos una rama infinita. Seguidamente, el jugador bueno escoge una de estas ramas r_0 (que esté bien fundada), con lo que determina un modelo M_1 (el límite inductivo de la rama). A continuación juega el malo construyendo un nuevo árbol $\mathcal{A}_1$, esta vez de M_1, con al menos una rama infinita, y entonces el bueno juega una rama infinita r_1 que determina un modelo M_2, y así sucesivamente hasta llegar a un modelo M_{ω_1}. (Los modelos M_λ, para los ordinales límite λ, están determinados de forma automática por los modelos anteriores, luego no los elige ninguno de los dos jugadores.)

La partida se interrumpe si un modelo M_λ (para un ordinal límite λ) resulta no estar bien fundado. En tal caso el malo gana la partida. Por el contrario, si el bueno logra llegar a un modelo M_{ω_1} bien fundado, es él quien gana la partida.

Se dice que un modelo M es *iterable* si el jugador bueno tiene una estrategia ganadora, es decir, que existe una forma de responder a cada jugada posible del jugador malo para acabar ganando siempre la partida.

Teorema 10.20 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *tal que existe una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, para cierto ordinal θ tal que V_θ sea un submodelo elemental de V. Si $\mathcal{A}$ es un árbol de iteraciones de M con al menos una rama infinita, entonces existe una rama infinita r y una inmersión elemental $\sigma : M_r \longrightarrow V_\theta$ tal que $j_{0,r} \circ \sigma = \pi$. (En particular, M_r está bien fundado, pues puede sumergirse en V_θ).*

De aquí se sigue inmediatamente que si M es un modelo transitivo numerable de ZFC para el que existe una inmersión elemental $j : M \longrightarrow V_\theta$, entonces M es iterable, pues el jugador bueno sólo tiene que elegir cada vez una rama infinita de las que el teorema asegura la existencia, pues así en cada nuevo paso sigue existiendo una inmersión análoga, y también la hay para los modelos M_λ, donde λ es un ordinal límite, por el teorema 10.5, que se puede aplicar también al construir M_{ω_1}. En este punto M_{ω_1} ya no tiene por qué ser numerable y el jugador bueno ya no podría seguir aplicando el teorema, pero es que ahí se acaba el juego.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a suponer que el teorema es falso y construiremos un árbol de iteraciones (en V) continuamente mal fundado, en contradicción con el teorema 10.17.

Consideramos el árbol $\pi\mathcal{A}$ construido en la demostración del teorema 10.14. Conservando la notación empleada allí, llamaremos M_i^* a sus modelos, de modo que $M_0^* = V$, llamaremos j_{ij}^* a sus inmersiones elementales y $\pi_i : M_i \longrightarrow M_i^*$ a las inmersiones elementales que conectan ambos árboles de iteraciones, de modo que $\pi_0 = \pi$. Como partimos de una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, en realidad cada π_i factoriza como una inmersión elemental $\pi_i : M_i \longrightarrow j_{0i}^*(V_\theta)$ seguida de la inclusión en M_i^*. Vamos a probar que $\pi\mathcal{A}$ está continuamente mal fundado.

Sea R el conjunto formado por los elementos de la forma $(a, \{\sigma_i\}_{i\in a})$, donde a es una sección inicial finita del árbol de índices de $\mathcal{A}$ y $\sigma_i : M_i \longrightarrow V_\theta$ es una inmersión elemental, de modo que $\sigma_0 = \pi$ y, si $i \trianglelefteq i'$ son dos elementos de a, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M_{i'} \arrow[r, "\sigma_{i'}"] & V_\theta \\
M_i \arrow[u, "j_{i,i'}"] \arrow[ur, "\sigma_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Definimos en R la relación de orden dada por

$$(a, \{\sigma_i\}_{i\in a}) \preceq (b, \{\tau_i\}_{i\in b}) \quad \text{si y sólo si} \quad a \subset b \land \bigwedge i \in a\ \sigma_i = \tau_i.$$

Es inmediato que R es un árbol, en el sentido general de que sus secciones iniciales son finitas y están bien ordenadas. En principio, sólo conocemos un elemento de R (de hecho su mínimo elemento), dado por $(\{0\}, \{\pi\})$. Bajo la hipótesis que estamos suponiendo, podemos asegurar que R no posee ramas infinitas, pues una de ellas daría lugar a una rama r en el árbol de índices de $\mathcal{A}$ junto con una familia de inmersiones elementales $\{\sigma_i\}_{i\in r}$ que conmutan con las inmersiones $j_{i,i'}$, luego inducirían una inmersión elemental $\sigma : M_r \longrightarrow V_\theta$ que cumpliría $j_{0,r} \circ \sigma = \pi$.

El hecho de que R no tenga ramas infinitas equivale a que está bien fundado para la relación inversa de $\preceq$, de modo que podemos considerar la aplicación rango $\phi : R \longrightarrow \Omega$ de dicha relación inversa, de modo que

$$\bigwedge ii' \in R(i \prec i' \to \phi(i') < \phi(i)).$$

Observemos ahora que, como M es un conjunto transitivo numerable, está contenido en $V_{\aleph_1}$, luego queda fijo por cualquiera de las inmersiones elementales $j_{0,n}^* : V \longrightarrow M_n^*$, al igual que todos sus elementos. Esto implica que todos los modelos M_i son invariantes por $j^*_{0,n}$. Por lo tanto, como $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, se cumple que $j^*_{0,n}(\pi) : M \longrightarrow j^*_{0,n}(V_\theta)$. Más concretamente, $j^*_{0,n}(\pi) = \pi \circ j^*_{0,n}$.

Al aplicar $j^*_{0,n}$ a la definición de R obtenemos que $j^*_{0,n}(R)$ está formado por los objetos de la forma $(a, \{\sigma_i\}_{i\in a})$, donde a es una sección inicial finita del árbol de índices de $\mathcal{A}$ y las $\sigma_i : M_i \longrightarrow j^*_{0,n}(V_\theta)$ son inmersiones elementales que conmutan con las inmersiones $j_{i,i'}$ y de modo que $\sigma_0 = \pi \circ j^*_{0,n} = j_{0,n} \circ \pi_n$.

Por consiguiente, si $a = \{0 = n_0 \lhd n_1 \lhd \cdots \lhd n_{l-1}\}$ es cualquier sección inicial finita del árbol de índices de $\mathcal{A}$, se cumple que

$$s_a = (a, \{j_{i,n_{l-1}} \circ \pi_{n_{l-1}}\}_{i\in a}) \in j^*_{0,n_{l-1}}(R).$$

En particular vemos que $j^*_{n_{l-1}}(R)$ contiene elementos de altura l, luego lo mismo vale para R (para todo número natural l).

Para cada $k \in \omega$, sea $s_k = s_a$, donde $a = \{i \in \omega \mid i \trianglelefteq k\}$. Según acabamos de probar, $s_k \in j^*_{0,k}(R)$. Es inmediato que si $k \lhd k'$, entonces $j^*_{k,k'}(s_k) \prec s_{k'}$.

Finalmente, llamamos $\alpha_k = j^*_{0,k}(\phi)(s_k)$. Así

$$j^*_{k,k'}(\alpha_k) = j^*_{0,k'}(\phi)(j^*_{k,k'}(s_k)) > j^*_{0,k'}(\phi)(s_{k'}) = \alpha_{k'}.$$

La sucesión $\{\alpha_k\}_{k\in\omega}$ prueba que $\pi\mathcal{A}$ está continuamente mal fundado. ■

Vamos a necesitar también una variante del teorema anterior mucho más simple:

Teorema 10.21 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *tal que existe una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, para cierto ordinal θ tal que V_θ sea un submodelo elemental de V. Sea κ un cardinal medible^M, sea $D \in M$ una medida normal^M en κ y sea $\mathcal{A}$ el árbol de iteraciones lineal (es decir, cuyo árbol de índices es ω con el orden usual) dado por $M_0 = M$ y $M_{n+1} = \mathrm{Ult}_{j_{0,n}(D)}(M_n)$. Sea M_ω el límite inductivo a lo largo de la única rama de $\mathcal{A}$. Entonces existe una inmersión elemental $\sigma : M_\omega \longrightarrow V_\theta$ tal que $j_{0,\omega} \circ \sigma = \pi$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 9.22 sabemos que las ultrapotencias asociadas a medidas normales están también asociadas a extensores, por lo que $\mathcal{A}$ es un árbol de iteraciones salvo por el hecho de que no tiene por qué cumplir las propiedades adicionales a), b), c) que hemos incluido en la definición. Ahora bien, estas propiedades sólo son necesarias para garantizar la posibilidad de extender un modelo con un extensor de otro modelo, pero en la construcción de $\mathcal{A}$ cada extensor está siempre en el mismo modelo a extender. En particular, no hay ningún problema en construir la copia $\pi\mathcal{A}$ descrita en el teorema 10.14. La prueba del teorema anterior tampoco se apoya en ningún momento en las propiedades adicionales de la definición de árbol de iteraciones. El mismo argumento prueba literalmente que el árbol R tiene nodos de cualquier altura y, como no tiene más que una rama, concluimos directamente que tiene una rama infinita, sin necesidad de suponer lo contrario y contradecir al teorema 10.17. ■

10.5 Tipos

La construcción de árboles de iteraciones requiere elegir los extensores de forma que haya una cierta concordancia entre el modelo en el que elegimos el extensor y el modelo que extendemos. Esto resulta trivial si ambos son el mismo modelo, pero si recurrimos a esta técnica sistemáticamente obtenemos un árbol lineal con una única rama. En esta sección presentamos una técnica para construir árboles más complicados a partir de un cardinal de Woodin. Al final mostraremos un ejemplo de cómo puede aplicarse.

Definición 10.22 Un *tipo* (κ, n), donde κ es un ordinal límite y $n \in \omega$, es un conjunto u de fórmulas con a lo sumo las variables libres $v_0, \ldots, v_{n-1}$ del lenguaje de la teoría de conjuntos extendido con una constante $\tilde{\delta}$ y un conjunto de constantes $\{\tilde{c}\}_{c \in V_\kappa \cup \{\kappa\}}$.

Cada fórmula del lenguaje indicado puede definirse como una cierta sucesión finita en V_κ y, como κ es un ordinal límite, podemos definir las fórmulas para que sean elementos de V_κ. Por consiguiente, los tipos (κ, n) son subconjuntos de V_κ. Si u es un tipo (κ, n) diremos que κ es el *dominio* de u, y lo representaremos por $\mathcal{D}u$.

Si η y δ son ordinales tales que κ, $\delta < \eta$, diremos que un tipo (κ, n) u está *realizado* respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η si $x_0, \ldots, x_{n-1} \in V_\eta$ y una fórmula ϕ pertenece a u si y sólo si $V_\eta \vDash \phi[x_0, \ldots, x_{n-1}]$, entendiendo que la constante $\tilde{\delta}$ se interpreta como δ y que cada constante $\tilde{c}$ se interpreta como c.

Evidentemente, fijados $\delta, x_0, \ldots, x_{n-1} \in V_\eta$, existe un único tipo (κ, n) u realizado respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ (el formado por todas las fórmulas verdaderas en V_η al interpretar las variables por los conjuntos dados). Nos referiremos a él como el κ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η relativo a δ. Diremos que un tipo u es *realizable* respecto de δ si existe un η y unos $x_0, \ldots, x_{n-1} \in V_\eta$ que realizan u en V_η.

Si $\tau \leq \kappa$ y $m \leq n$, llamaremos $\operatorname{proy}^m_\tau(u)$ al tipo formado por las fórmulas $\phi \in u$ en las que a lo sumo aparecen las variables libres $v_0, \ldots, v_{m-1}$ y en las que todas las constantes que aparecen corresponden a elementos de $V_\tau \cup \{\tau\}$. Escribiremos $\operatorname{proy}_\tau(u)$ cuando $m = n$ y $\operatorname{proy}^m(u)$ cuando $\tau = \kappa$.

Es claro que si u está realizado respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η, entonces $\operatorname{proy}^m_\tau(u)$ está realizado respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{m-1}$ en V_η.

Si u es un tipo (κ, n) que contiene a la fórmula

$$\bigvee \nu (\nu \text{ es el máximo ordinal} \land \tilde{\kappa}, \tilde{\delta}, v_0, \ldots, v_{n-1} \in V_\nu)$$

definimos u^- como el conjunto de las fórmulas $\phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ tales que la fórmula

$$\bigvee \nu (\nu \text{ es el máximo ordinal} \land V_\nu \vDash \phi[v_0, \ldots, v_{n-1}])$$

pertenece a u.

De este modo, si u está realizado respecto a δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_α, entonces $\alpha = \eta + 1$, existe u^- y está realizado por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η.

Sea u un tipo (κ, n) y sea w un tipo (τ, m). Diremos que w es un *subtipo* de u, y lo representaremos por $w < u$, si $\tau < \kappa$, $m \geq n$ y la fórmula "existe un ordinal ν y existen $v_n, \ldots, v_{m-1} \in V_\nu$ tales que $\tilde{w}$ está realizado por una permutación[5] de $v_0, \ldots, v_{m-1}$ respecto de $\tilde{\delta}$ en V_ν" pertenece a u.

Así, si u es el κ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en V_η, entonces w es un subtipo de u si y sólo si existen conjuntos $x_n, \ldots, x_{m-1}$ y un $\nu < \eta$ tales que w es el τ-tipo de cierta permutación de $x_0, \ldots, x_{m-1}$ en V_ν.

Es evidente que la fórmula $w < u$ (como todos los conceptos que estamos definiendo que no involucran la realización de un tipo) es absoluta para modelos transitivos de ZFC.

Diremos que un tipo (τ, m) w *excede* a un tipo (κ, n) u (respecto de δ) si $\tau > \kappa$, $m \geq n$ y existen ordinales $\nu + 1 < \eta$ y conjuntos $x_0, \ldots, x_{m-1} \in V_\nu$ tales que u está realizado respecto de δ en V_η por $x_0, \ldots, x_{n-1}$, y w está realizado respecto de δ en V_ν por una permutación de $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Así, si u es el κ-tipo respecto de δ de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η, $\tau > \kappa$, $m \geq n$, $\nu + 1 < \eta$, $x_n, \ldots, x_{m-1} \in V_\nu$ y w es el τ-tipo de una permutación de $x_0, \ldots, x_{m-1}$ en V_ν, entonces w excede a u.

Sean $\kappa < \lambda$, sea E un extensor λ-fuerte con punto crítico κ y sea u un tipo (κ, n). Sea $i_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$ la inmersión en la ultrapotencia. Definimos la *ampliación* de u como $\mathrm{amp}_\lambda^E(u) = \mathrm{proy}_\lambda(i_E(u))$, que es un tipo (λ, n).

Esto tiene sentido, pues $i_E(u)$ es un tipo$^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ $(i_E(\kappa), n)$ y $\lambda \leq i_E(\kappa)$, por lo que $\mathrm{amp}_\lambda^E(u)$ es un tipo$^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ (λ, n), pero, como $V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)} = V_\lambda$, la ampliación es también un tipo en V.

Diremos que un tipo (κ, n) es *elástico* si está definido u^- y u contiene las fórmulas "$\tilde{\delta}$ es un cardinal inaccesible" y

> Existe un ordinal ν tal que ν es el máximo ordinal y, para todo $\lambda < \tilde{\delta}$, existe un extensor $E \in V_{\tilde{\delta}}$ con punto crítico $\tilde{\kappa}$ y cuyo soporte es igual a su fortaleza y es un cardinal inaccesible mayor que λ. Además $\mathrm{amp}_\lambda^E(u^-)$ está realizado (respecto a $\tilde{\delta}$) por $v_0, \ldots, v_{n-1}$ en V_ν.

donde $v_0, \ldots, v_{n-1}$ son variables libres.

Técnicamente, la última parte de la fórmula descrita en el párrafo destacado debería decir que "existe un w tal que es el $\tilde{\kappa}$-tipo de $v_0, \ldots, v_{n-1}$ en V_ν y $\mathrm{amp}_\lambda^E(w)$ está realizado…", pues u^- no es una constante que pueda aparecer en las fórmulas de u.

[5]En esta definición, al igual que en la definición siguiente de "w excede a u", por "permutación" hemos de entender una permutación que respete el orden de $v_0, \ldots, v_{n-1}$, es decir, que intercale las nuevas variables entre las viejas, pero sin desordenarlas.

Notemos que esta definición sólo requiere que ciertas fórmulas pertenezcan a u (en ella no se habla de realización de tipos), por lo que es absoluta para modelos transitivos de ZFC.

El teorema siguiente muestra el interés que tienen para nosotros los cardinales de Woodin: garantizan la existencia de muchos tipos elásticos:

Teorema 10.23 *Sea δ un cardinal de Woodin, $\eta > \delta$ y $x_0, \ldots, x_{n-1} \in V_\eta$. Entonces existe un conjunto no acotado de cardinales $\kappa < \delta$ tales que el κ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en $V_{\eta+1}$ respecto a δ es elástico.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada cardinal inaccesible $\gamma < \delta$ sea A_γ el γ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en V_η. En principio $A_\gamma \subset V_\gamma$, pero, como $|V_\gamma| = \gamma$, podemos codificar A_γ mediante un subconjunto de γ. Por ejemplo, consideramos la relación en γ cuyo colapso transitivo es V_γ y el subconjunto de γ formado por los ordinales correspondientes a A_γ. Así tenemos dos subconjuntos de γ, que se pueden codificar fácilmente como uno solo.

Sea $H = \{(\xi, \gamma) \in \delta \mid \xi \in A_\gamma\} \subset \delta$, sea $\kappa < \delta$ un cardinal $< \delta$-fuerte respecto de H y sea u el κ-tipo de $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en $V_{\eta+1}$. Vamos a probar que u es elástico.

Ciertamente, u^- está definido y "$\tilde{\delta}$ es inaccesible" pertenece a u. Fijemos $\lambda < \delta$ y tomemos un cardinal inaccesible $\lambda < \lambda' < \delta$. Por el teorema 9.31 existe un extensor $E \in V_\delta$ con punto crítico κ y cuyo soporte $\lambda^* > \lambda'$ es igual a su fortaleza y es un cardinal inaccesible tal que $j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda^* = H \cap \lambda^*$.

Para que u sea elástico basta con que $\operatorname{amp}^E_\lambda(u^-)$ esté realizado respecto a δ en V_η por $x_0, \ldots, x_{n-1}$, para lo cual basta a su vez con que esto le suceda a $\operatorname{amp}^E_{\lambda'}(u^-)$ y, como λ' es inaccesible, esto a su vez equivale a probar que $\operatorname{amp}^E_{\lambda'}(u^-) = A_{\lambda'}$.

Observamos que H codifica la sucesión $\{A_\gamma\}_\gamma$, donde γ recorre los cardinales inaccesibles menores que δ, luego $j_E(H)$ codifica igualmente una sucesión $\{j_E(A)_\gamma\}_\gamma$, donde ahora γ recorre los cardinales inaccesibles$^{\operatorname{Ult}_E(V)}$ menores que $j_E(\delta)$ y $j_E(A)_\gamma$ es el γ-tipo$^{\operatorname{Ult}_E(V)}$ de $j_E(x_0), \ldots, j_E(x_{n-1})$ respecto de $j_E(\delta)$ en $V^{\operatorname{Ult}_E(V)}_{j_E(\eta)}$.

Por otra parte, como u^- está realizado por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en V_η, tenemos que $j_E(u^-)$ está realizado$^{\operatorname{Ult}_E(V)}$ por $j_E(x_0), \ldots, j_E(x_{n-1})$ respecto de $j_E(\delta)$ en $V^{\operatorname{Ult}_E(V)}_{j_E(\eta)}$, luego lo mismo vale para $\operatorname{amp}^E_{\lambda'}(u^-)$, es decir, tenemos que $\operatorname{amp}^E_{\lambda'}(u^-) = j_E(A)_{\lambda'}$.

Así pues, todo se reduce a probar que $j_E(A)_{\lambda'} = A_{\lambda'}$ y aquí es donde interviene que el extensor E sea λ^*-fuerte respecto a H:

Puesto que $H \cap \kappa = \{(\xi, \gamma) \in \kappa \mid \xi \in A_\gamma\}$ y $H \cap \lambda^* = \{(\xi, \gamma) \in \lambda^* \mid \xi \in A_\gamma\}$,

$$j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda^* = \{(\xi, \gamma) \in \lambda^* \mid \xi \in j_E(A)_\gamma\} = H \cap \lambda^*$$

implica que $j_E(A)_{\lambda'} = A_{\lambda'}$ (en general, para todo inaccesible $\lambda' < \lambda^*$).

Con esto hemos encontrado un cardinal κ en las condiciones del enunciado, pero, dado $\beta < \delta$, podemos cambiar H por $H' = \beta + H \subset \delta$, y llegamos al mismo resultado porque H' codifica igualmente los tipos A_γ, pero, teniendo en cuenta que $H' \cap \beta = \varnothing$ y que κ ha de cortar a H', ha de ser $\kappa \geq \beta$, luego el conjunto de los cardinales que cumplen el enunciado no está acotado en δ. ■

Teorema 10.24 *Sea u un tipo (κ, n) elástico y sea w un tipo (τ, m) que exceda a u respecto a un ordinal $\delta > \tau$. Entonces existe un extensor $E \in V_\delta$ con punto crítico κ, cuyo soporte es igual a su fortaleza y es un cardinal inaccesible $\lambda > \tau$ y además $w < \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u)$.*

Demostración: Por hipótesis existen ordinales $\delta < \nu < \eta$ y unos conjuntos $x_0, \ldots, x_{m-1} \in V_\nu$ tales que u está realizado por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ respecto de δ en $V_{\eta+1}$ y w está realizado respecto de δ en V_ν por una permutación de $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Notemos que hemos tomado $V_{\eta+1}$ porque, como u es elástico, existe u^-, lo que significa que si está realizado en un conjunto V_α, ha de ser $\alpha = \eta + 1$.

La definición de tipo elástico nos da también que δ es un cardinal inaccesible y que existe un extensor $E \in V_\delta$ con punto crítico κ y soporte $\lambda > \tau$ igual a su fortaleza, que también es inaccesible, y además $\mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u^-)$ está realizado respecto de δ por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ en V_η. Claramente entonces, $w < \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u^-)$ y esto implica que $w < \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u)$.

En efecto, tenemos que la fórmula $\phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$:

> existe un ordinal μ y existen $v_n, \ldots, v_{m-1} \in V_\mu$ tales que $\tilde{w}$ está realizado por una permutación de $v_0, \ldots, v_{m-1}$ respecto de $\tilde{\delta}$ en V_μ

está en $\mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u^-)$, luego también está en $j_E(u^-) = j_E(u)^-$, luego la fórmula

$$\bigvee \eta (\eta \text{ es el máximo ordinal} \land V_\eta \vDash \phi[v_0, \ldots, v_{n-1}])$$

está en $j_E(u)$, pero, teniendo en cuenta que u es realizable y, por lo tanto, $j_E(u)$ es realizable en $\mathrm{Ult}_E(V)$, esto implica que $\phi \in j_E(u)$, luego también $\phi \in \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u)$, con lo que $w < \mathrm{amp}^E_{\tau+\omega}(u)$. ■

Veamos cómo podemos usar los dos teoremas anteriores para construir árboles de iteraciones. En el resto de la sección δ será siempre un cardinal de Woodin prefijado.

Ejemplo 1 Vamos a construir un árbol de iteraciones finito con cuatro nodos con la estructura que muestra la figura, donde $M_0 = M_1 = V$.

$$\begin{tikzcd} M_3 & & \\ M_1 \arrow[u] & & M_2 \\ & M_0 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Para ello partimos de un ordinal $\eta > \delta$. El teorema 10.23 nos da un cardinal $\kappa_1 < \delta$ tal que el κ_1-tipo de η respecto de δ en $V_{\eta+5}$ es elástico. Llamémoslo u_0. Una nueva aplicación nos da un cardinal $\kappa_1 < \kappa_2 < \delta$ tal que el κ_2-tipo de η en $V_{\eta+3}$ es elástico. Llamémoslo u_1. Notemos que u_1 excede a u_0, luego podemos usar el teorema 10.24, que nos da un extensor $E_1 \in V_\delta^{M_1}$ cuyo punto crítico es κ_1, cuyo soporte $\lambda_1 > \kappa_2$ es un cardinal inaccesible igual a su fortaleza y $u_1 < \mathrm{amp}_{\kappa_2+\omega}^{E_1}(u_0)$. (Notemos que $\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \delta$.)

Así podemos definir $M_2 = \mathrm{Ult}_{E_1}(M_1)$ con $j_{0,2}$ igual a la inmersión canónica. La definición de ampliación se traduce en que u_1 es un subtipo de $j_{0,2}(u_0)$.

Como u_0 está realizado respecto de δ por η en $V_{\eta+5}$, tenemos que, en M_2, $j_{0,2}(u_0)$ está realizado respecto de $j_{0,2}(\delta)$ por $j_{0,2}(\eta)$ en $V_{j_{0,2}(\eta)+5}^{M_2}$. Por definición de subtipo existe un ordinal $\nu < j_{0,2}(\eta) + 5$ tal que u_1 está realizado respecto a $j_{0,2}(\delta)$ por $j_{0,2}(\eta)$ en $V_\nu^{M_2}$. Ahora bien, como u_1 contiene la fórmula "$v_0 + 2$ es el máximo ordinal", ha de ser $\nu = j_{0,2}(\eta) + 3$.

Como $j_{0,2}(\delta)$ es un cardinal de Woodin^{M_2}, el teorema 10.23 relativizado a M_2 nos da un $\kappa_2 < \lambda_1 < \kappa_3 < j_{0,2}(\delta)$ tal que el κ_3-tipo respecto a $j_{0,2}(\delta)$ de $j_{0,2}(\eta)$ en $V_{j_{0,2}(\eta)+1}^{M_2}$ es elástico. Llamémoslo u_2. Claramente u_2 excede^{M_2} a u_1. Por consiguiente, podemos usar la relativización de 10.24 a M_2, que nos da un extensor $E_2 \in V_{j_{0,2}(\delta)}^{M_2}$ con punto crítico κ_2 y soporte $\lambda_2 > \kappa_3$ inaccesible e igual a su fortaleza, de modo que $u_2 < \mathrm{amp}_{\kappa_1+\omega}^{E_2}(u_1)$.

Puesto que M_1 y M_2 concuerdan hasta λ_1, podemos formar $M_3 = \mathrm{Ult}_{E_2}(M_1)$ y tenemos el árbol de iteraciones. ■

Para construir árboles de iteraciones con ramas infinitas necesitamos un último concepto:

Definición 10.25 Sea δ un ordinal. Diremos que dos ordinales $\delta < \nu_I < \nu_S$ son un par de *indiscernibles locales* respecto a δ si para todo $k < \omega$, toda fórmula ϕ con $k + 1$ variables libres y todos los $c_0, \ldots, c_k \in V_{\delta+\omega}$ se cumple que

$$V_{\nu_I+\omega} \vDash \phi[\nu_I, c_0, \ldots, c_{k-1}] \leftrightarrow V_{\nu_S+\omega} \vDash \phi[\nu_H, c_0, \ldots, c_{k-1}].$$

Notemos que existen pares de indiscernibles locales, pues a cada ordinal $\nu > \delta$ podemos asociarle el conjunto S_ν de todos los pares (ϕ, s) tales que ϕ es una fórmula con $k + 1$ variables libres y $s \in V_{\delta+\omega}^k$ tales que

$$V_{\nu+\omega} \vDash \phi[\nu, s(0), \ldots s(k-1)].$$

Como $S_\nu \subset \mathrm{Form} \times V_{\delta+\omega}^{<\omega}$, los conjuntos S_ν varían en un conjunto fijo, luego ha de haber dos ordinales $> \delta$ cuyo conjunto S_ν sea el mismo.

Fijado un par de indiscernibles, tenemos lo siguiente:

Teorema 10.26 *Sea u el κ-tipo de ν_I en V_{ν_I+1}, sea $\tau > \kappa$ y sea w el τ-tipo de ν_I en V_{ν_I+3}. Entonces w excede a* $\mathrm{Proy}^0(u)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que u está realizado por ν_S en V_{ν_S+1}, luego $\mathrm{Proy}^0(u)$ está realizado en V_{ν_S+1} y $\nu_I + 4 < \nu_S + 1$. ■

(La proyección es necesaria, pues si no la pusiéramos se tendría que cumplir que $\nu_S \in V_{\nu_I+3}$, lo cual es falso.) El teorema siguiente es una consecuencia inmediata de las definiciones:

Teorema 10.27 *Sea $\alpha > \delta$, sea u el κ-tipo de α en $V_{\alpha+3}$, sea $\tau > \kappa$ y sea w el τ-tipo de α en $V_{\alpha+1}$. Entonces w excede a u.*

Usando alternativamente estos dos teoremas podemos construir un árbol de iteraciones con dos ramas infinitas:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\vdots & & \vdots \\
M_3 \arrow[u] & & M_4 \arrow[u] \\
M_1 \arrow[u] & & M_2 \arrow[u] \\
& M_0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2 Vamos a construir un árbol de iteraciones como el que indica la figura, donde $M_0 = M_1 = V$.

Para ello definiremos una sucesión de tipos $u_n \in M_n$ y una sucesión de ordinales α_n para $n \in \omega$ impar (con $\alpha_1 = \nu_I$) de modo que:

a) Si n es par, u_n está realizado respecto a $j_{0,n}(\delta)$ por $j_{0,n}(\nu_I)$ en $V^{M_n}_{j_{0,n}(\nu_I)+3}$.

b) Si n es impar, u_{n-1} está realizado por α_n en $V^{M_n}_{\alpha_n+3}$ y u_n está realizado por α_n en $V^{M_n}_{\alpha_n+1}$.

El teorema 10.23 nos da un cardinal $\kappa_1 < \delta$ tal que el κ_1-tipo u_0 de ν_I respecto a δ en $V^{M_0}_{\nu_I+3}$ es elástico, y así se cumple la propiedad a) para $n = 0$. Definiendo $\alpha_1 = \nu_I$ tenemos también la primera parte de b). Hacemos $E_0 = \varnothing$, de modo que $M_1 = M_0 = V$. El mismo teorema nos da un cardinal $\kappa_1 < \kappa_2 < \delta$ tal que el κ_2-tipo u_1 de α_1 respecto de δ en $V^{M_1}_{\alpha_1+1}$ es elástico, y claramente (por 10.27) excede a u_0. Además, así se cumple b) para $n = 1$.

El teorema 10.24 nos da un extensor $E_1 \in V^{M_1}_\delta$ cuyo punto crítico es κ_1 y su soporte es un cardinal inaccesible $\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \delta$ que coincide con su fortaleza y además $u_1 < \operatorname{amp}^{E_1}_{\kappa_2+\omega}(u_0)$. Definimos $M_2 = \operatorname{Ult}_{E_1}(M_0)$ y tomamos como $j_{0,2}$ la inmersión canónica. En estos términos, $u_1 < j_{0,2}(u_0)$.

Como u_0 está realizado por ν_I en $V^{M_0}_{\nu_I+3}$, resulta que $j_{0,2}(u_0)$ está realizado^{M_2} por $j_{0,2}(\nu_I)$ en $V^{M_2}_{j_{0,2}(\nu_I)+3}$. Por definición de subtipo existe un $\nu < j_{0,2}(\nu_I) + 3$ tal que u_1 está realizado^{M_2} por $j_{0,2}(\nu_I)$ en $V^{M_2}_\nu$. Ahora bien, u_1 contiene la fórmula "v_0 es el máximo ordinal", luego, concretamente, u_1 está realizado^{M_2} por $j_{0,2}(\nu_I)$ en $V^{M_2}_{j_{0,2}(\nu_I)+1}$.

El teorema 10.23 en M_2 nos da un κ_3 tal que $\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \kappa_3 < j_{0,2}(\delta)$ y en κ_3-tipo u_2 de $j_{0,2}(\nu_I)$ en $V^{M_2}_{j_{0,n}(\nu_I)+3}$ es elástico, y cumple a) para $n = 2$. Teniendo en cuenta que $j_{0,2}(\nu_I)$ y $j_{0,2}(\nu_S)$ forman un par de indiscernibles locales en M_2, el párrafo anterior y el teorema 10.26 implican que u_2 excede^{M_2} a $\operatorname{Proy}^0(u_1)$, luego podemos aplicar el teorema 10.24 para obtener un extensor $E_2 \in V^{M_2}_{j_{0,2}(\delta)}$ con punto crítico κ_2 y soporte (igual a su fortaleza) inaccesible λ_2, de modo que

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \kappa_3 < \lambda_2 < j_{0,2}(\delta)$$

y $u_2 < \operatorname{amp}^{E_2}_{\kappa_3+\omega}(\operatorname{Proy}^0(u_1))$. Podemos definir $M_3 = \operatorname{Ult}_{E_2}(M_1)$ con la correspondiente inmersión $j_{1,3}$, de modo que $u_2 < \operatorname{Proy}^0(j_{1,3}(u_1))$.

La presencia de la proyección es la que marca la diferencia respecto del ejemplo precedente. Ahora $j_{1,3}(u_1)$ está realizado^{M_3} por $j_{1,3}(\alpha_1)$ en $V^{M_3}_{j_{1,3}(\alpha_1)+1}$, luego $\mathrm{Proy}^0(j_{1,3}(u_1))$ está realizado^{M_3} en $V^{M_3}_{j_{1,3}(\alpha_1)+1}$. La definición de subtipo nos da que existe un ordinal $\nu < j_{1,3}(\alpha_1)+1$ y un $\alpha_3 < \nu$ de modo que u_2 está realizado^{M_3} por α_3 en $V^{M_3}_\nu$. Ahora bien, como u_2 contiene la fórmula "$v_0 + 2$ es el máximo ordinal", resulta que $\nu = \alpha_3 + 3$, de acuerdo con b). Además tenemos que $\alpha_3 < j_{1,3}(\alpha_1)$.

El teorema 10.23 en M_3 nos da un κ_4 tal que

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \lambda_1 < \kappa_3 < \lambda_2 < \kappa_4 < j_{0,3}(\delta)$$

(notemos que $\lambda_2 \leq j_{1,3}(\kappa_2) < j_{1,3}(j_{0,1}(\delta)) = j_{0,3}(\delta)$) y el κ_4-tipo u_3 de α_3 en $V^{M_3}_{\alpha_3+1}$ es elástico, y cumple b) para $n = 3$.

A partir de aquí podemos razonar igual que en el caso $n = 1$ y, en general, es fácil ver que el proceso se puede prolongar indefinidamente para obtener un árbol de iteraciones con dos ramas infinitas. ■

10.6 Determinación $\mathbf{\Pi}^1_2$

Vamos a probar el teorema siguiente, que, junto con 10.3 implica que si existe un cardinal de Woodin δ menor que un cardinal medible, entonces todo conjunto $\mathbf{\Pi}^1_2$ en V_δ está determinado.

Teorema 10.28 (Martin-Steel) *Si δ es un cardinal de Woodin, $X \in V_\delta$ y $A \subset X^\omega \times \mathcal{N}$ es un conjunto de Suslin δ^+-homogéneo, entonces el conjunto*

$$B = \{x \in X^\omega \mid \bigwedge y\ (x, y) \notin A\}$$

está determinado.

Trabajamos bajo las hipótesis del teorema. Sea $S \subset (X \times \omega \times \gamma)^{<\omega}$ un árbol homogéneo tal que $A = p[S]$ y sea $\{U_{s,t}\}_{(s,t)\in(X\times\omega)^{<\omega}}$ una familia de medidas de acuerdo con la definición de árbol homogéneo.

Todos los tipos que consideramos a continuación serán tipos (κ, n), donde $\operatorname{rang} X < \kappa < \delta$. Cuando no especifiquemos el dominio sobrentenderemos que es un cardinal en estas condiciones.

Definición 10.29 Sea $(s,t) \in (X \times \omega)^{<\omega}$ un par de sucesiones de longitud k y sea w un tipo de fórmulas de $k + 2$ variables. Llamaremos $Z_{s,t}$ al conjunto de los $f \in S_{s,t}$ tales que existe un ordinal $\alpha > \text{máx}\{\delta, \operatorname{rang} S\}$ tal que w está realizado por $S, (0, f(0)), \ldots, (k-1, f(k-1)), \alpha$ respecto a δ en un cierto V_η. Definimos $\rho_{s,t} : Z_{s,t} \longrightarrow \Omega$ como la aplicación que a cada f en las condiciones anteriores le asigna el mínimo η que cumple la definición.

Notemos que $Z_{s,t}$ y $\rho_{s,t}$ dependen de w. Diremos que un tipo w es *bueno* para (s,t) si $Z_{s,t} \in U_{s,t}$.

Observemos que si w es bueno para (s,t), entonces contiene las fórmulas "v_i es un par ordenado con primera componente $\tilde{i} - 1$" (para $1 \leq i \leq k$) y

$$\{v_1, \ldots, v_k\} \in (v_0)_{\tilde{s},\tilde{t}}.$$

En efecto, el dominio de w es mayor que el rango de X y $s, t \in X^{<\omega}$, luego existen las constantes $\tilde{s}, \tilde{t}$. Dado $f \in Z_{s,t}$ (que no es vacío, pues pertenece a $U_{s,t}$), tenemos que w está realizado respecto de δ en un cierto V_η por $S, (0, f(0)), \ldots, (k-1, f(k-1)), \alpha$, para cierto α. Al interpretar las variables de este modo la última fórmula se convierte en $f \in S_{s,t}$, lo cual es cierto, luego la fórmula está en w, y las otras se reducen a que $(i-1, f(i-1))$ es un par ordenado con primera componente $i-1$, lo cual también es cierto.

Definición 10.30 Sea (s', t') una extensión de (s, t) (no necesariamente estricta) de longitud k'. Sea w un tipo bueno para (s, t) y w' un tipo bueno para (s', t'). Diremos que $w' \prec w$ si

$$\{f' \in S_{s',t'} \mid \rho^{w'}_{s',t'}(f') < \rho^{w}_{s,t}(f'|_k)\} \in U_{s',t'}.$$

Observemos que esta relación es transitiva, es decir, que si tenemos un tipo bueno w'' para una extensión (s'', k'') y $w'' \prec w' \prec w$, entonces $w'' \prec w$. Esto se sigue inmediatamente de que $U_{s'',t''}$ extiende a $U_{s',t'}$.

Si w es un tipo de fórmulas con $k+2$ variables libres, definimos $\pi(w) = \operatorname{proy}^{k+1}(w)$.

Teorema 10.31 *Sea w un tipo bueno para (s, t) y supongamos que contiene la fórmula "existe el ordinal $v_{k+1}+2$" (donde k es la longitud de (s, t)). Sea (s', t') una extensión de (s, t) de longitud k'. Entonces existe un tipo de $k'+2$ variables libres u tal que:*

a) u es bueno para (s', t').

b) u contiene la fórmula "$v_{k'+1}$ es el máximo ordinal".

c) $\pi(u)$ es elástico.

d) u excede a w.

e) $u \prec w$.

Además el dominio de u se puede tomar arbitrariamente grande bajo δ.

Demostración: Tomemos $f' \in S_{s',t'}$ y supongamos que $f'|_k \in Z^w_{s,t}$. Sea $\eta = \rho_{s,t}(f'|_k)$, de modo que w está realizado en V_η respecto a δ por S, $(0, f'(0)), \ldots, (k-1, f'(k-1)), \alpha$, para cierto $\alpha > \max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$. Como w contiene la fórmula "existe el ordinal $v_{k+1}+2$", ha de ser $\eta > \alpha + 2$. Por el teorema 10.23, existe un $\tau < \delta$ (arbitrariamente grande) tal que el τ-tipo de S, $(0, f'(0)), \ldots, (k'-1, f'(k'-1))$ en $V_{\alpha+1}$ es elástico y $\tau > \mathcal{D}w$.

Sea u el τ-tipo de S, $(0, f'(0)), \ldots, (k'-1, f'(k'-1)), \alpha$ en $V_{\alpha+1}$, de modo que u contiene la fórmula "$v_{k'+1}$ es el máximo ordinal", u excede a w y $\pi(u)$ es elástico.

El tipo u que acabamos de definir depende de la elección de f', por lo que lo representaremos por $u(f')$. Igualmente tenemos $\alpha(f')$, $\eta(f')$. Tenemos así una función $Z^*_{s,t} = \{f' \in Z_{s',t'} \mid f|_k \in Z^w_{s,t}\} \longrightarrow V_\delta$ dada por $f' \mapsto u(f')$. Ahora bien, como $Z_{s,t} \in U_{s,t}$, se cumple que $Z^*_{s,t} \in U_{s',t'}$ y como $U_{s',t'}$ es δ^+-completa, existe un tipo u y un conjunto $Z \subset Z^*_{s,t}$ tal que $Z \in U_{s',t'}$ de modo que, para todo $f' \in Z$, se cumple que $u(f') = u$.

Entonces $Z \subset Z^u_{s',t'}$, luego u es bueno para (s', t'), ya hemos visto que contiene a la fórmula "$v_{k'+1}$ es el máximo ordinal", así como que $\pi(u)$ es elástico y que u excede a w. Sólo falta probar que $u \prec w$. Ahora bien, esto se debe a que si $f' \in Z$, entonces $\rho^u_{s',t'}(f') \leq \alpha(f') + 1 < \eta(f') = \rho^w_{s,t}(f'|_k)$. ■

Teorema 10.32 *Sea u un tipo bueno para (s,t) y sea w un tipo de fórmulas de $k+2$ variables (donde k es la longitud de (s,t)) que contenga la fórmula "$v_{k+1} > \text{máx}\{\tilde{\delta}, \text{rang}\, v_0\}$". Si w es un subtipo de $\pi(u)$, entonces w es bueno para (s,t) y $w \prec u$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $f \in Z^u_{s,t}$ y sea $\eta = \rho^u_{s,t}(f)$, de modo que u está realizado respecto a δ en V_η por $S, (0, f(0)), \ldots, (k-1, f(k-1)), \alpha$, para cierto $\alpha > \text{máx}\{\delta, \text{rang}\, S\}$.

Como w es un subtipo de $\pi(u)$, existen ordinales ν y $\beta < \eta$ tales que w está realizado respecto a δ en V_ν por una permutación de

$$S, (0, f(0)), \ldots, (k-1, f(k-1)), \beta.$$

Más concretamente, β ha de ser intercalado en algún punto de la sucesión finita precedente, pero, como w contiene la fórmula indicada en el enunciado, tiene que estar en la última posición y cumplir que $\beta > \text{máx}\{\delta, \text{rang}\, S\}$.

En definitiva, hemos probado que cada $f \in Z^u_{s,t}$ cumple que $f \in Z^w_{s,t}$ y $\rho^w_{s,t}(f) < \rho^u_{s,t}(f)$. Como $Z^u_{s,t} \in U_{s,t}$, también $Z^w_{s,t} \in U_{s,t}$ (es decir, que w es bueno para (s,t)) y claramente $w \prec u$. ■

Teorema 10.33 *Sea $x \in X^\omega$ y supongamos que existen tipos $\{w_t\}_{t \in \omega^{<\omega}}$ tales que:*

- *Si t tiene longitud k, entonces w_t es bueno para $(x|_k, t)$.*
- *Si $t < t^*$, entonces $w_{t^*} \prec w_t$.*

Entonces $x \in B$.

DEMOSTRACIÓN: Hemos de probar que $\bigwedge y \in \mathcal{N}\ (x,y) \notin A$. Fijamos, pues, un $y \in \mathcal{N}$. Para cada $n \in \omega$ llamaremos $U_n = U_{x|_n, y|_n}$ y $\rho_n = \rho^{w|_n}_{x|_n, y|_n}$, que es una función definida en un subconjunto de $S_{x|_n, y|_n}$ perteneciente a U_n. Sea $Z_0 = S_{\varnothing,\varnothing}$ y, para cada $n \in \omega$, sea

$$Z_{n+1} = \{f \in S_{x|_{n+1}, y|_{n+1}} \mid \rho_{n+1}(f) < \rho_n(f|_n)\}.$$

Como $w_{y|_{n+1}} \prec w_{u|_n}$, tenemos que $Z_{n+1} \in U_{n+1}$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $(x,y) \in A$. Entonces la torre $\{U_n\}_{n\in\omega}$ es numerablemente completa, por definición de árbol homogéneo, luego existe $f \in \mathcal{N}$ tal que $f|_{n+1} \in Z_{n+1}$ para todo n, lo que da lugar a una sucesión decreciente de ordinales $\rho_{n+1}(f|_{n+1}) < \rho_n(f|_n)$, contradicción. ■

De entre todos los pares (ν_I, ν_S) de indiscernibles locales para $\max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$, consideramos los que tienen el mínimo ν_S posible y, de entre ellos, tomamos el que tiene el mínimo ν_I. En lo sucesivo sobrentenderemos que ν_I y ν_S son los indiscernibles locales elegidos con este criterio.

Teorema 10.34 *Para cada $\kappa < \delta$, el κ-tipo de S, ν_L en V_{ν_L+1} es bueno para $(\varnothing, \varnothing)$.*

Demostración: Esto es trivial, y lo cumple cualquier ordinal que cumpla $\nu_L > \max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$. En efecto, basta observar que $S_{\varnothing,\varnothing} = \gamma^0 = \{\varnothing\}$, luego $U_{\varnothing,\varnothing} = \{\varnothing\}$ y, si w es un tipo $(\kappa, 2)$, la única condición que ha de cumplir para ser bueno es que esté realizado por S, α en un cierto V_η, con $\alpha > \max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$. ■

Definición 10.35 Consideramos el juego G^* en el que dos jugadores construyen una sucesión con esta pauta:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\mathrm{I} & & w_0, x_0 & & w_1 & & w_2, x_2 & \dots \\ \hline
\mathrm{II} & l_0, t_0, u_0 & & l_1, t_1, u_1 & & x_1, l_2, t_2, u_2 & & \dots
\end{array}$$

(Notemos que es II quien inicia la partida.)

Las reglas del juego son:

a) $x_n \in X$.

b) $t_n \in \omega^{<\omega}$.

c) u_n es un tipo de fórmulas con $k_n + 2$ variables libres, donde k_n es la longitud de t_n, el tipo $\pi(u_n)$ es elástico y u_n contiene las fórmulas "v_i es un par ordenado de primera componente $\tilde{i} - 1$" (para $1 \leq i \leq k_n$) y "$\{v_1, \ldots, v_{k_n}\} \in (v_0)_{\tilde{s}_n, \tilde{t}_n}$", donde $s_n = x|_{k_n}$.

d) $\mathcal{D}u_0 > \operatorname{rang} X$ y, para cada $n > 0$, $\mathcal{D}u_n > \mathcal{D}u_{n-1}$.

e) Si $t_n = \varnothing$ entonces u_n está realizado por S y ν_I en $V_{\nu_I} + 1$.

f) Si $t_n \neq \varnothing$ entonces $l_n < n$ cumple que t_{l_n} es el anterior de t_n y u_n excede a w_{l_n}.

g) w_n es un tipo de fórmulas con k_n+2 variables libres, es un subtipo de $\pi(u_n)$ y contiene las fórmulas "$v_{k_n+1} > \max\{\tilde{\delta}, \operatorname{rang} v_0\}$" y "Existe $v_{k_n+1} + 2$ y es el máximo ordinal".

El primer jugador que viola las reglas pierde, y si se termina la partida gana el jugador I.

Así, la regla f) implica que II ha de empezar jugando un l_0 arbitrario y $t_0 = \varnothing$. Por la regla e) u_0 ha de ser el κ-tipo de S, ν_I en V_{ν_I+1}, para cierto κ tal que $\operatorname{rang} S < \kappa < \delta$. La regla c) se reduce en este caso a que $\pi(u_0)$ sea elástico. Como $\pi(u_0)$ es el κ-tipo de S en V_{ν_I+1}, siempre es posible elegir κ para que esto suceda en virtud del teorema 10.23.

Sobre esta jugada, I ha de elegir un w_0 según la regla g) y un $x_0 \in X$ arbitrario. Para ello w_0 ha de ser el τ-tipo de S, α en $V_{\alpha+3}$, donde $\tau < \kappa$ y $\max\{\delta, \operatorname{rang} S\} < \alpha < \alpha + 3 < \nu_I + 1$.

Entonces II puede elegir entre repetir $t_1 = \varnothing$, con lo cual se repite toda la jugada (con la única precaución de tomar u_1 con dominio mayor que el de u_0), o jugar un $t_1 \in \omega^1$ con $l_1 = 0$ (por la regla f) y, por la regla c), necesita un $f_0 \in S_{x_0,t_0}$ para que u_1 sea el κ-tipo de $S, (0, f_0(0)), \alpha$ en un cierto $V_{\eta+1}$, para ciertos κ, α, η. El dominio κ puede elegirse para que cumpla la regla d) y u_1 sea elástico, y necesita además que u_1 exceda a w_0.

El teorema de Gale-Stewart implica que el juego G^* está determinado (véase la prueba del teorema 10.2).

Teorema 10.36 *Si el jugador* I *tiene una estrategia ganadora en el juego* G^**, también la tiene para el juego* $G(B)$*.*

Demostración: Sea σ^* la estrategia ganadora. Sea $\{t_n^*\}_{n<\omega}$ una enumeración de $\omega^{<\omega}$ tal que cada sucesión finita aparezca en la enumeración antes que sus extensiones. En particular $t_0^* = \varnothing$. Para cada $n > 0$ sea $l_n^* < n$ tal que $t_{l_n}^*$ sea el anterior de t_n^*. Tomemos $l_0^* = 0$.

Para ganar una partida de $G(B)$ generaremos una partida de G^* en la que elegiremos según nos convenga las jugadas l_n, t_n, u_n de ambos jugadores, así como las jugadas $x_0, x_2, x_4, \ldots$ del jugador I, y responderemos a valores arbitrarios de $x_1, x_3, x_5, \ldots$ jugados por II. En particular, nos aseguraremos de seguir la estrategia σ^*, con lo que tendremos garantizado que la partida llega hasta el final. En particular, elegiremos las jugadas de forma que:

a) $t_n = t_n^*$, $l_n = l_n^*$.

b) u_n contiene la fórmula "v_{k_n+1} es el máximo ordinal", donde $k_n = \ell(t_n)$.

c) u_n es bueno para $(x|_{k_n}, t_n)$.

Los tipos w_n, al igual que los elementos x_{2i}, serán los dados en cada momento por la estrategia σ^*. Hemos de probar que podemos mantener las tres propiedades anteriores a lo largo de toda la partida de G^*. Si se cumplen hasta la jugada n, las reglas de G^* nos aseguran las tres primeras de las cinco propiedades siguientes. Las otras dos se siguen de éstas por el teorema 10.32:

- w_n es un tipo de fórmulas con $k_n + 2$ variables libres.
- w_n es un subtipo de $\pi(u_n)$

- w_n contiene las fórmulas "$v_{k_n+1} > \text{máx}\{\tilde{\delta}, \operatorname{rang} v_0\}$" y 'Existe $v_{k_n+1}+2$ y es el máximo ordinal".
- w_n es bueno para $(x|_{k_n}, t_n)$.
- $w_n \prec u_n$.

Así pues, para la jugada $n = 0$ de II jugamos $l_0 = 0$ y $t_0 = \varnothing$ (de modo que se cumple a) y, según el teorema 10.23 podemos tomar $\operatorname{rang} S < \kappa_0 < \delta$ tal que el κ_0-tipo de S en V_{ν_I+1} sea elástico. Así, podemos tomar como u_0 el κ_0-tipo de S, ν_I en V_{ν_I+1}. Tal y como ya hemos comentado tras la definición de G^*, tenemos así una jugada válida para II que cumple obviamente b) y por 10.34 también cumple c).

Supongamos ahora que la partida ha llegado hasta la ronda $n-1$ respetando la estrategia σ^* y que se han conservado las propiedades a), b), c). Vamos a elegir la jugada l_n, t_n, u_n de II. Para ello fijamos $l_n = l_n^*$ y $t_n = t_n^*$. Con esto se cumple la propiedad a) y respetamos las reglas relevantes de G^*, que son b) y f). Ahora observamos que $w = w_{l_n}$, $(s,t) = (x|_{k_n-1}, t_{l_n})$ y $(s', t') = (x|_{k_n}, t_n)$ cumplen las hipótesis del teorema 10.31. Éste nos proporciona un tipo u_n que completa la jugada de II respetando las reglas de G^*, así como las propiedades b) y c). Notemos que podemos elegir su dominio para que se cumpla la regla d) y la última parte de la regla c) se cumple por la observación tras la definición 10.29. Más aún, hemos obtenido la propiedad adicional siguiente:

$$u_n \prec w_{l_n},$$

que se cumplirá para todo $n > 0$. La transitividad de $\prec$ implica entonces que $w_n \prec w_{l_n}$ y, más aún, que si $t_m < t_n$, entonces $w_n \prec w_m$.

Con esto tenemos una partida completa de G^* que ha determinado a su vez una partida $x \in \mathcal{N}$ de $G(B)$ con jugadas impares arbitrarias. Finalmente, observamos que se cumplen las hipótesis del teorema 10.33, por lo que $x \in B$, y esto significa que I ha ganado la partida. ■

Teorema 10.37 *Si el jugador* II *tiene una estrategia ganadora en el juego G^*, también la tiene para el juego $G(B)$.*

Demostración: Sea σ^* una estrategia ganadora para II en G^*. Vamos a ir construyendo inductivamente:

a) Sucesiones $l_n, t_n, u_n, w_n, x_n, p_n$, para $n \in \omega$.

b) Un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$, que determine modelos M_k e inmersiones elementales $j_{l,k}$, para $l \trianglelefteq k$.

c) Nodos $g_n \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n}, t_n}$, donde $k_n = \ell(t_n)$.

El árbol de índices cumplirá:

- Los números pares $0 \triangleleft 2 \triangleleft 4 \triangleleft 6 \triangleleft \cdots$ constituyen una rama de $\mathcal{A}$.

- Si $t_n \neq \varnothing$, el anterior a $2n+1$ es $2l_n+1$.
- Si $t_n = \varnothing$ el anterior a $2n+1$ es $2n$.

Tomaremos $p_0 = \varnothing$ y $p_{n+1} = j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n, x_n)$ de modo que p_n será una posición en el juego $j_{0,2n}(G^*)$ acorde con la estrategia $j_{0,2n}(\sigma^*)$.

Esto equivale a que se vaya cumpliendo lo siguiente:

a) l_n, t_n, u_n son jugadas de $j_{0,2n}(G^*)$ acordes a $j_{0,2n}(\sigma^*)$ tras la posición p_n.

b) w_n es una jugada legal para I en $j_{0,2n+2}(G^*)$ tras la posición

$$j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n)).$$

c) Si n es impar entonces x_n es la jugada que determina $j_{0,2n+2}(\sigma^*)$ tras la posición $j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n)$.

   Notemos que las condiciones a) y c) determinan completamente l_n, t_n, u_n para todo n y x_n para todo n impar.

   Además, g_n ha de ser una sucesión de longitud k_n tal que $(x|_{k_n}, t_n, g_n) \in j_{0,2n+1}(S)$. Garantizaremos además que

d) $w_n \in M_{2n+1}$ está realizado respecto de $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ por

$$j_{0,2n+1}(S), (0, g_n(0)), \ldots, (k_n-1, g_n(k_n-1)), j_{0,2n+1}(\nu_I).$$

   Esto implica que w_n es un tipo de fórmulas con k_n+2 variables libres que contiene las fórmulas "$v_{k_n+1} > \text{máx}\{\tilde{\delta}, \operatorname{rang} v_0\}$" y "Existe $v_{k_n+1}+2$ y es el máximo ordinal", como exigen las reglas de G^*.

e) w_n es elástico.

f) El punto crítico del extensor E_{2n+1} es $\kappa_{2n+1} = \mathcal{D}u_n$ y el de E_{2n} es $\kappa_n = \mathcal{D}w_{l_n}$ (salvo si $t_n = \varnothing$, en cuyo caso $E_n = \varnothing$). Además, si llamamos λ_n al soporte de E_n, entonces $\mathcal{D}w_n < \lambda_{2n+1}$.

g) Todos los extensores usados en la construcción de $\mathcal{A}$ tienen puntos críticos sobre $\operatorname{rang} X$

Destacamos algunas consecuencias de estas propiedades:

- $w_n \in M_i$ para todo $i \geq 2n+2$.

  Pues M_i y M_{2n+2} concuerdan hasta λ_{2n+1} y $w_n \in V^{M_{2n+1}}_{\lambda_{2n+1}}$ por la propiedad f).

- $\kappa_{2n-1} < \lambda_{2n-1} < \kappa_{2n+1}$.

  En efecto, la primera desigualdad es trivial por f). La segunda se debe a que

$$\lambda_{2n-1} \leq j_{2n-2,2n}(\kappa_{2n-1}) = j_{2n-2,2n}(\mathcal{D}u_{n-1}) < \mathcal{D}u_n = \kappa_{2n+1},$$

  donde hemos usado que, según la relación recurrente que define a p_n, éste contiene a $j_{2n-2,2n}(u_{n-1})$ y, según a), es posible jugar u_n, luego la regla d) de $j_{0,2n}(G^*)$ implica que $j_{2n-2,2n}(\mathcal{D}u_{n-1}) < \mathcal{D}u_n$.

- Para cada $n < m$, el punto crítico de $j_{2n+2,2m+2}$ es mayor que $\mathcal{D}w_n$. En particular $j_{2n+2,2m+2}(w_n) = w_n$.

  Por la propiedad precedente, el punto crítico es mayor o igual que el de $j_{2n+2,2n+4}$, que es $\kappa_{2n+3} > \mathcal{D}j_{2n,2n+2}(u_n) > \mathcal{D}w_n$, donde hemos usado la regla g) de $j_{0,2n+2}(G^*)$ y la propiedad c).

- Consecuentemente: $p_n = \{(l_i, t_i, j_{2i,2n}(u_i), w_i, x_i)\}_{i<n}$.

  En efecto, todas las componentes excepto la tercera son invariantes por las inmersiones elementales, luego la relación recurrente para p_n se reduce a la indicada.

Supongamos que tenemos definidas todas las sucesiones para todo $i < n$ y el árbol de iteraciones hasta $2n$, de modo que se cumplan las propiedades anteriores, y veamos cómo definirlas para $i = n$, a la vez que los modelos M_{2n+1} y M_{2n+2} (lo que incluye situar $2n+1$ y $2n+2$ en el árbol de índices, que tenemos parcialmente construido hasta $2n$). En particular tenemos definido p_n.

En primer lugar definimos l_n, t_n, u_n como la jugada para II establecida por $j_{0,2n}(\sigma^*)$ a partir[6] de la posición p_n. Esto garantiza a). Distinguimos dos casos:

Caso 1 $t_n = \varnothing$. Definimos $E_{2n} = \varnothing$, lo que significa que $M_{2n+1} = M_{2n}$ y que $j_{2n,2n+1}$ es la identidad. (Además, $g_n = \varnothing$.)

Podemos considerar entonces que $\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1}$, de modo que

$$\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} < \kappa_{2n+1},$$

entendiendo por definición que $\kappa_{2n+1} = \mathcal{D}u_n$, pues aún no hemos definido el extensor E_{2n+1}.

Según las reglas del juego, el tipo u_n está realizado respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ por $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+1}$. Esto es una propiedad que se cumple en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+\omega}$, luego, por la indiscernibilidad local de $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ y

[6]Notemos que todo esto tiene sentido cuando $n = 0$. Entonces $p_0 = \varnothing$, $M_0 = V$, $j_{0,0}$ es la identidad y l_0, t_0, u_0 es simplemente la jugada inicial para II según su estrategia ganadora. Las reglas de G^* obligan entonces a que $t_0 = \varnothing$.

$j_{0,2n+1}(\nu_S)$, también se cumple en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+\omega}$, es decir, que u_n está realizado respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ por $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_S)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+1}$.

Por el teorema 10.23 (relativizado a M_{2n+1}) podemos tomar $\tau < j_{0,2n+1}(\delta)$ mayor que $\mathcal{D}u_n$ tal que el τ-tipo w_n de $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ respecto a $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_L)+3}$ es elástico y, por lo dicho en el párrafo anterior, excede$^{M_{2n+1}}$ a $\pi(u_n)$. En particular cumple d) y e).

Por las reglas de G^*, el tipo $\pi(u_n)$ es elástico (en M_{2n+1}), luego, por el teorema 10.24 en M_{2n+1}, existe un extensor $E_{2n+1} \in V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\delta)}$ cuyo punto crítico es el dominio de $\pi(u_n)$ (que es el mismo que el de u_n, es decir, κ_{2n+1}), cuyo soporte $\lambda_{2n+1} > \tau$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n+1}}$ igual a su fortaleza y $w_n < \operatorname{amp}^{E_{2n+1}}_{\tau+\omega}(\pi(u_n))$. Con esto se cumplen f) y g).

Además $\lambda_{2n+1} > \lambda_{2n}$, luego se cumplen las propiedades adicionales a) y b) de la definición de árbol de iteraciones, y c) (para $2n+1$) es trivial en este caso, pues $M_{2n} = M_{2n+1}$.

Definimos $M_{2n+2} = \operatorname{Ult}_{E_{2n+1}}(M_{2n})$ y $j_{2n,2n+2}$ como la inmersión canónica. En estos términos, $w_n < \operatorname{Proy}^1_{\tau+\omega}(j_{2n,2n+2}(\pi(u_n)))$ y, en particular, tenemos que $w_n < j_{2n,2n+2}(\pi(u_n)) = \pi(j_{2n,2n+2}(u_n))$. Es claro así que w_n cumple la última regla de $j_{0,2n+2}(G^*)$ para ser jugado por I tras $j_{2n,2n+2}(p_n \frown (l_n, t_n, u_n))$, luego se cumple b).

Por último, tomamos como x_n la jugada estipulada por $j_{0,2n+2}(\sigma^*)$ para la posición $j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n)$ si n es impar o un valor arbitrario en X (que representa una posible jugada de I en $G(B)$) si n es par. Así se cumple c).

Caso 2 $t_n \neq \varnothing$. Por las reglas de $j_{0,2n}(G^*)$, tenemos que u_n excede$^{M_{2n}}$ a w_{l_n}. Sea κ_{2n+1} el dominio de u_n. Por 10.24 existe un extensor $E_{2n} \in V^{M_{2n}}_{j_{0,2n}(\delta)}$ cuyo punto crítico κ_{2n} es el dominio de w_{l_n} y su soporte $\lambda_{2n} > \kappa_{2n+1} > \lambda_{2n-1}$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n}}$ igual a su fortaleza. Además $u_n < \operatorname{amp}^{E_{2n}}_{\kappa+\omega}(w_{l_n})$. Definimos $M_{2n+1} = \operatorname{Ult}_{E_{2n}}(M_{2l_n+1})$ y $j_{2l_n+1,2n+1}$ como la inmersión canónica, de modo que $u_n < j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$.

Con esto tenemos la parte par de f), g) y las propiedades a) y b) requeridas por la definición de árbol de iteraciones. La propiedad c) también se cumple, pues afirma que $\kappa_{2n} < \lambda_{2n-1}$ y, en efecto, $\kappa_{2n} = \mathcal{D}w_{l_n} < \lambda_{2l_n-1} < \lambda_{2n-1}$, donde hemos usado la propiedad f) y las desigualdades que hemos probado en general sobre los puntos críticos y los soportes de los extensores E_n.

Observemos ahora que u_n contiene la fórmula "v_{k_n+1} es el máximo ordinal". Ello se debe a que w_{l_n} está realizado por ciertos objetos en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$, el último de los cuales es $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ (esto resulta de aplicar $j_{2l_n+1,2n+1}$ a la propiedad d) para w_{l_n}. Como u_n excede$^{M_{2n}}$ a w_{l_n}, ha de estar realizado por los mismos objetos (y otro más intercalado) en un cierto $V^{M_{2n+1}}_\nu$ tal que $j_{0,2n+1}(\nu_I) < \nu < \nu+1 < j_{0,2n+1}(\nu_I)+3$, luego ha de ser $\nu = j_{0,2n+1}(\nu_I)+1$.

Por las reglas de G^*, sabemos que t_{l_n} es el anterior de t_n, luego, si k_n es la longitud de t_n, tenemos que la de t_{l_n} es $k_n - 1$. Consideremos la sucesión $g' = j_{2l_n+1,2n+1}(g_{l_n}) \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n-1},t_{l_n}}$.

Por hipótesis de inducción w_{l_n} está realizado respecto de $j_{0,2l_n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2l_n+1}}_{j_{0,2l_n+1}(\nu_I)+3}$ por $j_{0,2l_n+1}(S), (0, g_{l_n}(0)), \ldots, (k_n-2, g_{l_n}(k_n-2)), j_{0,2l_n+1}(\nu_I)$. Por consiguiente, el tipo $j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$ está realizado respecto de $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ por $j_{0,2n+1}(S), (0, g'(0)), \ldots, (k_n-2, g'(k_n-2)), j_{0,2n+1}(\nu_I)$.

Como u_n es un subtipo de $j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$, concluimos que u_n ha de estar realizado por estos mismos objetos y otro más (intercalado) en un cierto $V^{M_{2n+1}}_\nu$, para un cierto ordinal $\nu < j_{0,2n+1}(\nu_I)+3$. Ahora bien, la regla c) de G^* implica que la permutación debe dejar en los lugares correspondientes a las variables $v_1, \ldots, v_{k_n}$ los elementos (ordenados) de una sucesión de $j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n},t_n}$, luego $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ ha de estar en último lugar y, como u_n contiene la fórmula "v_{k_n+1} es el máximo ordinal", ha de ser $\nu = j_{0,2n+1}(\nu_I)+1$.

En definitiva, existe un α tal que u_n está realizado en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+1}$ por

$$j_{0,2n+1}(S), (0, g'(0)), \ldots, (k_n-2, g'(k_n-2)), (k_n-1, \alpha),\ j_{0,2n+1}(\nu_I),$$

y, por la regla c), se cumple que $g_n = g' \cup \{(k_n-1, \alpha)\} \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n},t_n}$.

Más adelante emplearemos el hecho de que la construcción que estamos realizando cumple además que, si $t_n \neq \varnothing$,

$$j_{2l_n+1,2n+1}(g_{l_n}) \subset g_n.$$

El resto es similar al caso anterior. Tenemos que

$$\begin{aligned}\kappa_{2n+1} < \lambda_{2n} \leq j_{2l_n+1,2n+1}(\kappa_{2n}) &= j_{2l_n+1,2n+1}(\mathcal{D}w_{l_n})\\ &< j_{2l_n+1,2n+1}(j_{0,2l_n+1}(\delta)) = j_{0,2n+1}(\delta),\end{aligned}$$

porque w_{l_n} es un tipo en M_{2l_n+1}, luego su dominio es menor que $j_{0,2l_n+1}(\delta)$.

Por la indiscernibilidad, u_n está realizado en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+1}$ por

$$j_{0,2n+1}(S), (0, g_n(0)), \ldots, (k_n-1, g_n(k_n-1)),\ j_{0,2n+1}(\nu_S).$$

El teorema 10.23 nos da un $\tau < j_{0,2n+1}(\delta)$ tal que $\tau > \lambda_{2n}$ y el τ-tipo w_n respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ de $j_{0,2n+1}(S), (0, g_n(0)), \ldots, (k_n-1, g_n(k_n-1)), j_{0,2n+1}(\nu_I)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ es elástico, y lo dicho en el párrafo anterior implica que w_n excede$^{M_{2n+1}}$ a $\pi(u_n)$. En particular cumple las propiedades d) y e).

El teorema 10.24 nos da entonces un extensor $E_{2n+1} \in V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\delta)}$ con punto crítico κ_{2n+1}, cuyo soporte $\lambda_{2n+1} > \tau$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n+1}}$ igual a su fortaleza y $w_n < \mathrm{amp}^{E_{2n+1}}_{\tau+\omega}(\pi(u_n))$. Con esto se cumple f) y g).

También se cumple la propiedad adicional a) de la definición de árbol de iteraciones, y las desigualdades $\kappa_{2n+1} < \lambda_{2n} < \lambda_{2n+1}$ implican las propiedades b) y c).

Definimos $M_{2n+2} = \mathrm{Ult}_{E_{2n+1}}(M_{2n})$ y $j_{2n,2n+2}$ como la inmersión canónica. A partir de aquí la construcción termina literalmente como en el caso 1.

Con esto tenemos construido el árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ y las sucesiones $x, \{(l_n, t_n, u_n.w_n)\}_{\in\omega}$ y $\{g_n\}_{n\in\omega}$, que cumplen todas las propiedades prescritas. Teniendo en cuenta que, en toda la construcción, los números x_{2n} han sido elegidos arbitrariamente, si demostramos que x da la victoria a II en el juego $G(B)$, es decir que $x \notin B$, habremos construido una estrategia ganadora para II en dicho juego.

Para ello empezamos demostrando que la rama par del árbol $\mathcal{A}$ no está bien fundada, es decir, que el límite inductivo M_{par} de los modelos $\{M_{2n}\}_{n\in\omega}$ no está bien fundado. Por reducción al absurdo, supongamos que lo está.

Sea R el árbol de partidas incompletas de G^* jugadas de acuerdo con la estrategia σ^*. El hecho de que σ^* sea una estrategia ganadora para II se traduce en que I tiene que perder cualquier partida, y la única forma de perder en G^* es que llegue un turno en el que I no tenga jugada posible (pues I gana siempre que la partida acaba). Por consiguiente, el árbol R no puede tener ramas infinitas. Si llamamos $j_{\mathrm{par}} : V \longrightarrow M_{\mathrm{par}}$ a la inmersión canónica en el límite inductivo, tenemos que $j_{\mathrm{par}}(R)$ no tiene ramas infinitas en M_{par}, pero como M_{par} está bien fundado esto es equivalente a que no tenga ramas infinitas.

Ahora bien, por otra parte, tenemos que $p_n \in j_{0,2n}(R)$, y la construcción muestra que p_{n+1} extiende a $j_{2n,2n+2}(p_n)$, luego $\{j_{2n,\mathrm{par}}(p_n)\}_{n\in\omega}$ es una sucesión creciente en $j_{\mathrm{par}}(R)$ que determina una rama infinita, y tenemos así la contradicción que buscábamos.

El teorema 10.18 nos da que $\mathcal{A}$ tiene que tener una rama bien fundada r, que, según hemos visto, no puede ser la rama par, luego, aunque empiece con índices pares, en un momento dado ha de separarse de la rama par y continuar hasta el final con índices impares. Sean $2m_0 + 1 \lhd 2m_1 + 1 \lhd 2m_2 + 1 \lhd \cdots$ los índices impares de r. Según la construcción de $\mathcal{A}$, tenemos que $t_{m_0} = \varnothing$ y t_{m_i} es el inmediato anterior de $t_{m_{i+1}}$. A su vez, en la construcción hemos visto que g_{m_i+1} extiende a $j_{2m_i+1,2m_{i+1}+1}(g_{m_i})$.

Sea $j_{2m_i+1,r} : M_{2m_i+1} \longrightarrow M_r$ la inmersión canónica en el límite inductivo. Si llamamos $g_i^* = j_{2m_i+1,r}(g_{m_i})$, tenemos que g_{i+1}^* extiende a g_i^*, luego podemos considerar $y = \bigcup\limits_{i<\omega} t_{m_i}$ y $g^* = \bigcup\limits_{i\in\omega} g_i^*$, de modo que $g^*|_i \in j_{0,r}(S)_{x|_i,y|_i}$ o, lo que es lo mismo, $(x|_i, y|_i, g^*|_i) \in j_{0,r}(S)$.

Esto prueba que $j_{0,r}(S_{x,y})$ tiene una rama infinita, luego, como M_r está bien fundado, tiene una rama infinita en M_r, luego $S_{x,y}$ tiene una rama infinita, es decir, que $(x, y) \in p[S] = A$, luego, por definición de B, concluimos que $x \notin B$.

■

Como G^* está determinado, los dos teoremas precedentes demuestran que $G(B)$ también lo está, lo que termina la demostración del teorema 10.28.

10.7 Determinación proyectiva

En esta sección proseguiremos los argumentos empleados en la precedente para probar un refinamiento del teorema 10.28:

Teorema 10.38 *Si δ es un cardinal de Woodin, $X \in V_\delta$ y $A \subset X^\omega \times \mathcal{N}$ es un conjunto de Suslin δ^+-homogéneo, entonces el conjunto*

$$B = \{x \in X^\omega \mid \bigwedge y\ (x, y) \notin A\}$$

es un conjunto de Suslin κ-homogéneo para todo cardinal $\kappa < \delta$.

Como consecuencia:

Teorema 10.39 *Si existen cardinales $\delta_1 < \cdots < \delta_n < \kappa$, donde cada δ_i es de Woodin y κ es medible, entonces para todo $X \in V_{\delta_1}$ se cumple* $\mathrm{Det}_X(\mathbf{\Pi}^1_{n+1})$. *En particular* $V_{\delta_1} \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Det}(\mathbf{\Pi}^1_{n+1})$.

Demostración: Sea $A \subset X^\omega$ un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ y vamos a probar que es un conjunto de Suslin homogéneo, con lo que está determinado. Tenemos que $A = A_1 = \{x \in X^\omega \mid \bigwedge y_1\ (x, y_1) \notin A_2\}$, donde $A_2 \subset (X^\omega)^2$ es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_n$, luego

$$A_2 = \{(x, y_1) \in (X^\omega)^2 \mid \bigwedge y_2\ (x, y_1, y_2) \notin A_3\},$$

donde $A_3 \subset (X^\omega)^3$ es un conjunto $\mathbf{\Pi}^1_{n-1}$ y, en general, tenemos conjuntos A_i de la forma

$$A_i = \{(x, y_1, \ldots, y_i) \in (X^\omega)^i \mid \bigwedge y_{i-1}\ (x, y_1, \ldots, y_i) \notin A_{i+1}\},$$

para $i = 1, \ldots, n+1$, con $A_1 = A$ y A_{n+1} es $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Por el teorema 10.3 tenemos que A_{n+1} es un conjunto de Suslin κ-homogéneo, luego en particular δ_n^+-homogéneo. El teorema anterior implica entonces que A_n es δ_{n-1}^+-homogéneo y, tras un número finito de pasos, llegamos a que $A = A_1$ es un conjunto de Suslin homogéneo. ■

Por consiguiente:

Teorema 10.40 (Martin-Steel) *Si existe una sucesión numerable de cardinales de Woodin y un cardinal medible sobre ella (en particular, si existe un cardinal superfuerte), entonces se cumple el axioma de determinación proyectiva.*

Más aún, si δ_1 es el menor cardinal de Woodin de la sucesión considerada en el teorema anterior, entonces $V_{\delta_1} \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{Det}(\mathbf{P})$.

Pasamos a demostrar el teorema 10.38. Las hipótesis son exactamente las mismas que las del teorema 10.28, luego podemos aprovechar todos los resultados de la sección anterior. Concretamente, nos situamos en las condiciones de la demostración del teorema 10.36, excepto que no suponemos que exista una estrategia ganadora para I. Para cada posición $q^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n}$ que cumpla

las condiciones a), b), c) indicadas en la prueba, llamamos $\Gamma(q^*) = (l_n, t_n, u_n)$ a la prolongación de la partida determinada en la demostración (para lo que no se usa σ^*, sino que ésta se emplea únicamente para determinar los tipos w_n y los elementos x_{2n}). Las posiciones q^* que no cumplan las condiciones requeridas no están en el dominio de Γ.

En la demostración de 10.36 se ve que si partimos de una posición q^* que cumpla las propiedades a), b), c) y la prolongamos con $\Gamma(q^*)$ seguido de cualquier elección (legal) w_n y x_n, la nueva posición sigue cumpliendo las propiedades a), b), c), luego Γ estará definida sobre la nueva posición.

Para cada sucesión $q = \{(x_i, w_i)\}_{i<n}$, definimos $q^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n}$ tal que, para todo $m < n$, se cumple que $(l_m, t_m, u_m) = \Gamma(q^*|_m)$. Si, para algún $m < n$ sucede que $q^*|_m$ no es una posición legal en el juego G^* o si $\Gamma(q^*|_m)$ no está definido, entonces q^* queda indefinido.

Sea $R \subset (X \times V_\delta)^{<\omega}$ el árbol formado por las sucesiones q tales que q^* está definido. Vamos a probar que si $x \in p[R]$, entonces $x \in B$.

En efecto, sea $\{w_i\}_{i<\omega}$ tal que $q_n = \{(x_i, w_i)\}_{i<n} \in R$ para todo $n \in \omega$. Entonces $q^* = \bigcup\limits_{n<\omega} q_n^*$ es una partida de G^* que cumple todas las condiciones de la partida construida en la demostración de 10.36. (Allí la estrategia σ^* sólo servía para garantizar que la partida podía prolongarse hasta el final.) En particular, se sigue cumpliendo la conclusión $x \in B$ que obteníamos allí.

Ahora pasamos a la demostración del teorema 10.37, pero también sin suponer una estrategia ganadora. En su lugar, partimos de un $z \in X^\omega$ y construimos el árbol de iteraciones $\mathcal{A}^z$ junto con las sucesiones $\{l_n^z, t_n^z, u_n^z, w_n^z, x_n^z\}_{n<\omega}$ y $\{g_n^z\}_{n<\omega}$ con los únicos cambios siguientes:

- La propiedad a) la cambiamos por $(l_n, t_n, u_n) = j_{0,2n}(\Gamma)(p_n)$.
- La propiedad c) la cambiamos por $x_n = z_n$ para todo n.

De este modo, sustituimos la estrategia σ^* por Γ y la mitad impar de z, y sustituimos las jugadas de I en $G(B)$ por la mitad par de z. En principio, podría suceder que la construcción se interrumpiera porque $j_{0,2n}(\Gamma)(p_n)$ no estuviera definido, pero vamos a demostrar que esto no puede ocurrir. Para ello observamos que la construcción de las sucesiones para $i < n$ (y el árbol de iteraciones para índices $i < 2n + 1$) sólo depende de $s = z|_n$, luego, para cada $s \in X^n$ podemos construir (salvo en el hipotético caso de que un $j_{0,2n}(\Gamma)(p_n)$ quedara indefinido) un árbol $\mathcal{A}^s$ sobre $2n + 1$ y sucesiones $\{l_i^s, t_i^s, u_i^s, w_i^s, x_i^s\}_{i<n}$ y $\{g_i^s\}_{i<n}$, de modo que si $s < s'$ las sucesiones para s' extienden a las de s. Llamaremos M_i^s a los modelos de $\mathcal{A}^s$ y $j_{i,i'}^s$ a las inmersiones elementales que los conectan.

Lo que hemos de probar es que estas sucesiones pueden construirse para cualquier $s \in X^{<\omega}$ o, más concretamente, que si hemos logrado construirlas para un s de longitud n, entonces se cumple que $q^s = \{(x_i^s, w_i^s)\}_{i<n} \in j_{0,2n}^s(R)$, $(q^{s*})^{M_{2n}} = p_n^s$ y está definido $j_{0,2n}(\Gamma)(p_n^s)$, lo que permite prolongar la construcción para cualquier sucesor s' de s en $X^{<\omega}$.

En efecto, vamos a ver que si $\ell(s) = n+1$ y esto es cierto para $s|_n$, también es cierto para s. Tenemos que

$$p_n^s = \{(l_i^s, t_i^s, j_{2i,2n}^s(u_i^s), w_i^s, x_i^s)\}_{i<n}.$$

Por hipótesis de inducción, para todo $m < n$, se cumple que

$$(l_m^s, t_m^s, j_{2m,2n}^s(u_m^s)) = j_{0,2n}(\Gamma)(p_n^s|_m),$$

y la relación también vale para $m = n$ porque así es precisamente como construimos (l_n^s, t_n^s, u_n^s). Por lo tanto, aplicando $j_{2n,2n+2}$ obtenemos la misma relación para p_{n+1}^s (pues claramente $p_{n+1}^s|_m = j_{2n,2n+2}^s(p_n^s|_m)$), y esto prueba que $p_{n+1}^s = (q^{s*})^{M_{2n+1}}$, luego $q^s \in j_{0,2n+2}^s(R)$.

Para que $j_{0,2n+2}(\Gamma)(p_{n+1}^s)$ esté definido basta con que p_{n+1}^s cumpla$^{M_{2n+2}}$ las condiciones a), b), c) del teorema 10.36. Por hipótesis de inducción p_n^s las cumple en M_{2n}, luego $j_{2n,2n+2}(p_n^s) = p_{n+1}^s|_n$ las cumple en M_{2n+2}, y p_{n+1}^s resulta de prolongar esta posición con la jugada

$$(l_n, t_n, j_{2n,2n+2}(u_n)) = j_{2n,2n+2}(j_{0,2n}(\Gamma)(p_n^s)) = j_{0,2n+2}(\Gamma)(p_{n+1}^s|_n),$$

seguida de ciertas elecciones de w_n^s y x_n^s. Luego la demostración de 10.36) justifica que p_{n+1}^s sigue cumpliendo las propiedades a), b), c) y $j_{0,2n+2}(\Gamma)(p_{n+1}^s)$ está definido.

Así pues, tenemos definido $\mathcal{A}^s$ para todo $s \in X^{<\omega}$. Definimos $M_s = M_{2\ell(s)}^s$ y si $s \leq s'$ llamamos $j_{s,s'} : M_s \longrightarrow M_{s'}$ a la inmersión elemental $j_{2\ell(s),2\ell(s')}^{s'}$ y $f_s = \{w_i^s\}_{i<\ell(s)}$. En estos términos $q^s = (s, f_s)$ y acabamos de probar que $q^s \in j_{0,2n}^s(R) = j_{\varnothing,s}(R)$, luego $f_s \in j_{\varnothing,s}(R_s)$.

Vamos a demostrar que el árbol R es un árbol κ-homogéneo comprobando que los modelos M_s, las inmersiones $j_{s,s'}$ y los nodos f_s cumplen las condiciones de los teoremas 10.9 y 10.10.

La conmutatividad de las inmersiones elementales es inmediata. Hemos de garantizar que todas ellas tienen puntos críticos mayores que $\kappa < \delta$, lo cual equivale a que los dominios de todos los tipos u_n y w_n construidos en la prueba del teorema 10.37 cumplan esta condición. Ahora bien, todos los tipos que elegimos los obtenemos en última instancia a partir del teorema 10.23, que permite elegir el dominio arbitrariamente grande (por debajo de δ o de la imagen de δ en algún modelo por una inmersión elemental, por lo que siempre podemos elegir en todas las construcciones tipos con dominios mayores que κ. Esto garantiza que las inmersiones $j_{s,s'}$ cumplen lo requerido.

La propiedad $s < t \to j_{s,t}(f_s) < f_t$ es trivial, pues $j_{s,t}(f_s) = f_s$.

Por último, hemos de probar que si $x \in p[R]$ entonces el límite directo de los modelos $M_{x|_n}$ está bien fundado. Dicho límite no es más que el límite inductivo de la rama par del árbol $\mathcal{A}^x$. Notemos que el argumento dado en la prueba de 10.37 según el cual dicha rama no está bien fundada no es aplicable aquí, pues supone la existencia de una estrategia ganadora para II. Ahora bien, si suponemos que no lo está, todo el argumento de 10.37 es aplicable, y nos lleva a que $x \notin B$, luego, en particular, $x \notin p[R]$.

Con esto queda demostrado que R es un árbol κ-homogéneo. Para probar que B es un conjunto de Suslin κ-homogéneo sólo falta ver que $B = p[R]$. Ya habíamos probado una inclusión y casi tenemos la otra: si $x \in B$, acabamos de ver que la rama par de $\mathcal{A}^x$ está bien fundada, es decir, que el límite inductivo de los modelos $\{M_{x|_n}\}_{n\in\omega}$ está bien fundado, y el teorema 10.11 nos permite concluir que $x \in p[R]$. ■

Capítulo XI

La consistencia de AD

Veamos ahora que exactamente las mismas hipótesis con las que en el capítulo anterior hemos demostrado ADP demuestran en realidad $\mathrm{AD}^{L(\mathcal{N})}$. Continuamos trabajando en ZFC.

11.1 Conjuntos universalmente de Baire

En toda esta sección M será un modelo transitivo numerable de ZFC, δ será un cardinal de Woodin^M, llamaremos $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\delta) = \delta^{<\omega}$ y G será un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Sea $X \in V_\delta^M$, sea $S \in M$ un árbol en $X \times \omega \times \gamma$, para cierto ordinal $\gamma \in M$. Llamamos $A = p[S] \subset (X \times \omega)^\omega$ y

$$B = \{x \in X^\omega \mid \bigwedge y\ (x, y) \notin A\}^M.$$

Lo que afirma el teorema 10.28 es que si S es δ^+-homogéneo entonces B está determinado. El teorema siguiente es lo que podemos probar sobre la determinación del juego $G(B)$ sin suponer que S sea homogéneo.

Teorema 11.1 *Sea $B^* = \{x \in X^\omega \mid \bigwedge y\ (x, y) \notin p[S]\}^{M[G]}$. Entonces, se cumple una de las dos afirmaciones siguientes:*

a) En M, el jugador II *tiene una estrategia ganadora para el juego $G(B)$.*

b) En $M[G]$, el jugador I *tiene una estrategia ganadora para el juego $G(B^*)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea G^* el juego definido en 10.35. La prueba del teorema 10.37 no usa en ningún momento la homogeneidad de S, luego podemos afirmar que si II tiene una estrategia ganadora para G^* (en M), también la tiene para $G(B)$. Así pues, para probar el teorema podemos suponer que I tiene una estrategia ganadora para G^* (en M) y concluir que tiene una estrategia ganadora para $G(B^*)$ en $M[G]$.

Sea, pues, $\sigma^* \in M$ una estrategia ganadora para I en G^* y sea $\rho \in M$ una biyección $\rho : \delta \longrightarrow V_\delta^M$. Sea $g = \bigcup\limits_{p \in G} p : \omega \longrightarrow \delta$ suprayectiva.

(1) *Sea* $p^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n}$ *una posición legal para* G^*. *Entonces existe una jugada* (l_n, t_n, u_n) *legal para* II *en* G^*.

En efecto, trabajando en M en todo momento, tomamos $\zeta < \delta$ suficientemente grande para que $p^* \in V_\zeta$. El teorema 10.23 nos da un κ tal que $\zeta < \kappa < \delta$ y el κ-tipo de S en V_{ν_I+1} es elástico. Llamemos u al κ-tipo de de S y ν_I en V_{ν_I+1}. Entonces $(0, \varnothing, u)$ es una jugada válida para II. ■

Diremos que $e \in \omega$ es *válido* en una posición $p^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n} \in M$ si $\rho(g(e)) = (l_n, u_n, t_n)$ es una jugada legal para II tras la posición p^*. Acabamos de demostrar que siempre hay números válidos.

Diremos que una posición $\{x_i\}_{i<n}$ para $G(B^*)$ es *buena* si puede extenderse a una posición $p^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n} \frown (l_n, t_n, u_n, w_n) \in M$ para G^* tal que:

a) p^* es conforme a la estrategia σ^*.

b) Para cada $m \leq n$, $(l_m, t_m, u_m) = \rho(g(e_m))$, donde $e_m \in \omega$ es el menor número natural válido en $p^*|_m$.

Observemos que si una posición es buena, su extensión es única, pues la propiedad a) determina cada w_m y la propiedad b) determina cada (l_m, t_m, u_m). Ahora podemos definir una estrategia para I en $G(B^*)$:

Calculamos $(l_0, t_0, u_0) = \rho(g(e_0))$, luego calculamos $(w_0, x_0) = \sigma^*(l_0, t_0, u_0)$ y así jugamos x_0 en el juego $G^*(B)$. Con esto tenemos una ronda $p_0^* = \{(l_0, t_0, u_0, w_0, x_0)\}$ de G^*, tras la cual calculamos $(l_1, t_1, u_1) = \rho(g(e_1))$ y $w_1 = \sigma^*(p_0^* \frown (l_1, t_1, u_1))$. A continuación dejamos que II juegue el x_1 que quiera, con lo que obtenemos una segunda ronda $p_2^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<2}$, y continuamos de este modo indefinidamente.

Llamaremos $\sigma \in M[G]$ a la estrategia que acabamos de describir. Es evidente que si I juega de acuerdo con σ las posiciones de la partida serán siempre buenas y, en particular, siempre tendrá una respuesta para cada jugada de II. Hemos de ver que σ es una estrategia ganadora. Para ello tomamos una partida $x \in M[G]$ jugada de acuerdo con σ, y hemos de probar que $x \in B^*$. Supondremos por reducción al absurdo que $x \notin B^*$. Esto significa que existen $y \in \omega^\omega$, $f \in \gamma^\omega$ tales que $(x, y, f) \in M[G]$ es una rama infinita de S.

Como todas las posiciones $x|_i$ son buenas, tenemos una única partida $p^* = \{(l_i, t_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<\omega}$ de G^* acorde con σ^* y tal que $(l_i, t_i, u_i) = \rho(g(e_i))$, donde $e_i \in \omega$ es el menor número válido en $p^*|_i$ (pero p^* no tiene por qué pertenecer a M).

(2) *Existe una sucesión creciente* $\{n_i\}_{i<\omega}$ *de números naturales y una sucesión decreciente de ordinales* $\{\alpha_i\}_{i<\omega}$ *de modo que*

a) $t_{n_i} = y|_i$,

b) u_{n_i} *está realizado por* $S, (0, f(0)), \ldots, (i-1, f(i-1)), \alpha_i$ *en* $V^M_{\alpha_i+1}$.

Puesto que la existencia de una sucesión decreciente de ordinales es contradictoria, con esto quedará probado 11.1.

Construiremos las sucesiones recurrentemente. Empezamos con $n_0 = 0$ y $\alpha_0 = \nu_I$. Las reglas de G^* establecen que $t_0 = \varnothing$ (luego se cumple a) y que u_0 está realizado por S y ν_I en $V^M_{\nu_I+1}$ (luego se cumple b).

Supongamos definidos n_i y α_i. Las reglas de G^* establecen que w_{n_i} es un subtipo de $\pi(u_{n_i})$. Teniendo en cuenta b), concluimos que existe un ordinal $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ tal que w_{n_i} está realizado por $S, (0, f(0)), \ldots, (i-1, f(i-1)), \alpha_{i+1}$ en $V^M_{\alpha_{i+1}+3}$. (Notemos que α_{i+1} ha de situarse necesariamente al final de la sucesión porque w_{n_i} ha de respetar la regla g) de G^*.) Además $\alpha_{i+1} > \max\{\delta, \operatorname{rang} S\}$.

> **(2.1)** *Sea* $E = \max\{e_0, \ldots, e_{n_i}\}$. *Entonces existen* $e < \omega$ *y* $\kappa < \delta$ *tales que*
>
> *a)* $\rho(g(e)) = (l, t, u)$, *donde* $l = n_i$, $t = y|_{i+1}$ *y* u *es el* κ*-tipo en* $V^M_{\alpha_{i+1}+1}$ *de*
> $$S, (0, f(0)), \ldots, (i, f(i)), \alpha_{i+1}.$$
>
> *b)* $\pi(u)$ *es elástico.*
>
> *c)* $e > E$.
>
> *d)* $\rho(g(0)), \ldots, \rho(g(e-1)) \in V^M_\kappa$.

En efecto, sea $D \subset \mathbb{P}$ el conjunto de las condiciones q tales que las cuatro propiedades se cumplen con un $e < \ell(q)$ cambiando g por q. Notemos que $D \in M$, pues se define a partir de $f|_{i+1}$, $y|_{i+1}$. Ahora observamos que D es denso, pues si $p \in \mathbb{P}$ es una condición cualquiera, tomamos un e mayor que cualquier elemento de $\ell(p)$ que cumpla c), extendemos arbitrariamente p hasta una condición q' de dominio e, aplicamos el teorema 10.23, que nos da un $\kappa < \delta$ tal que el κ-tipo u' de $S, (0, f(0)), \ldots, (i, f(i))$ en $V^M_{\alpha_{i+1}+1}$ es elástico. Entonces el u definido en a) cumple que $\pi(u) = u'$ es elástico. Además κ puede ser elegido de modo que cumpla d) con q' en lugar de g. Finalmente, existe $\epsilon < \delta$ tal que $\rho(\epsilon) = (n_i, y|_{i+1}, u)$ y basta tomar $q = q' \cup \{(e, \epsilon)\}$ para que $q \in D$, $q \leq p$.

Como G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, existe $q \in D \cap G$ y el par (e, κ) correspondiente a dicho q cumple las propiedades con g en lugar de q, como queríamos. ■

Fijamos, pues, e y κ en las condiciones indicadas. Vamos a probar que (l, t, u) es un movimiento legal para II tras la posición $p^*|_n$ para todo $n \in \omega$ que cumpla $n > n_i$ y $\mathcal{D}u_{n-1} < \kappa$.

En efecto, sabemos (por hipótesis de inducción) que $y|_i = t_{n_i}$, luego t_l es el anterior de t. (Con esto l y t cumplen su parte de las reglas b y f de G^*.) Por su parte, u cumple la regla c) porque $(x|_{i+1}, y|_{i+1}, f|_{i+1}) \in S$ y claramente cumple la regla d). Finalmente, u cumple la regla f), es decir, u excede a $w_l = w_{n_i}$, como se sigue inmediatamente de las realizaciones que tenemos de ambos tipos.

> **(2.2)** *Existe un* n *tal que* $e_n = e$.

En efecto, como los e_n son números naturales distintos dos a dos, ha de existir un mínimo n tal que $e_n \geq e$. Por la propiedad c), ha de ser $n > n_i$ y por la condición d), puesto que $e_{n-1} < e$, sabemos que $\rho(g(e_{n-1})) \in V_\kappa^M$. En particular $u_{n-1} \in V_\kappa^M$, luego $\mathcal{D}u_{n-1} < \kappa$. Por la última afirmación que hemos probado, (l, t, u) es una jugada legal para II tras $p^*|_n$, luego e es válido en $p^*|_n$. Pero e_n es el menor número válido en $p^*|_n$, luego $e_n \leq e$ y tenemos la igualdad $e_n = e$. ■

Así, sólo tenemos que definir n_{i+1} como el n cuya existencia acabamos de probar, con lo que $l_{n_{i+1}} = n_i$, $t_{n_{i+1}} = y|_{i+1}$ y $u_{n_{i+1}} = u$ cumple la propiedad b). Con esto hemos completado la demostración de (2) y con ella la de 11.1. ■

Como caso particular:

Teorema 11.2 *Si $T \in M$ es un árbol en $X \times \gamma$, para cierto ordinal γ, entonces se cumple una de las dos afirmaciones siguientes:*

a) En M, el jugador II *tiene una estrategia ganadora para $G(X^\omega \setminus p[T])$.*

b) En $M[G]$, el jugador I *tiene una estrategia ganadora para $G(X^\omega \setminus p[T])$.*

(Notemos que $X^\omega \setminus p[T]$ no tiene por qué ser el mismo en M y en $M[G]$.)

Demostración: Basta aplicar el teorema anterior al árbol

$$S = \{(s, t, f) \in (X \times \omega \times \gamma)^{<\omega} \mid (s, f) \in T\}.$$

■

De aquí se deduce a su vez esta variante:

Teorema 11.3 *Si $T \in M$ es un árbol en $X \times \gamma$ para cierto ordinal γ, entonces se cumple una de las dos afirmaciones siguientes:*

a) En M, el jugador I *tiene una estrategia ganadora para $G(p[T])$.*

b) En $M[G]$, el jugador II *tiene una estrategia ganadora para $G(p[T])$.*

donde $p[T]$ no es necesariamente el mismo en M y en $M[G]$.

Demostración: Sea $T' \in M$ el árbol en $X \times \gamma$ dado por

$$T' = \{\varnothing\} \cup \{(x, 0) \frown p \mid x \in X \land p \in T\} \in M.$$

De este modo, $x \in p[T']$ si y sólo si la sucesión que resulta de eliminar su primera componente está en $p[T]$ (y esto es cierto tanto en M como en $M[G]$). Podemos aplicar a T' el teorema anterior. Si se da el caso a), es decir, si II tiene una estrategia ganadora σ' para $G(X^\omega \setminus p[T'])$ en M, entonces una estrategia ganadora σ de I para $G(p[T])$ en M consiste en fijar $x^* \in X$ y jugar $\sigma(p) = \sigma'(x^* \frown p)$. Con ella obtenemos partidas x que cumplen $x^* \frown x \in p[T']$, luego $x \in p[T]$.

Por otra parte, si es I quien tiene una estrategia ganadora σ' para el juego $G(X^\omega \setminus p[T'])$ en $M[G]$, definimos igualmente la estrategia σ para II, pero usando concretamente $x^* = \sigma'(\varnothing)$ y así obtenemos partidas x tales que $x^* \frown x \notin p[T']$, luego $x \notin p[T]$ y II gana. ■

Si X es un conjunto hereditariamente numerable (es decir, tal que su clausura transitiva es numerable), se dice que $C \subset X^\omega$ *universalmente de Baire* si cuando T es un espacio topológico con una base de abiertos regulares y $f : T \longrightarrow X^\omega$ es una aplicación continua (considerando en X^ω el producto de la topología discreta en X), entonces $f^{-1}[C]$ tiene la propiedad de Baire. Sin embargo, aquí tomaremos como definición una caracterización de esta propiedad debida a Feng, Magidor y Woodin, de modo que en ningún momento necesitaremos la equivalencia. Más aún, definiremos la noción de conjunto λ-universalmente de Baire, cuyo equivalente se obtiene limitando T a los espacios con una base regular de cardinal $\leq \lambda$.

Definición 11.4 Sea X un conjunto hereditariamente numerable, $C \subset X^\omega$ y λ un cardinal infinito. Diremos que C es λ-*universalmente de Baire* si existen árboles T y T^* en $X \times \gamma$ y $X \times \gamma^*$, respectivamente, donde γ y γ^* son ordinales, tales que:

a) $p[T] = C$, $p[T^*] = X^\omega \setminus C$.

b) Si $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\lambda)$, entonces

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash p[\check{T}] \cup p[\check{T}^*] = \check{X}^\omega.$$

El teorema siguiente es una de las piezas clave en la demostración de la consistencia de AD:

Teorema 11.5 *Si δ es un cardinal de Woodin, todo conjunto δ-universalmente de Baire está determinado.*

Demostración: Basta probar que el teorema se cumple en todo modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea C un conjunto δ-universalmente de Baire^M y sean T, $T^* \in M$ según la definición anterior, lo que nos permite situarnos en las condiciones que venimos manteniendo en la sección, es decir, que podemos tomar $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\delta)$ y un filtro $\mathbb{P}$-genérico G.

Aplicamos el teorema 11.3 a T y el teorema 11.2 a T^*. Si se cumple el caso a) de 11.3 entonces I gana $G(C)$, mientras que si se cumple el caso a) de 11.2 el jugador II gana $G(C)$, luego en ambos casos C está determinado. Por consiguiente, basta probar que no puede darse a la vez el caso b) de ambos teoremas. Si así fuera, en $M[G]$ el jugador II tendría una estrategia ganadora para $G(p[T])$ y I tendría una estrategia ganadora para $G(X^\omega \setminus p[T^*])$. Si ambos jugadores aplican sus estrategias respectivas en una partida llegan a un $x \in X^\omega$ (en $M[G]$) tal que $x \in X^\omega \setminus (p[T] \cup p[T^*])$, pero la definición anterior implica que, en $M[G]$, ha de ser $X^\omega = p[T] \cup p[T^*]$, contradicción. ■

11.2 Estrategias en extensiones genéricas

Dedicamos esta sección a demostrar un resultado técnico sobre iteraciones de modelos y extensiones genéricas que constituirá la última de las herramientas que emplearemos para demostrar la consistencia del axioma de determinación.

Sea S un árbol en un conjunto $X \times U_1 \times U_2$. Diremos que $x \in X^\omega$ es una *proyección fuerte* de S si existen $f_1 : \omega \longrightarrow U_1$ y $f_2 : \omega \longrightarrow U_2$ tales que $(x, f_1, f_2) \in [S]$ y f_1 es suprayectiva. Llamaremos pf(S) al conjunto de las proyecciones fuertes de S.

Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, δ un cardinal de Woodin^M, $X \in V_\delta^M$ y $S \in M$ un árbol en $X \times U_1 \times U_2$ para ciertos conjuntos $U_1, U_2 \in M$. Supondremos además que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ y que U_1, U_2 son los menores conjuntos (respecto a la inclusión) tales que S es un árbol en $X \times U_1 \times U_2$ (de modo que U_1 y U_2 son definibles a partir de S).

Diremos que $x \in X^\omega$ es una *proyección fuerte generalizada* de S si existe un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ de M (no exigimos que $\mathcal{A} \in M$) cuyos extensores tienen puntos críticos mayores que $\operatorname{rang} X$ tal que para toda rama infinita bien fundada r de $\mathcal{A}$ se cumple que $x \in \mathrm{pf}(j_{0,r}(S))$. Llamaremos $\mathrm{pfg}(S)$ al conjunto de todas sus proyecciones fuertes generalizadas.

Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\delta)$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Llamaremos $g : \omega \longrightarrow \delta$ a la aplicación suprayectiva determinada por G.

Definición 11.6 Consideramos el juego G^* que se juega de acuerdo con el esquema siguiente:

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
\mathrm{I} & & w_0, x_0 & & w_1 & & & w_2, x_2 & \cdots \\
\hline
\mathrm{II} & l_0, u_0 & & l_1, u_1 & & x_1 & l_2, u_2 & & \cdots
\end{array}
$$

y respetando las reglas siguientes:

a) $x_n \in X$.

b) u_n es un tipo de $2k_n + 2$ variables libres, para cierto $k_n \in \omega$, $\pi(u_n)$ es elástico y, si $s_n = x|_{k_n}$, entonces u_n contiene las fórmulas "v_{2i-1} es un par ordenado con primera componente $\tilde{i}$", "v_{2i} es un par ordenado con primera componente $\tilde{i} - 1$" (para $1 \leq i \leq k_n$) y "$(\tilde{s}_n, a, b) \in v_0$, donde $a = \{v_1, v_3, \ldots, v_{2k_n-1}\}$ y $b = \{v_2, v_4, \ldots, v_{2k_n}\}$".

c) Si $n > 0$ entonces $\mathcal{D}u_n > \mathcal{D}u_{n-1}$ y $\mathcal{D}u_0 > \operatorname{rang} X$.

d) Si $k_n = 0$ entonces u_n está realizado por S y ν_I en V_{ν_I+1}.

e) Si $k_n \neq 0$ entonces $l_n < n$, $k_{l_n} = k_n - 1$ y u_n excede a w_{l_n}.

f) w_n es un tipo de fórmulas con $2k_n + 3$ variables libres, es un subtipo de $\pi(u_n)$ y contiene las fórmulas "$v_{2k_n+2} > \max\{\tilde{\delta}, \operatorname{rang} v_0\}$", "$v_{2k_n+2}$ existe y es el máximo ordinal", "v_{2k_n+1} es de la forma (k_n, z), con $z \in A_1$, donde A_1 y A_2 son los menores conjuntos tales que v_0 es un árbol en $\tilde{S} \times A_1 \times A_2$".

El primer jugador que no puede cumplir las reglas pierde. Si la partida llega al final gana I.

Para cada $x \in X^\omega$, definimos $G(\neg S_x)$ como el juego en el que los jugadores I y II van construyendo alternativamente funciones $f_1 \in U_1^\omega$, $f_2 \in U_2^\omega$ según el esquema

$$\begin{array}{c|ccccc}
\mathrm{I} & f_1(0) & & f_1(1) & & \cdots \\
\hline
\mathrm{II} & & f_2(0) & & f_2(1) & \cdots
\end{array}$$

y de modo que I gana si para algún n se cumple $(x|_n, f_1|_n, f_2|_n) \notin S$. En caso contrario gana II. Llamaremos $\Game(\neg S)$ al conjunto de los $x \in X^\omega$ tales que I tiene una estrategia ganadora para $G(\neg S_x)$.

Teorema 11.7 *Sea $B = \Game(\neg S)^{M[G]}$. Si* I *tiene una estrategia ganadora para G^* en M, entonces* I *tiene una estrategia ganadora para $G(B)$ en $M[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: El argumento es una adaptación del que hemos empleado en la prueba de 11.1. Sea $\sigma^* \in M$ una estrategia ganadora para G^*. Sea $\rho \in M$ tal que $\rho : \delta \longrightarrow V_\delta^M$ biyectiva. La demostración de (1) en el teorema 11.1 es válida para la nueva definición de G^* sin más cambio que suprimir toda mención a la sucesión t_n. Así pues, II siempre puede hacer un movimiento legal.

Diremos que $e < \omega$ es *válido* en una posición $p^* = \{(l_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<n}$ si $\rho(g(e))$ es un movimiento legal para II después de p^*. Por la observación precedente, toda posición p^* tiene números válidos.

Diremos que una posición $\{x_i\}_{i<n}$ para $G(B)$ es *buena* si puede extenderse a una posición $p^* = \{(l_i, u_i, w_i, x_i))\}_{i<n} \frown (l_n, u_n, w_n)$ en G^* tal que:

a) p^* es conforme a la estrategia σ^*.

b) Para cada $m \leq n$, $(l_m, u_m) = \rho(g(e_m))$, donde e_m es el mínimo número válido para $p^*|_m$.

Como en la prueba de 11.1, podemos definir una estrategia $\sigma \in M[G]$ para I en $G(B)$ construyendo una partida para G^* en la que II juega con números válidos mínimos y con las jugadas de II en $G(B)$, mientras que I juega con su estrategia σ^*. Vamos a probar que σ es una estrategia ganadora, para lo cual consideramos una partida $x \in (X^\omega)^{M[G]}$ y suponemos, por reducción al absurdo, que $x \notin B$.

Esto significa que I no tiene una estrategia ganadora para $G(\neg S_x)$, pero el juego está trivialmente determinado (porque II gana siempre que se completa la partida), luego existe una estrategia $\tau \in M[G]$ ganadora para II.

Como todas las posiciones de la partida x son buenas, para cada $n < \omega$ podemos considerar la única extensión p_n^* de $x|_n$ que cumple la definición de posición buena. Sea $p^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} p_n^*$, de modo que $p^* = \{(l_i, u_i, w_i, x_i)\}_{i<\omega}$. Sea e_i el mínimo número válido en $p^*|_i$, de modo que $(l_i, u_i) = \rho(g(e_i))$.

Construimos recurrentemente funciones $f_1 \in U_1^\omega$, $f_2 \in U_2^\omega$, una sucesión creciente $\{n_i\}_{i<\omega}$ de números naturales y una sucesión decreciente $\{\alpha_i\}_{i<\omega}$ de ordinales, que supondrá una contradicción. Las sucesiones parciales han de cumplir:

a) $k_{n_i} = i$.

b) $(x|_i, f_1|_i, f_2|_i) \in S$.

c) $(f_1|_i, f_2|_i)$ es una posición en $G(\neg S_x)$ acorde a τ.

d) u_{n_i} está realizado respecto a δ en $V^M_{\alpha_i+1}$ por

$$S, (0, f_1(0)), (0, f_2(0)), \ldots, (i-1, f_1(i-1)), (i-1, f_2(i-1)), \alpha_i.$$

Iniciamos la construcción tomando $n_0 = 0$, $\alpha_0 = \nu_I$ y, obviamente, $f_1|_0 = f_2|_0 = \varnothing$. Observemos que de la regla e) de G^* se deduce que $k_0 = 0$. Es inmediato que se cumplen las cuatro propiedades precedentes. Supongamos que hemos realizado la construcción hasta i.

Por las reglas de G^* sabemos que w_{n_i} es un subtipo de $\pi(u_{n_i})$. Teniendo en cuenta la propiedad d) y la regla f) de G^*, podemos concluir que existe un $z \in U_1$ y un $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ de modo que w_{n_i} está realizado respecto de δ en $V^M_{\alpha_{i+1}+3}$ por

$$S, (0, f_1(0)), (0, f_2(0)), \ldots, (i-1, f_1(i-1)), (i-1, f_2(i-1)), (i, z), \alpha_{i+1}.$$

Notemos que la regla f) obliga a insertar los dos nuevos objetos, (i, z) y α_{i+1} precisamente en las posiciones en las que los hemos situado. Además implica que $\alpha_{i+1} > \text{máx}\{\delta, \operatorname{rang} S\}$. Definimos $f_1(i) = z$ y tomamos como $f_2(i)$ la jugada que determina τ tras la jugada $f_1(i)$ de I en el juego $G(\neg S_x)$. Puesto que es una estrategia ganadora, así aseguramos que $(x|_i, f_1|_i, f_2|_i) \in S$. Con esto tenemos comprobadas las propiedades b) y c). Nos falta definir n_{i+1}.

Para ello fijamos $E = \text{máx}\{e_0, \ldots, e_{n_i}\}$ y probamos que existen $e < \omega$ y $\kappa < \delta$ de modo que:

a) $\rho(g(e)) = (l, u)$, donde $l = n_i$ y u es el κ-tipo de

$$S, (0, f_1(0)), (0, f_2(0)), \ldots, (i, f_1(i)), (i, f_2(i)), \alpha_{i+1}$$

respecto de δ en $V^M_{\alpha_{i+1}+1}$.

b) $\pi(u)$ es elástico.

c) $e > E$.

d) $\rho(g(0)), \ldots, \rho(g(e-1)) \in V^M_\kappa$.

La prueba es completamente análoga a de (2.1) en la demostración del teorema 11.1.

Fijamos e y κ en estas condiciones. Vamos a probar que (l, u) es una jugada legal para II tras la posición $p^*|_n$ para todo $n \in \omega$ que cumpla $n > n_i$ y $\mathcal{D}u_{n-1} < \kappa$.

En efecto, como las fórmulas de u tienen $2i+4$ variables libres, se han de cumplir las reglas de G^* con $k_n = i+1$. Sabemos (por hipótesis de inducción) que $k_l = i = k_n - 1$, como exige la regla e) de G^*. Por su parte, u cumple la regla b) porque $(x|_{i+1}, y|_{i+1}, f|_{i+1}) \in S$ y claramente cumple la regla c). Finalmente, u cumple la regla e), es decir, u excede a $w_l = w_{n_i}$, como se sigue inmediatamente de las realizaciones que tenemos de ambos tipos.

Ahora probamos que existe un n tal que $e_n = e$. En efecto, como los e_n son números naturales distintos dos a dos, ha de existir un mínimo n tal que $e_n \geq e$. Por la propiedad c), ha de ser $n > n_i$ y por la condición d), puesto que $e_{n-1} < e$, sabemos que $\rho(g(e_{n-1})) \in V_\kappa^M$. En particular $u_{n-1} \in V_\kappa^M$, luego $\mathcal{D}u_{n-1} < \kappa$. Por la última afirmación que hemos probado, (l, t, u) es una jugada legal para II tras $p^*|_n$, luego e es válido en $p^*|_n$. Pero e_n es el menor número válido en $p^*|_n$, luego $e_n \leq e$ y tenemos la igualdad $e_n = e$.

Así, sólo tenemos que definir n_{i+1} como el n cuya existencia acabamos de probar, con lo que $l_{n_{i+1}} = n_i$ y $u_{n_{i+1}} = u$ cumple la propiedad d).

Con esto hemos completado la construcción de la sucesión decreciente de ordinales y esta contradicción demuestra el teorema 11.7. ■

Teorema 11.8 *Si el jugador* II *tiene una estrategia ganadora para G^* en M, entonces existe una estrategia σ (no necesariamente en M) para el jugador* II *en el juego sobre X tal que toda partida infinita jugada de acuerdo con σ pertenece a* $\operatorname{pfg}(S)$.

DEMOSTRACIÓN: La prueba es una adaptación de la del teorema 10.37. Fijamos una estrategia $\sigma^* \in M$ para II en G^* y vamos a determinar una estrategia en el juego sobre X basada en la construcción de los objetos siguientes:

a) Sucesiones l_n, u_n, w_n, x_n, p_n, donde u_n es un tipo de fórmulas con con $2k_n + 2$ variables libres.

b) Un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ de M, que determine modelos M_k e inmersiones elementales $j_{l,k}$, para $l \trianglelefteq k$.

c) Nodos $(a_n, b_n) \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n}}$.

d) $z_n \in j_{0,2n+1}(U_1)$.

Como en 10.37, el árbol de índices cumplirá:

- Los números pares $0 \lhd 2 \lhd 4 \lhd 6 \lhd \cdots$ constituyen una rama de $\mathcal{A}$.
- Si $k_n \neq 0$, el anterior a $2n+1$ es $2l_n + 1$.
- Si $k_n = 0$ el anterior a $2n+1$ es $2n$.

Definimos $p_0 = \varnothing$, y haremos

$$p_{n+1} = j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n, x_n),$$

de modo que p_n será una posición en el juego $j_{0,2n}(G^*)$ acorde con $j_{0,2n}(\sigma^*)$.

La construcción mantendrá las propiedades siguientes:

a) l_n, u_n son jugadas de $j_{0,2n}(G^*)$ acordes a $j_{0,2n}(\sigma^*)$ tras la posición p_n.

b) w_n es una jugada legal para I en $j_{0,2n+2}(G^*)$ tras la posición

$$j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, j_{2n,2n+2}(u_n)).$$

c) Si n es impar entonces x_n es la jugada que determina $j_{0,2n+2}(\sigma^*)$ tras la posición $j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n)$.

d) $w_n \in M_{2n+1}$ está realizado respecto de $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ por

$$j_{0,2n+1}(S), (0, a_n(0)), (0, b_n(0), \ldots, (k_n - 1, a_n(k_n - 1)), (k_n - 1, b_n(k_n(-1)),$$
$$(k_n, z_n),\ j_{0,2n+1}(\nu_I).$$

Esto implica que w_n es un tipo de fórmulas con $2k_n + 3$ variables libres que contiene las fórmulas exigidas por la regla f) de G^*. (Aquí usamos además que $z_n \in j_{0,2n+1}(U_1)$.)

e) w_n es elástico.

f) El punto crítico del extensor E_{2n+1} es $\kappa_{2n+1} = \mathcal{D}u_n$ y el de E_{2n} es $\kappa_n = \mathcal{D}w_{l_n}$ (salvo si $k_n = 0$, en cuyo caso $E_n = \varnothing$). Además, si llamamos λ_n al soporte de E_n, entonces $\mathcal{D}w_n < \lambda_{2n+1}$.

g) Todos los extensores usados en la construcción de $\mathcal{A}$ tienen puntos críticos sobre $\operatorname{rang} X$

Estas propiedades implican:

- $w_n \in M_i$ para todo $i \geq 2n + 2$.

  Pues M_i y M_{2n+2} concuerdan hasta λ_{2n+1} y $w_n \in V^{M_{2n+1}}_{\lambda_{2n+1}}$ por la propiedad f).

- $\kappa_{2n-1} < \lambda_{2n-1} < \kappa_{2n+1}$.

  En efecto, la primera desigualdad es trivial por f). La segunda se debe a que

  $$\lambda_{2n-1} \leq j_{2n-2,2n}(\kappa_{2n-1}) = j_{2n-2,2n}(\mathcal{D}u_{n-1}) < \mathcal{D}u_n = \kappa_{2n+1},$$

  donde hemos usado que, según la relación recurrente que define a p_n, éste contiene a $j_{2n-2,2n}(u_{n-1})$ y, según a), es posible jugar u_n, luego la regla c) de $j_{0,2n}(G^*)$ implica que $j_{2n-2,2n}(\mathcal{D}u_{n-1}) < \mathcal{D}u_n$.

- Para cada $n < m$, el punto crítico de $j_{2n+2,2m+2}$ es mayor que $\mathcal{D}w_n$. En particular $j_{2n+2,2m+2}(w_n) = w_n$.

  Por la propiedad precedente, el punto crítico es mayor o igual que el de $j_{2n+2,2n+4}$, que es $\kappa_{2n+3} > \mathcal{D}j_{2n,2n+2}(u_n) > \mathcal{D}w_n$, donde hemos usado la regla f) de $j_{0,2n+2}(G^*)$ y la propiedad c).

- Consecuentemente: $p_n = \{(l_i, t_i, j_{2i,2n}(u_i), w_i, x_i)\}_{i<n}$.

  En efecto, todas las componentes excepto la tercera son invariantes por las inmersiones elementales, luego la relación recurrente para p_n se reduce a la indicada.

Supongamos que tenemos definidas todas las sucesiones para todo $i < n$ y el árbol de iteraciones hasta $2n$, de modo que se cumplan las propiedades anteriores, y veamos cómo definirlas para $i = n$, a la vez que los modelos M_{2n+1} y M_{2n+2} (lo que incluye situar $2n+1$ y $2n+2$ en el árbol de índices, que tenemos parcialmente construido hasta $2n$). En particular tenemos definido p_n.

En primer lugar definimos l_n, u_n como la jugada para II establecida por $j_{0,2n}(\sigma^*)$ a partir[1] de la posición p_n. Esto garantiza a). En particular u_n es un tipo de fórmulas con $2k_n + 2$ variables libres. Distinguimos dos casos:

Caso 1 $k_n = 0$. Definimos $E_{2n} = \varnothing$, lo que significa que $M_{2n+1} = M_{2n}$ y que $j_{2n,2n+1}$ es la identidad. (Además, $a_n = b_n = \varnothing$.)

Podemos considerar entonces que $\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1}$, de modo que

$$\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} < \kappa_{2n+1},$$

entendiendo por definición que $\kappa_{2n+1} = \mathcal{D}u_n$, pues aún no hemos definido el extensor E_{2n+1}.

Según las reglas del juego, el tipo u_n está realizado respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ por $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+1}$. Esto es una propiedad que se cumple en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+\omega}$, luego, por la indiscernibilidad local de $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_S)$, también se cumple en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+\omega}$, es decir, que u_n está realizado respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ por $j_{0,2n+1}(S)$ y $j_{0,2n+1}(\nu_S)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+1}$.

Elegimos $z_n \in j_{0,2n}(U_1)$. En principio podemos elegirlo arbitrariamente, pero luego precisaremos la forma en que nos interesará hacerlo.

Por el teorema 10.23 (relativizado a M_{2n+1}) podemos tomar $\tau < j_{0,2n+1}(\delta)$ mayor que $\mathcal{D}u_n$ tal que el τ-tipo w_n de $j_{0,2n+1}(S)$, $(0, z_n))$ y $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ respecto a $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_L)+3}$ es elástico y, por lo dicho en el párrafo anterior, excede$^{M_{2n+1}}$ a $\pi(u_n)$. En particular cumple d) y e).

Por las reglas de G^*, el tipo $\pi(u_n)$ es elástico (en M_{2n+1}), luego, por el teorema 10.24 en M_{2n+1}, existe un extensor $E_{2n+1} \in V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\delta)}$ cuyo punto crítico es el dominio de $\pi(u_n)$ (que es el mismo que el de u_n, es decir, κ_{2n+1}), cuyo soporte $\lambda_{2n+1} > \tau$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n+1}}$ igual a su fortaleza y $w_n < \mathrm{amp}^{E_{2n+1}}_{\tau+\omega}(\pi(u_n))$. Con esto se cumplen f) y g).

[1]Notemos que todo esto tiene sentido cuando $n = 0$. Entonces $p_0 = \varnothing$, $M_0 = V$, $j_{0,0}$ es la identidad y l_0, u_0 es simplemente la jugada inicial para II según su estrategia ganadora. Las reglas de G^* obligan entonces a que $k_0 = 0$.

Además $\lambda_{2n+1} > \lambda_{2n}$, luego se cumplen las propiedades adicionales a) y b) de la definición de árbol de iteraciones, y c) (para $2n+1$) es trivial en este caso, pues $M_{2n} = M_{2n+1}$.

Definimos $M_{2n+2} = \mathrm{Ult}_{E_{2n+1}}(M_{2n})$ y $j_{2n,2n+2}$ como la inmersión canónica. En estos términos, $w_n < \mathrm{Proy}^1_{\tau+\omega}(j_{2n,2n+2}(\pi(u_n)))$ y, en particular, tenemos que $w_n < j_{2n,2n+2}(\pi(u_n)) = \pi(j_{2n,2n+2}(u_n))$. Es claro así que w_n cumple la última regla de $j_{0,2n+2}(G^*)$ para ser jugado por I tras $j_{2n,2n+2}(p_n \frown (l_n, u_n))$, luego se cumple b).

Por último, tomamos como x_n la jugada estipulada por $j_{0,2n+2}(\sigma^*)$ para la posición $j_{2n,2n+2}(p_n) \frown (l_n, j_{2n,2n+2}(u_n), w_n)$ si n es impar o un valor arbitrario en X (que representa una posible jugada de I en el juego sobre X) si n es par. Así se cumple c).

Caso 2 $k_n \neq 0$. Por las reglas de $j_{0,2n}(G^*)$, $l_n < n$, $k_{l_n} = k_n - 1$ y u_n excede$^{M_{2n}}$ a w_{l_n}. Sea κ_{2n+1} el dominio de u_n. Por el teorema 10.24 existe un extensor $E_{2n} \in V^{M_{2n}}_{j_{0,2n}(\delta)}$ cuyo punto crítico κ_{2n} es el dominio de w_{l_n} y su soporte $\lambda_{2n} > \kappa_{2n+1} > \lambda_{2n-1}$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n}}$ igual a su fortaleza. Además $u_n < \mathrm{amp}^{E_{2n}}_{\kappa+\omega}(w_{l_n})$. Definimos $M_{2n+1} = \mathrm{Ult}_{E_{2n}}(M_{2l_n+1})$ y $j_{2l_n+1,2n+1}$ como la inmersión canónica, de modo que $u_n < j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$.

Con esto tenemos la parte par de f), g) y las propiedades a) y b) requeridas por la definición de árbol de iteraciones. La propiedad c) también se cumple, pues afirma que $\kappa_{2n} < \lambda_{2n-1}$ y, en efecto, $\kappa_{2n} = \mathcal{D}w_{l_n} < \lambda_{2l_n-1} < \lambda_{2n-1}$, donde hemos usado la propiedad f) y las desigualdades que hemos probado en general sobre los puntos críticos y los soportes de los extensores E_n.

Observemos ahora que u_n contiene la fórmula "v_{2k_n+1} es el máximo ordinal". Ello se debe a que w_{l_n} está realizado por ciertos objetos en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$, el último de los cuales es $j_{0,2n+1}(\nu_I)$ (esto resulta de aplicar $j_{2l_n+1,2n+1}$ a la propiedad d) para w_{l_n}. Como u_n excede$^{M_{2n}}$ a w_{l_n}, ha de estar realizado por los mismos objetos (y otro más intercalado) en un cierto $V^{M_{2n+1}}_\nu$ tal que $j_{0,2n+1}(\nu_I) < \nu < \nu+1 < j_{0,2n+1}(\nu_I)+3$, luego ha de ser $\nu = j_{0,2n+1}(\nu_I)+1$.

Consideremos las sucesiones

$$a' = j_{2l_n+1,2n+1}(a_{l_n}) \qquad b' = j_{2l_n+1,2n+1}(b_{l_n}),$$

de modo que $(a', b') \in j_{0,2n+1}(S)_{x|_{k_n-1}}$. Sea igualmente

$$z' = j_{2l_n+1,2n+1}(z_{l_n}) \in j_{0,2n+1}(U_1).$$

Por hipótesis de inducción w_{l_n} está realizado respecto de $j_{0,2l_n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2l_n+1}}_{j_{0,2l_n+1}(\nu_I)+3}$ por

$$j_{0,2l_n+1}(S), (0, a_{l_n}(0)), (0, b_{l_n}(0)), \ldots, (k_n-2, a_{l_n}(k_n-2)), (k_n-2, b_{l_n}(k_n-2)),$$
$$(k_n-1, z_{l_n}), j_{0,2l_n+1}(\nu_I).$$

Por consiguiente, el tipo $j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$ está realizado respecto de $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ por

$$j_{0,2n+1}(S),(0,a'(0)),(0,b'(0))\ldots,(k_n-2,a'(k_n-2)),(k_n-2,b'(k_n-2)),$$

$$(k_n-1,z'),j_{0,2n+1}(\nu_I).$$

Como u_n es un subtipo de $j_{2l_n+1,2n+1}(w_{l_n})$, concluimos que u_n ha de estar realizado por estos mismos objetos y otro más (intercalado) en un cierto $V_\nu^{M_{2n+1}}$, para un cierto ordinal $\nu < j_{0,2n+1}(\nu_I)+3$. Ahora bien, la regla b) de G^* implica que el elemento adicional debe ser de la forma (k_n-1,z'') para un $z''\in j_{0,2n+1}(U_2)$ y ha de intercalarse en penúltimo lugar. Además, como u_n contiene la fórmula "v_{2k_n+1} es el máximo ordinal", ha de ser $\nu=j_{0,2n+1}(\nu_I)+1$.

Más aún, si llamamos $a_n=a'\frown z$, $b_n=b'_n\frown z'$, la misma regla b) implica que $(a_n,b_n)\in S_{x|k_n}$ y tenemos, en definitiva, que u_n está realizado en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+1}$ por

$$j_{0,2n+1}(S),(0,a_n(0)),(0,b_n(0))\ldots,$$

$$(k_n-1,a_n(k_n-1)),(k_n-1,b_n(k_n-1)),\ j_{0,2n+1}(\nu_I),$$

Más adelante emplearemos el hecho de que la construcción que estamos realizando cumple además que si $k_n\neq 0$,

a) a_n y b_n extienden, respectivamente a $j_{2l_n+1,2n+1}(a_{l_n})$ y $j_{2l_n+1,2n+1}(b_{l_n})$.

b) $j_{2l_n+1,2n+1}(z_{l_n})$ está en la imagen de a_n.

El resto es similar al caso anterior. Tenemos que

$$\kappa_{2n+1}<\lambda_{2n}\leq j_{2l_n+1,2n+1}(\kappa_{2n})=j_{2l_n+1,2n+1}(\mathcal{D}w_{l_n})$$

$$<j_{2l_n+1,2n+1}(j_{0,2l_n+1}(\delta))=j_{0,2n+1}(\delta),$$

porque w_{l_n} es un tipo en M_{2l_n+1}, luego su dominio es menor que $j_{0,2l_n+1}(\delta)$.

Por la indiscernibilidad, u_n está realizado en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_S)+1}$ por

$$j_{0,2n+1}(S),(0,a_n(0)),(0,b_n(0))\ldots,$$

$$(k_n-1,a_n(k_n-1)),(k_n-1,b_n(k_n-1)),\ j_{0,2n+1}(\nu_I).$$

Tomamos $z_n\in j_{0,2n+1}(U_1)$ (luego determinaremos la forma en que nos conviene elegirlo). El teorema 10.23 nos da un $\tau<j_{0,2n+1}(\delta)$ tal que $\tau>\lambda_{2n}$ y el τ-tipo w_n respecto a $j_{0,2n+1}(\delta)$ en $V^{M_{2n+1}}_{j_{0,2n+1}(\nu_I)+3}$ de

$$j_{0,2n+1}(S),(0,a_n(0)),(0,b_n(0))\ldots,(k_n-1,a_n(k_n-1))(k_n-1,b_n(k_n-1),$$

$$(k_n,z_n),\ j_{0,2n+1}(\nu_I)$$

es elástico, y lo dicho en el párrafo anterior implica que w_n excede$^{M_{2n+1}}$ a $\pi(u_n)$. En particular cumple las propiedades d) y e).

El teorema 10.24 nos da entonces un extensor $E_{2n+1} \in V_{j_{0,2n+1}(\delta)}^{M_{2n+1}}$ con punto crítico κ_{2n+1}, cuyo soporte $\lambda_{2n+1} > \tau$ es un cardinal inaccesible$^{M_{2n+1}}$ igual a su fortaleza y $w_n < \mathrm{amp}_{\tau+\omega}^{E_{2n+1}}(\pi(u_n))$. Con esto se cumple f) y g).

También se cumple la propiedad adicional a) de la definición de árbol de iteraciones, y las desigualdades $\kappa_{2n+1} < \lambda_{2n} < \lambda_{2n+1}$ implican las propiedades b) y c).

Definimos $M_{2n+2} = \mathrm{Ult}_{E_{2n+1}}(M_{2n})$ y $j_{2n,2n+2}$ como la inmersión canónica. A partir de aquí la construcción termina literalmente como en el caso 1.

Con esto termina la construcción, salvo que podemos especificar un criterio para elegir cada z_n. A este respecto observamos que toda rama infinita en el árbol $\mathcal{A}$ que acabamos de construir (distinta de la rama par) corresponde con una sucesión de índices de la forma

$$0, 2, \ldots, 2m_0,\ 2m_0 + 1,\ 2m_1 + 1 \ldots,$$

para cierta sucesión creciente $\{m_i\}_{i\in\omega}$. Vamos a ver que los z_n pueden elegirse de forma que se cumpla lo siguiente:

> *Para cada rama infinita r de $\mathcal{A}$ distinta de la rama par, para cada $2m+1 \in r$ y para cada $y \in j_{0,2m+1}(U_1)$ existe un índice $2m^*+1 \in r$, con $m^* > m$, de modo que $z_{m^*} = j_{2m+1,2m^*+1}(y)$.*

Para probar esto utilizamos que U_1 es numerable (en V). Cada vez que construimos un modelo M_{2n+1} en M elegimos en V una enumeración

$$j_{0,2n+1}(U_1) = \{z_{n,v} \mid v > 1\}.$$

Por otra parte, consideramos el conjunto de índices menores que $2n + 1$ en el árbol, que será de la forma

$$0 \lhd 2 \lhd \cdots 2m_0 \lhd 2m_0 + 1 \lhd \cdots \lhd 2m_i + 1 = 2n + 1.$$

Descomponemos $i = (u, v)$, donde (u, v) representa la semejanza $\omega \times \omega \longrightarrow \omega$ con el orden canónico en el producto, de modo que $u, v \leq i \leq m_i = n$. Tomamos $z_n = j_{2m_u+1,2n+1}(z_{u,v})$.

Con este criterio terminamos la construcción, y así, dada una rama r, un $2m_u + 1 \in r$ y un $y = z_{u,v} \in j_{0,2m_u+1}(U_0)$, tomamos $i = (u, v)$ y $m^* = m_i > m_u$ (porque $v > 1$), de modo que $z_{m^*} = j_{2m_u+1,2m^*+1}(z_{u,v})$, como había que probar.

Notemos que, puesto que las enumeraciones que acabamos de tomar no están en M, el árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ no está necesariamente en M. Esta construcción nos da una estrategia σ (no necesariamente en M) para II en el juego de X. Las jugadas de I se incorporan a la construcción como los objetos x_{2i}, mientras que las jugadas de II son los x_{2i+1} que produce la construcción. Hemos de probar que toda partida $x \in X^\omega$ jugada por II con la estrategia σ está en $\mathrm{pfg}(S)$.

La misma prueba vista en la demostración del teorema 10.37 muestra que la rama par de $\mathcal{A}$ no está bien fundada. (La única diferencia es que ahora

$j_{\mathrm{par}} : M \longrightarrow M_{\mathrm{par}}$. Notemos que $R \in M$ y que el límite inductivo se construye en V, no en M, por lo que contiene la sucesión $\{j_{2n,\mathrm{par}}(p_n)\}_{n\in\omega}$.)

Ahora consideramos una rama bien fundada r en $\mathcal{A}$, que, por lo que acabamos de observar, no será la rama par. Será, pues, finalmente de la forma $2m_i + 1$. Sea $a_i^* = j_{2m_i+1,r}(a_{m_i})$ y $b_i^* = j_{2m_i+1,r}(b_{m_i})$.

La propiedad a) de la página 375 implica que $a^* = \bigcup\limits_i a_i^*$ y $b^* = \bigcup\limits_i b_i^*$ cumplen que

$$a^* : \omega \longrightarrow j_{0,r}(U_1), \qquad b^* : \omega \longrightarrow j_{0,r}(U_2).$$

La propiedad c) de la construcción implica que $(x|_i, a^*|_i, b^*|_i) \in j_{0,r}(S)$, luego $(x, a^*, b^*) \in [j_r(S)]$.

Ahora observamos que a^* es suprayectiva pues, todo elemento de $j_{0,r}(U_1)$ es de la forma $j_{2m+1,r}(y)$, con $y \in j_{0,2m+1}(U_1)$, para cierto m tal que $2m+1 \in r$. Por la elección de los z_n sabemos que existe un $m^* > m$ tal que $2m^*+1 \in r$ y $j_{2m+1,2m^*+1}(y) = z_{m^*}$. Por la propiedad b) de la página 375 sabemos que $j_{2m^*+1,2m'+1}(z_{m^*})$ está en la imagen de $a_{m'}$, donde $2m'+1$ es el siguiente a $2m^*+1$ en r, luego $j_{2m+1,r}(y) = j_{2m^*+1,r}(z_{m^*})$ está en la imagen de $a_{m'}^*$, y también en la de a^*.

Esto prueba que $x \in \mathrm{pf}(j_r(S))$, y esto vale para toda rama bien fundada r de $\mathcal{A}$, luego $x \in \mathrm{pfg}(S)$. ■

Combinando el teorema anterior con el teorema 11.7 el teorema siguiente, en cuyo enunciado recogemos todas las hipótesis que venimos suponiendo desde el principio de la sección.

Teorema 11.9 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *δ un cardinal de Woodin^M, $X \in V_\delta^M$, $S \in M$ un árbol en $X \times U_1 \times U_2$, donde U_1 y U_2 son conjuntos disjuntos, los menores que cumplen que S es un árbol en el producto cartesiano. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\delta)$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces se cumple una de las dos afirmaciones siguientes:*

a) Existe una estrategia σ para el jugador II *en el juego sobre X tal que (en V) toda partida x jugada de acuerdo con σ cumple $x \in \mathrm{pfg}(S)$.*

b) Existe una estrategia $\sigma \in M[G]$ para el jugador I *en el juego sobre X tal que (en $M[G]$) toda partida x jugada de acuerdo con σ cumple $x \in \Game(\neg S)$.*

Nota En las condiciones del teorema anterior, si $R \in M$ es un árbol en X sin ramas finitas, la conclusión se cumple también cambiando "juego sobre X" por "juego sobre R", es decir, el juego que tiene como regla que todas las jugadas deben pertenecer a R.

En efecto, basta modificar la regla a) de G^* para exigir que $x|_n \in R$.

Teorema 11.10 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *δ un cardinal de Woodin^M, $X \in V_\delta^M$, $\kappa < \delta$, $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\kappa)$, $\mathbb{Q} = \mathrm{Col}(\delta)$, H un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $x \in X^\omega$. Entonces existe un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ de M tal que:*

a) Todos los extensores de $\mathcal{A}$ tienen puntos críticos mayores que κ.

b) Para cada rama bien fundada r de $\mathcal{A}$ existe un filtro G $j_{0,r}(\mathbb{Q})$-genérico sobre $M_r[H]$ tal que $x \in M_r[H][G]$.

Demostración: Las definiciones siguientes han de entenderse en M: Sea $\overline{X} = V^M_{\kappa+\omega}$ y sea $R \subset \overline{X}^{<\omega}$ el árbol formado por las sucesiones de ternas $\{(x_n, p_n, D_n)\}_{n<l}$ tales que:

a) $x_n \in X$, $p_n \in \mathbb{P}$.

b) D_n es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$.

c) $p_{n+1} < p_n$ y $p_{n+1} \in D_n$.

Sea U_1 el conjunto de los buenos nombres $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ para subconjuntos de $\mathbb{Q}$ tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \sigma$ es denso en $\check{\mathbb{Q}}$, sea A el conjunto de los buenos nombres $\sigma \in M^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}$ para subconjuntos de $\omega \times X$ tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash \sigma : \omega \longrightarrow \check{X}$ y sea $U_2 = A \cup \mathbb{Q}$.

Sea S el árbol en $\overline{X} \times U_1 \times U_2$ formado por las ternas

$$(\{(x_n, p_n, D_n)\}_{n<l}, \{\sigma_n\}_{n<l}, \{q_n\}_{n<l})$$

tales que:

a) $q_0 \in A$, $q_n \in \mathbb{Q}$ y $q_{n+1} < q_n$ para todo $n > 0$.

b) Si $i \leq n$, se cumple que $p_{n+1} \nVdash \check{q}_{i+1} \notin \sigma_i$.

c) Si $i \leq n$, se cumple que $(p_n, q_n) \nVdash q_0(\check{\imath}) \neq \check{x}_i$.

Aplicamos el teorema 11.9 al árbol S considerando juegos sobre el árbol R según la nota posterior. Consideramos primero el caso b), y veremos que en este contexto es imposible. Afirma que si G es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M existe una estrategia $\sigma \in M[G]$ para I en el juego sobre R tal que (en $M[G]$) toda partida jugada de acuerdo con σ está en $\Game(\neg S)$.

Aquí hemos de entender que la estructura conjuntista del árbol R se define de tal modo que el juego en R consiste en que el jugador I juega en cada turno un par (x_n, p_n) y el jugador II juega un D_n.

Observemos que δ es numerable$^{M[G]}$ y, por consiguiente, $(\mathcal{P}\mathbb{P})^M$ también. Por lo tanto, en $M[G]$ existe una enumeración $\{D_n\}_{n<\omega}$ de todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ en M. Consideremos la partida en R en la que I emplea su estrategia σ y II juega la sucesión de todos los conjuntos densos. La partida resultante será de la forma $(x, p, D) \in M[G]$, y estamos suponiendo que está en $\Game(\neg S)$, de modo que I tiene una estrategia ganadora en el juego $G(\neg S_{(x,p,D)})$.

Vamos a probar que, en realidad, es II y no I quien tiene la estrategia ganadora. En primer lugar observamos que la sucesión de condiciones

$$\cdots < p_3 < p_2 < p_1 < p_0$$

genera un filtro $H_0 \in M[G]$ que es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, por la propiedad c) de la definición de R junto con el hecho de que las jugadas de II recorren todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Tenemos entonces que $M[H_0] \subset M[G]$.

Por el teorema 8.37, existe un filtro $G_0 \in M[G]$ $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[H_0]$ tal que $M[G] = M[H_0][G_0]$. Podemos llamar $G = H_0 \times G_0$, con lo que no alteramos la extensión $M[G]$.

En una partida de $\neg S_{(x,p,D)}$, el jugador I empieza jugando un cierto nombre $\sigma_0 \in M^{\mathbb{P}}$, y la estrategia de II consiste en jugar a continuación un nombre $q_0 \in M^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}$ tal que $(q_0)_G = x$. Este nombre puede tomarse para que sea una jugada legal, es decir, tal que $q_0 \in A$. En efecto, en principio $x = \tau_G$, para cierto $\tau \in M^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}$, y se cumple que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash \bigvee f (f : \omega \longrightarrow \check{X} \wedge (\tau : \omega \longrightarrow \check{X} \rightarrow f = \tau)).$$

Por consiguiente ([PC 4.38]), existe un nombre $\tau' \in M^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash \tau' : \omega \longrightarrow \check{X} \wedge (\tau : \omega \longrightarrow \check{X} \rightarrow \tau' = \tau).$$

De aquí se sigue que $x = \tau'_G$. El teorema [PC 5.19] nos da un buen nombre q_0 para un subconjunto de $\omega \times X$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash (\tau' \subset \omega \times \check{X} \rightarrow \tau' = q_0).$$

Así, $x = (q_0)_G$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}} \Vdash q_0 : \omega \longrightarrow \check{X}$, con lo que $q_0 \in A$.

A partir de aquí, la estrategia de II consiste en usar que $(\sigma_n)_{H_0}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ para elegir condiciones $q_{n+1} \in G_0 \cap (\sigma_n)_{H_0}$ que formen una sucesión creciente. Así, si $i \leq n$, tenemos que $q_{i+1} \in (\sigma_i)_{H_0}$ y, como $p_{n+1} \in H_0$, resulta que $p_{n+1} \nVdash \check{q}_{i+1} \notin \sigma_i$.

Similarmente, como $(p_n, q_n) \in G$ y $(q_0)_G(i) = x_i$, se cumple también que $(p_n, q_n) \nVdash q_0(\check{\imath}) \neq \check{x}_i$.

Esto prueba que las posiciones a las que da lugar la estrategia descrita para II son legales para el juego $G(\neg S_{(x,p,D)})$, que llega así hasta el final, y ello da la victoria a II.

Esta contradicción prueba que, en realidad, se ha de cumplir el caso a) del teorema 11.9, es decir, que existe una estrategia σ para el jugador II en el juego sobre R tal que toda partida jugada de acuerdo a ella está en $\mathrm{pfg}(S)$.

Consideramos la partida sobre R en la que cada jugada (x_n, p_n) de I consiste en el x_n dado por la sucesión $x \in X^\omega$ del enunciado del teorema y p_n se elige de forma que $p_0 = \mathbb{1}$ y $p_{n+1} \in D_n \cap H$, $p_{n+1} < p_n$. Por su parte II juega según la estrategia σ. De este modo obtenemos una partida $(x, p, D) \in \mathrm{pfg}(S)$. Esto significa que existe un árbol de iteraciones $\mathcal{A}$ de M cuyos extensores tienen puntos críticos mayores que $\operatorname{rang} S$ (en particular mayores que κ) de modo que, para toda rama bien fundada r de $\mathcal{A}$ se cumple que $(x, p, D) \in \mathrm{pf}(j_{0,r}(S))$. A su vez, esto significa que existen σ, q tales que $((x, p, D), \sigma, q) \in [j_{0,r}(S)]$ y además $\sigma : \omega \longrightarrow j_{0,r}(U_1)$ es suprayectiva.

Notemos que $(\mathcal{P}\kappa)^M = (\mathcal{P}\kappa)^{M_r}$, por lo que $\mathbb{P}$ tiene los mismos subconjuntos densos en M y en M_r, luego el filtro H también es $\mathbb{P}$-genérico sobre M_r.

La sucesión q genera un filtro G. Veamos que es $j_{0,r}(\mathbb{Q})$-genérico sobre $M_r[H]$. Para ello observamos que, como la aplicación σ es suprayectiva, todo subconjunto denso de $j_{0,r}(\mathbb{Q})$ en $M_r[H]$ es de la forma[2] $(\sigma_i)_H$, para cierto $i \in \omega$. Por [PC 4.29 j)], existe un $p \in H$ tal que $p \Vdash \check{q}_{i+1} \in \sigma_i$ o $p \Vdash \check{q}_{i+1} \notin \sigma_i$. Ahora bien, el segundo caso no puede darse, pues entonces existiría un $n > i$ tal que $p_n \leq p$ y también tendríamos que $p_n \Vdash \check{q}_{i+1} \in \sigma_i$, en contradicción con la regla b) de la definición de S. Por consiguiente, $q_{i+1} \in E \cap G \neq \varnothing$.

Sólo falta probar que $x \in M_r[H][G]$, para lo cual a su vez basta probar que $x = (q_0)_{H\times G}$. En efecto, por la definición de S sabemos que $(q_0)_{H\times G} : \omega \longrightarrow X$ y, dado $i \in \omega$, existe una condición $(p,q) \in H \times G$ tal que $(p,q) \Vdash q_0(\check{\imath}) = \check{x}_i$ o $(p,q) \Vdash q_0(\check{\imath}) \neq \check{x}_i$, pero el segundo caso es imposible, ya que entonces existiría un $n \geq i$ tal que $(p_n, q_n) \leq (p,q)$, y tendríamos que $(p_n, q_n) \Vdash q_0(\check{\imath}) \neq \check{x}_i$, en contra de la regla c) de la definición de S. Así pues, $(q_0)_{H\times G}(i) = x_i$. ■

Terminamos la sección observando que a las inmersiones del árbol de iteraciones dado por el teorema anterior les podemos aplicar el teorema siguiente:

Teorema 11.11 *Sea $j : M \longrightarrow N$ una inmersión elemental entre modelos transitivos de* ZFC *y sea κ un cardinal^M menor que el punto crítico de j. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\kappa)$ y H un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces H es $\mathbb{P}$-genérico sobre N y j se extiende a una inmersión elemental $j^* : M[H] \longrightarrow N[H]$.*

DEMOSTRACIÓN: Se cumple que $(\mathcal{P}\mathbb{P})^M = (\mathcal{P}\mathbb{P})^N$. En particular $\mathbb{P}$ tiene los mismos subconjuntos densos en M y en N, luego H también es $\mathbb{P}$-genérico sobre N. Además j fija a los elementos de $\mathbb{P}$.

Si $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ cumplen que $\sigma_H = \tau_H$, entonces existe un $p \in H$ tal que $p \Vdash \sigma = \tau$, luego $p \Vdash j(\sigma) = j(\tau)$, luego $j(\sigma)_H = j(\tau)_H$.

Esto nos permite definir $j^* : M[H] \longrightarrow N[H]$ mediante $j^*(\sigma_H) = j(\sigma)_H$. En particular, para todo $x \in M$, tenemos que

$$j^*(x) = j^*(\check{x}_H) = j(\check{x})_H = \check{j}(x)_H = j(x),$$

con lo que j^* es una extensión de j. Además es una inmersión elemental, pues si se cumple $\phi^{M[H]}(\sigma_{1H}, \ldots, \sigma_{nH})$ existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, luego $p \Vdash \phi(j(\sigma_1), \ldots, j(\sigma_n))$, luego $\phi^{N[H]}(j^*(\sigma_{1H}), \ldots, j^*(\sigma_{nH}))$. ■

[2] Esto se prueba con el mismo argumento con el que más arriba hemos visto que x era de la forma $(q_0)_G$ con $q_0 \in A$.

11.3 Determinación en $L(\mathcal{N})$

Finalmente estamos en condiciones de demostrar el objetivo de este capítulo:

Teorema 11.12 (Woodin) *Si existen infinitos cardinales de Woodin y un cardinal medible sobre ellos, entonces $L(\mathcal{N})$ cumple* AD.

En primer lugar probaremos un resultado general sobre los modelos $L(A)$. Recordemos que la clase $L(A)$ se define como L salvo que $L_0(A) = \operatorname{ct} A \cup \{A\}$, donde A es un conjunto arbitrario.

Teorema 11.13 *Si $x \in L(A)$, existen una fórmula $\phi(x, y, y_1, \ldots, y_m)$, ordinales $\alpha < \beta$ y $a_1, \ldots, a_m \in \operatorname{ct} A \cup \{A\}$ tales que*

$$x = \{u \in L_\beta(A) \mid L_\beta(A) \vDash \phi[u, \alpha, a_1, \ldots, a_m]\}.$$

Demostración: Lo probamos por inducción sobre el mínimo ordinal γ tal que $x \in L_\gamma(A)$. Obviamente, γ no puede ser un ordinal límite.

Si $\gamma = 0$, basta tomar $\beta = 0$, $\phi(x, y_1) \equiv x = y_1$ y $a_1 = x$.

Si $\gamma = \gamma' + 1$, entonces existen una fórmula $\psi(x_0, z_1, \ldots, z_k)$ y conjuntos $b_1, \ldots, b_k \in L_{\gamma'}(A)$ tales que

$$x = \{u \in L_{\gamma'}(A) \mid L_{\gamma'}(A) \vDash \psi[u, b_1, \ldots, b_k]\}.$$

Por hipótesis de inducción,

$$b_i = \{v \in L_{\beta_i}(A) \mid L_{\beta_i}(A) \vDash \phi_i[v, \alpha_i, \bar{a}_i]\},$$

donde $\bar{a}_i$ abrevia una sucesión finita en $\operatorname{ct} A \cup \{A\}$. Por el teorema de reflexión aplicado a $L(A)$ existe un ordinal β mayor que γ y todos los β_i tal que $L_\beta(A)$ es un modelo del suficiente ZF. Entonces la fórmula $x = L_\delta(A)$ es absoluta para $L_\beta(A)$. Así, para todo $u \in L_\beta(A)$, tenemos que

$$u \in x \leftrightarrow u \in L_{\gamma'}(A) \land L_{\gamma'}(A) \vDash \psi[u, b_1, \ldots, b_k]$$

$$\leftrightarrow u \in L_{\gamma'}(A) \land L_{\gamma'}(A) \vDash \bigvee z_1 \cdots z_k (z_1 = b_1 \land \cdots \land z_n = b_n \land \psi[u, z_1, \ldots, z_k]).$$

En esta fórmula sustituimos

$$z_i = b_i \leftrightarrow \bigwedge v (v \in z_i \leftrightarrow v \in b_i)$$

$$\leftrightarrow \bigwedge v (v \in z_i \leftrightarrow v \in L_{\beta_i}(A) \land L_{\beta_i}(A) \vDash \phi_i[v, \alpha_i, \bar{a}_i]),$$

con lo que llegamos a una expresión de la forma

$$u \in x \leftrightarrow u \in L_\beta(A) \land L_\beta(A) \vDash \bigvee c_0 \cdots c_k (c_0 = L_{\gamma'}(A)$$

$$\land\, c_1 = L_{\beta_1}(A) \land \cdots \land c_k = L_{\beta_k}(A) \land u \in c_0 \land \Psi[u, c_0, \ldots, c_k, \bar{\alpha}, \bar{a}]),$$

donde $\bar{\alpha}$ y $\bar{a}$ recogen todos los parámetros que nos han aparecido. En total, tenemos que

$$u \in x \leftrightarrow u \in L_\beta(A) \wedge L_\beta(A) \vDash \phi[u, \alpha, a_1, \ldots, a_m],$$

donde $\alpha < \beta$ es el ordinal que se corresponde con la n-tupla $\bar{\alpha}$ a través de una semejanza canónica entre Ω^n y Ω y entre $a_1, \ldots, a_m$ incluimos al propio A que aparece en las fórmulas $c_i = L_{\alpha_i}(A)$. ■

En el caso en que $A \subset \mathcal{N}$ el resultado se puede mejorar si observamos que los elementos de $\operatorname{ct} A \setminus (A \cup \{A\})$ son todos definibles explícitamente mediante ordinales, pues son números naturales, o pares desordenados de números naturales o pares ordenados de números naturales. Por lo tanto, en el teorema anterior podemos exigir que los parámetros $a_1, \ldots, a_m$ varíen en $A \cup \{A\}$.

En lo sucesivo M será un modelo transitivo numerable de ZFC, $\{\delta_n\}_{n\in\omega} \in M$ será una sucesión de cardinales de Woodin^M y δ_∞ será su supremo. Llamaremos

$$\mathbb{P} = \coprod_{i\in\omega} \operatorname{Col}(\delta_i)$$

al conjunto parcialmente ordenado formado por sucesiones $p = \{p_i\}_{i\in\omega}$ tales que $p_i \in \operatorname{Col}(\delta_i)$ y $p_i = \mathbb{1}_i$ salvo a lo sumo para un número finito de índices. Notemos que $|\mathbb{P}|^M = \delta_\infty$. Además G será un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Para cada $n \in \omega$, llamamos

$$\mathbb{P}_n = \prod_{i<n} \operatorname{Col}(\delta_i) \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}_{\overline{n}}^{\geq} = \coprod_{i\geq n} \operatorname{Col}(\delta_i),$$

de modo que $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_{\overline{n}}^{\geq}$. En particular $G = G|_n \times G_{\overline{n}}^{\geq}$, donde $G|_n$ es $\mathbb{P}_n$-genérico sobre M y $G_{\overline{n}}^{\geq}$ es $\mathbb{P}_{\overline{n}}^{\geq}$-genérico sobre $M[G|_n]$.

Definimos

$$R^*[G] = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{N}^{M[G|_n]}.$$

Notemos que $R^*[G] \in M[G]$. De hecho, podemos asociarle un nombre canónico

$$R^*[\Gamma] = \bigcup_{n<\omega} A_n \times \mathbb{P}_n,$$

donde A_n es el conjunto de buenos $\mathbb{P}_n$-nombres τ para subconjuntos de $\omega \times \omega$ (identificados con $\mathbb{P}$-nombres a través de la inmersión completa $i_n : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}$) tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n} \Vdash \tau : \omega \longrightarrow \omega$.

El *modelo derivado* de M inducido por G es $W = L_{o(M)}(R^*[G])$, donde $o(M) = M \cap \Omega$, entendiendo que $W = L(R^*[G])$ si M es una clase propia. Equivalentemente,

$$W = (L(R^*[G]))^{M[G]}.$$

Teorema 11.14 *Sean $v_1, \ldots, v_k \in M[G|_n] \cap W$ y sea ϕ una fórmula tal que*

$$\phi^W(R^*[G], v_1, \ldots, v_k).$$

Entonces $(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \phi^{L(R^*[\Gamma])}(R^*[\Gamma], \check{v}_1, \ldots, \check{v}_k))^{M[G|_n]}$.

Demostración: Tenemos que $M[G] = M[G|_n][G_n^{\geq}]$ y $R^*[G_n^{\geq}] = R^*[G]$, pues $M[G_n^{\geq}|_m] = M[G_{n+m}]$ y los conjuntos $\mathcal{N}^{M[G|_n]}$ incluyen a los anteriores en la sucesión, por lo que su unión no se ve afectada al suprimir los primeros. Así pues, W es también el modelo derivado de $M[G|_n]$ inducido por $G_n^{\geq}$. La hipótesis es

$$(\phi^{L(R^*[G_n^{\geq}])}(R^*[G_n^{\geq}], v_1, \ldots, v_k))^{M[G|_n][G_n^{\geq}]}.$$

Por tanto existe un $p \in G_n^{\geq}$ tal que $(p \Vdash \phi^{L(R^*[\Gamma])}(R^*[\Gamma], \check{v}_1, \ldots, \check{v}_k))^{M[G|_n]}$.

Supongamos que no se cumple esto mismo con $p = \mathbb{1}$. Entonces existe una condición $q \in \mathbb{P}_n^{\geq}$ tal que $(q \Vdash \neg\phi^{L(R^*[\Gamma])}(R^*[\Gamma], \check{v}_1, \ldots, \check{v}_k))^{M[G|_n]}$.

Por [PC 6.11] sabemos que cada $\mathrm{Col}(\delta_i)$ es casi homogéneo, de donde se sigue inmediatamente que $\mathbb{P}_n^{\geq}$ también lo es, es decir, que existe un automorfismo $f \in M[G|_n]$ tal que $f(p)$ es compatible con q. Sea, pues, $r \in \mathbb{P}_n^{\geq}$ tal que $r \leq f(p)$, $r \leq q$. Por [PC 6.7] tenemos que

$$(f(p) \Vdash \phi^{L(R^*[f(\Gamma)])}(R^*[f[\Gamma]], \check{v}_1, \ldots, \check{v}_k))^{M[G|_n]},$$

luego, si G es un filtro $\mathbb{P}_n^{\geq}$-genérico sobre $M[G|_n]$ que contenga a r, tenemos que

$$(\phi^{L(R^*[G])}(R^*[G], v_1, \ldots, v_k) \wedge \neg\phi^{L(R^*[H])}(R^*[H], v_1, \ldots, v_k))^{M[G|_n][G]},$$

donde $H = f(\Gamma)_G = f^{-1}[G]$. Ahora bien, vamos a probar que $R^*[G] = R^*[H]$, y así tendremos una contradicción.

En efecto, $x \in R^*[H]$ si y sólo si $x \in \omega^\omega$ y existe un $\sigma \in M[G|_n]^{\mathbb{P}_n^{\geq}}$ tal que $x = \sigma_H$, pero en tal caso $f(\sigma) \in M[G|_n]^{\mathbb{P}_n^{\geq}}$ y, por [PC 6.7], $x = f(\sigma)_G$, luego $x \in R^*[G]$. Razonando con el automorfismo inverso de f tenemos la inclusión contraria. ■

Teorema 11.15 *Con la notación precedente, se cumple que $\mathcal{N}^W = R^*[G]$.*

Demostración: Obviamente $R^*[G] \subset \mathcal{N}^W$. Tomemos $x \in \mathcal{N}^W$. Por el teorema 11.13 y la observación posterior

$$x = \{u \in \omega \times \omega \mid L_\beta(R^*[G]) \vDash \phi[u, \alpha, a, R^*[G]]\},$$

para ciertos ordinales $\alpha < \beta < o(M)$ y un $a \in R^*[G]$. (Aquí usamos que m elementos de $R^*[G]$ pueden codificarse por uno solo.) Sea $n \in \omega$ suficientemente grande para que $a \in \mathcal{N}^{M[G|_n]}$. Entonces, dado $v \in \omega \times \omega$, por el teorema anterior, si $v \in x$, tenemos que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \check{v} \in \{u \in \omega \times \omega \mid L_{\check{\beta}}(R^*[\Gamma]) \vDash \phi[u, \check{\alpha}, \check{a}, R^*[\Gamma]]\},$$

mientras que si $v \notin x$ entonces

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \check{v} \notin \{u \in \omega \times \omega \mid L_{\check{\beta}}(R^*[\Gamma]) \vDash \phi[u, \check{\alpha}, \check{a}, R^*[\Gamma]]\}.$$

Por consiguiente,

$$x = \{v \in \omega \times \omega \mid \mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \check{v} \in \{u \in \omega \times \omega \mid L_{\check{\beta}}(R^*[\Gamma]) \vDash \phi[u, \check{\alpha}, \check{a}, R^*[\Gamma]]\}\}.$$

Esto prueba que $x \in M[G|_n]$, luego $x \in \mathcal{N}^{M[G|_n]} \subset R^*[G]$. ■

Nota A su vez de aquí se sigue que todo elemento $A \in W$ es de la forma

$$A = \{u \in L_\gamma(R^*[G]) \mid L_\beta(R^*[G]) \vDash \phi[u, \alpha, a]\},$$

para ciertos ordinales $\alpha < \beta < o(M)$ y cierto $a \in R^*[G]$. En principio faltaría incluir a $R^*[G]$ entre los parámetros de ϕ, pero es posible arreglar ϕ para que $R^*[G]$ aparezca únicamente en subfórmulas de tipo $x \in R^*[G]$ y, por el teorema anterior, éstas pueden sustituirse por $x \in \mathcal{N}$, ya que todo $\mathcal{N} \cap L_\gamma(R^*[G]) = R^*[G]$. ■

Definición 11.16 Una fórmula $\Sigma_1(\mathcal{N})$ es una fórmula de la forma

$$\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]),$$

para ciertos $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{N}$.

Teorema 11.17 *Sea $R \subset \mathcal{N}$ y sean $\alpha \leq \beta$ dos ordinales para los que se cumpla que $\mathcal{N}^{L_\alpha(R)} = \mathcal{N}^{L_\beta(R)} = R$. Entonces toda fórmula $\Sigma_1(\mathcal{N})$ que se cumpla en $L_\alpha(R)$ se cumple también en $L_\beta(R)$.*

Demostración: Estamos suponiendo que $x_1, \ldots, x_n \in R$ cumplen una fórmula de la forma

$$(\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]))^{L_\alpha(R)},$$

es decir, que

$$\bigvee Q \in L_\alpha(R)(R \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]).$$

Obviamente, lo mismo vale cambiando α por β, y esto es

$$(\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]))^{L_\beta(R)}.$$

■

Nota Observemos que el teorema anterior es válido igualmente, con la misma prueba, si sustituimos $L_\beta(R)$ por $L(R)$.

Como caso particular:

Teorema 11.18 *En las condiciones del teorema anterior, si $L_\alpha(R)$ y $L_\beta(R)$ son modelos de (el suficiente) ZF y $L_\beta(R)$ cumple* AD, *lo mismo le sucede a $L_\alpha(R)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $L_\alpha(R)$ no cumple AD, existe un conjunto $A \in L_\alpha(R)$, $A \subset R$ tal que A no está determinado$^{L_\alpha(R)}$. Notemos que una estrategia para cualquiera de los jugadores en el juego $G(A)$ es una aplicación $\sigma : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$, luego puede codificarse por un $x \in \mathcal{N}$. Además, la fórmula "x codifica una estrategia para A" es absoluta para modelos transitivos de ZF. Así pues, que A no esté determinado$^{L_\alpha(R)}$ equivale a que

$$\bigwedge x \in R\ x \text{ no codifica una estrategia para } A.$$

De aquí se sigue que $\neg\mathrm{AD}^{L_\alpha(R)}$ equivale a

$$(\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \text{“el suficiente ZF} + V = L(\mathcal{N})\text{”}$$

$$\land \bigvee A \bigwedge x \in \mathcal{N}\ x \text{ no codifica una estrategia para } A))^{L_\alpha(R)}.$$

En efecto, basta tomar $Q = L_\gamma(R)$ para cualquier $\gamma < \alpha$ tal que $A \in Q$ (notemos que α ha de ser un ordinal límite) y, recíprocamente, si se cumple esto Q ha de ser necesariamente de la forma $L_\gamma(R)$ y concluimos que A no está determinado$^{L_\alpha(R)}$.

Por el teorema anterior, esta sentencia $\Sigma_1(\mathcal{N})$ se cumple también en $L_\beta(R)$, lo que implica que este modelo tampoco cumple AD. ■

Teorema 11.19 *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula $\Sigma_1(\mathcal{N})$. Supongamos que M es un modelo numerable y que existe una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$, donde V_θ es un submodelo elemental de V. Si $x_1, \ldots, x_n \in R^*[G]$ y $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ se cumple en el modelo derivado de M inducido por G, entonces se cumple también en $L(\mathcal{N})$.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 10.20 (véase la observación posterior a su enunciado) garantiza que el jugador "bueno" tiene una estrategia ganadora Σ para el juego de las iteraciones de M. Podemos sustituir θ por un ordinal mayor de modo que M, Σ, G y $\mathcal{N}$ pertenezcan a V_θ. Sea $X \prec M$ un submodelo elemental numerable tal que $M, \Sigma, G, \mathcal{N} \in X$ y $M \subset X$, sea P su colapso transitivo y sea $\tau : P \longrightarrow V_\theta$ la aplicación inversa de la función colapsante. Así $M \in P$ y τ es la identidad en M. Además, como M es numerable$^{V_\theta}$, también M es numerable^P.

Ahora probamos que $\tau^{-1}(\Sigma) = \Sigma \cap M$. Veamos lo que esto significa:

Si el jugador "malo" empieza una partida en P eligiendo un árbol $\mathcal{A}_0 \in P$ de iteraciones de $M = M_0$, se cumple que $\tau(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0$. Esto se debe a que $\mathcal{A}_0$ está determinado por un árbol de índices (un subconjunto de $\omega\times\omega$) y por una familia numerable de extensores, que son aplicaciones entre conjuntos numerables^P de ordinales numerables^P. Por lo tanto, $\mathcal{A}_0 \in (V_{\aleph_1})^P$ y τ fija a todo elemento de $(V_{\aleph_1})^P$. (Esto se prueba por inducción sobre el rango, teniendo en cuenta que si $x \in (V_{\aleph_1})^P$, existe $f : \omega \longrightarrow x$ biyectiva, $f \in P$, luego $\tau(f) : \omega \longrightarrow \tau(x)$ biyectiva.)

Por lo tanto, podemos calcular $r = \Sigma(\mathcal{A}_0) \in X$, que es una rama bien fundada de $\mathcal{A}_0$, es decir, un subconjunto de ω, luego $\tau^{-1}(r) = r$ es una rama bien fundada de $\mathcal{A}_0$ en P y una jugada válida para el jugador "bueno" en P. Más concretamente, lo que hemos probado es que $\tau^{-1}(\Sigma)(\mathcal{A}_0) = \Sigma(\mathcal{A}_0)$. El límite inductivo M_1 a lo largo de dicha rama es claramente el mismo en P o en V. Ahora el jugador "malo" elige un nuevo árbol de iteraciones $\mathcal{A}_1 \in P$ de M_1, y vemos igualmente que el jugador "bueno" puede responder con $\Sigma(\mathcal{A}_1)$. Así, el hecho de que Σ sea una estrategia ganadora nos asegura que la partida puede continuarse hasta obtener una sucesión $\{M_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1^P} \in P$ donde las ramas elegidas por el jugador "bueno" según $\tau^{-1}(\Sigma)$ en P son simplemente las elegidas por Σ en V.

Fijemos $n \in \omega$ y consideremos $\mathbb{P}^* = \mathrm{Fn}(\omega \setminus n, \mathcal{N}^P)$, es decir, el conjunto de funciones parciales finitas de $\omega \setminus n$ en $\mathcal{N}^P$. Sea K un filtro $\mathbb{P}^*$-genérico sobre P, que determina una enumeración $\{a_i\}_{n\leq i<\omega}$ de $\mathcal{N}^P$.

Definimos $M_0 = \cdots = M_n = M$ y $j_{i,i'}$, para $i \leq i' \leq n$ será la identidad en M. Descomponemos $G|_n = G_0 \times \cdots \times G_{n-1}$ y, para $i < n$, definimos $H_i = G_i$.

Ahora vamos a demostrar construir objetos $\mathcal{A}_i$, r_i, M_i, H_i para $n \leq i < \omega$ y aplicaciones $j_{i,i'} : M_i \longrightarrow M_{i'}$ para $n \leq i \leq i' < \omega$ que conmuten de forma natural y de modo que se cumplan las propiedades siguientes (donde llamamos $H^i = H_0 \times \cdots \times H_{i-1}$):

a) M_i es un modelo transitivo de ZFC y $j_{i,i'}$ es una inmersión elemental.

b) $\mathcal{A}_i$ es un árbol de iteraciones de M_i cuyos extensores tienen todos punto crítico mayor que $j_{0,i}(\delta_{i-1})$.

c) r_i es la rama infinita de $\mathcal{A}_i$ dada por Σ.

d) M_{i+1} es el límite inductivo de los modelos de $\mathcal{A}_i$ correspondientes a la rama r_i y $j_{i,i+1}$ es la inmersión natural en dicho límite inductivo.

e) H_i es un filtro $\mathrm{Col}(j_{0,i+1}(\delta_i))$-genérico sobre $M_{i+1}[H^i]$.

f) $a_i \in M_{i+1}[H^i \times H_i]$.

Notemos que la propiedad a) se cumple también para $i \leq n$ y la propiedad e) para $i < n$, pues $H_i = G_i$ es un filtro $\mathrm{Col}(\delta_i)$-genérico sobre $M[G|_i] = M_{i+1}[H^i]$.

La propiedad e) requiere una explicación: Estas propiedades implican que

H^i es un filtro $j_{0,i}(\mathbb{P}|_i)$-genérico sobre M_i.

En efecto, para $i \leq n$ tenemos que $H^i = G|_i$, que es $P|_i$-genérico sobre $M = M_i$, y $j_{0,i}$ es la identidad. Si es cierto para un $i \geq n$, las propiedades b) y d) implican que el punto crítico de $j_{i,i+1}$ está por encima de $j_{0,i}(\delta_{i-1})$, por lo que $j_{0,i+1}(\mathbb{P}|_i) = j_{0,i}(\mathbb{P}|_i)$ y sus subconjuntos densos en M_{i+1} son los mismos que en M_i, por lo que también

H^i es $j_{0,i+1}(\mathbb{P}|_i)$-genérico sobre M_{i+1}.

Es por esto que tiene sentido la extensión $M_{i+1}[H^i]$ que aparece en la propiedad e), la cual implica ahora que H^{i+1} es un filtro sobre el conjunto $j_{0,i+1}(\mathbb{P}|_i) \times \mathrm{Col}(j_{0,i+1}(\delta_i)) = j_{0,i+1}(\mathbb{P}|_{i+1})$ y que es genérico sobre M_{i+1}.

A partir de $i = n$, la construcción puede verse como las primeras jugadas de una partida de iteraciones de $M_n = M$ en P en la que el jugador "bueno" aplica su estrategia Σ para elegir las ramas r_i y el jugador "malo" elige adecuadamente los árboles $\mathcal{A}_i$ para que se cumplan las propiedades anteriores. El hecho de que el jugador "bueno" emplee la estrategia Σ garantiza que la construcción puede continuar indefinidamente. Supongamos, pues, construido el modelo M_i y los demás objetos para $i' < i$.

Para elegir el árbol $\mathcal{A}_i$ aplicamos el teorema 11.10 (relativizado a P) con $M = M_i$, $\delta = j_{0,i}(\delta_i)$, $X = \omega$, $\kappa = j_{0,i}(\delta_{i-1})$, pero en lugar de considerar $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(j_{0,i}(\delta_{i-1}))$ tomamos $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(j_{0,i}(\delta_1)) \times \cdots \times \mathrm{Col}(j_{0,i}(\delta_{i-1}))$, que es isomorfo a $\mathrm{Col}(j_{0,i}(\delta_{i-1}))$, por lo que 11.10 es válido igualmente. A su vez, tomamos $H = H^i$ y $x = a_i$.

De este modo obtenemos un árbol de iteraciones $\mathcal{A}_i$ (en P) cuyos extensores tienen todos punto crítico por encima de $j_{0,i}(\delta_{i-1})$ (con lo que se cumple b) y tal que, eligiendo r_i de acuerdo con Σ (equivalentemente, con $\tau^{-1}(\Sigma) \in P$), de modo que se cumple c) y nos permite definir M_{i+1} y $j_{i,i+1}$ de acuerdo con d), podemos asegurar que existe un filtro H_i que cumple e) y f).

Observemos que la construcción depende de la sucesión $\{a_i\}$ o, equivalentemente, del filtro K, que no está en P, luego no puede realizarse en P y no podemos asegurar que las cuatro sucesiones que construimos estén en P, pero lo que sí que sabemos es que cada uno de los objetos construidos $\mathcal{A}_i$, r_i, M_i, H_i está en P. Donde sí que están las sucesiones construidas es en la extensión genérica $P[K]$.

Veamos ahora que podemos ajustar la construcción de forma que se cumpla:

($*$) *Para todo $i < \omega$ y todo $D \in M_i$ denso en $j_{0,i}(\mathbb{P})$, existe un $i^* > i$ tal que $H^{i^*} \cap j_{i,i^*}(D) \neq \varnothing$.*

Esto ha de entenderse como que $H^{i^*} \subset j_{0,i^*}(\mathbb{P}|_{i^*})$ contiene una condición que, completada con unos, está en $j_{i,i^*}(D) \subset j_{0,i^*}(\mathbb{P})$.

Para ello, cada vez que construimos un modelo $M_i \in P$, elegimos una aplicación $f_i \in P$ tal que $f_i : \omega \longrightarrow M_i$ biyectiva, de forma que $\{f_i\}_{i\in\omega} \in P[K]$. También construiremos una sucesión $\{q_i\}_{n\leq i<\omega}$ tal que:

- $q_i \in j_{0,i}(\mathbb{P})$.
- $q_i|_i \in H^i$.

- Si $i \leq i'$, entonces $q_{i'} \leq j_{i,i'}(q_i)$.

Para empezar la construcción podemos tomar $q_{n-1} = \mathbb{1}$. En el paso $i \geq n$ de la construcción descomponemos $i - n = (u, v)$, utilizando la semejanza canónica de ω en $\omega \times \omega$, de modo que $u < n$, por lo que ya tenemos definido $f_u(v) \in M_u$.

Supongamos que $D = f_u(v)$ es un subconjunto denso en $j_{0,u}(\mathbb{P})$, de modo que $j_{u,i}(D)$ es denso en $j_{0,i}(\mathbb{P})$. El conjunto

$$E = \{d \in j_{0,i}(\mathbb{P}|_i) \mid \bigvee \bar{d} \in j_{u,i}(D)\ d \leq q_i\} \in M_i$$

es denso bajo $q_i|_i$, luego existe un $\bar{q} \in j_{u,i}(D)$ tal que $\bar{q} \leq q_i$ y $\bar{q}|_i \in H^i$. Si $f_u(v)$ no es un conjunto denso, tomamos $\bar{q} = q_i$. En ambos casos, tomamos $q_{i+1} = j_{i,i+1}(\bar{q}) \in j_{u,i+1}(D)$ y $q_{i+1} \leq j_{i,i+1}(q_i)$. Por las propiedades b) y d) tenemos que

$$q_{i+1}|_i = j_{i,i+1}(\bar{q}|_i) = \bar{q}|_i \in H^i.$$

Ahora observamos que podemos elegir H_i de modo que $q_{i+1}(i) \in H_i$. Esto se debe a la homogeneidad de $\mathbb{Q} = \mathrm{Col}(j_{0,i+1}(\delta_i))$: partiendo de un H_i arbitrario, podemos definir un automorfismo g de $\mathbb{Q}$ en M_{i+1} que transforme $q_{i+1}(i)$ en un elemento de H_i, con lo que $q_{i+1}(i) \in g[H_i]$ y los filtros genéricos H_i y $g[H_i]$ dan lugar a la misma extensión genérica, luego $g[H_i]$ cumple igualmente las condiciones e) y f). Cambiando H_i por $g[H_i]$ tenemos que $q_{i+1}|_{i+1} \in H^{i+1}$.

Con esta modificación, dado $D \in M_i$ según $(*)$, existirá un v de manera que $D = f_i(v)$. Sea $i' = n + (i, v)$. Así D es el conjunto considerado en el paso i' de la construcción y $q_{i'+1} \in j_{i,i'+1}(D)$. Sea $i^* > i'$ que contenga al soporte de $q_{i'+1}$. Así, $q_{i^*} \leq j_{i'+1,i^*}(q_{i'+1})$ y $q_{i^*}|_{i^*} \in H^{i^*}$, luego también $j_{i'+1,i^*}(q_{i'+1}|_{i^*}) \in H^{i^*} \cap j_{i,i^*}(D)$.

Sea M_ω el límite inductivo de los modelos M_i, y sean $j_{i,\omega} : M_i \longrightarrow M_\omega$ las inmersiones elementales asociadas. Sabemos que M_ω está bien fundado porque forma parte de una partida en el juego de iteraciones de M jugada con la estrategia Σ. Por la propiedad b) tenemos que el punto crítico de $j_{i,\omega}$ es mayor o igual que $j_{0,i}(\delta_{i-1})$, luego $j_{i,\omega}$ fija a los elementos de H^i. Así, si llamamos

$$H = \{q \in j_{0,\omega}(\mathbb{P}) \mid \bigwedge i \in \omega\ q|_i \in H^i\},$$

tenemos que H es un filtro $j_{0,\omega}(\mathbb{P})$-genérico sobre M_ω.

En efecto, es inmediato que H es un filtro, y todo subconjunto denso de $j_{0,\omega}(\mathbb{P})$ en M_ω es de la forma $j_{i,\omega}(D)$, para cierto conjunto $D \in M_i$ denso en $j_{0,i}(\mathbb{P})$. Por $(*)$ tenemos que, cambiando i por un índice mayor, se cumple que $H^i \cap D \neq \varnothing$, es decir, que existe una condición $d \in D$ cuyo soporte está contenido en i tal que $d|_i \in H^i$, luego $d = j_{i,\omega}(d) \in H \cap j_{i,\omega}(D)$.

Notemos además que, en términos de H, se cumple que $H^i = H|_i$.

(1) $R^*[H] = \mathcal{N}^P$.

En efecto, si $x \in R^*[H]$, entonces $x \in \mathcal{N}^{M_\omega[H|_i]}$ para cierto $i \in \omega$, luego $x = \sigma_{H|_i}$ para cierto $\sigma \in M_\omega^{j_{0,\omega}(\mathbb{P}|_i)}$. Ahora bien, la inmersión $j_{i,\omega} : M_i \longrightarrow M_\omega$ tiene punto crítico $\kappa > j_{0,i}(\delta_{i-1})$, luego $j_{0,i}(\mathbb{P}|_i) \in V_\kappa^{M_i}$, lo que implica que $j_{0,i}(\mathbb{P}|_i) = j_{0,\omega}(\mathbb{P}|_i)$ y los buenos $j_{0,i}(\mathbb{P}|_i)$-nombres para subconjuntos de $\omega \times \omega$ son los mismos en M_i y en M_ω. Puesto que podemos exigir que σ sea uno de estos nombres, resulta que $\sigma \in M_i$, luego $x = \sigma_{H|_i} \in M_i[H|_i] \subset P$, puesto que tanto M_i como $H|_i = H^i$ están en P. Esto prueba que $R^*[H] \subset \mathcal{N}^P$.

Recíprocamente, todo $x \in \mathcal{N}^P$ es $x = a_i$ para un cierto $n \leq i < \omega$, luego $x \in M_{i+1}[H^i \times H_i] = M_{i+1}[H|_{i+1}]$. Por el mismo razonamiento precedente (ahora con el índice $i+1$), concluimos que $x \in M_\omega[H|_{i+1}]$, luego $x \in R^*[H]$. ■

(2) *$\phi(x_1, \ldots, x_k)$ se cumple en el modelo derivado de M_ω inducido por H.*

En efecto, por hipótesis $x_1, \ldots, x_k \in R^*[G] \subset \mathcal{N}^P = R^*[H]$. Además tenemos que $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ se cumple en el modelo derivado de M inducido por G.

Hasta ahora hemos trabajado con un n arbitrario. Podemos fijarlo de modo que $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{N}^{M[G|_n]}$. El teorema 11.14 nos da que

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \phi^{L(R^*[\Gamma])}(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_k))^{M[H|_n]},$$

donde hemos usado que $M[G|_n] = M[H|_n]$. Ahora usamos que $j_{0,\omega} = j_{n,\omega}$ tiene punto crítico mayor que δ_{n-1}, luego, por el teorema 11.11 se extiende a una inmersión elemental

$$\bar{\jmath} : M[H|_n] \longrightarrow M_\omega[H|_n].$$

Aplicando $\bar{\jmath}$ obtenemos que

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_n^{\geq}} \Vdash \phi^{L(R^*[\Gamma])}(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_k))^{M_\omega[H|_n]},$$

lo que a su vez implica $(\phi^{L(R^*[H])}(x_1, \ldots, x_k))^{M_\omega[H]}$. ■

(3) *$\phi(x_1, \ldots, x_k)$ se cumple en $L(\mathcal{N})^P$.*

En efecto, por (1), el modelo derivado de M_ω inducido por H es

$$W = L_{o(M_\omega)}(R^*[H]) = L_{o(M_\omega)}(\mathcal{N}^P).$$

Vamos a probar que W y $L(\mathcal{N})^P = L_{o(P)}(\mathcal{N}^P)$ cumplen las hipótesis del teorema 11.17. Como $M_\omega \in P[K]$, se cumple que $o(M_\omega) \leq o(P[K]) = o(P)$. Además, por 11.15 sabemos que $\mathcal{N}^W = \mathcal{N}^P$ y, trivialmente, $\mathcal{N}^{L(\mathcal{N})^P} = \mathcal{N}^P$. Por consiguiente, puesto que (2) afirma que $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ se cumple en W, el teorema 11.17 implica que también se cumple en $L(\mathcal{N})^P$. ■

Ahora usamos la inmersión elemental $\tau : P \longrightarrow V_\theta$ para concluir que ϕ se cumple en $L(\mathcal{N})^{V_\theta} = L_\theta(\mathcal{N})$. (Notemos que τ fija a $x_1, \ldots, x_k$ porque todos ellos están en $(V_{\aleph_1})^P$.)

Finalmente, el teorema 11.17 aplicado a $L_\theta(\mathcal{N})$ y $L(\mathcal{N})$ (véase la nota posterior al teorema) implica que ϕ se cumple en $L(\mathcal{N})$. ■

Teorema 11.20 *El modelo derivado de M inducido por G cumple el axioma de determinación.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $W = L_{o(M)}(R^*[G])$ al modelo derivado. Por el teorema 11.15 sabemos que $\mathcal{N}^W = R^*[G]$. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un conjunto $A \in W$ tal que $A \subset R^*[G]$ y el juego $G(A)$ no está determinado^W. Por la nota tras el teorema 11.15 existen ordinales $\zeta < \gamma$, un $a \in R^*[G]$ y una fórmula ϕ tales que

$$x \in A \leftrightarrow x \in R^*[G] \land L_\gamma(R^*[G]) \vDash \phi[x, a, \zeta].$$

Más concretamente, $a \in \mathcal{N}^{M[G|_n]}$, para cierto $n \in \omega$, pero, sustituyendo M por $M[G|_n]$, podemos suponer que $a \in \mathcal{N}^M$. Finalmente, podemos suponer que (γ, ζ) es el menor par de ordinales (en el orden lexicográfico) tal que existe un conjunto de la forma

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid L_\gamma(\mathcal{N}) \vDash \phi[x, a, \zeta]\}^W$$

no determinado^W. Por el teorema 11.14 tenemos que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash ((\check{\gamma}, \check{\zeta}) \text{ es el mínimo par de ordinales tal que el conjunto}$$

$$\{x \in \mathcal{N} \mid L_{\check{\gamma}}(\mathcal{N}) \vDash \check{\phi}[x, \check{a}, \check{\zeta}]\} \text{ no está determinado})^{L(R^*[\Gamma])}.$$

Sea θ un cardinal^M mayor que δ_ω y que γ y tal que V_θ^M sea un modelo de (el suficiente) ZFC. Consideramos ahora el árbol T en $\omega \times V_\theta^M$ cuyos elementos son sucesiones $\{(x_i, e_i)\}_{i<n}$ tales que:

a) $\{e_i\}_{i<n}$ pertenece al árbol de intentos de construir un submodelo elemental de V_θ^M (véase la definición 10.6 y la nota posterior al teorema 10.7) que contenga a

$$e_0 = a, \quad e_1 = \{\delta_i\}_{i<\omega}, \quad e_2 = \mathbb{P}, \quad e_3 = R^*[\Gamma], \quad e_4 = \gamma, \quad e_5 = \zeta,$$

e_6 un $\mathbb{P}$-nombre (no necesariamente el mismo en todos los nodos del árbol) tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash (e_6 \in R^*[\Gamma] \land L_{\check{\gamma}}(R^*[\Gamma]) \vDash \check{\phi}[e_6, \check{a}, \check{\zeta}]).$$

b) $e_7 = \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ y, para todo $i \geq 4$ tal que $2i + 1 < n$, se cumple que $e_{2i+1} \in \mathbb{P}$, $e_{2i+1} \leq e_{2i-1}$ y $e_{2i+1} \Vdash e_6|_{2\check{i}+1} = \check{x}|_{2\check{i}+1}$, donde $x = \{x_i\}_{i<n}$.

c) Si además e_{2i} es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$, entonces $e_{2i+1} \in e_{2i}$.

Definimos igualmente un árbol T^* sin más que cambiar la fórmula ϕ por su negación $\neg\phi$. Notemos que $T, T^* \in M$.

De este modo, si $x \in p[T]$, de modo que existe un e tal que $(x, e) \in T$, el conjunto $\{e_i \mid i \in \omega\} \in M$ es un submodelo elemental de V_θ (por 10.7). Sea M' su colapso transitivo y sea $\pi : M' \longrightarrow V_\theta^M$ la inversa de la función colapsante, que es una inmersión elemental $\pi \in M$. Llamemos $\mathbb{P}^* = \pi^{-1}(e_2)$, de modo que $\pi(\mathbb{P}^*) = \mathbb{P}$ es el producto análogo a $\mathbb{P}$ formado a partir de la sucesión de cardinales de Woodin$^{M'}$ $\pi^{-1}(e_1)$, que se corresponde con la dada en M. Sea $\xi = \pi^{-1}(e_6)$, que es un $\mathbb{P}^*$-nombre en M'. Además a, γ, ζ, $\phi \in M'$ y son fijados por π, y también

$$\mathbb{1} \Vdash (\xi \in R^*[\Gamma] \wedge L_{\check{\gamma}}(R^*[\Gamma]) \vDash \check{\phi}[\xi, \check{a}, \check{\zeta}]).$$

Más aún, el conjunto $\{\pi^{-1}(e_{2i+1}) \mid i \geq 4\}$ genera un filtro $G^* \in M$ que es $\mathbb{P}^*$-genérico sobre M', pues, si $D \in M'$ es denso en $\mathbb{P}^*$, entonces $\pi(D)$ ha de ser denso en $\mathbb{P}'$, y en particular ha de ser $\pi(D) = e_{2i}$ para un $i \geq 4$ (ya que los e_{2i+1} son elementos de $\mathbb{P}'$, no conjuntos densos), y entonces $\pi^{-1}(e_{2i+1}) \in D \cap \mathbb{P}^*$.

Es claro que $s = x|_{2i+1} \in M'$ y es fijado por π, luego

$$\pi^{-1}(e_{2i+1}) \Vdash \xi|_{2\check{i}+1} = \check{s}$$

y, por consiguiente, $\xi_{G^*} = x$. Más aún, en el modelo W' derivado de M' inducido por G^* se cumple que el conjunto

$$A = \{y \in \mathcal{N} \mid L_\gamma(\mathcal{N}) \vDash \phi[y, a, \zeta]\}^{W'}$$

no está determinado$^{W'}$, que (γ, ζ) es el mínimo par para el que esto es cierto y que $x \in A$.

Todo esto es válido para el árbol T^* salvo la última afirmación, que ahora es $x \notin A$.

(1) *Consideramos $\mathbb{P}_1 = \mathrm{Col}(\delta_0)$. Entonces (en M)*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_1} \Vdash p[\check{T}] \cup p[\check{T}^*] = \mathcal{N}.$$

En efecto, consideramos un filtro G arbitrario $\mathbb{P}$-genérico sobre M, de modo que $G|_1$ es un filtro arbitrario $\mathbb{P}_1$-genérico sobre M. Hemos de probar que

$$(p[T] \cup p[T^*] = \mathcal{N})^{M[G|_1]},$$

donde las proyecciones de los árboles se calculan en $M[G|_1]$. Tomamos, pues, $x \in \mathcal{N}^{M[G|_1]}$, pero ahora razonamos en $M[G]$, de modo que $x \in R^*[G]$. En este modelo tenemos también el conjunto A. Vamos a probar que $x \in p[T]^{M[G|_1]}$ o $x \in p[T^*]^{M[G|_1]}$ según si $x \in A$ o $x \notin A$. Supondremos que $x \in A$. El otro caso es completamente análogo.

Por definición de A, tenemos que $x \in R^*[G]$ y $L_\gamma(R^*[G]) \vDash \phi[x, a, \zeta]$. Entonces $x = \sigma_G$, para un cierto $\mathbb{P}$-nombre σ en M que cumpla lo que exige para e_6 la definición de T. Esto nos define un nodo $(x|_8, e|_8) \in T$, que podemos prolongar hasta una rama $(x, e) \in M[G]$ determinando los valores e_{2i} según la definición de árbol de intentos de construir un submodelo elemental, y los valores e_{2i+1} los tomamos en G según las condiciones b) y c) de la definición de T. De este modo concluimos que $x \in p[T]^{M[G]}$. Esto es equivalente a afirmar que el árbol T_x tiene una rama infinita (en $M[G]$), pero el árbol está en $M[G|_1]$, luego también ha de tener una rama infinita en $M[G|_1]$ (porque la buena fundación es absoluta para modelos transitivos), lo cual equivale a que $x \in p[T]^{M[G|_1]}$. ■

(2) *Si $x \in \mathcal{N}^M$ cumple $x \in p[T]$, entonces en $L(\mathcal{N})^M$ se cumple que existe un conjunto no determinado de la forma*

$$A = \{y \in \mathcal{N} \mid L_\gamma(\mathcal{N}) \vDash \phi[y, a, \zeta]\},$$

para ciertos ordinales $\zeta < \gamma$ y, si (γ, ζ) es el mínimo par posible, entonces $x \in A$.

Aplicaremos el teorema 11.19 relativizado a M. Hemos probado que existe un modelo M' numerable^M y una inmersión elemental $\pi : M' \longrightarrow V_\theta^M$ de modo que la afirmación $\psi(x, a)$ del enunciado es cierta en el modelo derivado de M' inducido por un filtro G^*. Basta observar que $\psi(x, a)$ es $\Sigma_1(\mathcal{N})$. En efecto, puede reformularse como

$$\bigvee Q(\mathcal{N} \subset Q \land Q \text{ es transitivo} \land Q \vDash \text{“el suficiente ZF} + V = L(\mathcal{N})\text{”}$$

$$\land \bigvee \gamma\zeta A(\bigwedge y \in \mathcal{N}(y \text{ no codifica una estrategia para } A) \land A = \ldots))$$

■

Obviamente, se cumple el resultado análogo para T^* cambiando $x \in A$ por $x \notin A$. Como consecuencia:

(3) *En M, sean $\zeta < \gamma$ los menores ordinales tales que el conjunto*

$$A = \{y \in \mathcal{N} \mid L_\gamma(\mathcal{N}) \vDash \phi[y, a, \zeta]\}$$

no esté determinado. Entonces $p[T] = A$ y $p[T^*] = \mathcal{N} \setminus A$.

En efecto, por (2) y su análogo para T^* tenemos que $p[T] \subset A$ y $p[T^*] \subset \mathcal{N} \setminus A$. Basta probar que $p[T] \cup p[T^*] = \mathcal{N}$.

Ahora bien, por (1) sabemos que todo $x \in \mathcal{N}^M$ cumple $x \in p[T]^{M[G|_1]}$ o bien $x \in p[T^*]^{M[G|_1]}$. Lo primero significa que el árbol T_x tiene una rama infinita en $M[G_1]$, luego también la ha de tener en M, luego $x \in p[T]^M$. Igualmente, en el segundo caso ha de ser $x \in p[T^*]^M$. ■

Así hemos probado que A es δ_0-universalmente de Baire^M, luego, por el teorema 11.5, sabemos que A está determinado^M, y al mismo tiempo A no está determinado$^{L(R)^M}$. Pero esto es imposible pues, como ya hemos observado, una estrategia para A en M puede codificarse por un elemento de $\mathcal{N}^M$, luego está en $L(\mathcal{N})^M$. ■

Con esto ya hemos probado la consistencia de AD (relativa a la existencia de infinitos cardinales de Woodin). Si añadimos un cardinal medible tenemos el teorema 11.12:

Demostración: Por el teorema de reflexión podemos tomar un ordinal θ tal que V_θ sea un submodelo elemental de V en el que se cumpla la hipótesis sobre la existencia de los cardinales de Woodin y el cardinal medible. Podemos tomar un submodelo elemental numerable y formar su colapso transitivo M, con lo que la inversa de la función colapsante es una inmersión elemental $\pi : M \longrightarrow V_\theta$.

De este modo, M cumple las hipótesis que venimos suponiendo a lo largo de toda esta sección y además existe un cardinal μ medible^M por encima de todos los cardinales de Woodin δ_i. Por otra parte, el modelo M cumple la hipótesis del teorema 11.19, luego toda la construcción realizada en su prueba es válida aquí:

Sabemos que M es iterable, por lo que existe una estrategia Σ para el juego de las iteraciones de M. Sustituimos θ por un ordinal mayor de modo que M, Σ, G y $\mathcal{N}$ pertenezcan a V_θ, tomamos un submodelo elemental de V_θ y llamamos P a su colapso transitivo, de modo que la inversa de la función colapsante es una inmersión elemental $\tau : P \longrightarrow V_\theta$.

A partir de aquí jugamos una partida $\{M_i\}_{i\leq\omega}$ de iteraciones de M, en la que todos los modelos están bien fundados porque empleamos la estrategia Σ. (En 11.19 realizábamos la construcción fijando un número natural n arbitrario que aquí podemos tomar igual a 0.) La construcción nos daba también un filtro H $j_{0,\omega}(\mathbb{P})$-genérico sobre M_ω de modo que $R^*[H] = \mathcal{N}^P$.

La inmersión elemental $j_{0,\omega}$ nos da que en M_∞ hay también infinitos cardinales de Woodin (con un cardinal medible sobre ellos), luego el teorema 11.20 nos da que el modelo derivado de M_ω inducido por H satisface AD. Si llamamos W a este modelo, en la prueba de 11.19 hemos visto también que $\mathcal{N}^W = \mathcal{N}^P = \mathcal{N}^{L(\mathcal{N})^P}$, de modo que $W = L_{o(M_\omega)}(\mathcal{N}^P)$, mientras que $L(\mathcal{N})^P = L_{o(P)}(\mathcal{N}^P)$, y también sabemos que $o(M_\omega) \leq o(P)$.

Queremos aplicar el teorema 11.18 para concluir que $L(\mathcal{N})^P$ cumple AD, pero para ello necesitaríamos la desigualdad opuesta a la que acabamos de obtener, así que vamos a pasar a otro modelo de AD que tenga más ordinales.

Para ello consideramos el cardinal medible^M μ que está por encima del supremo δ_∞ de los cardinales de Woodin. Sea U una medida normal en μ y prolonguemos la partida del juego de iteraciones de M hasta una sucesión $\{M_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1}$ de modo siguiente:

Dado M_α, consideramos el árbol de iteraciones $\mathcal{A}_\alpha$ cuyo árbol de índices es ω con el orden usual (de modo que el árbol consta de una única rama infinita) y cuyos modelos vienen dados por $M_\alpha^{n+1} = \mathrm{Ult}_{j_{0,n}(j_{0,\alpha}(U))}(M_\alpha^n)$. Aquí hay que entender que $j_{0,\alpha} : M \longrightarrow M_\alpha$ es la inmersión elemental correspondiente al juego de iteraciones de M (de modo que $j_{0,\alpha}(U)$ es una medida normal en $j_{0,\alpha}(\kappa)$ en M_α) y $j_{0,n}$ es la inmersión elemental correspondiente al árbol $\mathcal{A}_\alpha$. Tras esta jugada del jugador "malo", el jugador "bueno" no tiene más opción que jugar la única rama del árbol $\mathcal{A}_\alpha$, de la que obtenemos el modelo $M_{\alpha+1}$. Todos los modelos están bien fundados por el teorema 10.21.

Llamemos $\eta_\alpha = o(M_\alpha)$. La sucesión $\{j_{0,\alpha}(\mu)\}_{\omega\leq\alpha<\aleph_1}$ es estrictamente creciente y $j_{0,\alpha}(\mu) < \eta_\alpha < \aleph_1$ (porque todos los modelos M_α son numerables). Por lo tanto, la sucesión $\{\eta_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1}$ es cofinal en $\aleph_1$ y podemos tomar un $\alpha < \aleph_1$ tal que $\eta_\alpha > o(P)$.

La inmersión $j_{\omega,\alpha}$ tiene punto crítico $j_{0,\omega}(\mu) > j_{0,\omega}(\delta_\infty)$, luego $\mathbb{P}$ tiene los mismos subconjuntos en M_ω y en M_α, luego H es también un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M_α y $R^*[H]$ es el mismo para ambos modelos (concretamente, es $\mathcal{N}^P$). Así pues:

El modelo derivado de M_α inducido por H es $L_{\eta_\alpha}(\mathcal{N}^P)$.

Por el teorema 11.15:

$\mathcal{N}^{L_{\eta_\alpha}(R^P)} = \mathcal{N}^P$.

Por consiguiente, los modelos $L(\mathcal{N})^P = L_{o(P)}(\mathcal{N}^P)$ y $L_{\eta_\alpha}(\mathcal{N}^P)$ cumplen las hipótesis del teorema 11.17 y, por el teorema 11.20:

$L_{\eta_\alpha}(\mathcal{N}^P)$ *cumple* AD.

Ahora sí que podemos aplicar el teorema 11.18 para concluir que $L(\mathcal{N})^P$ cumple AD.

Finalmente, la inmersión elemental $\tau : P \longrightarrow V_\theta$ nos da que $L(\mathcal{N})^{V_\theta} = L_\theta(\mathcal{N})$ cumple AD y, como el ordinal θ es arbitrariamente grande, podemos tomarlo de forma que $(\mathcal{P}\mathcal{N})^{L(\mathcal{N})} \subset L_\theta(\mathcal{N})$, con lo que todo subconjunto de $\mathcal{N}$ en $L(\mathcal{N})$ está determinado. ■

Bibliografía

[1] Bukovský, L. *The Structure of the Real Line,* Birkhäuser 2011.

[2] Foreman, H., Kanamori, A. (eds.) *Handbook of Set Theory,* Springer 2010.

[3] Jech, T.J. *Set Theory,* Academic Press, 1978.

[4] Jech, T.J. *Set Theory,* (3ª edición) Springer, 2003.

[5] Kanamori, A. *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings,* Springer 2009.

[6] Kechris, A.S. *Classical Descriptive Set Theory,* Springer 1995.

[7] Kunen, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs,* North Holland 1985.

[8] Lévy, A. Solovay, R. *On the decomposition of sets of reals to Borel sets,* Annals of Mathematical Logic 5 (1971) 1–19.

[9] Martin, D.A., Steel, J.R. *A proof of Projective Determinacy,* Journal of the Amer. Math. Soc. 2 (1) (1989) 71–125.

[10] Miller, A.W., *Descriptive set theory and forcing,* Springer 1995.

[11] Moschovakis, Y.N. *Descriptive Set Theory,* (segunda edición) AMS 2009.

[12] Neeman, I. *Determinacy in $L(\mathbb{R})$*, en [2].

[13] Oxtoby, J.C. *Measure and Category,* Springer 1980.

[14] Raisonnier, J. *A mathematical proof of S. Shelah's theorem on the measure problem and related results.* Israel Journal of Mathematics 48 (1) (1984) 48–56.

[15] Solovay, R. *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.* Annals of Mathematics 92 (1070) 1–56.

[16] Talagrand, M. *Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables.* Studia Mathematica 67 (1980) 13–43.

Índice de Materias