Modul Ajar Aljabar Linier

Salamet Nur Himawan

Program Studi
D-IV Rekayasa Perangkat Lunak
Jurusan Teknik Informatika
Politeknik Negeri Indramayu

Modul Ajar Mata Kuliah Aljabar Linier

Program D-IV Studi Rekayasa Perangkat Lunak

Jurusan Teknik Informatika

Politeknik Negeri Indramayu

LEMBAR PENGESAHAN

1. Identitas Modul Ajar

Judul Modul Ajar	: Modul Ajar Aljabar Linier
Mata Kuliah	: Aljabar Linier
Jurusan	: Teknik Informatika
Program Studi	: Rekayasa Perangkat Lunak

2. Penyusun

Nama	: Salamet Nur Himawan, M.Si.
NIP	: 199407022022031005
Unit Kerja	: Teknik Informatika

Indramayu, 15 Juli 2022

Menyetujui,	Penyusun,
Koordinator Program Studi	
Darsih, S.Kom., M.Kom.	Salamet Nur Himawan, M.Si.
NIP. 198109062021212004	NIP. 199407022022031005

Mengetahui,

Ketua Jurusan Teknik Informatika

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI POLITEKNIK NEGERI INDRAMAYU JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

Iryanto, S.Si., M.Si.

NIP. 199008012019031014

Daftar Isi

Daftar Gambar

1. Vektor

a. Representasi Vektor

Blok penyusun dasar untuk aljabar linier adalah vektor, secara umum ada tiga interpretasi vektor yang berbeda tetapi terkait. Interpretasi berdasarkan perspektif fisika, perspektif ilmu komputer, dan perspektif matematikawan.

Perspektif Fisika

Bahwa vektor adalah panah yang menunjuk dalam ruang. Vektor memiliki panjang dan arah, tetapi selama keduanya sama kita dapat memindahkannya dan itu masih vektor yang sama.

Gambar 1 Representasi vector dalam Fisika

Vektor di bidang datar adalah dua dimensi, dan vektor yang berada di ruang yang lebih luas tempat kita tinggal adalah tiga dimensi.

Perspektif Ilmu Komputer

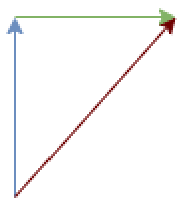
Bahwa vektor adalah urutan daftar angka. Misalnya, jika Kita melakukan beberapa analisis tentang harga rumah, dan faktor yang Kita pedulikan adalah luas rumah rumah dan harga, Anda dapat membuat model setiap rumah sebagai sepasang angka, yang pertama menunjukkan luas rumah, dan yang kedua menunjukkan harga.

$$\begin{bmatrix} 100m^2 \\ Rp90.000.000 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa urutan penting di sini.

Abstraksi Matematikawan

Matematika menggeneralisasi kedua pandangan ini, memberikan Kita gagasan yang masuk akal seperti menambahkan dua vektor dan mengalikan vektor dengan skalar, operasi yang akan Kita bicarakan nanti dalam bab ini. Penjumlahan vektor dan perkalian vektor dengan angka akan memainkan peran penting di seluruh topik ini.



Gambar 2 Vektor

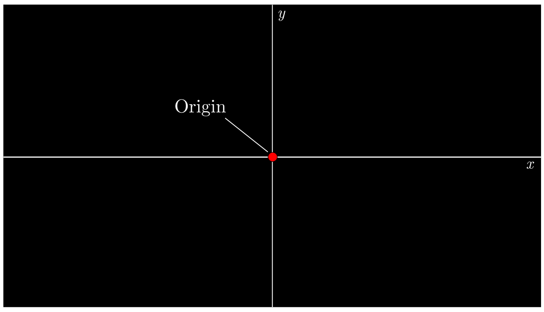
$$\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+1\\1-3\end{bmatrix}$$

$$\bar{v}+\bar{w}=\bar{c}$$

b. Vektor di Ruang R2 dan R3

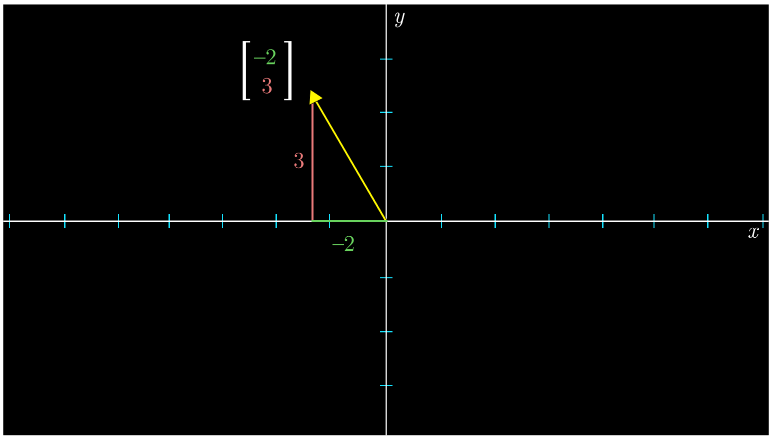
Sistem Koordinat

Seringkali masalah-masalah yang menyangkut vektor dapat disederhanakan menggunakan suatu sistem koordinat siku-siku. Sementara, Kita membatasi pembahasan pada vektor-vektor di rung berdimensi 2 (bidang). Kita memiliki garis horizontal, yang disebut sumbu x, dan garis vertikal, yang disebut sumbu y. Posisi dimana garis tersebut berpotongan adalah titik asal (*origin*), yang Kita anggap sebagai pusat ruang dan akar dari semua vektor.



Gambar 3 Titik Asal (Origin)

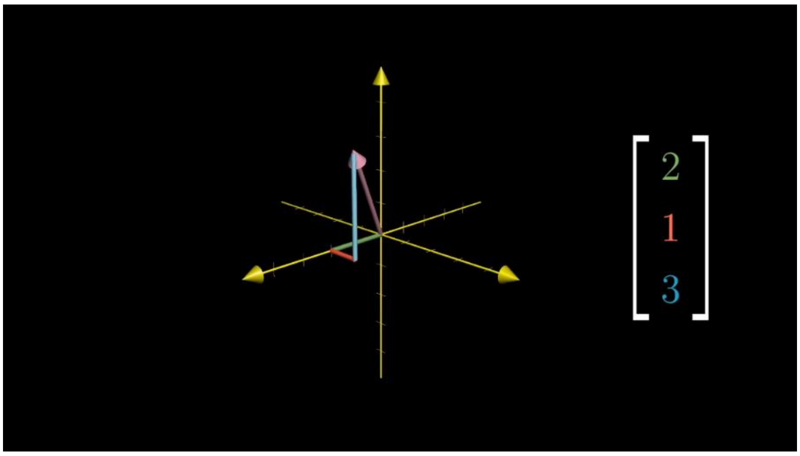
Koordinat suatu vektor adalah sepasang angka yang berisi informasi vektor itu dari titik asal, ke ujungnya. Angka pertama merupakan informasi seberapa jauh berjalan di sepanjang sumbu x, dengan angka positif menunjukkan gerakan ke kanan dan angka negatif menunjukkan gerakan ke kiri, dan angka kedua memberi informasi seberapa jauh untuk kemudian berjalan sejajar dengan sumbu y, dengan angka positif menunjukkan gerakan ke atas, dan angka negatif menunjukkan gerakan ke bawah.



Gambar 4 Vektor dalam koordinat

Untuk membedakan vektor dari titik adalah dengan menuliskan pasangan bilangan ini secara vertikal dengan tanda kurung siku di sekelilingnya.

Dalam tiga dimensi, Kita menambahkan sumbu ketiga, yang disebut sumbu z, yang tegak lurus terhadap sumbu x dan y. Dalam hal ini, setiap vektor dikaitkan dengan tiga bilangan berurutan: angka pertama memberi tahu Kita seberapa jauh untuk bergerak di sepanjang sumbu x, angka kedua memberi tahu Kita seberapa jauh untuk bergerak sejajar dengan sumbu y, dan angka ketiga memberitahu Kita seberapa jauh untuk bergerak sejajar dengan sumbu z baru. Setiap ketiga angka memberi Kita satu titik unik dalam ruang, dan setiap titik dalam ruang dikaitkan dengan tepat satu angka dari ketiga angka tersebut.

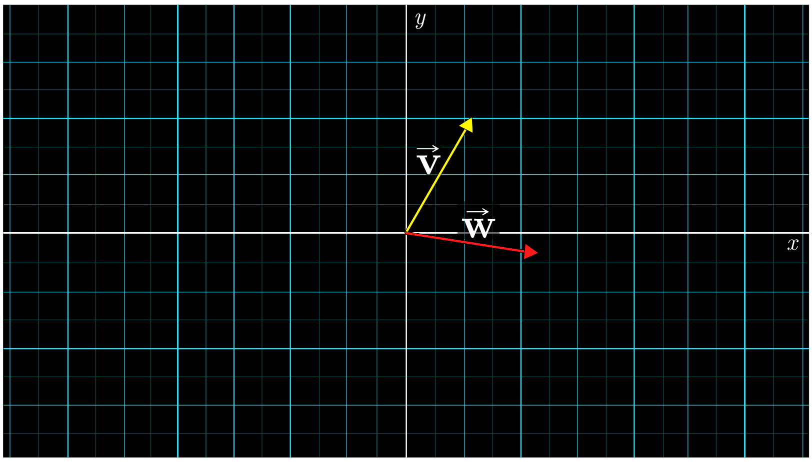


Gambar 5 Vektor dalam koordinat tiga dimensi

c. Operasi Vektor

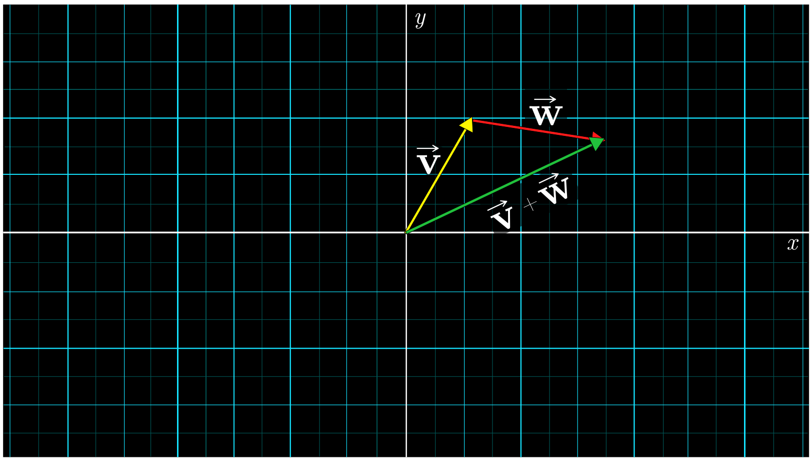
Penjumlahan

Katakanlah Kita memiliki dua vektor, satu mengarah ke atas dan sedikit ke kanan, dan satu lagi mengarah ke kanan dan sedikit ke bawah.



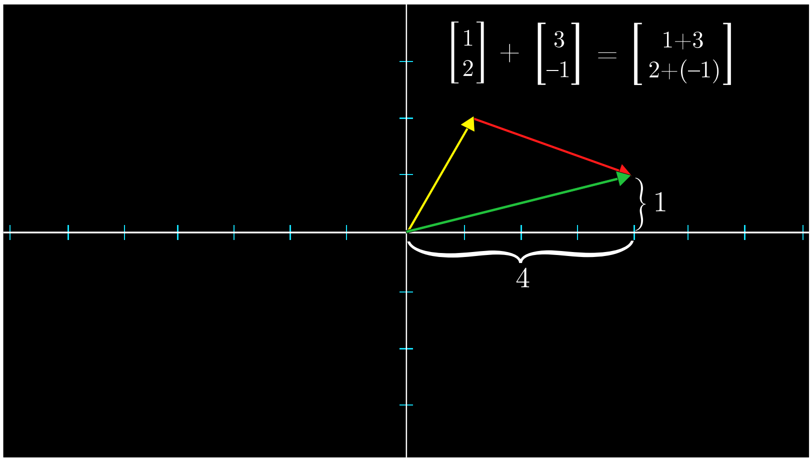
Gambar 6 Penjumlahan vektor

Untuk menjumlahkan kedua vektor ini, pindahkan vektor kedua sehingga ekornya berada di ujung vektor pertama. Kemudian jika Kita menggambar vektor baru dari ekor vektor pertama ke tempat ujung vektor kedua sekarang berada, vektor baru itu adalah hasil penjumlahan kedua vektor tersebut.



Gambar 7 Hasil penjumlahan dua vektor

Mari kita lihat bagaimana penjumlahan vektor terlihat secara numerik. Vektor pertama memiliki koordinat $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, dan yang kedua memiliki koordinat $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Saat Anda menggunakan metode penjumlahan ini maka vektor baru memiliki koordinat $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.



Gambar 8 Notasi penjumlahan vektor

Secara umum, untuk menjumlahkan dua vektor dalam konsep vektor daftar bilangan, cocokkan suku-sukunya dan jumlahkan masing-masing.

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}$$

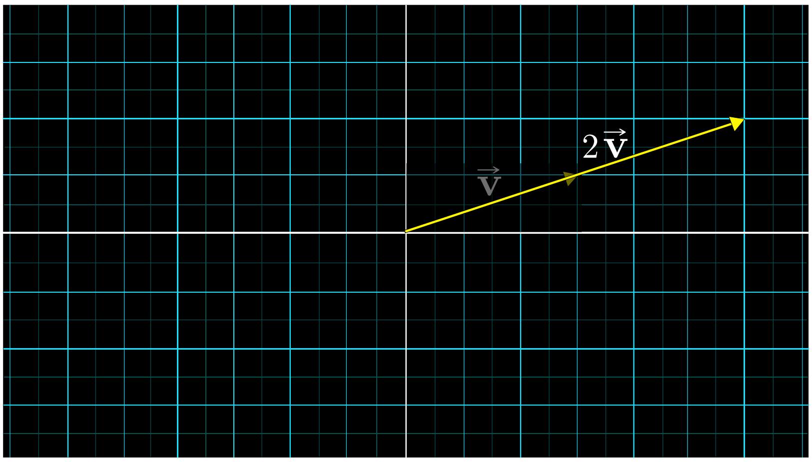
Dalam notasi yang lain penjumlaha vektor dituliskan sebagai berikut:

$\bar{v},\bar{w}\in R^2$ maka $\bar{v}+\bar{w}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$

$\bar{v},\bar{w}\in R^3$ maka $\bar{v}+\bar{w}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$

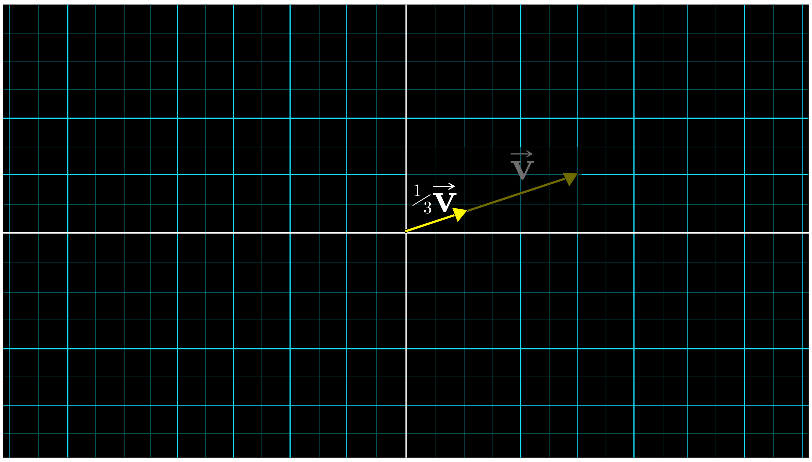
Perkalian Vektor dengan Skalar

Operasi vektor fundamental lainnya adalah perkalian dengan skalar. Jika Kita mengambil suatu nilai skalar, seperti angka 2, dan mengalikannya dengan vektor tertentu, Kita merentangkan vektor tersebut sehingga panjangnya dua kali lipat dari vektor awal.



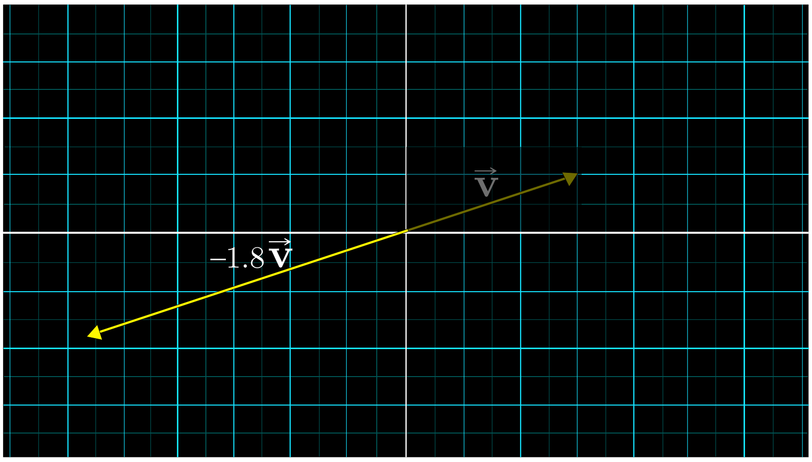
Gambar 9 Perkalian vektor dengan angka 2

Jika Anda mengalikan vektor dengan $\frac{1}{3}$, Anda menekannya hingga menjadi sepertiga dari panjang aslinya.



Gambar 10 Perkalian vektor dengan 1/3

Jika Anda mengalikannya dengan angka negatif, seperti -1,8, maka vektor dibalik, kemudian diregangkan sepanjang 1,8.



Gambar 11 Perkalian vektor dengan -1.8

Proses peregangan, pemampatan, dan kadang-kadang membalikkan arah, disebut "penskalaan". Secara numerik, merentangkan vektor dengan skalar sesuai dengan mengalikan masing-masing koordinatnya dengan skalar, jadi dalam konsep vektor sebagai daftar angka, mengalikan vektor yang diberikan dengan skalar berarti mengalikan masing-masing komponennya dengan skalar itu.

$$2\mathbf{v} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Dalam notasi lain dapat dituliskan menjadi:

$\bar{v} \in R^2$ maka $k\bar{v} = (kv_1, kv_2)$

$\bar{v} \in R^3$ maka $k\bar{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$

d. Hasil Kali Dalam

<u>Definisi :</u>

Jika $\bar{u}, \bar{v} \in R^2/R^3/R^n$ dan θ adalah sudaut antara $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ maka

$$\bar{u}.\bar{v} = \begin{cases} \|u\|\|v\| \cos\theta & \text{, jika } \bar{u} \neq 0 \text{ dan } \bar{v} \neq 0 \\ 0 & \text{, jika } \bar{u} = 0 \text{ atau } \bar{v} = 0 \end{cases}$$

Langkah-langkah mencari $\bar{u}.\bar{v}$ adalah sebagai berikut.

(1) Mencari $\|u\|$ dan $\|v\|$

(2) Mencari θ

(3) Mencari $\bar{u}.\bar{v}$

Definisi diatas dapat disederhanakan menjadi :

$\bar{u}.\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

$\bar{u}.\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

$\bar{u}.\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \cdots + u_nv_n$

e. Hasil Kali Silang

<u>Definisi :</u>

Jika $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor di ruang 3, maka hasil kali silang $\bar{u} \times \bar{v}$ adalah vektor yang didefinisikan oleh

$$\bar{u} \times \bar{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

2. Matriks

a. Definisi

Matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan yang tersusun atas baris dan kolom. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan **entri** matriks.

<u>Contoh 1:</u>

Susunan berikut adalah matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

Ukuran matriks ditunjukkan dengan menyatakan banyaknya **baris (horizontal)** dan **kolom (vertikal)** yang kemudian disebut dengan **ORDO** $(m \times n)$.

<u>BAHAN DISKUSI 1 :</u> Dapatkah saudara menentukan ordo untuk masing-masing matriks pada contoh 1?

Matriks dinotasikan dengan huruf-huruf kapital dan huruf-uruf kecil untuk menyatakan entri-entrinya.

<u>Contoh 2 :</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Bentuk umum matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$$

Dengan :

$i = 1,2,3, \ldots$

$j = 1,2,3, \ldots$

$a_{ij} \in R$

<u>BAHAN DISKUSI 2 :</u> Dapatkah saudara memberi contoh matriks dengan $m, n > 4$?

A. MACAM-MACAM MATRIKS

Terdapat macam-macam matriks yang diuraikan sebagai berikut.

(1) Matriks Kolom

Matriks yang berordo $n \times 1$.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)	**Matriks Baris** Matriks yang berordo $1 \times n$.	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
(3)	**Matriks Nol** Matriks yang semua elemen-elemennya 0. Atau dapat dituliskan $(a_{ij}) = 0, \forall\, i, j \in R$.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(4)	**Matriks Persegi** Matriks yang berordo $n \times n$.	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$
(5)	**Matriks Identittas** Matriks persegi yang $(a_{ij}) = 1$, $\forall\, i = j$ dan $(a_{ij}) = 0\ \forall\, i \neq j$.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(6)	**Matriks Diagonal** Matriks persegi yang $(a_{ij}) = 0$, $\forall\, i \neq j$.	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(7)	**Matriks Skalar** Matriks persegi yang $(a_{ij}) = c$, $\forall\, i = j$ dan $(a_{ij}) = 0\ \forall\, i \neq j$.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
(8)	**Matriks Segitiga Atas** Matriks persegi yang $(a_{ij}) = 0$, $\forall\, i > j$.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
(9)	**Matriks Segitiga Bawah** Matriks persegi yang $(a_{ij}) = 0$, $\forall\, i < j$.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
(10)	**Transpose Matriks** Matriks yang $(a_{ij}) = (a_{ji})$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
(11)	**Matriks Simetris** Matriks persegi yang $A = A^t$.	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
(12)	**Matriks Skew Simetris** Matriks persegi yang $A = -A^t$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

BAHAN DISKUSI 3 : Dapatkah saudara menentukan macam matriks yang mana dari matriks yang ada di Bahan Diskusi 2? Jelaskan.

b. Operasi Pada Matriks

Sama halnya dengan bilangan real, matrikspun dapat dioperasikan dengan operasi-operasi sebagai berikut.

(1) Penjumlahan Matriks

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ordonya sama maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

NOTE : Matrisk-matriks yang ordonya beda tidak dapat dijumlahkan.

<u>Contoh 3 :</u>

Dipunyai $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Maka $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

<u>Contoh 4 :</u>

Dipunyai $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Maka $A + C$ tidak didefinisikan karena ordonya berbeda. Matriks $A_{3\times4}$ dan $C_{2\times2}$.

<u>BAHAN DISKUSI 4 :</u> Dapatkah melakukan operasi pengurangan pada matriks? Jika dapat maka tunjukkan dengan menggunakan contoh 3. Apabila tidak dapat berikan alasan saudara.

Jika A adalah suatu matriks dan k adalah suatu skalar maka hasil kali (*product*) kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan k dengan masing-masing entri dari A.

NOTE : Tidak ada syarat.

<u>Contoh 5 :</u>

Dipunyai $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Maka $2A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $(-1)A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) Perkalian Dua Matriks

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut.

Untuk mencari entri pada baris ke i dan kolom ke j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

NOTE : Banyaknya KOLOM pada matriks A sama dengan banyaknya BARIS pada matriks B.

<u>Contoh 6 :</u>

Dipunyai matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×4 $\qquad$ AB berorodo 2×4

Perhatikan perkalian berikut.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 27 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{pmatrix}$$

Untuk diperhatikan !!!

Operasi-operasi matriks akan diterapkan pada matriks-matriks dengan banyaknya baris dan kolom lebih dari 4.

c. Aturan-Aturan Ilmu Hitung Matriks

Angaplah bahwa ordo matriks adalah sedemikian sehingga operasi-operasi yang ditunjukkan dapat diperagakan maka aturan-aturan ilmu hitung matriks berikut berlaku.

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A(BC) = (AB)C$

(4) $A(B + C) = AB + AC$

(5) $(B + C)A = BA + CA$

(6) $A(B - C) = AB = AC$

(7) $(B - C)A = BA - CA$

(8) $k(B + C) = kB + kC$

(9) $k(B - C) = kB - kC$

(10) $(k + l)C = kC + lC$

(11) $(k-l)C = kC - lC$

(12) $(kl)C = k(lC)$

(13) $k(BC) = (kB)C$

(14) $AI = A$

(15) $IA = A$

(16) $0 + A = A + 0 = A$

(17) $A + (-A) = 0$

(18) $0A = 0$

(19) $A0 = 0$

d. Determinan

Definisi

Misalkan A adalah matriks persegi, Fungsi Determinan dinyatakan oleh det, dan kita definisikan $det\ (A)$ sebagai **jumlah semua hasil kali elementer bertanda** dari A. Jumlah dari $\det(A)$ dinamakan **determinan A.**

Notasi

Misalkan dipunyai matriks A.

Determinan matriks A dinotasikan dengan $det(A)$ atau $|A|$.

Syarat matriks mempunyai determinan adalah berordo $n \times n$.

Materi

Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1 :

Dipunyai matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Untuk mencari determinan A dengan mengalikan entri-entri pada panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil kali entri-entri pada panah yang mengarah ke kiri. Sehinggadiperoleh $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Contoh 2 :

Dipunyai matriks $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Untuk mencari determinan B dengan menyalin kembali kolom pertama dan kolom kedua. Determinan tersebut kemudian dihitung dengan menjumlahkan hasil kali pada panah-panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil kali pada panah-panah yang mengarah ke kiri. Sehingga diperoleh :

$det(B) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Contoh 3 :

Hitunglah determinan-determinan dari $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$

Selesaian :

Untuk mencari determinan C, lihat kembali Contoh 1.

Didapatkan $det(C) = (3)(-2) - (1)(4) = -6 - 4 = -10$.

Untuk mencari determinan D, lihat kembali Contoh 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

Didapatkan

$det(D) = (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(-4)(-8) - (3)(5)(7) - (1)(6)(-8) - (2)(-4)(9)$

$= (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72)$

$= 45 + 84 + 96 - 105 + 48 + 72$

$= 240$

UNTUK DIPERHATIKAN !!!

Determinan I tidak berlaku untuk mencari determinan matriks 4×4 atau untuk matriks yang lebih tinggi.

Jika A dan B matriks $n \times n$ maka determinannya mempunyai sifat-sifat berikut.

(1) Jika A matriks diagonal maka $\det A$ adalah perkalian elemen-elemen diagonal utamanya.

(2) Jika A matriks diagonal atas/bawah maka $\det A$ adalah perkalian elemen-elemen diagonal utamanya.

(3) Jika A mempunyai baris atau kolom yang semua elemennya nol maka $\det A$ adalah nol.

(4) Jika ada dua baris atau dua kolom dari A sama atau saling berkelipatan maka $\det A = 0$.

(5) Determinan A transpose sama dengan $\det A$.

(6) Jika B diperoleh dari A dengan melakukan OBE R_{ij} maka $\det A = -\det B$.

(7) Jika B diperoleh dari A dengan melakukan OBE $Ri(k)$ maka $\det A = \frac{1}{k}\det B$

(8) Jika B diperoleh dari A dengan melakukan OBE $Rij(k)$ maka $det\ A = \det B$.

(9) $\det AB = \det A.\det B$ atau $|AB| = |A||B|$

e. Matriks Elementer Dan Metode Mencari A^{-1}

Matriks Elementer

Sebuah matriks $n \times n$ dinamakan **matriks elementer** jika matriks tersebut dapat diperoleh dari **matriks identitas $n \times n$** yaitu (I_n) dengan melakukan sebuah operasi baris elementer (OBE) **tunggal.**

Perhatikan matriks-matrisk berikut.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks elementer karena diperoleh dari matriks identitas $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .dengan R_{12}.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bukan matriks elementer

<u>Penjelasan</u>

Jika matriks elementer E dihasilkan dengan melakukan sebuah operasi baris tertentu pada I_m dan jika A adalah matriks $m \times n$ maka hasil EA adalah matriks yang dihasilkan bila operasi baris yang sama ini dilakukan pada A. Atau dapat dituliskan sevara singkat sebagai berikut.

$$I_m \xrightarrow{OBE} E$$
$$A_{m\times n} \xrightarrow{OBE} A_1 = EA$$

<u>Contoh 4:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{1(2)}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{1(2)}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

Catatan :

(1) $I \xrightarrow{R_{iJ}} E \xrightarrow{R_{IJ}} I$

(2) $I \xrightarrow{R_{I(k)}} E \xrightarrow{R_{I(\frac{1}{k})}} I$

(3) $I \xrightarrow{R_{Ij(k)}} E \xrightarrow{R_{Ij(-k)}} I$

Contoh 5:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2(4)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \xrightarrow{R_{2(\frac{1}{4})}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{41(5)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E \xrightarrow{R_{41(-5)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Metode Mencari A^{-1}

A^{-1} dapat dituliskan sebagai hasil kali perkalian-perkalian elementer. Dapat dituliskan sebaga berikut.

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1$$

Atau $A = E_1{}^{-1} E_2{}^{-1} \dots E_{k-1}{}^{-1} E_k{}^{-1}$.

Pada prakteknya kita menggunakan operasi-operasi baris baris dan menerapkan operasi-operasi ini secara serempak pada I untuk menghasilkan A^{-1}.

Contoh 6:

Carilah invers dari :

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

(3) Dipunyai $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

a. Carilah $E_1 \dots E_2 E_k$ sedemikian sehingga $E_k \dots E_2 E_1 C = I$.

b. Tulislah C^{-1} sebagai hasil kali perkalian-perkalian elementer.

c. Tulislah C sebagai hasil kali perkalian-perkalian elementernya.

<u>Selesaian :</u>

(1) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{31(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{32(-1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{3(-\frac{1}{2})}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_{23(-1)}]{R_{13(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Diperoleh $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2) Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa pada matriks yang tidak dapat dibalik atau tidak mempunyai invers, matriks tersebut berbentuk eselon baris tereduksi yang sekurang-kurangnya mempunyai baris bilangan nol. Jika ditemukan demikian maka pada suatu tahap perhitungan tersebut baris bilangan tak nol akan muncul pada matriks di ruas kiri. Dapat disimpulkan bahwa matriks yang diberikan tidak dapat dibalik dan perhitungannya dapat dihentikan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{12(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_{31(4)}]{R_{21(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 7 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{32(1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Karena baris ketiga matriks kiri adalah baris nol maka matriks B tidak mempunyai invers.

(3) Langkah awal : cari I dari matriks C dengan OBE

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{21(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{21(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = E_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$

(b) $C^{-1} = E_3 E_2 E_1$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

<u>TEOREMA</u>

Jika A adalah matriks $n \times n$ yang dapat dibalik maka untuk setiap matriks B yang berordo $n \times 1$, sistem persamaan $AX = B$ mempunyai persis satu pemecahan yaitu.

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

<u>Contoh 7:</u>

Dipunyai sistem persamaan linier berikut.

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_3 = -6$$

$$x_1 + x_2 = 8$$

Dalam bentuk matriks maka sistem dapat ditulis sebagai $AX = B$, dimana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Pada Contoh 6.1 diperlihat bahwa A dapat dibalik dan $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Menurut Teorema maka pemecahan sistem tersebut adalah

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Jadi $x_1 = 9, x_2 = -1, x_3 = -5$.

<u>Contoh 8 :</u>

Pecahkanlah sistem-sistem berikut.

a. $x_1 + x_3 = -3$ b. $x_1 + x_3 = -1$

$x_2 + x_3 = 7$ $x_2 + x_3 = -4$

$x_1 + x_2 = 5$ $x_1 + x_2 = 6$

<u>Selesaian :</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 7 & | & -4 \\ 1 & 1 & 0 & | & 5 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{31(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 7 & | & -4 \\ 0 & 1 & -1 & | & 8 & | & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{32(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 7 & | & -4 \\ 0 & 0 & -2 & | & 1 & | & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{3(-\frac{1}{2})}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 7 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & | & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{23(-1)}]{R_{13(-1)}} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \end{array}\right)$$

Jadi diperoleh :

a. $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = \frac{15}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}$.

b. $x_1 = \frac{9}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = -\frac{11}{2}$.

Pada kasus berikut akan ditunjukkan bahwa pada kondisi apa, jika ada, yang harus dipenuhi oleh matriks B supaya $AX = B$ konsisten.

<u>Contoh 9 :</u>

Kondisi apakah yang harus dipenuhi oleh $b_1, b_2,$ dan b_3 supaya sistem persamaan berikut konsisten?

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1$$
$$x_1 + x_3 = b_2$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3$$

<u>Selesaian :</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{31(-2)}]{R_{21(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2(-1)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{32(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

Lihat baris ketiga dari matriks hasil OBE terakhir.

Supaya sistem persamaan linier tersebut konsisten maka

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0 \text{ atau } b_3 = b_1 + b_2$$

Dapat dinyatakan dengan cara lain maka $AX = B$ konsisten jika dan hanya jika B adalah matriks yang berbentuk

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

3. Ruang Vektor dan Kombinasi Linier

a. Ruang Vektor

Definisi

Misalkan V sebarang himpunan yang tak nol dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang terdefinisi pada semua anggota V dan semua skalar di R, V disebut ruang vektor jika untuk setiap $u, v, w \in V$ dan $k, l \in R$ berlaku :

1. $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. Ada elemen identitas yaitu vektor $0 \in V$ sedemikian sehingga $0 + u = u + 0 = u$
5. Untuk setiap elemen $u \in V$, ada $(-u) \in V$ sedemikian sehingga
$$u + (-u) = (-u) + u = 0$$
6. $ku \in V$
7. $k(u + v) = ku + kv$
8. $(k + l)u = ku + kl$
9. $(kl)u = k(lu)$
10. $1. u = u$

Anggota dari suatu ruang vektor disebut vektor.

Contoh 1

Misalkan P_2 adalah himpunan semua polynomial berderajat dua dimana koefisien-koefisie dan konstantanya merupakan bilangan riil. Tentukan apakah P_2 merupakan ruang vektor?

Selesaian :

Untuk membuktikan suatu himpunan merupakan **ruang vektor**, saudara harus membuktikan bahwa **syarat nomor 1-10 terpenuhi** (lihat definisi ruang vektor).

Dipunyai P_2 adalah himpunan semua polynomial berderajat dua dimana koefisien-koefisie dan konstantanya merupakan bilangan riil, jika $u, v \in P_2$ maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$u = a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$v = b_2x^2 + b_1x + b_0$$
$$w = c_2x^2 + c_1x + c_0$$

Asumsikan P_2 adalah ruang vektor. Kita perlu menguji apakah syarat nomor 1-10 terpenuhi.

1. $u + v = (a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)$

   $= (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \in P_2.$

2. $u + v = (a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)$

   $= (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

   $= (b_2 + a_2)x^2 + (b_1 + a_1)x + (b_0 + a_0)$

   $= (b_2x^2 + b_1x + b_0) + (a_2x^2 + a_1x + a_0)$

   $= v + u$

3. $(u + v) + w \ = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) + (c_2x^2 + c_1x + c_0)$

   $= (a_2 + b_2 + c_2)x^2 + (a_1 + b_1 + c_1)x + (a_0 + b_0 + c_0)$

   $= a_2x^2 + a_1x + a_0 + (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)$

   $= u + (v + w)$

4. Misalkan $0 = 0x^2 + 0x + 0$

   $0 + u = (0x^2 + 0x + 0) + (a_2x^2 + a_1x + a_0)$

   $= (0 + a_2)x^2 + (0 + a_1)x + (0 + a_0)$

   $= (a_2 + 0)x^2 + (a_1 + 0)x + (a_0 + 0)$

   $= a_2x^2 + a_1x + a_0$

   $= u$

5. Misalkan $-u = (-a_2)x^2 + (-a_1)x + (-a_0)$

   $u + (-u) \ = (a_2x^2 + a_1x + a_0) + \big((-a_2)x^2 + (-a_1)x + (-a_0)\big)$

   $= \big(a_2 + (-a_2)\big)x^2 + \big(a_1 + (-a_1)\big)x + \big(a_0 + (-a_0)\big)$

   $= \big((-a_2)+a_2\big)x^2 + \big((-a_1) + a_1\big)x + \big((-a_0) + a_0\big)$

   $= 0x^2 + 0x + 0$

   $= 0$

6. Misalkan k adalah skalar maka

   $ku = k(a_2x^2 + a_1x + a_0)$

   $= \ ka_2x^2 + ka_1x + ka_0 \in P_2$

7. Misalkan k adalah skalar maka

   $k(u + v) = k\big((a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)\big)$

   $= k(a_2 + b_2)x^2 + k(a_1 + b_1)x + k(a_0 + b_0)$

   $= (ka_2 + kb_2)x^2 + (ka_1 + kb_1)x + (ka_0 + kb_0)$

$= ku + kv$

8. Misalkan k dan l adalah skalar maka

$(k + l)u = (k + l)a_2x^2 + a_1x + a_0$

$= (k + l)a_2x^2 + (k + l)a_1x + (k + l)a_0$

$= [(ka_2)x^2 + (ka_1)x + (ka_0)] + [(la_2)x^2 + (la_1)x + (la_0)]$

$= ku + lu$

9. Misalkan k dan l adalah skalar maka

$(kl)u = (kl)a_2x^2 + a_1x + a_0$

$= (kl)a_2x^2 + (kl)a_1x + (kl)a_0$

$= k(la_2)x^2 + k(la_1)x + k(la_0)$

$= k[(la_2)x^2 + (la_1)x + (la_0)]$

$= k(lu)$

10. $1.u = 1(a_2x^2 + a_1x + a_0)$

$= a_2x^2 + a_1x + a_0$

$= u$

Karena syarat nomor 1-10 terpenuhi maka P_2 adalah ruang vektor.

<u>Contoh 2</u>

Misal $W = R^2$.

Jika $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ di W dan $k \in R$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang didefinisikan sebagai berikut.

$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix}$ dan $ku = (ku_1, 0)$.

Tentukan apakah W merupakan ruang vektor?

<u>Selesaian :</u>

Ambil $u = (2,3)$.

Lihat kembali sifat 10 yaitu $1.u = u$.

Kita akan menunjukkan bahwa sifat 10 tidak terpenuhi dengan cara sebagai berikut.

$$1.u = 1(2,3) = (1.2,0) = (2,0) \neq u$$

Maka W bukan ruang vektor.

Apabila suatu himpunan **bukan ruang vektor** maka saudara **cukup menuliskan syarat mana yang tidak terpenuhi.**

b. Ruang Bagian (*Subspace*)

Definisi :

Misalkan V ruang vektor.

$W \subset V, W \neq \emptyset$. W disebut ruang bagian dari V jika W dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang sama dengan operasi pada V merupakan ruang vektor.

Untuk menentukan apakah W merupakan ruang bagian dari V jika dan hanya jika untuk setiap $u, v \in W$ dan $k \in R$ berlaku :

1. $u + v \in W$ (Sifat 1)
2. $ku \in W$ (Sifat 6)

Contoh 3 :

Diketahui ruang vektor V.

Misalkan $W = \{0\}$, yaitu himpunan yang hanya berisi vektor nol.

Selidiki apakah W merupakan ruang bagian dari V.

Selesaian :

Jelas bahwa $W \neq \emptyset$.

Selanjutnya ambil sebarang $u, v \in W$ dan $k \in R$ maka :

1. $u = (0,0, \dots, 0)$

   $v = (0,0, \dots, 0)$

   Maka $u + v = (0,0, \dots, 0) \in W$
2. $ku = k(0,0, \dots, 0) = (0,0, \dots, 0) \in W$

   Maka W merupakan ruang bagian dari V.

Contoh 4 :

Misalkan W_3 adalah himpunan yang berisi semua vektor-vektor yang berbentuk $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ b \end{pmatrix}, a, b \in R$. Selidiki apakah W_3 adalah ruang bagian dari R^3.

Selesaian :

Akan ditunjukkan bahwa W_3 bukan ruang bagian dari R^3.

Ambil $k = \frac{1}{3}$ dan $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

Maka $ku = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W_3$.

Jadi ada $k \in R$ dan $u \in W_3$ sedemikian sehingga $ku \notin W_3$.

Maka W_3 bukan ruang bagian dari R^3.

Catatan :

Untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan $W \subset V$ bukan merupakan ruang bagian dari V, cukup ditunjukkan negasi salah satu dari kedua sifat ruang bagian.

c. Kombinasi Linier

Definisi :

Suatu vektor w disebut kombinasi linier dari vektor-vektor $v_1, v_2, \dots, v_n$ jika ada skalar-skalar $k_1, k_2, \dots, k_n$ sedemikian sehingga $w = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$.

Contoh 5 :

Misalkan $u = (1,2,-1)$ dan $v = (6,4,2)$ di R^3. Selidiki hal berikut.

a. Apakah $w = (9,2,7)$ merupakan kombinasi linier dari u dan v.

b. Apakah $x = (4,-1,8)$ merupakan kombinasi linier dari u dan v.

Selesaian :

a. Pandang persamaan dengan variabel tak diketahui k_1 dan k_2 sebagai berikut.

$(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$

Bentuk SPL nya :

$9 = k_1 + 6k_2$

$2 = 2k_1 + 4k_2$

$7 = -k_1 + 2k_2$

Penyelesaian SPL tersebut adalah $k_1 = -3$ dan $k_2 = 2$.

Jadi $w = -3u + 2v$ atau w merupakan kombinasi linier dari u dan v.

b. Pandang persamaan dengan variabel tak diketahui k_1 dan k_2 sebagai berikut.

$(4,-1,8) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$

Bentuk SPL nya :

$4 \quad = k_1 + 6k_2$

$-1 = 2k_1 + 4k_2$

$8 \quad = -k_1 + 2k_2$

SPL tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

Jadi x bukan kombinasi linier dari u dan v.

d. Bebas Linier Dan Bergantung Linier

Pada bagian ini kita akan mempelajari tentang suatu himpunan vektor dikatakan bebas linier atau bergantung linier beserta sifat-sifatnya.

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ himpunan vektor tak kosong, maka persamaan :

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = 0$$

Mempunyai sekurang-kurangnya satu penyelesaian yaitu :

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$$

Jika penyelesaian diatas merupakan satu-satunya penyelesaian, **maka S disebut himpunan yang bebas linier.**

Jika masih ada penyelesaian yang lain, **maka S disebut himpunan yang tak bebas linier atau disebut himpunan yang bergantung linier.**

Contoh 1

Selidiki apakah $S = \{i, j, k\}$ dengan $i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)$ merupakan himpunan yang bebas linier?

Selesaian :

Bentuk persamaan :

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1)$$

Maka diperoleh :

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$$

Jadi satu-satunya penyelesaian adalah nol sehingga S bebas linier.

Contoh 2 :

Selidiki apakah $a = (8,18,13), b = (1,3,2),$ dan $c = (2,4,3)$ bebas linier atau bergantung linier?

Selesaian :

Bentuk persamaan :

$$k_1 a + k_2 b + k_3 c = 0$$

Bentuk SPLH nya :

$$8k_1 + k_2 + 2k_3 = 0$$

$$18k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 0$$

$$13 + 2k_2 + 3k_3 = 0$$

Bentuk matriksnya :

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 18 & 3 & 4 \\ 13 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan melakukan OBE diperoleh :

$k_1 = 1, k_2 = -2$, dan $k_3 = -3$.

SPL homogen diatas memiliki penyelesaian selain nol.

Jadi ketiga vektor tersebut yaitu vektor a, b, c bergantung linier.

SIFAT-SIFAT

Lihat kembali Contoh 1 dan Contoh 2.

Ikuti Langkah berikut :

1. Tentukan koefisien matriks yang terbentuk.
2. Dapatkah dihitung determinannya?
3. Jika dapat tentukan determinan matriks tersebut.
4. Apa yang dapat saudara simpulkan?

e. Basis Dan Dimensi Suatu Ruang Vektor

A. Membangun (*Span*)

<u>Definisi :</u>

Jika V ruang vektor dari $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, maka $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dikatakan membangun (*span*) V jika setiap vektor $v \in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

<u>Contoh 1 :</u>

Selidiki apakah $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset R^3$ dengan $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,1,1), v_4 = (1,1,1)$ membangun R^3!

<u>Selesaian :</u>

Ambil $v = (x.y.z) \in R^3$ sebarang dan skalar-skalar k_1, k_2, k_3, k_4.

Bentuk persamaannya :

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4$$

Bentuk SPLnya :

$x = k_1 + k_4$..

$y = k_2 + k_3 + k_4$.

$z = k_3 + k_4$.

Bentuk matriksnya :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dengan melakukan OBE diperoleh :

$$k_1 + k_4 = x, k_2 = y - z, k_3 + k_4 = z$$

Jika dimisalkan $k_4 = t$ maka diperoleh :

$k_1 = x - t, k_2 = y - t, k_3 = z - t, k_4 = t$ dengan $t \in R$.

Jadi ada $k_1, k_2, k_3, k_4 \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $v \in R$ berlaku $v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4$.

Jadi S membangun V.

B. Basis

Definisi :

Jika V sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} \subset V$, maka S disebut basis dari V jika S membangun dan bebas linier.

Contoh 2 :

a. $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ merupakan basis standar dari R^n.

b. $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ merupakan basis standar dari P_n.

c. $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ merupakan basis standar dari $M_{2\times2}(R)$.

Contoh 3 :

Dipunyai $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ dan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$. Apakah S adalah basis dari R^3?

Selesaian :

Ingat bahwa basis itu memenuhi dua syarat yaitu membangun dan bebas linier.

(i) Membangun

Untuk setiap vektor $v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in R^3$, ada skalar-skalar k_1, k_2, k_3 sedemikian sehingga

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$= k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$

Bentuk matriksnya adalah

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Dengan melakukan OBE diperoleh hasil sebagai berikut.

$$k_1 = \frac{-2a + 2b + c}{3}, k_2 = \frac{-a - b + c}{3}, k_3 = \frac{4a - b - 2c}{3}$$

Jadi ,

$$v = \frac{-2a + 2b + c}{3} v_1 + \frac{-a - b + c}{3} v_2 + \frac{4a - b - 2c}{3} v_3$$

Artinya, setiap vektor dalam R^3 merupakan kombinasi linier dari v_1, v_2, v_3 dan membangun S.

(ii) Bebas linier

Bentuk persamaan :

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

Bentuk SPLH nya :

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$
$$2k_1 + k_3 = 0$$
$$k_1 + 2k_2 = 0$$

Bentuk matriksnya :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan melakukan OBE diperoleh :

$k_1 =, k_2 = k_3 = 0.$

Maka v_1, v_2, v_3 bebas linier.

Karena (i) dan (ii) terpenuhi maka $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah basis dari R^3.

C. Dimensi

Definisi :

Dimensi dari suatu ruang vektor V berdimensi hingga, dinotasikan dengan dim (V) adalah banyaknya vektor yang menjadi anggota basis dari V. Didefinisikan pula bahwa ruang vektor nol mempunyai dimensi nol.

Contoh 4:

Dipunyai $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T = \{a, b, c\}$ adalah basis untuk R^3.

Maka $\dim(T) = 3$.

Contoh 5:

Tentukan basis dan dimensi dari ruang penyelesaian SPL homogen berikut ini.

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

<u>Selesaian :</u>

Dengan melakukan OBE diperoleh penyelesaian dari SPLH tersebut adalah

$x_1 = -s - t, x_2 = s, x_3 = -t, x_4 = 0, x_5 = t.$

Jadi ruang penyelesaian untuk SPLH tersebut adalah

$$\left\{ x \in R^5 | x = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in R \right\}$$

Terlihat bahwa $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ membangun ruang pemecahan SPLH tersebut.

Karena $\{v_1, v_2\}$ bebas linier maka $\{v_1, v_2\}$ basis untuk ruag pemecahan SPLH tersebut sehingga ruang pemecahan SPLH tersebut berdimensi 2.

f. Proyeksi, Orthogonal Dan Orthonormal

A. Proyeksi

Jika $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah vektor-vektor di R^2 atau R^3, dan jika $||b|| \neq 0$, maka proyeksi vektor $\bar{a}$ sepanjang $\bar{b}$ adalah

$$\bar{a}_b = \frac{\bar{a}\,.\,\bar{b}}{||b||^2}\bar{a}$$

(dibaca : komponen vektor $\bar{a}$ sepanjang $\bar{b}$)

<u>Contoh 1 :</u>

Dipunyai $\bar{a} = (2, -1,3)$ dan $\bar{b} = (4, -1,2)$.

Carilah komponen vektor $\bar{a}$ sepanjang $\bar{b}$.

<u>Selesaian :</u>

$\bar{a}\,.\,\bar{b} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2)$

$= 8 + 1 + 6$

$= 15$

$||b||^2 = (4)^2 + (-1)^2 + (2)^2$

$= 16 + 1 + 4$

$= 21$

$\bar{a}_b \quad = \frac{\bar{a}\,.\,\bar{b}}{\|b\|^2}\bar{a}$

$= \frac{15}{21}(2,-1,3)$

$= \left(\frac{30}{21}, -\frac{15}{21}, \frac{45}{21}\right)$

$= \left(\frac{10}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{15}{7}\right)$

B. Vektor Orthogonal Dan Orthonormal

Definisi :

Vektor u dan v dikatakan orthogonal jika kedua vektor tersebut saling tegak lurus atau $u.v = 0$.

Sebuah vektor v dikatakan ortonormal jika mempunyai norm 1 atau $\|v\| = 1$.

<u>Contoh 2 :</u>

$\{(1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)\}$ merupakan himpunan yang orthogonal.

Karena

$$(1,0,0).(0,2,0) = (1)(0) + (0)(2) + (0)(0) = 0$$

$$(1,0,0).(0,0,3) = (1)(0) + (0)(0) + (0)(3) = 0$$

$$(0,2,0).(0,0,3) = (0)(0) + (2)(0) + (0)(3) = 0$$

<u>Contoh 3 :</u>

$\left\{(0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ merupakan himpunan ortonormal.

Karena

$$\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0 + 1}{2}} = 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0 + 1}{2}} = 1$$

NILAI DAN VEKTOR EIGEN

g. Nilai Dan Vektor Eigen

<u>Definisi :</u>

Misalkan A matriks $n \times n$ dan $x \in R^n, x \neq 0$. Vektor x disebut vektor eigen dari A jika

$$Ax = \lambda x$$

Untuk suatu $\lambda \in R$. Bilangan λ yang memenuhi persamaan diatas disebut nilai eigen. Vektor x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

<u>Contoh 1 :</u>

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Maka vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ merupakan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ karena $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>Menghitung Nilai Eigen</u>

untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka kita menuliskannya kembali sebagai

$Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$

Dari persamaan diatas akan mempunyai penyelesaian jika

$$|A - \lambda I| = 0$$

Persamaan diatas disebut sebagai persamaan karakteristik A. Mencari nilai eigen berarti menghitung determinan tersebut sehingga diperoleh nilai-nilai λ.

<u>Menghitung Vektor Eigen</u>

Apabila nilai-nilai eigen diketahui, kemudian nilai-nilai ini dimasukkan ke persamaan

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Maka akan diperoleh vektor-vektor eigen x yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

<u>Contoh 2 :</u>

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen untuk matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Selesaian :</u>

Persamaan karakteristik dari A adalah :

$|A - \lambda I| = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (5-\lambda)(4-\lambda)-2=0$

$\Leftrightarrow 20-5\lambda-4\lambda+\lambda^2-2=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2-9\lambda+18=0$

$\Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda-6)=0$

Jadi diperoleh nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1=3$ dan $\lambda_2=6$.

Untuk mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1=3$, kita pandang SPLH sebagai berikut.

$$(A-\lambda I)x=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$$

Dengan menggunakan OBE diperoleh $x_1=\frac{1}{2}s, x_2=s$.

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=3$ adalah :

$x=s=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ dengan s sebarang bilangan real.

Analog untuk vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2=6$ yaitu sebagai berikut.

$(A-\lambda I)x=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$

Dengan menggunakan OBE diperoleh $x_1=-s, x_2=s$.

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=6$ adalah :

$x=s=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dengan s sebarang bilangan real.

Contoh 3 :

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen untuk matriks $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Selesaian :

Persamaan karakteristik dari A adalah :

$|A-\lambda I|=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2-(-9)=0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2+9=0$

Diperoleh $\lambda = 1 \pm 3i$ yang merupakan bilangan kompleks.

Karena nilai eigen harus bilangan real maka matriks tersebut tidak mempunyai nilai dan vektor eigen.

BAHAN DISKUSI 1 :

Diskusikan kenapa bisa diperoleh $\lambda = 1 \pm 3i$

h. Diagonalisasi Matriks

Definisi :

Matriks persegi A berukuran $n \times n$ dikatakan dapat didiagonalkan menjadi matriks diagonal D jika terdapat matriks P yang mempunyai invers sedemikian sehingga

$$D = P^{-1}AP$$

Keterangan :

Matriks $\boldsymbol{P}$ disebut sebagai matriks yang mendiagonalkan matriks $\boldsymbol{A}$

Matriks $\boldsymbol{D}$ merupakan matriks diagonal yang elemen diagonalnya merupakan semua nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$.

Matriks $\boldsymbol{P}$ merupakan matriks $n \times n$ yang kolom-kolomnya merupakan vektor-vektor eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$.

Contoh 4 :

Selidiki apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dapat didiagonalkan.

Selesaian :

Kita perlu mencari vektor-vektor eigen dari matriks A terlebih dahulu.

Persamaan karakteristik dari A adalah :

$|A - \lambda I| = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda - 1)^2(\lambda - 3) = 0$

Jadi diperoleh nilai-nilai eigennya adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ dan $\lambda_3 = 3$.

Cukup dituliskan bahwa $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 3$ adalah nilai-nilai eigennya.

Untuk mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = 1$, kita pandang SPLH sebagai berikut.

$(A - \lambda I)x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan OBE diperoleh $x_1 = t, x_2 = -s, x_3 = s$.

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah :

$$x = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ dengan } s, t \text{ sebarang bilangan real.}$$

Analog untuk vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 3$ yaitu sebagai berikut.

$(A - \lambda I)x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan OBE diperoleh $x_1 = 0, x_2 = x_3 = s$.

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 3$ adalah :

$$x = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ dengan } s \text{ sebarang bilangan real.}$$

Jadi diperoleh vektor eigen :

$$x_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ dan } x_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Matriks P didapat dari vektor-vektor eigen matriks A yaitu :

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan OBE diperoleh $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Jadi matriks diagonal dari A adalah

$D = P^{-1}AP$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa entri-entri diagonal matriks D adalah nilai-nilai eigen dari matriks A

4. Transformasi Linier

a. Transformasi Linier

Definisi :

Misalkan U dan V suatu ruang vektor atas bilangan real. $T: U \to V$ pemetaan. T dikatakan transformasi linier (pemetaan linier) jika untuk setiap $u, v \in U$ dan $\alpha \in R$ berlaku :

$T(u + v) = T(u) + T(v)$

$T(\alpha u) = \alpha T(u)$ ....(1)

Khusus untuk $U = V$, pemetaan linier $T: U \to U$ disebut operator linier.

Catatan :

Perlu diperhatikan bersama bahwa operasi pada bagian kiri persamaan (1) merupakan operasi diruang vektor, sedangkan operasi pada bagian kanan persamaan (1) merupakan operasi di V. Jadi transformasi linier adalah pemetaan yang mengawetkan operasi di daerah domain menjadi operasi di daerah kodomain.

Contoh 1 :

Periksalah apakah $F: R^2 \to R^3$ merupakan transformasi linier jika diketahui

$$F[(x, y)] = (x, x + y, x - y)$$

Selesaian :

Ambil sebarang $u, v \in R^2$ dan $\beta \in R$, maka :

$u = (x_1, y_1)$ sehingga $F(u) = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1)$

$v = (x_2, y_2)$ sehingga $F(v) = (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2)$

$$\begin{aligned} F(u+v) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ &= (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= F(u) + F(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\beta u) &= F(\beta x_1 + \beta y_1) \\ &= (\beta x_1, \beta x_1 + \beta y_1, \beta x_1 - \beta y_1) \\ &= \beta(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\ &= \beta F(u) \end{aligned}$$

Karena syarat-syarat transformasi linier dipenuhi, maka F merupakan transformasi linier.

Contoh 2 :

Tunjukkan bahwa $T: M_{2\times2}(R) \to R$ yang didefinisikan sebagai

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

Bukan transformasi linier.

Selesaian :

Akan ditunjukkan bahwa ada $A, B \in M_{2\times2}(R)$ sedemikian sehingga $T(A+B) \neq T(A) + T(B)$.

Misalkan ambil :

$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

Maka $T(A) = 8^2 + 7^2 = 64 + 49 = 113$

$T(B) = 1^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26$

Selanjutnya

$T(A+B) = T\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = \mathbf{225} \neq \mathbf{139} = T(A) + T(B)$.

Jadi T bukan transformasi linier.

b. Matriks Penyajian Untuk Transformasi Linier

Misalkan $T: R^n \to R^m$adalah transformasi linier dari ruang vektor real V ke ruang vektor real W, Jika V dan W berdimensi hingga maka transformasi linier tersebut dapat dinyatakan dengan suatu matriks yang disebut matriks penyajian (representasi matriks).

Misalkan $e_1, e_2, \dots, e_n$ adalah basis baku untuk R^n dan misalkan A adalah sebuah $m \times n$ yang dibentuk oleh $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ sebagai vektor-vektor kolomnya maka A disebut sebagai matriks penyajian.

Contoh 3 :

Misalkan jika $T: R^2 \rightarrow R^2$ diberikan oleh

$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$

Maka

$T(e_1) = T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $T(e_2) = T\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Jadi matriks penyajiannya adalah $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>Contoh 4 :</u>

Misalkan $T: R^4 \rightarrow R^3$ pemetaan linier yang didefiniskan oleh

$$T(p, q, r, s) = (7p + 2q - r - s, q + r, -p)$$

Carilah matriks penyajiannya.

<u>Selesaian :</u>

$T(p) = T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$T(q) = T\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(r) = T\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(s) = T\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Jadi matriks penyajiannya adalah $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Vektor Koordinat Dan Perubahan Basis

<u>Definisi :</u>

Misalkan $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ adalah basis baku untuk R^n dan sebuah titik X adalah sebuah vektor yang dibentuk oleh kombinasi linier dari basis tersebut, maka :

$X = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n$

$X = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ disebut vektor koordinat relatif terhadap basis B.

Atau dapat juga dinyatakan sebagai vektor kolom $X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$.

Contoh 5 :

Tentukan vektor koordinat dari $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ relatif terhadap basis $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ untuk $M_{2\times2}(R)$ dimana :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Selesaian :

Misalkan $X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$.maka $A = k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4$

Atau

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh SPL sebagai berikut.

$$-k_1 + k_2 = 2$$

$$k_1 + k_2 = 0$$

$$k_3 = -1$$

$$k_4 = 3$$

Sehingga penyelesaian SPL tersebut adalah $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = -1, k_4 = 3$.

Jadi $X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Masalah Perubahan Basis

Cara pandang sebuah titik vektor X dari basis B ke basis lain B' disebut perubahan basis.

Contoh 6 :

Diketahui dua buah basis di R^3 berikut.

$B = \{(1,0,1), (0,1,-1), (1,2,0)\}$ $\qquad$ $B' = \{(1,0,0), (-1,1,0), (1,-1,-1)\}$

Bila vektor koordinat $X = (2,4,1)$ terhadap B, tentukan vektor koordinat X terhadap B'.

Selesaian :

Kombinasi linier vektor koordinat X terhadap basis B' harus sama dengan kombinasi linier vektor koordinat X terhdap basis B.

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Maka k_1, k_2, k_3 memenuhi sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$$

Kalikan matriks diruas kanan sehingga diperoleh.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix}$$

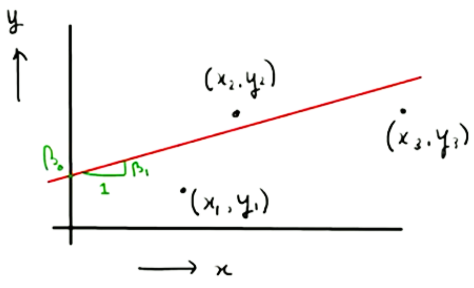
Setelah dilakukan OBE diperoleh $k_1 = 9, k_3 = 8, k_3 = 2$

Jadi vektor koordinat X terhadap basis B' adalah $\begin{pmatrix}9\\8\\2\end{pmatrix}$.

5. Aljabar Linier dalam Sains Data

a. Least Square Regression

Regresi linear merupakan suatu pendekatan untuk memantapkan hubungan antara satu atau lebih variabel dependen dan juga variabel independen. Salah satu aplikasi dari regresi linear adalah untuk melakukan prediksi berdasarkan data-data yang telah dimiliki sebelumnya. Dengan asumsi hubungan di antara variabel variabel tersebut, dapat didekati oleh suatu persamaan garis lurus.



Gambar 12 Regresi linier

Misal Kita mempunyai model sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$$

Untuk, $i = 1,2,3$

Dimana β merupakan nilai yang akan dicari sedemikian sehingga nilai β menjadi optimal dan merupakan variabel bebas atau input. Pencarian nilai β dilakukan hingga nilai error yang dihasilkan merupakan nilai yang paling minimal. Berikut merupakan fungi error yang biasa digunakan, yaitu *mean square error*:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(y_1(\boldsymbol{\beta_0} + x_i\boldsymbol{\beta_1})\right)^2$$

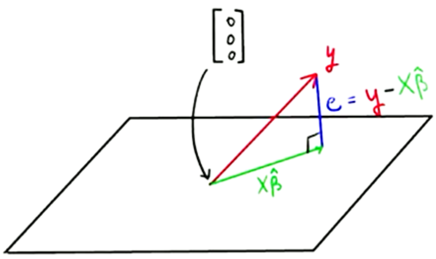
Kita dapat membuat model regresi dalam bentuk matriks, yaitu menjadi:

$$y = X\beta + e$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Untuk beberapa asumsi $\boldsymbol{\beta}$, maka estimasi $\boldsymbol{y}$ menjadi:

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta}$$



Gambar 13 Geometri regresi linier

Secara geometri untuk mendapatkan estimasi y yang sesuai dengan data sesungguhnya ialah dengan memilih $\boldsymbol{\beta}$ sehingga nilai e minimum. Nilai $\boldsymbol{\beta}$ terbaik akan didapatkan ketika X dan e adalah orthogonal.

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w} = 0$$

$$X^T(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}) = 0$$

Hal ini sama seperti minimasi norm dari e, yaitu:

$$\|e\| = \|\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}$$

Atau biasa disebut dengan minimasi *root mean square error* (RMSE).

Untuk mencari $\boldsymbol{\beta}$ menjadi:

$$X^T(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}) = 0$$

$$X^T\boldsymbol{y} - X^T X\boldsymbol{\beta} = 0$$

$$X^T\boldsymbol{y} = X^T X\boldsymbol{\beta}$$

$$(X^T X)^{-1} X^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta}$$

Contoh Penggunaan Least Square Menggunakan Python

Penggunaan dalam mencari hubungan antara ukuran kepala dengan massa otak

Deskripsi Data: Data terdiri dari beberapa variabel yaitu:

Jenis Kelamnin: Pria (1) atau Wanita (2)

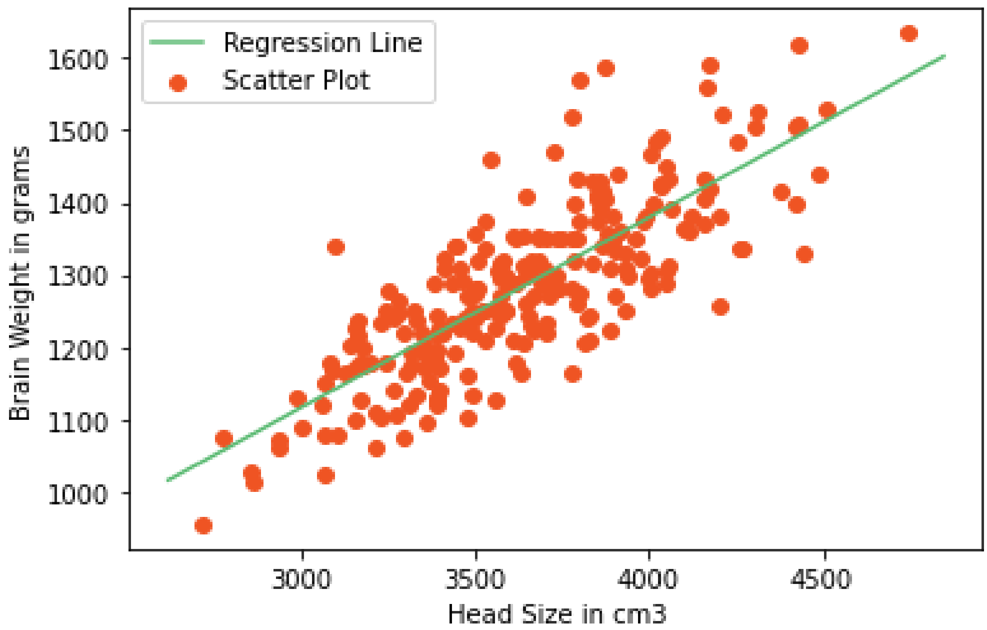
Usia: Usia disetiap individu

Ukuran kepala: Ukuran kepala setiap individu dalam cm^3

Massa Otak: Massa otak setiap individu dalam $gram$

```
#Import Libraries
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

#Import Data
data = pd.read_csv('../data/headbrain.csv')

#Memisahkan variabel x dan y
X = data['Head Size(cm^3)'].values
Y = data['Brain Weight(grams)'].values
```

```python
# Mean X and Y
mean_x = np.mean(X)
mean_y = np.mean(Y)

# Total number of values
n = len(X)

# Using the formula to calculate 'm' and 'c'
numer = 0
denom = 0
for i in range(n):
    numer += (X[i] - mean_x) * (Y[i] - mean_y)
    denom += (X[i] - mean_x) ** 2
m = numer / denom
c = mean_y - (m * mean_x)

# Plotting Values and Regression Line


max_x = np.max(X) + 100
min_x = np.min(X) - 100

# Calculating line values x and y
x = np.linspace(min_x, max_x, 1000)
y = c + m * x

# Ploting Line
plt.plot(x, y, color='#58b970', label='Regression Line')
# Ploting Scatter Points
plt.scatter(X, Y, c='#ef5423', label='Scatter Plot')

plt.xlabel('Head Size in cm3')
plt.ylabel('Brain Weight in grams')
plt.legend()
plt.show()
```



Gambar 14 Hasil regresi linier

b. Singular Value Decomposition (SVD)

Diberikan matriks A berukuran mxn dengan $m \geq n$. Maka salah satu bentuk dekomposisi nilai singular matriks A adalah:

$$A = U_h \sum V_a^T$$

Dengan U_h dan V_a^T othonormal dan $\sum$ matriks diagonal. Indeks a dan h menyatakan matriks dengan vektor-vektor *aligner* dan *hanger* yaitu $U_h^T U_h = I_m, V_a V_a^T = I_n$, dengan U_h berukuran $m \times m$, V_a berukuran $n \times n$, dan

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix}$$

Merupakan matriks diagonal berukuran $m \times n$ (dengan dimensi sama dengan A). Sebagai tambahan $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ dengan σ_i adalah nilai-nilai singular dari A dan σ_i jumlah yang tidak nol sama dengan rank dari A. Rasio $\frac{\sigma_1}{\sigma_n}$ jika $\sigma_n \neq 0$ bisa dipandang sebagai *condition number* matriks. Selanjutnya bisa dilakukan verifikasi bahwa dekompisisi nilai singular bisa juga dituliskan sebagai:

$$A = U_h \sum V_a^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i h_i a_i^T$$

Contoh Penggunaan SVD Menggunakan Python

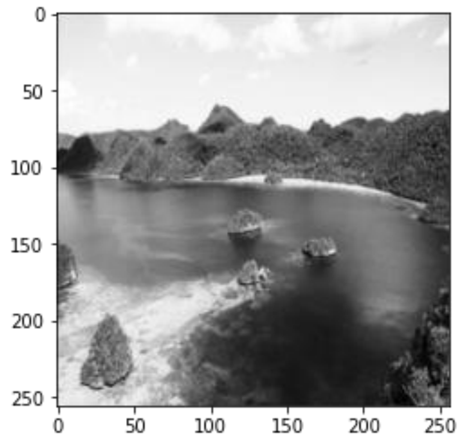
```
import numpy as np
from random import randrange
import os
from PIL import Image
import matplotlib.pyplot as plt
```

Load the Image and convert to grayscale

```
img = Image.open('..\images\landscape.jpg').convert('L').resize((256,256))
```

```
plt.imshow(img, cmap='gray')
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x1ecbcbe26b0>
```



Compute Singular Value Decomposition

```
U, S, V = np.linalg.svd(np.array(img), full_matrices = False)
S = np.diag(S)
```

```
The Plot below represents the energy of each singular vector adds to the o
verall image
```

```
plt.plot(np.cumsum(S)/np.sum(S))
plt.title('Cumulative Sum of Sigma Matrix')
```

```
Text(0.5, 1.0, 'Cumulative Sum of Sigma Matrix')
```

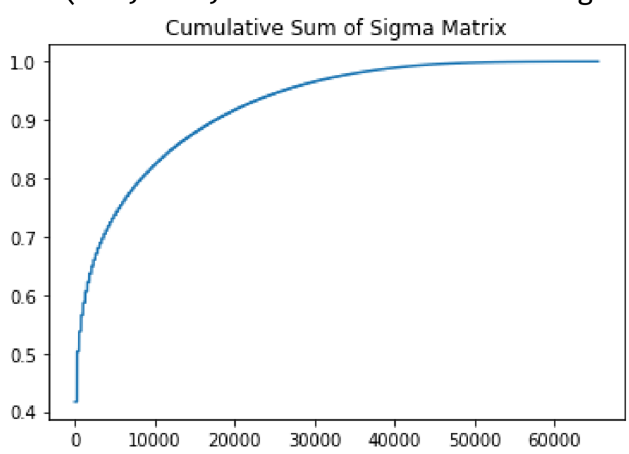


Image Reconstruction

The energy in the first I columns can be calculated using the following formula

$$||I|| = \text{trace}[I^T \times I] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} I^2\,(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

First 5 Columns

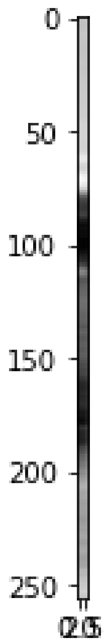
Only keeping the first 5 columns of the SVD matrices, truncating the rest and reconstructing the original image

```
r = 5
reconstruction = U[:,:r] @ S[0:r,:r] @ V[:r,:r]

energy = 0
for i in range(r):
    energy = energy + S[i][i] * S[i][i]
energy = energy / np.sum(np.square(S))

print("The first "+ str(r) + " columns contained " + str(energy * 100) + " % of the original energy of the image")
```

```
The first 5 columns contained 98.68957252806432 % of the original energy of the image
```

```
plt.imshow(reconstruction, cmap = 'gray')
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x1ecbcec4430>
```



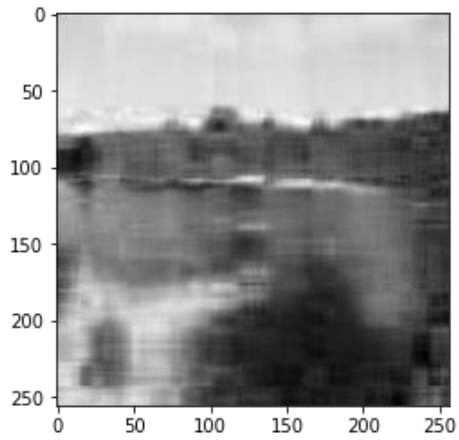
First 10 Columns

```
r = 10
reconstruction = U[:,:r] @ S[0:r,:r] @ V[:r,:]

energy = 0
for i in range(r):
    energy = energy + S[i][i]*S[i][i]
energy = energy / np.sum(np.square(S))
print('The first ' + str(r) + ' columns contained ' + str(energy * 100) +
'% of the original energy of the image')
```

```
The first 10 columns contained 99.29620558552351% of the original energy o
f the image
```

```
plt.imshow(reconstruction,cmap='gray')
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x1ecbcf02920>
```



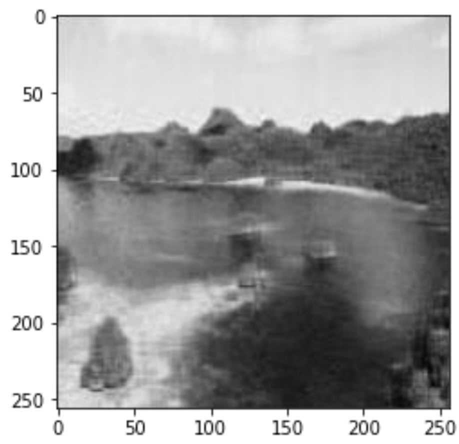
First 25 Columns

```
r = 25
reconstruction = U[:,:r] @ S[0:r,:r] @ V[:r,:]

energy = 0
for i in range(r):
    energy = energy + S[i][i]*S[i][i]
energy = energy / np.sum(np.square(S))
print('The first ' + str(r) + ' columns contained ' + str(energy * 100) +
'% of the original energy of the image')
```

```
The first 25 columns contained 99.6999768782859% of the original energy of
the image
```

```
plt.imshow(reconstruction,cmap='gray')
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x1ecbcf75600>
```



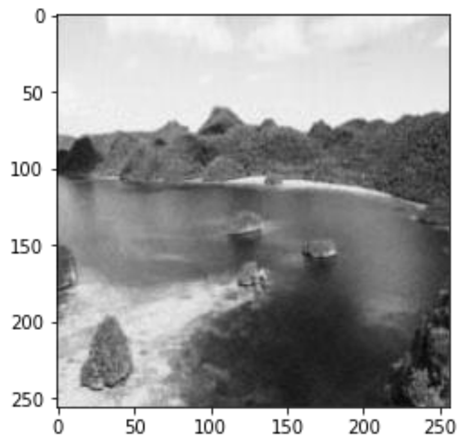
First 50 columns

```
r = 50
reconstruction = U[:,:r] @ S[0:r,:r] @ V[:r,:]

energy = 0
for i in range(r):
    energy = energy + S[i][i]*S[i][i]
energy = energy / np.sum(np.square(S))
print('The first ' + str(r) + ' columns contained ' + str(energy * 100) +
'% of the original energy of the image')
```

```
The first 50 columns contained 99.88455295689957% of the original energy o
f the image
```

```
plt.imshow(reconstruction,cmap='gray')
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x1ecbd100400>
```



Daftar Pustaka

Anton, Howard. 2005. *Elementary Linear Algebra Fifth Edition*, Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga

Sutojo, T. dkk. 2010. Teori dan Aplikasi Aljabar Linier dan Matriks. Yogyakarta: Penerbit ANDI.

Sanderson, Grant. Vectors, what even are they? Essence of linear algebra, chapter 1. 3blue1brown.