

**Москва 2020**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»**

**Факультет компьютерных наук  
Основная образовательная программа Прикладная математика и  
информатика**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
Исследовательский проект  
на тему**

# **Многовидовая модель стационарных биологических сообществ**

**Выполнил студент группы 165, 4 курса,  
Зеленков Виктор Константинович**

**Руководитель ВКР:  
к.ф.-м.н., доцент, Никитин Алексей Антонович**

## Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Выведение модели для трёхвидового случая</b>	<b>3</b>
2.1	Описание модели . . . . .	3
2.2	Обозначения . . . . .	4
2.3	Предварительные примечания . . . . .	5
2.4	Вывод результирующей системы . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Численный метод</b>	<b>13</b>
3.1	Входные параметры . . . . .	13
3.2	Алгоритм . . . . .	13
3.3	Пример работы . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Симуляции</b>	<b>17</b>
4.1	Характеристики конкретных особей . . . . .	17
4.2	Входные параметры . . . . .	18
4.3	Алгоритм . . . . .	19
4.4	Примеры работы . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Сравнение численного метода и симуляции</b>	<b>22</b>
5.1	Достоинства и недостатки методов . . . . .	22
5.1.1	Симуляции . . . . .	22
5.1.2	Численный метод . . . . .	22
5.2	Сравнение результатов численного метода и симуляции . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>27</b>
<b>7</b>	<b>Список литературы</b>	<b>28</b>

## **Аннотация**

The main obstacle to the study of stationary biological communities, such as plants, is their lifespan that is too long compared to human. Biologists cannot research the communities for hundreds of years due to a shorter human lifespan. Nowadays they use computer simulations to accelerate the process. However, this method is too slow. To solve this problem Ulf Dieckmann and Richard Law have proposed to explore the system of integral-differential equations of spatial moments dynamics as an alternative to simulation. This paper continues the study of a system with three species. No previous study, as we know, has investigated such systems. First spatial moments have been used to compare the results of the numerical method with those obtained by simulations. The results are corresponded.

Главной трудностью в изучении стационарных биологических сообществ, таких как растения, слишком долгая продолжительность их жизни по сравнению с человеческой. Биологи не могут изучать эти сообщества в течении сотен лет из-за короткой человеческой жизни. Для ускорения, сейчас используются компьютерные симуляции. Однако, этот метод слишком медленный. Для решения данной проблемы Ульф Дикман и Ричард Лоу предложили исследовать систему интегрально-дифференциальных уравнений динамики пространственных моментов как альтернатива симуляции. Эта работа продолжает исследование данной системы для трёх видов. Ранее, как нам известно, никто данную задачу не изучал. Для сравнения будут исследоваться первые моменты полученных результатов численного метода и симуляции. Результаты которых близки.

**Ключевые слова – математическое моделирование, интегро дифференциальные уравнения, математическая биология**

# 1 Введение

Ещё в 1916 году Альберт Эйнштейн предложил [1] концепцию вынужденного излучения, также известное как лазерное излучение [2]. Это представляет из себя эффект, называемый самоорганизацией мультиагентных процессов в естественной среде. Так же данный эффект можно найти и в химических системах. Например реакция Белоусова-Жаботинского [3], кольца Лизенганга [4] и ячейки Релея-Бенара [5]. Подобную самоорганизацию можно встретить и в биологии: микробактерии *Escherichia coli* [6] или *Dictostelium discoideum* [7]. А также примером подобного процесса является процесс формирования и динамика распространения заболеваний [8].

Из-за приведённых примеров возникла необходимости в создании математического аппарата. Широко известные к середине XX-го века модели конкурирующих популяций, например модель Ферхюльста [9] и модель Лотки-Вольтерры [10], обладали существенным недостатком: они не учитывали пространственную структуру.

Поэтому в своей работе [11] Ричард Лоу и Ульф Дикман предложили использовать пространственную структуру для описания модели стационарных биологических сообществ. Но из-за использования пространственных моментов существует сложность в нахождении точек равновесия. Каждый момент рекурсивно зависит от следующего. Для решения данной проблемы авторы предложили использовать замыкания (аппроксимацию) пространственных моментов. Замыканием называется выражение момента  $i$  через моменты строго меньшего порядка. Но проблема замыкания, в том, что непонятно насколько близко оно приближает результат к реальности. В работе [12] было предложено и исследовано семейство параметрических замыканий:

$$T_{ijk}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{C_{ij}(\xi_1)C_{ik}(\xi_2)}{N_i} + \frac{C_{ij}(\xi_1)C_{jk}(\xi_2 - \xi_1)}{N_j} + \frac{C_{ik}(\xi_2)C_{jk}(\xi_2 - \xi_1)}{N_k} - 1 \right) - (1 - \alpha) \frac{C_{ij}(\xi_1)C_{ik}(\xi_2)}{N_i} \quad (1.1)$$

которое было в дальнейшем исследовано А.С. Савостьяновым и А. А. Никитиным в работе [13], где они предложили использовать метод Неймана для решения модели с данным замыканием. А так же использовать преобразование Ханкеля для подсчёта свёртки для двумерного случая. В дальнейшем изучение двувидовой модели было продолжено в работе [14] Е.Г. Галкиным, В.К. Зеленковым и А.А. Никитиным. В этой работе было проведено детальное сравнение

численного метода и симуляции основанной на процессах Пуассона. Но это было сделано только для двувидовой модели. Настоящая работа продолжает данные исследования и исследует модель с тремя видами.

В начале данной работы идёт описание выведения аналитической модели для трёхвидового случая. Затем идёт описание самого численного метода с примерами его работы. После этого приводится описание и примеры работы симуляции. Сравнение численного метода и симуляции приводится в последней главе.

## 2 Выведение модели для трёхвидового случая

### 2.1 Описание модели

Как уже было сказано ранее, данная модель построена на использовании пространственных моментов как набор статистик для описания популяции:

- $N_i$  – первый момент, являющийся плотностью индивидов вида  $i$
- $\tilde{C}_{ij}(\xi)$  – второй момент, являющийся плотность пар индивидов, где  $i$  вид удалён от  $j$  на расстояние  $\xi$
- $\tilde{T}_{ijk}(\xi, \xi')$  – третий момент, являющийся плотность троек индивидов, где вид  $j$  удалён от вида  $i$  на расстояние  $\xi$ , а вид  $k$  удалён от вида  $i$  на расстояние  $\xi'$

Мы рассматриваем трёхвидовую модель, поэтому  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ , а также исследуем нашу модель в одномерном пространстве. Также мы рассматриваем следующие параметры:

- радиально-симметричная функция  $m_i(x)$  – ядро рождения, плотность вероятности рождения  $i$ -го вида на расстоянии  $x$
- переменная  $b_i = \int_{\mathbb{R}^n} m_i(x) dx$  – темп рождаемости
- переменная  $d_i$  – вероятность смерти от влияния окружающей среды
- радиально-симметричная функция  $w_{ij}(x)$  – ядро конкурентной смертности, плотность вероятности смерти индивида  $i$ -го вида от  $j$ -го на расстоянии  $x$
- переменная  $d_{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} w_{ij}(x) dx$  – сила конкуренции

При помощи данных переменных можно описать динамику набора статистик, формальный вывод которой приведён в [15]. Приведём результирующие уравнения динамики с которых началась работа:

$$\frac{d}{dt}N_i = (b_i - d_i)N_i - \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^n} w_{ij}(\xi) \tilde{C}_{ij}(\xi) d\xi = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{C}_{ij}(\xi) &= \delta_{ij}m_i(-\xi)N_i + \int_{\mathbb{R}^n} m_i(\xi')\tilde{C}_{ij}(\xi + \xi') d\xi' - d_i\tilde{C}_{ij}(\xi) - \\
&- \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi')\tilde{T}_{ijk}(\xi, \xi') d\xi' - w_{ij}(\xi)\tilde{C}_{ij}(\xi) + \delta_{ji}m_j(\xi)N_j \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} m_j(\xi')\tilde{C}_{ji}(-\xi + \xi') d\xi' - d_j\tilde{C}_{ji}(-\xi) - \\
&- \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi')\tilde{T}_{jik}(-\xi, \xi') d\xi' - w_{ij}(-\xi)\tilde{C}_{ji}(-\xi) = 0, \\
&\quad i, j = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{2.2}$$

При этом:

- $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;
- $\tilde{C}_{ij}(\xi, t)$  радиально-симметрична по переменной  $\xi$  (в общем случае функция зависит от переменной  $t$ , но в силу специфики данной задачи и для уменьшения количества формул в этой выкладке эта зависимость не будет явно выписываться. Аналогично,  $N_i = N_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ );
- $\frac{1}{b_i}m_i(\xi)$  и  $\frac{1}{d'_{ij}}w_{ij}(\xi)$  являются плотностями нормальных распределений с нулевым математическим ожиданием,  $i, j = 1, 2, 3$ ;
- для разрешения иерархии зависимостей моментов использоваться следующее замыкание представленное в (1.1)

## 2.2 Обозначения

- $C_{ij}(\xi) = \frac{\tilde{C}_{ij}(\xi)}{N_i N_j}$ ;
- $D_{ij} = C_{ij}(\xi) - 1$  (таким образом,  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} C_{ij}(\xi) = 1$ ,  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} D_{ij}(\xi) = 0$ );
- $T_{ijk}(\xi, \xi') = \frac{\tilde{T}_{ijk}(\xi, \xi')}{N_i N_j N_k}$ ;
- $[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x + y) dy$ ;
- $y_{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} w_{ij}(\xi)C_{ij} d\xi$ ;

### 2.3 Предварительные примечания

- так как  $C_{ij}(\xi) = C_{ji}(-\xi)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  (в силу определения функции  $\tilde{C}_{ij}(\xi)$  в модели Ульфа Дикмана),  $[f * C_{ij}](-\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi') C_{ij}(-\xi + \xi') d\xi' = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi') C_{ji}(\xi - \xi') d\xi' = \int_{\mathbb{R}^n} f(-\xi') C_{ji}(\xi - \xi') d\xi' = [f * C_{ij}](\xi) = [f * C_{ji}](\xi)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $f$  — радиально-симметричная функция;
- важно заметить, что в результате функции  $C_{ij}(\xi)$  и  $T_{ijk}(\xi, \xi')$  являются "нормированными", а  $m_i(\xi)$  и  $w_{ij}(\xi)$  — нет; при этом  $m_i(\xi)$  и  $w_{ij}(\xi)$  всё равно являются радиально-симметричными функциями;
- после введения "нормированных" аналогов моментов формула (1.1) преобразовывается следующим образом:

$$N_i N_j N_k T_{ijk}(\xi, \xi') = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{N_i N_j C_{ij}(\xi) N_i N_k C_{ik}(\xi')}{N_i} + \frac{N_i N_j C_{ij}(\xi) N_j N_k C_{jk}(\xi - \xi')}{N_j} + \frac{N_i N_k C_{ik}(\xi') N_j N_k C_{jk}(\xi' - \xi)}{N_k} - 1 \right) + (1 - \alpha) \frac{N_i N_j C_{ij}(\xi) N_i N_k C_{ik}(\xi')}{N_i}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

$$T_{ijk}(\xi, \xi') = \frac{\alpha}{2} \left( C_{ij}(\xi) C_{ik}(\xi') + C_{ij}(\xi) C_{jk}(\xi - \xi') + C_{ik}(\xi') C_{jk}(\xi' - \xi) - 1 \right) + (1 - \alpha) C_{ij}(\xi) C_{ik}(\xi'), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} w_{ij}(\xi) d\xi = d'_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_i(\xi) d\xi = b_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

### 2.4 Вывод результирующей системы

После "нормирования" моментов получаем:  $\frac{d}{dt} \tilde{C}_{ij}(\xi) = \frac{d}{dt} (C_{ij}(\xi) N_i N_j) = \frac{d}{dt} C_{ij}(\xi) N_i N_j + C_{ij}(\xi) \left( \frac{dN_i}{dt} N_j + \frac{dN_j}{dt} N_i \right)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . В силу (2.1),  $\frac{dN_i}{dt} = 0$ ,  $i =$



1, 2, 3. Тогда  $\frac{d}{dt}\tilde{C}_{ij}(\xi) = \frac{d}{dt}(C_{ij}(\xi)N_iN_j) = \frac{d}{dt}C_{ij}(\xi)N_iN_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Подставляя это в (2.2) и заменяя там  $\tilde{C}_{ij}(\xi)$  на  $C_{ij}(\xi)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}C_{ij}(\xi) &= \delta_{ij} \left( \frac{m_i(\xi)}{N_j} + \frac{m_j(\xi)}{N_i} \right) + [(m_i + m_j) * C_{ij}](\xi) - \\ &\quad - (d_i + d_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi))C_{ij}(\xi) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') T_{ijk}(\xi, \xi') d\xi' - \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') T_{jik}(-\xi, \xi') d\xi' = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$i, j = 1, 2, 3$

Теперь перед нами стоит задача подставить представление (2.4) в (2.7). Для удобства разобьём эту операцию на несколько частей. Будем рассчитывать результат подстановки в (2.7) отдельно для каждого слагаемого из (2.4), а затем вновь сложим все полученные результаты. При расчёте будем запоминать коэффициент слагаемого, который учтём явно только при обратной сборке формулы. Разумеется, только последние два слагаемых в (2.7) зависят от  $T_{ijk}(x, y)$ , поэтому выписываться, из соображений удобства, будут только они. Все переходы, описанные далее, справедливы  $\forall i, j = 1, 2, 3$ .

Слагаемое:  $C_{ij}(\xi)C_{ik}(\xi')$ . Коэффициент:  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ .

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') T_{ijk}(\xi, \xi') d\xi' + \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') T_{jik}(-\xi, \xi') d\xi' = \\ &= \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') C_{ij}(\xi) C_{ik}(\xi') d\xi' + \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') C_{ji}(-\xi) C_{jk}(\xi') d\xi' = \\ &= \sum_{k=1}^3 N_k C_{ij}(\xi) y_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k C_{ji}(-\xi) y_{jk} = \\ &= C_{ij}(\xi) \sum_{k=1}^3 N_k y_{ik} + C_{ji}(-\xi) \sum_{k=1}^3 N_k y_{jk} \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом,  $0 = (b_i - d_i)N_i - N_i \sum_{j=1}^3 N_j y_{ij}$  (это следует из (2.1)). Следовательно,

$$b_i - d_i = \sum_{j=1}^3 N_j y_{ij}. \text{ Получаем}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') T_{ijk}(\xi, \xi') d\xi' + \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') T_{jik}(-\xi, \xi') d\xi' = \\
& = C_{ij}(\xi) \sum_{k=1}^3 N_k y_{ik} + C_{ji}(-\xi) \sum_{k=1}^3 N_k y_{jk} = \\
& = C_{ij}(\xi)(b_i - d_i) + C_{ji}(-\xi)(b_j - d_j) = \\
& = C_{ij}(\xi)(b_i + b_j - d_i - d_j) = \\
& = D_{ij}(\xi)(b_i + b_j - d_i - d_j) + (b_i + b_j - d_i - d_j)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Слагаемое:  $C_{ij}(\xi)C_{jk}(\xi - \xi')$ . Коэффициент:  $\frac{\alpha}{2}$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') T_{ijk}(\xi, \xi') d\xi' + \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') T_{jik}(-\xi, \xi') d\xi' = \\
& = \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') C_{ij}(\xi) C_{jk}(\xi - \xi') d\xi' + \\
& + \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') C_{ji}(-\xi) C_{ik}(-\xi - \xi') d\xi' = \\
& = C_{ij}(\xi) \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') C_{jk}(\xi - \xi') d\xi' + \\
& + C_{ij}(\xi) \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') C_{ik}(-\xi - \xi') d\xi' = \\
& = C_{ij}(\xi) \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * C_{jk}](\xi) + C_{ij}(\xi) \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * C_{ik}](\xi) = \\
& = D_{ij}(\xi) \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \right) + \\
& + D_{ij}(\xi) \left( \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right) + \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \right) + \left( \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Слагаемое:  $C_{ik}(\xi')C_{jk}(\xi - \xi')$ . Коэффициент:  $\frac{\alpha}{2}$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') T_{ijk}(\xi, \xi') d\xi' + \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') T_{jik}(-\xi, \xi') d\xi' = \\
& = \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') C_{ik}(\xi') C_{jk}(\xi - \xi') d\xi' + \\
& + \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') C_{jk}(\xi') C_{ik}(-\xi - \xi') d\xi' = \\
& = \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} C_{ik} * C_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} C_{jk} * C_{ik}](\xi) = \\
& = \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}](\xi) + \\
& + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k y_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k y_{jk} = \\
& = \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}](\xi) + \\
& + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) + b_i + b_j - d_i - d_j
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Слагаемое:  $-1$ . Коэффициент:  $\frac{\alpha}{2}$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') T_{ijk}(\xi, \xi') d\xi' + \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') T_{jik}(-\xi, \xi') d\xi' = \\
& = \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') (-1) d\xi' + \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') (-1) d\xi' = \\
& = - \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} - \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Теперь мы получили 4 слагаемых с определёнными коэффициентами. Пора вернуться к формуле (2.7), заменяя последние два слагаемых из этой формулы

на полученные нами линейные комбинации:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}C_{ij}(\xi) &= \delta_{ij}\left(\frac{m_i(\xi)}{N_j} + \frac{m_j(\xi)}{N_i}\right) + [(m_i + m_j) * C_{ij}](\xi) - \\
&- (d_i + d_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi))C_{ij}(\xi) - \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{ik}(\xi') T_{ijk}(\xi, \xi') d\xi' - \\
&- \sum_{k=1}^3 N_k \int_{\mathbb{R}^n} w_{jk}(\xi') T_{jik}(-\xi, \xi') d\xi' = \\
&= \delta_{ij}\left(\frac{m_i(\xi)}{N_j} + \frac{m_j(\xi)}{N_i}\right) + [(m_i + m_j) * D_{ij}](\xi) + b_i + b_j - \\
&- (d_i + d_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi))D_{ij}(\xi) - (d_i + d_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi)) - \\
&+ \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) (D_{ij}(\xi)(b_i + b_j - d_i - d_j) + (b_i + b_j - d_i - d_j)) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \left( D_{ij}(\xi) \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \right) + D_{ij}(\xi) \left( \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right) \right) + \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}](\xi) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_i + b_j - d_i - d_j \right) + \frac{\alpha}{2} \left( - \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} - \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Преобразуем последнее равенство. Перенесём некоторые слагаемые на другую

часть.

$$\begin{aligned}
& \delta_{ij} \left( \frac{m_i(\xi)}{N_j} + \frac{m_j(\xi)}{N_i} \right) + [(m_i + m_j) * D_{ij}](\xi) + b_i + b_j - (d_i + d_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi)) - \\
& - \left\{ \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) (b_i + b_j - d_i - d_j) + \frac{\alpha}{2} \left( D_{ij}(\xi) \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \right) + \right. \right. \\
& \quad \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \right) + \\
& \quad \left. \left. + \left( \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha}{2} \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}](\xi) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + b_i + b_j - d_i - d_j \right) + \frac{\alpha}{2} \left( - \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} - \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right) \right\} = \\
& = D_{ij}(\xi) \left( d_i + d_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi) + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) (b_i + b_j - d_i - d_j) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha}{2} \left( \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Поменяем местами правую и левую части. Перегруппируем некоторые слагаемые.

$$\begin{aligned}
& D_{ij}(\xi) \left( d_i + d_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi) + \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) (b_i + b_j - d_i - d_j) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha}{2} \left( \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right) \right) = \\
& = \delta_{ij} \left( \frac{m_i(\xi)}{N_j} + \frac{m_j(\xi)}{N_i} \right) + b_i + b_j + \\
& + [(m_i + m_j) * D_{ij}](\xi) - d_i - d_j - w_{ij}(\xi) - w_{ji}(\xi) - \\
& - \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) (b_i + b_j - d_i - d_j) - \\
& - \frac{\alpha}{2} \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) + \right. \\
& + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}](\xi) + \\
& + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) + \right. \\
& \quad \left. + b_i + b_j - d_i - d_j - \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} - \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk} \right) - \\
& - \frac{\alpha}{2} D_{ij}(\xi) \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \right)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Слагаемые вида  $(\sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk})$  и  $b_i, d_i$  взаимоуничтожаются. Это немного сократит запись.

$$\begin{aligned}
D_{ij}(\xi) & \left( d_i + d_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi) + (1 - \frac{\alpha}{2}(b_i + b_j - d_i - d_j) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\alpha}{2}(\sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik} + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{jk})) \right) = \\
& = \delta_{ij}(\frac{m_i(\xi)}{N_j} + \frac{m_j(\xi)}{N_i}) \\
& \quad + [(m_i + m_j) * D_{ij}](\xi) - w_{ij}(\xi) - w_{ji}(\xi) - \\
& \quad - \frac{\alpha}{2} \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) + \right. \\
& \quad + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}](\xi) + \\
& \quad + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \Big) - \\
& \quad - \frac{\alpha}{2} D_{ij}(\xi) \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Перегруппируем левую часть.

$$\begin{aligned}
D_{ij}(\xi) & \left( \frac{\alpha}{2}(d_i + d_j - b_i - b_j + \sum_{k=1}^3 N_k(d'_{ik} + d'_{jk}) + \right. \\
& \quad \left. + b_i + b_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi)) \right) = \\
& = \delta_{ij}(\frac{m_i(\xi)}{N_j} + \frac{m_j(\xi)}{N_i}) + [(m_i + m_j) * D_{ij}](\xi) - w_{ij}(\xi) - w_{ji}(\xi) \\
& \quad - \frac{\alpha}{2} \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) + \right. \\
& \quad + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}](\xi) + \\
& \quad + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \Big) - \\
& \quad - \frac{\alpha}{2} D_{ij}(\xi) \left( \sum_{k=1}^3 N_k [w_{ik} * D_{jk}](\xi) + \sum_{k=1}^3 N_k [w_{jk} * D_{ik}](\xi) \right)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Сделаем ещё одну группировку правой части, которая упростит вид.

$$\begin{aligned}
D_{ij}(\xi) & \left( \frac{\alpha}{2}(d_i + d_j - b_i - b_j + \sum_{k=1}^3 N_k(d'_{ik} + d'_{jk}) + b_i + b_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi) = \right. \\
& = \delta_{ij}(\frac{m_i(\xi)}{N_j} + \frac{m_j(\xi)}{N_i}) + [(m_i + m_j) * D_{ij}](\xi) - (w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi)) - \\
& \quad - \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^3 N_k \left( (D_{ij}(\xi) + 2)([w_{ik} * D_{jk}](\xi) + [w_{jk} * D_{ik}](\xi)) \right. \\
& \quad \left. + [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}](\xi) + [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}](\xi) \right)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

При  $i \neq j$  имеем

$$\begin{aligned}
D_{ij}(\xi) & \left( \frac{\alpha}{2} (d_i + d_j - b_i - b_j + \sum_{k=1}^3 N_k (d'_{ik} + d'_{jk})) + b_i + b_j + w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi) \right) = \\
& = [(m_i + m_j) * D_{ij}](\xi) - (w_{ij}(\xi) + w_{ji}(\xi)) - \\
& - \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^3 N_k ((D_{ij}(\xi) + 2) ([w_{ik} * D_{jk}](\xi) + [w_{jk} * D_{ik}](\xi)) + \\
& + [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}](\xi) + [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}](\xi))
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Аналогично, при  $i = j$

$$\begin{aligned}
D_{ii}(\xi) & \left( \frac{\alpha}{2} (d_i - b_i + \sum_{k=1}^3 N_k d'_{ik}) + b_i + w_{ii}(\xi) \right) = \\
& = \frac{m_i(\xi)}{N_i} + [m_i * D_{ii}](\xi) - w_{ii}(\xi) - \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^3 N_k ((D_{ii}(\xi) + 2) * \\
& * ([w_{ik} * D_{ik}](\xi)) + [w_{ik} D_{ik} * D_{ik}](\xi))
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Систему (2.1) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
(b_i - d_i) N_i - \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^n} w_{ij}(\xi) N_i N_j C_{ij}(\xi) d\xi & = 0 \\
(b_i - d_i) - \sum_{j=1}^3 N_j \int_{\mathbb{R}^n} w_{ij}(\xi) C_{ij}(\xi) d\xi & = 0 \\
(b_i - d_i) - \sum_{j=1}^3 N_j y_{ij} & = 0 \\
\sum_{j=1}^3 N_j y_{ij} & = b_i - d_i
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Выберем в качестве неизвестных  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда, несложно заметить, мы получаем СЛАУ

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - d_1 \\ b_2 - d_2 \\ b_3 - d_3 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Полученные уравнения (2.19), (2.20) и (2.22) составляют искомую систему, описывающую стационарное положение рассматриваемой модели.

## 3 Численный метод

### 3.1 Входные параметры

- `-t` – Префикс файлов, в которые будут записываться результаты.
- `-species` – Количество видов.
- `-dim` – Размерность на которой считается решение.
- `-al` –  $\alpha$  из замыкания.
- `-points` – количество точек для векторов, по которым считается решение.
- `-a` – Размер пространства, на котором считается решение. Считается, что влияние хвостов за данным концом пренебрежительно мало.
- `-b` – Темп рождаемости. Задаётся числами, количество которых равно количеству видов.
- `-dvec` – Вероятность смертности от окружающей среды. Задаётся числами, количество которых равно количеству видов.
- `-dmat` – Сила конкуренции. Задаётся числами, количество которых равно количеству видов в квадрате.
- `-sw` – Значение среднеквадратичного отклонения для ядра конкуренции. Задаётся числами, количество которых равно количеству видов в квадрате.
- `-sm` – Значение среднеквадратичного отклонения для ядра рождаемости. Задаётся числами, количество которых равно количеству видов.

### 3.2 Алгоритм

Для решения системы используется численный метод рядов Неймана (метод последовательных приближений). В программной части алгоритма используется библиотека Eigen [16] для работы с матрицами, GSL [17] для преобразования Ханкеля, которое используется для подсчёта свёртки на плоскости, а так же CLIPP [18] для парсинга аргументов командной строки. Сам



алгоритм заключается в последовательном вычислении пока изменения между значениями не станут слишком малы. Сначала инициализируются нулями вектор  $N = (N_2, \dots, N_n)$ , где  $n$  – количество видов, и матрицу векторов  $D = \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ & \ddots & \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}$  где  $D_{ij} = C_{ij} - 1$  – вектор значений второго момента соответственно. Потом идёт последовательное вычисление. Сначала вычисляется второй момент для вне диагональных элементов:

$$D_{ij} = \frac{[(m_i + m_j) * D_{ij}] - w_{ij} - w_{ji} - S_{ij}}{\frac{\alpha}{2} (d_i + d_j - b_i - b_j + \sum_k (N_k (d'_{ik} + d'_{jk}))) + (b_i + b_j) + w_{ij} + w_{ji}}$$

где

$$S_{ij} = \sum_k \left( \frac{\alpha}{2} N_k ((D_{ij} + 2) ([w_{ik} * D_{jk}] + [w_{jk} * D_{ik}]) + [w_{ik} D_{ik} * D_{jk}] + [w_{jk} D_{jk} * D_{ik}]) \right)$$

Для упрощения записи, будем считать, если скаляр прибавляется к вектору, это значит умножение единичного вектора на скаляр, а потом прибавление к вектору. Потом вычисляются первый момент с помощью вычисления матричного уравнения:  $N \cdot Y = b - d$ , где  $Y$  – матрица значений:  $y_{ij} = \int_R w_{ij}(\xi) C_{ij}(\xi) d\xi$ ,  $b$  – вектор чисел  $(b_1, \dots, b_n)$ ,  $d$  – вектор чисел  $(d_1, \dots, d_n)$ . Потом вычисляются диагональные элементы:

$$D_{ii} = \frac{\frac{m_i}{N_i + \varepsilon} + [m_i * D_{ii}] - \sum_k \frac{\alpha}{2} N_k ((D_{ii} + 2) [w_{ik} * D_{ik}] + [w_{ik} D_{ik} * D_{ik}])}{\frac{\alpha}{2} (d_i - b_i + \sum_k N_k d'_{ik}) + b_i + w_{ii}}$$

, где  $\varepsilon$  прибавляется, для того, что бы не было деления на ноль. А затем опять вычисляется  $N$ . После этого цикл повторяется. Алгоритм завершает работу, либо когда пройдёт определённое количество итераций, либо когда изменение в  $N$  и  $u$  станет слишком маленьким.

### 3.3 Пример работы

Для примера, я подобрал такие параметры, все шесть вторых моментов не сливались в одну кривую. Пример таких моментов показан на рисунке 3.1. Ещё один пример работы численного метода представлен на рисунке 3.3. Там изменяется параметр  $b_1 \in [0.399, 0.401]$  и видно изменение первого момента. Причём результат выглядит достаточно реалистично. Во-первых в начале горизонтальные отрезки у всех видов. Так как мы изменяем параметр только первого вида,

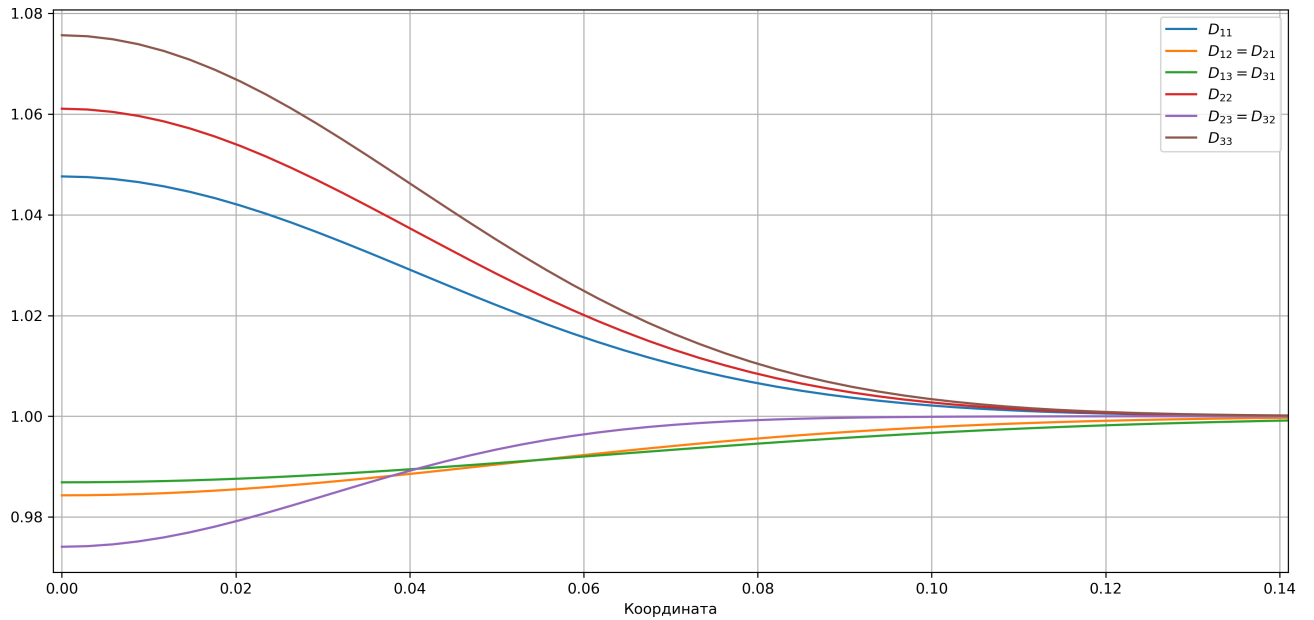


Рисунок 3.1 — На этом рисунке изображены значения вторых моментов для параметров:  $a = 3$ ,  $b = (0.501 \ 0.5001 \ 0.5)$ ,  $d = (0.2 \ 0.2 \ 0.2)$ ,  $\sigma_m = (0.04 \ 0.04 \ 0.04)$ ,  $d' = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_w = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.05 & 0.06 \\ 0.05 & 0.04 & 0.03 \\ 0.06 & 0.03 & 0.04 \end{pmatrix}$ . Значение первого момента равно  $N = (205.48 \ 160.158 \ 129.285)$ . Так же я ограничил горизонтальную координату, для лучшей видимости. Дальше второй момент просто стремится к 1.

а этот вид вымер, то логично, что первые моменты оставшихся видов не будут меняться. Во-вторых первый момент первого вида начинает расти, из-за того, что мы увеличиваем рождаемость первого вида, что тоже выглядит логичным. К несчастью, есть некоторые трудности с тем, что численный метод может не сходиться, или сходиться таким образом, что некоторые первые моменты становятся отрицательными.

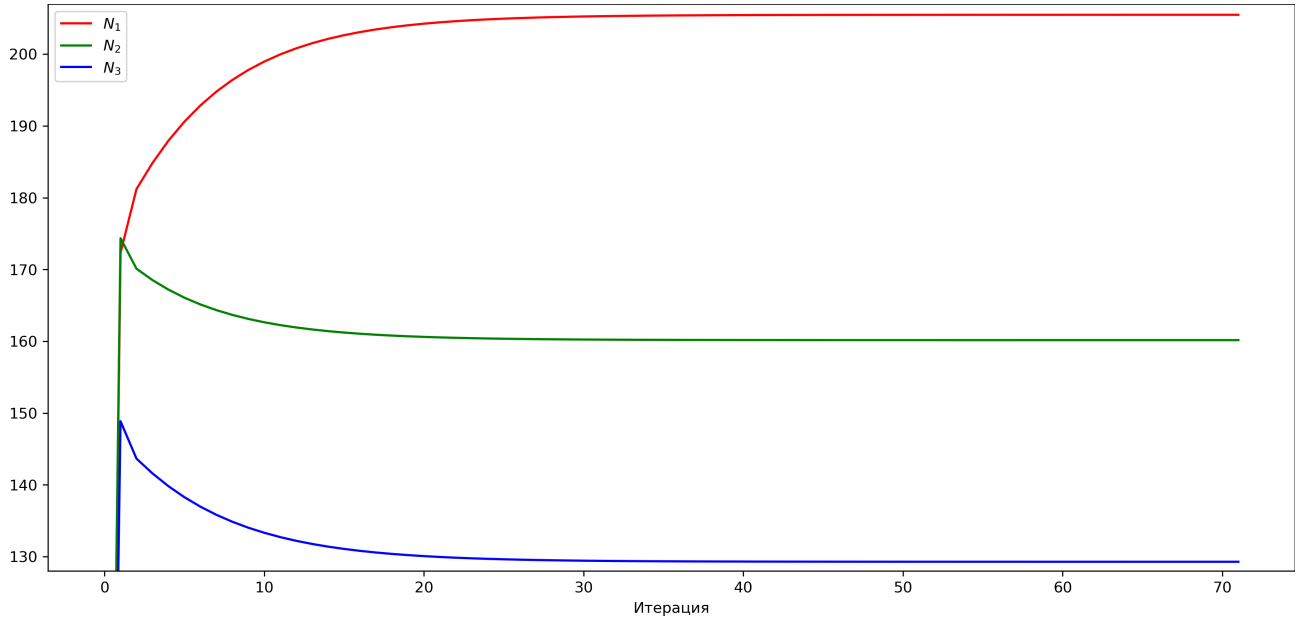


Рисунок 3.2 — Этот график показывает зависимость первого момента от количества итераций алгоритма для тех же входных параметров, что и на рисунке 3.1. Так же я ограничил вертикальную координату, так как мы инициализируем  $N$  нулями, то и в самом начале значения будут нули.

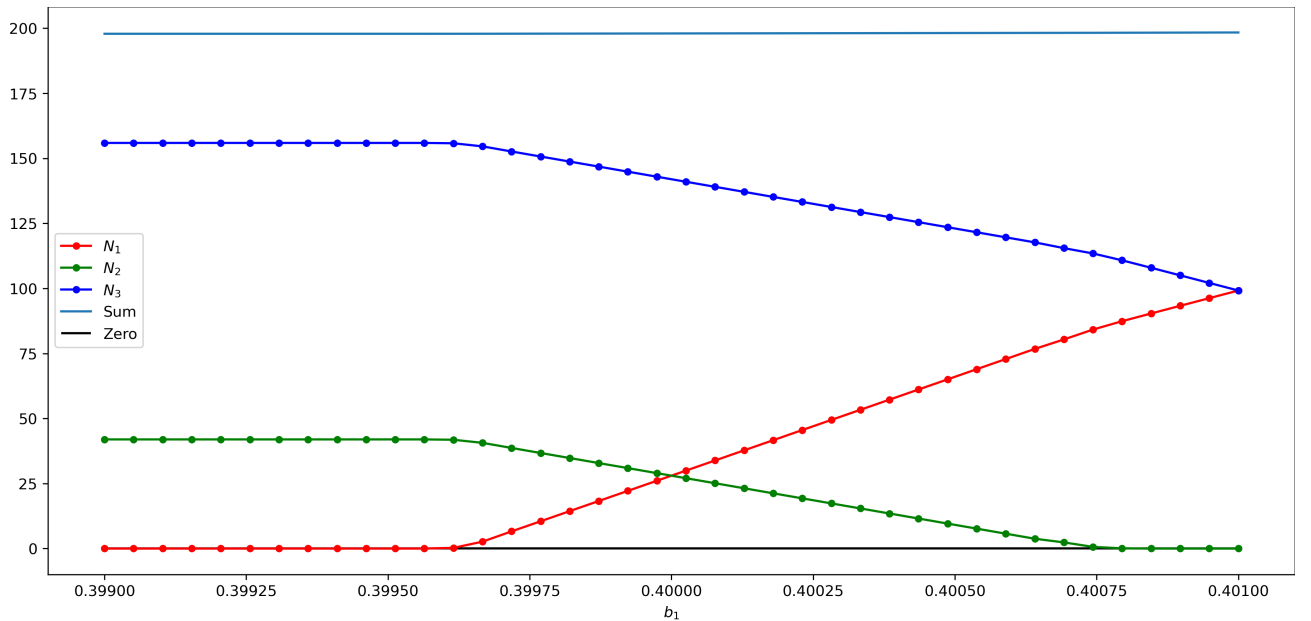


Рисунок 3.3 — Этот график показывает зависимость первого момента от рождаемости первого вида. Параметры: количество точек: 4096,  $a = 4$ ,  $b = (b_1 \ 0.4 \ 0.401)$ ,  $d = (0.2 \ 0.2 \ 0.2)$ ,  $\sigma_m = (0.04 \ 0.04 \ 0.04)$ ,  $d' = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_w = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \end{pmatrix}$

## 4 Симуляции

Для симуляции используется стохастическая модель на ограниченной области. Из-за этого важно обращать внимание на граничные условия, так как они будут влиять на результат.

- **Периодические граничные условия.** При рождении особи за пределами границы, она переносится на другую сторону. В общем случае область становится топологически равной многомерному тору.
- **Убывающие граничные условия.** Если особь рождается за пределами границы, то она просто не добавляется. Тогда в общем область становится многомерным кубом. Такой подход позволяет изучать влияние границ на получаемый результат. В нашей работе использовались данные граничные условия.

Все события в данной модели являются Пуассоновскими потоками [19] при фиксированном паттерне. При этом можно производить вычисление событий по одному из-за аддитивного свойства Пуассоновских процессов.

### 4.1 Характеристики конкретных особей

Для каждой особи вида  $k$  и находящийся в точке  $x_0$  соучаствуют следующие характеристики:

- $d_k$  – Вероятность смерти от влияния окружающей среды.
- Время жизни одной изолированной особи – случайная величина, распределённая экспоненциально:  $t_{d_k} \sim \exp(\lambda = d_k)$ .
- $b_k$  – Темп рождаемости.
- Время до рождения новой особи – случайная величина, распределённая экспоненциально:  $t_{b_k} \sim \exp(\lambda = b_k)$ .
- $m_k$  – Ядро рождения.
- Расстояние между родителем и дочерней особью – случайная величина, распределённая экспоненциально:  $x_b \sim m_k(x_0)$ .

Для двух особей  $k$  и  $m$  видов, находящихся в точках  $x_0$  и  $x_1$  соответственно, конкурентная смертность характеризуется данными величинами:

- $d'_{km}$  – Сила конкуренции.
- $w_{km}$  – Ядро конкурентной смертности.
- Конкурентная смертность первой особи – случайная величина, распределённая экспоненциально:  $t_{d'_{km}} \sim \exp(\lambda = d'_{km} \cdot w_{km}(x_0 - x_1))$ .

В общем случае для различных видов  $k$  и  $m$ ,  $d'_{km} \neq d'_{mk}$  и  $w_{km} \neq w_{mk}$ .

## 4.2 Входные параметры

Для простоты вычисления, все функции, которые передаются симуляции: ядра рождения и смертности, передаются как массив значений ядра на отрезки от 0 до  $r$ , где  $r$  передаётся отдельно для каждой функции. Считается, что ядра симметричные, поэтому они считаются на положительном отрезке. Также считается, что для параметра большего  $r$  значение функции пренебрежительно мало. Соответственно, для ядер рождения считается, вероятность создания особи на расстоянии большем  $r$  равна нулю. И взаимодействия между особями на расстоянии большем  $r$  тоже считается нулём.

- `species_count` – Количество видов.
- `area_length_x` – Размер области.
- `cell_count_x` – Количество ячеек для хранения особей. Каждая такая ячейка хранит координаты особей, их вид и влияние других особей и окружения на данную особь.
- `seed` – Зерно для инициализации генератора случайностей.
- `spline_precision` – Точность сплайнов.
- `d_i` – Вероятность смертности от окружающей среды для  $i$ -того вида.
- `init_density_i` – Начальная плотность для  $i$ -того вида.
- `b_i` – Темп рождаемости для  $i$ -того вида.

- $\text{birth\_kernel\_y\_i}$  – Ядро рождения для  $i$ -того вида.
- $\text{birth\_kernel\_r\_i}$  – Длина отрезка на котором считается ядро для  $i$ -того вида.
- $\text{dd\_i\_j}$  – Сила конкуренции, влияние  $i$ -того вида против  $j$ -того вида.
- $\text{death\_kernel\_y\_i\_j}$  – Ядро конкурентной смертности влияние  $i$ -того вида против  $j$ -того вида.
- $\text{death\_kernel\_r\_i\_j}$  – Длина отрезка на котором считается ядро для  $i$ -того вида против  $j$ -того вида.

### 4.3 Алгоритм

Как уже говорилось, для каждой особи храниться смертность, её вид и координаты. Также хранится популяция для каждого вида.

1. При инициализации равномерно расставляются особи каждого вида. Их количество для каждого вида будет равняться произведению начальной плотности и размера области.
2. Рассчитываются смертность для каждой особи.
3. После этого запускается итерации алгоритма. Каждая итерация соответствует одному событию: рождение или смерть особи. Для каждого вида считается суммарная смертность  $D_i$  и суммарная рождаемость  $B_i = P_i \cdot b_i$ , где  $P_i$  – количество особей вида  $i$ .
4. Берётся массив  $\{B_1, D_1, \dots, B_s, D_s\}$ , где  $s$  – количество видов. И выбирается случайно одно из событий, с заданным данным массивом коэффициентами.
5. В случае, если выиграло событие рождения особи вида  $i$ :
  - (a) Выбираем случайную ячейку с коэффициентами равными количеством особей данного вида в ячейке.
  - (b) Выбираем случайную особь данного вида.

- (c) Считаем смещение координат с помощью случайной величины, распределение которой равно  $m_i$ .
  - (d) Если координаты оказываются за пределами области, то в зависимости от граничных условий, либо переносим область на другую сторону, либо не добавляем особь в хранилище.
  - (e) Рассчитываем изменения смертности для остальных особей и смертность для данной особи.
6. В случае, если выиграло событие смерти особи вида  $i$ :
- (a) Выбираем случайную ячейку с коэффициентами равными суммарной смертности особей данного вида в ячейке.
  - (b) Выбираем случайную особь данного вида с коэффициентами равными смертности особей.
  - (c) Убираем данную особь из хранилища.
  - (d) Рассчитываем изменение смертности для остальных особей.
7. Повторяем пункты 3 – 6 пока не пройдёт заданное количество событий.

#### 4.4 Примеры работы

Один из самых показательный пример работы графика отображён на рисунке 4.1. На нём отображено распределение особей на прямой после всех итераций. Динамика  $N$  от количества итераций отображена на рисунке 4.2. Входные параметры выбраны таким образом, что конкурентная смертность особей разных видов на порядок больше, чем влияние особей одного вида друг на друга. Из-за этого особи начинают кластеризовываться, что прекрасно видно на рисунке 4.1.

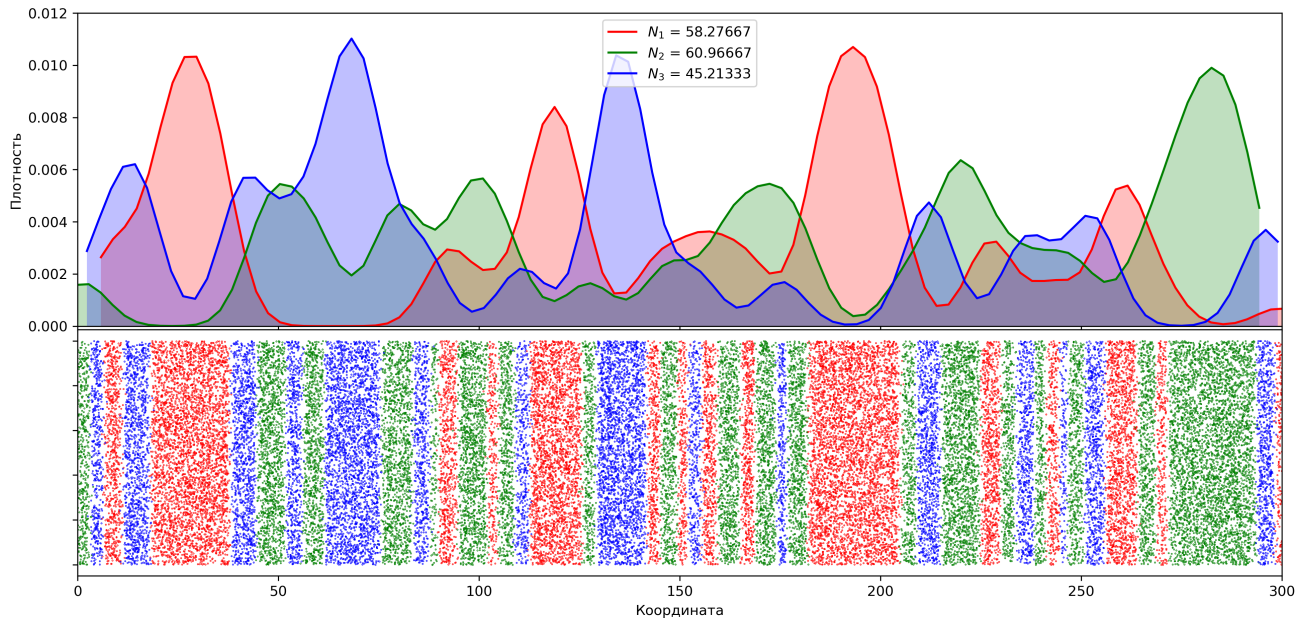


Рисунок 4.1 — Это пример работы трёх видов с заданными параметрами:  $b = (0.4 \ 0.4 \ 0.4)$ ,  $d = (0.2 \ 0.2 \ 0.2)$ ,  $\sigma_m = (0.4 \ 0.4 \ 0.4)$ ,  $d' = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.001 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.001 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_w = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$ . На верхней части графика показаны плотности особей каждого вида. На нижней части показано положение всех особей. По вертикали особи расположены в случайном порядке для улучшения восприятия.

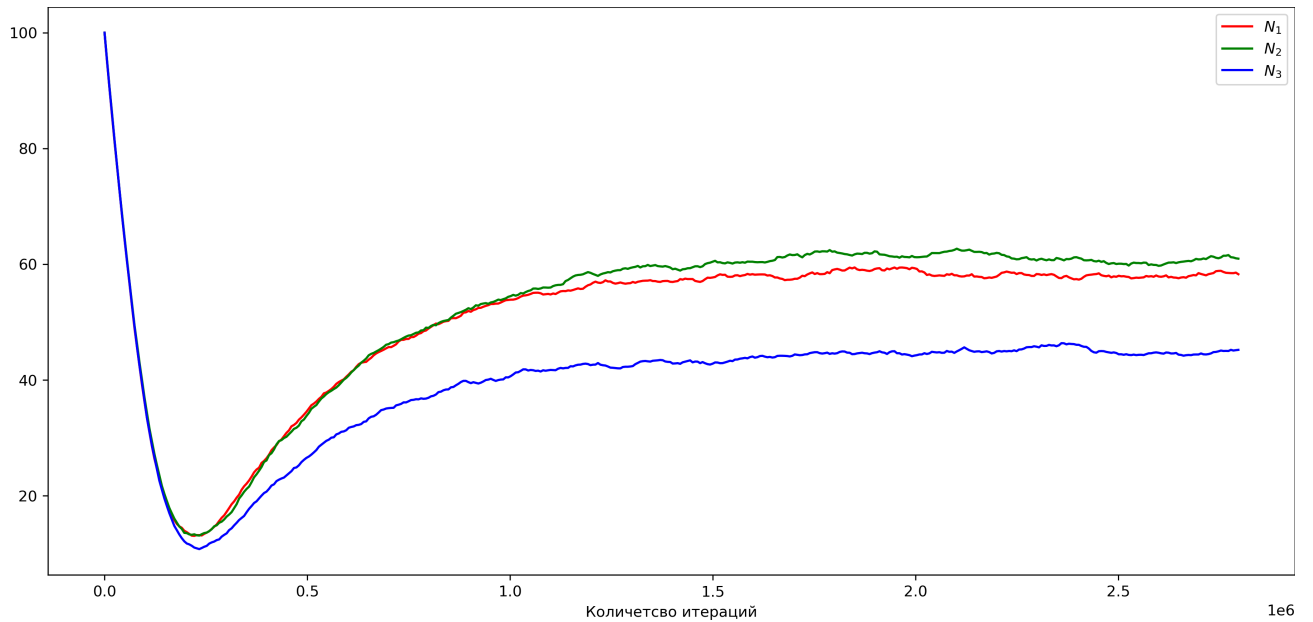


Рисунок 4.2 — Это показывает динамику первых моментов, в зависимости от количества итераций. Рисунок 4.1 показывает отдельных особей на последний момент данного запуска.



## **5 Сравнение численного метода и симуляции**

### **5.1 Достоинства и недостатки методов**

#### **5.1.1 Симуляции**

##### **Достоинства:**

- Симуляции проще программируются, их проще проверить и поэтому им больше доверяют.
- У симуляции отсутствует потребность в трудных аналитических вычислениях.
- Симуляции всегда выдают достаточно правдивый результат.
- Симуляции позволяют посмотреть на расположение особей и как они меняются со временем.

##### **Недостатки:**

- У симуляции очень сложно посчитать второй момент, и его ошибка получается слишком большой, особенно в районе нуля, так как становится слишком мало особей при приближении к расстоянию между ними к нулю.
- Симуляции слишком долго работают. Так же нельзя понять, когда стоит остановить симуляцию. Есть предположение, что можно ожидать, когда изменения будут слишком маленькими. Но у меня есть опасения, что в любой момент, из-за случайности, система может выйти из равновесия.

#### **5.1.2 Численный метод**

##### **Достоинства:**

- Численный метод работает намного быстрее симуляции.
- Численный метод сразу выдаёт и первый и второй момент.

##### **Недостатки:**

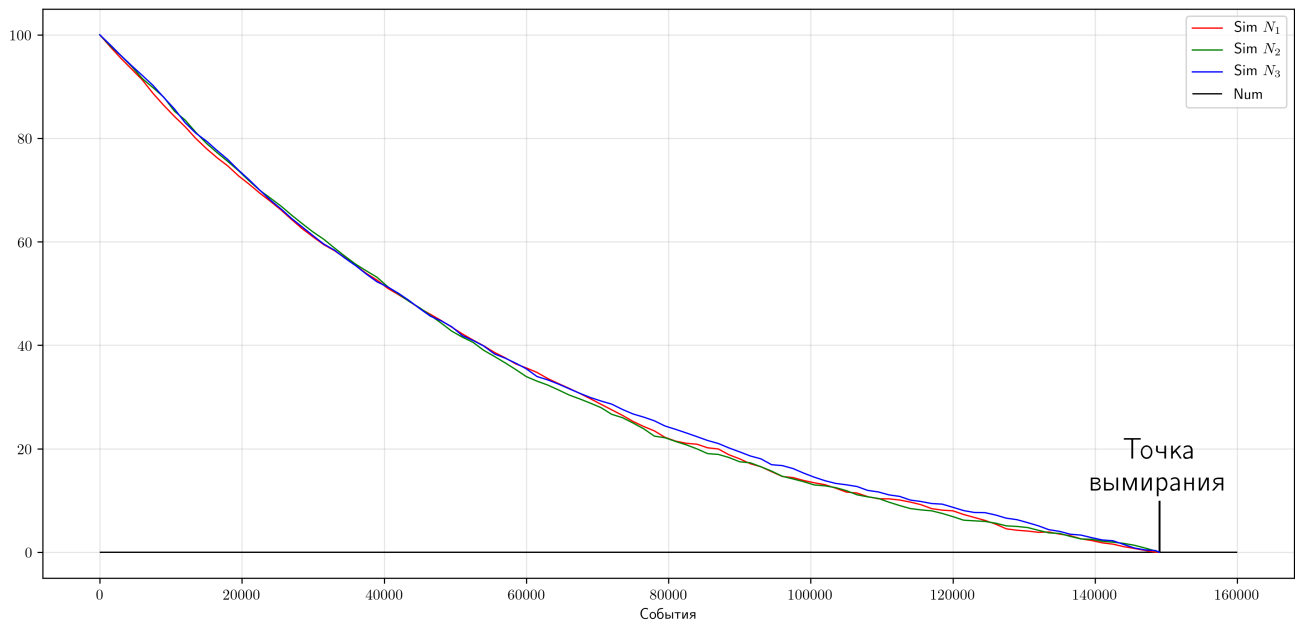


Рисунок 5.1 — Это сравнение численного метода с симуляцией трёх видов с заданными параметрами:  $b = (0.2 \ 0.2 \ 0.2)$ ,  $d = (0.2 \ 0.2 \ 0.2)$ ,  $\sigma_m = (0.04 \ 0.04 \ 0.04)$ ,  $d' = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_w = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \end{pmatrix}$

- Численный метод сильно зависит от входных данных и от математической формулы. Стоит поменять входные данные, и численный метод выдаёт совсем неправильный вариант. Так же очень сильно влияет аналитическая функция на границы того, где численный метод работает.
- Нужны сложные математические вычисления, что бы написать алгоритм и что бы его улучшать.
- Численный метод выдаёт усреднённые результаты, поэтому часто может не совпадать с результатами симуляции.

## 5.2 Сравнение результатов численного метода и симуляции

Для самой простой проверки, достаточно взять маленькое значение рождаемости, что бы все три вида вымерли. Процесс вымирания показан на рисунке 5.1. Численный метод выдаёт только конечное значение, а вот для симуляции можно увидеть, как средняя численность медленно падает, пока все особи не вымирают.

На рисунке 5.2 представлено более сложный пример, когда выживает только один вид из трёх.

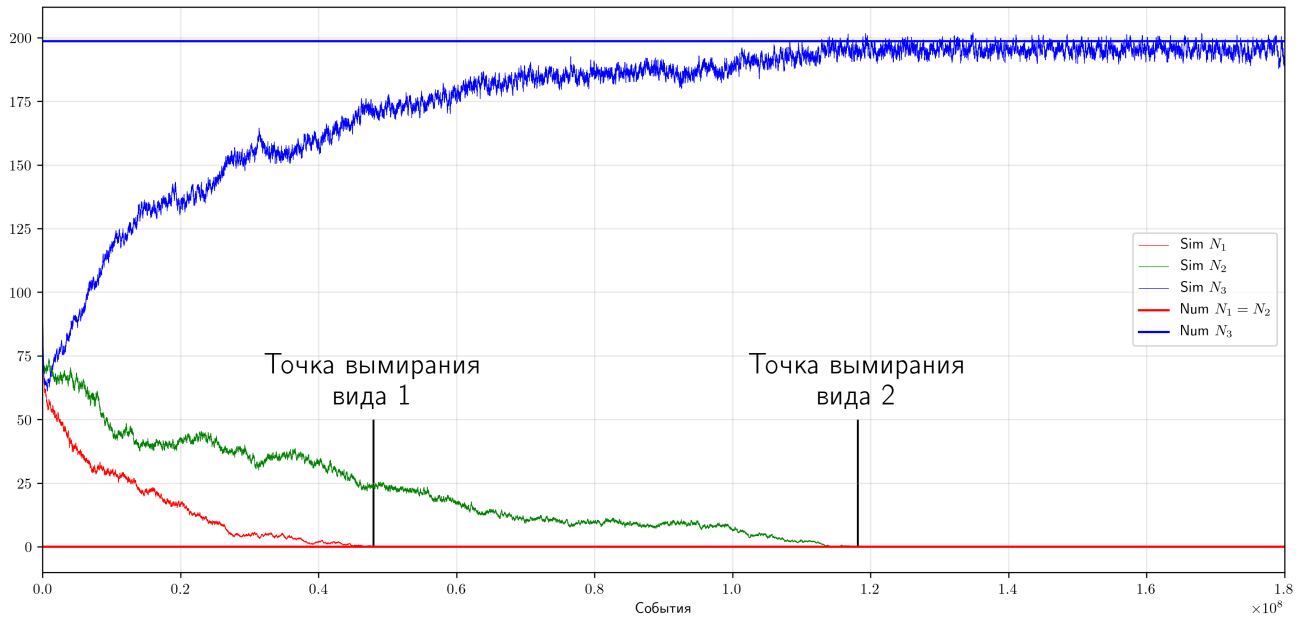


Рисунок 5.2 — Это сравнение численного метода с симуляцией трёх видов с заданными параметрами:  $b = (0.3975 \ 0.3999 \ 0.402)$ ,  $d = (0.201 \ 0.202 \ 0.1999)$ ,  $\sigma_m = (0.04 \ 0.04 \ 0.04)$ ,  $d' = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_w = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \end{pmatrix}$

На рисунке 5.3 представлено сравнение численного метода и симуляции в одной точке. Тут показано, как изменялся первый момент в зависимости от количества прошедших событий. По этому графику можно понять, что симуляции достаточно близко подбираются к численному методу.

Следующий пример, это уже запуск для изменения одного параметра. Было выбрано изменение параметра  $d_{1,2} = d_{2,1}$ . График сравнения значений первого момента представлен на рисунке 5.4.

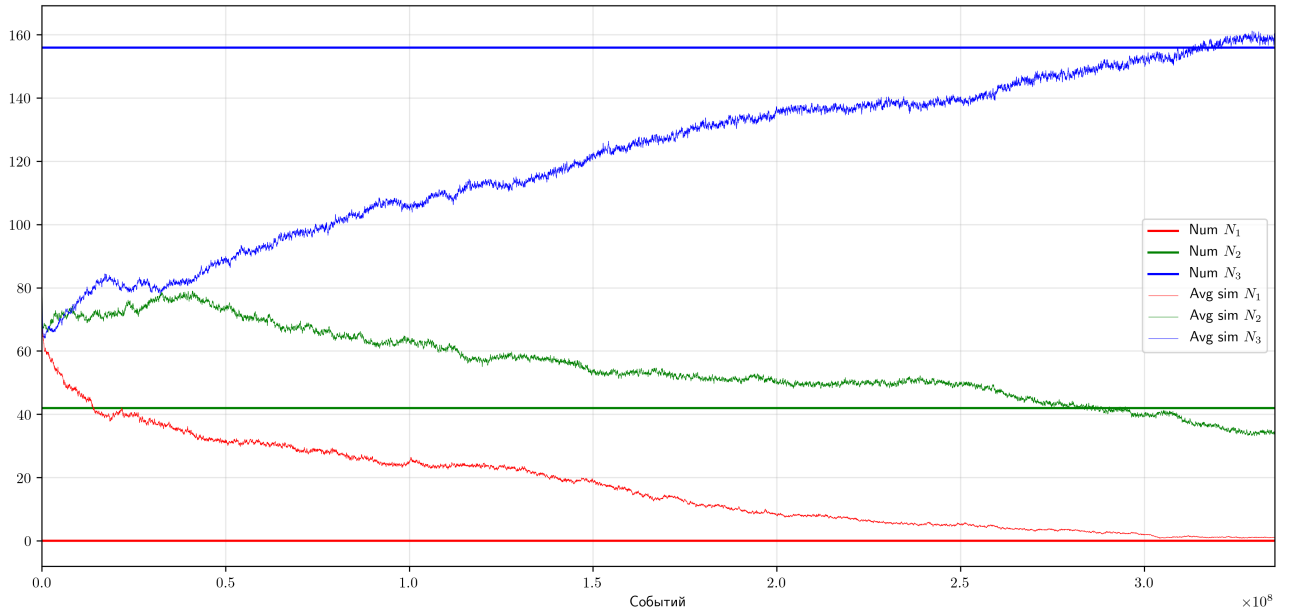


Рисунок 5.3 — Это сравнение численного метода со средним значениям по пяти симуляции трёх видов с заданными параметрами:  $b = (0.399 \ 0.4 \ 0.401)$ ,  $d = (0.2 \ 0.2 \ 0.2)$ ,  $\sigma_m = (0.04 \ 0.04 \ 0.04)$ ,  $d' = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_w = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \end{pmatrix}$

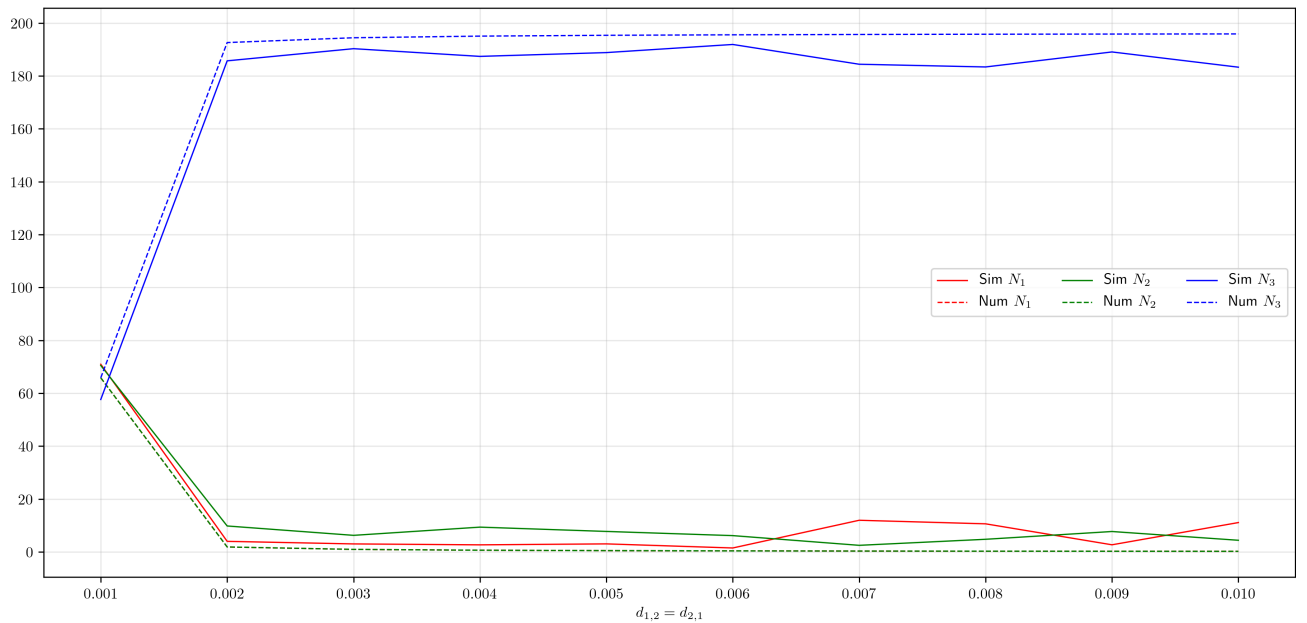


Рисунок 5.4 — Это сравнение численного с симуляциями с изменением влияния конкурентной смертности первого вида на второй и наоборот с заданными параметрами:  $b = (0.4 \ 0.4 \ 0.4)$ ,  $d = (0.2 \ 0.2 \ 0.2)$ ,  $\sigma_m = (0.04 \ 0.04 \ 0.04)$ ,  $d' = \begin{pmatrix} 0.001 & d_{1,2} & 0.001 \\ d_{2,1} & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_w = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 \end{pmatrix}$

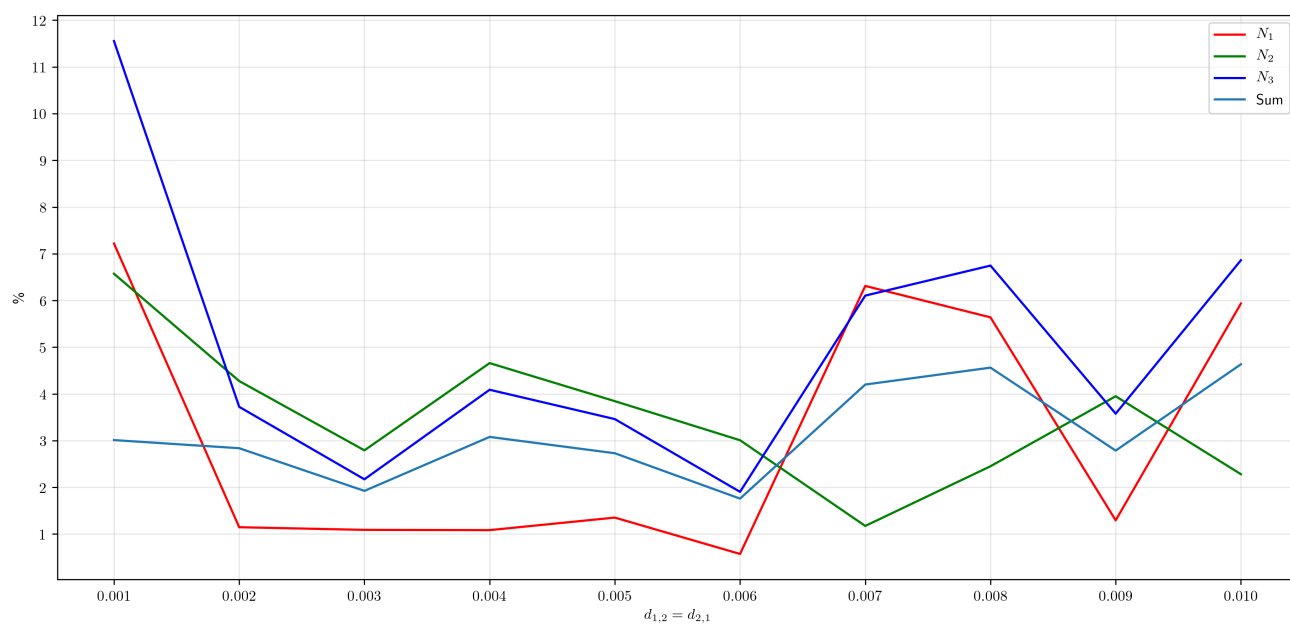


Рисунок 5.5 — Это график ошибки для рисунка 5.4

## 6 Заключение

Настоящая работа была посвящена разработке двух программных комплексов. Первого – для проведения компьютерных симуляций (основанных на процессах Пуассона) трёхвидовой пространственной модели У. Дикмана и Р. Лоу. Второго – для численного (аналитического) анализа данной модели с помощью системы нелинейных интегральных уравнений.

Как показали наши исследования, результаты этих двух подходов на некоторых наборах параметров оказываются достаточно близкими, что может говорить об их адекватности.

Недостатком численного метода является, например, не совсем корректная работа на некоторых наборах биологических параметров. Так, например, иногда численный метод выдаёт отрицательные значения первых пространственных моментов.

В качестве дальнейших исследований могут быть предложены продолжение сравнения численного и симуляционного подходов (на других наборах биологических данных). Кроме того, нам кажется важным распространение всей этой теории на случай пространств больших размерностей, что очень интересует биологов.

## 7 Список литературы

1. *Einstein A.* Strahlungs-Emission und -Absorption nach der Quantentheorie. т. 18. — Friedr. Vieweg & Sohn, 1916. — (Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft).
2. *Steen W.* 1 - industry: an introduction to laser processing and its industrial applications // *Advances in Laser Materials Processing* / под ред. J. Lawrence [и др.]. — Woodhead Publishing, 2010. — с. 3—19. — (Woodhead Publishing Series in Welding and Other Joining Technologies). — ISBN 978-1-84569-474-6. — DOI: <https://doi.org/10.1533/9781845699819.1.3>.
3. *Белоусов Б. П.* Периодически действующая реакция и её механизм // *Автоволновые процессы в системах с диффузией*. — 1951. — с. 76.
4. *Liesegang R. E.* Chemische Reaktionen in Gallerten // *Naturwiss. Wochenschr.* — 1896. — т. 11. — с. 353. — URL: <https://ci.nii.ac.jp/naid/10026547701/en/>.
5. *Getling A.* Rayleigh-Bénard Convection: Structures and Dynamics. — World Scientific, 1998. — (Advanced series in nonlinear dynamics).
6. *Brenner K., Arnold F. H.* Self-Organization, Layered Structure, and Aggregation Enhance Persistence of a Synthetic Biofilm Consortium // *PLOS ONE*. — 2011. — февр. — т. 6, № 2. — с. 1—7. — DOI: 10.1371/journal.pone.0016791. — URL: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0016791>.
7. *Höfer T., Sherratt J. A., Maini P. K.* Dictyostelium discoideum: Cellular Self-Organization in an Excitable Biological Medium // *Proceedings: Biological Sciences*. — 1995. — т. 259, № 1356. — с. 249—257. — ISSN 09628452. — URL: <http://www.jstor.org/stable/50003>.
8. *Huppert A., Katriel G.* Mathematical modelling and prediction in infectious disease epidemiology // *Clinical Microbiology and Infection*. — 2013. — т. 19, № 11. — с. 999—1005. — ISSN 1198-743X. — DOI: <https://doi.org/10.1111/1469-0691.12308>. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1198743X14630019>.
9. *Verhulst P. F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // *Correspondance mathématique et physique*. — 1838. — с. 113—121.

10. *Lotka A.* Elements of Physical Biology. — Williams & Wilkins, 1925. — URL: <http://library.wur.nl/WebQuery/clc/529141>.
11. *Dieckmann U., Law R.* Relaxation Projections and the Method of Moments // Cambridge University Press. — 2000. — c. 412—455.
12. *Murrell D. J., Dieckmann U., Law R.* On moment closures for population dynamics in continuous space // Journal of Theoretical Biology. — 2004. — т. 229, № 3. — c. 421—432. — ISSN 0022-5193. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2004.04.013>. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519304001523>.
13. *Nikitin A., Sacostyanov A.* Nontrivial stationary points of two-species self-structuring communities // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2017. — т. 41, № 3. — c. 122—129.
14. *Egor G., Zelenkov V., Nikitin A.* Computer simulations and numerical methods in two-species models of the spatial community // International Journal of Open Information Technologies. — 2019. — т. 7, № 12.
15. *Raghib M., Hill N. A., Dieckmann U.* A multiscale maximum entropy moment closure for locally regulated space–time point process models of population dynamics // Journal of Mathematical Biology. — 2011. — май. — т. 62, № 5. — c. 605—653. — ISSN 1432-1416. — DOI: [10.1007/s00285-010-0345-9](https://doi.org/10.1007/s00285-010-0345-9). — URL: <https://doi.org/10.1007/s00285-010-0345-9>.
16. *вер. 3.3.7.* — URL: [http://eigen.tuxfamily.org/index.php?title=Main\\_Page](http://eigen.tuxfamily.org/index.php?title=Main_Page).
17. *вер. 2.6.* — URL: <https://www.gnu.org/software/gsl/>.
18. *Müller A.* — *вер. 1.2.2.* — URL: <https://github.com/muellan/clipp>.
19. *Daley D., Vere-Jones D.* An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume II: General Theory and Structure. — Springer New York, 2007. — (Probability and Its Applications). — ISBN 9780387498355.