Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра общей математики

Николаев Михаил Викторович

Исследование системы нелинейных интегральных уравнений, описывающей многовидовое биологическое сообщество

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Никитин А.А.

Москва, 2021

Содержание

1 Введение

1.1 О моделях популяционной динамики

После широкого внедрения аналитического подхода все естественные науки стали весьма тесно связаны с математикой. Сейчас уже невозможно себе представить открытие нового химического соединения, конструирование двигателя или описание фундаментальных физических принципов без использования “царицы наук”. И даже, казалось бы такие далёкие от точных, науки как биология и экология не обходятся без применения математических методов.

За долгое время в сфере биологии было предложено множество различных аналитических моделей, описывающих широкий спектр процессов, начиная с вытеснения одного вида организмов другим и заканчивая предсказанием распространения эпидемий в отдельно взятом сообществе. Особую роль среди математико–биологических моделей играют модели популяционной динамики.

Изначально такого рода модели формулировались в терминах дифференциальных уравнений. Например, широко известно уравнение Томаса Мальтуса, являющееся одной из первых попыток описать динамику развития популяции живых организмов аналитически ([1]):

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N,$$

где под N подразумевается численность вида, а α — некоторая константа. Решение этого уравнения имеет канонический вид $N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)}$, где N_0 — это численность в момент времени t_0. Очевидно, что экспоненциальный закон описывает реальную динамику достаточно неточно. Это в своё время подвигло основателя математичской биологии Альфреда Лотку усложнить модель Мальтуса, введя уравнение ([2])

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{M}\right),$$

где r — положительная константа, задающая потенциальную ёмкость экологической системы, а M — максимально возможная численность вида в рассматриваемом ареале. Решение этого уравнения задаётся уже более сложной функцией (логистической кривой)

$$N(t) = \frac{N_0 M}{N_0 + (M - N_0)e^{-rt}},$$

где N_0 — численность вида в момент $t = 0$. Эта функция дала начало целому ряду моделей популяционной динамики, основанных на логистическом законе. Также широко известна модель Лотки–Вольтерры ([3], [4]), которая является первой попыткой описания динамики сообщества, состоящего из более, чем одного вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = \alpha N_1 - \gamma N_1 N_2, \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -\beta N_2 + \delta N_1 N_2. \end{cases}$$

Здесь N_1, N_2 — численности первого и второго видов соответственно, а α, β, γ и δ — положительные константы, задающие силу внутри- и межвидовых взаимодействий.

Примечательно, что все рассмотренные выше модели имеют общий и довольно серьёзный недостаток: они не учитывают пространственную неоднородность расположения организмов, принимая гипотезу о том, что популяции распределены на ареале обитания равномерно. Такого рода модели иногда называют "хорошо перемешанными". С развитием математической биологии стало ясно, что данный подход не достаточно точно описывает реальные процессы. Это послужило причиной появления моделей, основанных на вкладе каждой особи в динамику в целом (Individual–Based Models — IBM).

Данные модели не подразумевают, что сообщество хорошо перемешано. Более того, они явно учитывают пространственную неоднородность. Это позволяет исследовать влияние таких эффектов как кластеризация на динамику численности. Но за любой прогресс приходится платить. В этом случае платой является резкое усложнение математического аппарата, применяемого для исследований. Многие подобные модели описываются в рамках теории точечных процессов, а одним из основных методов анализа для них является проведение компьютерных симуляций, имитирующих реальный биологический процесс динамики. Однако на поверку оказывается, что наиболее интересные усреднённые характеристики исследуемых сообществ могут быть выражены в виде системы некоторых интегро–дифференциальных уравнений, численное решение которых на порядки быстрее проведения симуляций. Важным вопросом здесь является обоснование такого численного решения: поиск условий, достаточных для того, чтобы система уравнений была разрешима.

1.2 Предмет текущей работы

В рамках данной работы мы будем рассматривать модель типа IBM, предложенную Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу ([12], [13]), которая является обобщением модели Болкера–Пакалы ([11]). Главным предметом исследования является возникающая в рамках модели система нелинейных интегральных уравнений, которая описывает усреднённые характеристики многовидового сообщества, находящегося в состоянии равновесия (отсутствия динамики во времени). Системы подобного рода уже изучались прежде, но анализ проводился либо исключительно численно ([19], [20], [22]), либо рассматривался случай одного вида ([16], [17], [23], [24]). Аналитическое исследование многовидового случая, а также вывод системы уравнений динамики вышеупомянутых статистических величин в общем виде проводятся впервые. Важно отметить, что используемый в рамках работы подход позволяет исследовать вопрос о существовании равновесия сообщества, состоящего из любого количества видов, ранее рассматривались максимум двухвидовые случаи ([21]).

Основной задачей работы является нахождение условий, достаточных для того, чтобы анализируемая система уравнений имела нетривиальные решения. С этой целью система переписывается в виде одного операторного уравнения, сформулированного в рамках декартовой степени некоторого специального банахова пространства. Подобный подход позволяет применить теорию неподвижных точек операторов, чтобы обосновать существование решения исходной системы. Кроме того, в работе проводится анализ непрерывности решения по некоторым исходным параметрам.

2 Описание модели биологических сообществ

2.1 Локальные характеристики

Модель Дикмана–Лоу позволяет описывать сообщества неподвижных живых организмов. Примерами таких сообществ являются популяции растений, грибов или некоторых видов фитопланктона (планктон может перемещаться, однако только из-за того, что движется слой воды, в котором он находится, так что мы можем считать, что относительно среды обитания планктон остаётся в покое). Время в модели непрерывно, а всевозможные события, которые могут происходить, сводятся к рождению новых и смерти существующих особей. Эти события происходят мгновенно, а любой индивид способен к размножению сразу после рождения. При этом вероятность того, что два события произойдут одновременно равна нулю. Рассмотрим данную модель подробнее.

Пусть на некотором ареале обитания A, который является областью в пространстве $\mathbb{R}^N$, сосуществуют n видов. Мы будем обозначать каждый из этих видов натуральным числом из диапазона $\overline{1,n}$. Каждая особь сообщества рассматривается как математическая точка, при этом постулируется, что никакие два индивида не находятся в одной и той же точке пространства. Для отдельно взятого представителя вида i вводятся следующие случайные величины:

- $\tau_d^i \sim \mathrm{Exp}(d_i)$ — время жизни, распределённое экспоненциально с неотрицательным параметром d_i,
- $\tau_b^i \sim \mathrm{Exp}(b_i)$ — время до рождения нового индивида рассматриваемой особью, распределённое экспоненциально с положительным параметром b_i.

Параметры d_i и b_i имеют биологический смысл гомогенного уровня неблагоприятных условий среды и плодовитости для вида i соответственно.

Пространственная структура распределения особей задаётся следующим образом. Введём класс функций

$$K(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \|f\|_{L_1} = 1;\ f(x) = F\Big(\|x\|_{\mathbb{R}^N}\Big) :\ F \geqslant 0,\ \lim_{r\to+\infty} F(r) = 0 \right\}. \quad (2.1)$$

Выберем совокупность так называемых ядер разброса

$$m_i \in K(\mathbb{R}^N) \bigcap C(\mathbb{R}^N) \quad i = \overline{1, n}$$

и ядер конкуренции

$$w_{ij} \in K(\mathbb{R}^N) \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}.$$

Ядра разброса задают положение порождаемого индивида. Конкретно, точка появления потомка особи вида i, находящейся в точке $x_0 \in A$, является случайной величиной

$$\xi^i_{x_0} \sim m_i(x - x_0),$$

то есть величиной с плотностью вероятности $m_i(x - x_0)$. Ядра конкуренции, в свою очередь, определяют пространственную структуру смертности индивидов от взаимодействия с другими особями (своего или чужого вида). Конкретно, время до смерти особи вида i, находящейся в точке x_0, от конкуренции с особью вида j, находящейся в точке x_1, задаётся случайной величиной

$$\tau^{ij}_c \sim \mathrm{Exp}\big(s_{ij} w_{ij}(x_0 - x_1)\big),$$

где числа s_{ij} — неотрицательные константы, определяющие агрессивность вида i по отношению к виду j.

2.2 Пространственные моменты и их динамика

2.2.1 Определение пространственных моментов

Описанные локальные характеристики модели определяют её полностью, но с ними неудобно работать напрямую. Применим теорию точечных процессов для того, чтобы описать глобальные свойства.

Будем обозначать за X^i_t случайный точечный процесс, описывающий динамику распределения особей вида i. Говоря конкретнее, случайное множество X^i_t содержит в себе положение всех представителей вида i в момент времени t. Отметим, что рассмотренные выше функциональные параметры модели (ядра) гомогенны в том смысле, что их конкретный вид не зависит от точки, в которой находится рассматриваемая особь. Учитывая это, а также принимая во внимание тот факт, что параметры b_i, d_i и s_{ij} также не зависят от пространственных координат, можно считать распределение особей на ареале обитания не зависящим от сдвига и поворота области A в пространстве $\mathbb{R}^N$. Иными словами, каждый из рассматриваемых точечных процессов стационарен. Далее мы считаем, что $A = \mathbb{R}^N$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$. Будем обозначать за $N^i_t(D)$ количество особей вида i в момент времени t во множестве D. То есть

$$N_t^i(D) = \sum_{x \in X_t^i \bigcap D} 1. \tag{2.2}$$

Ясно, что эта величина является случайной, поэтому имеет смысл говорить, например, о её математическом ожидании, которое несёт смысл среднего количества представителей вида i в момент времени t в области D. Используя данную идею, можно попытаться ввести усреднённые характеристики, описывающие ожидаемое количество пар, троек или каких-либо других произвольных наборов особей, находящихся в конкретной области в конкретное время. Таким образом, мы перейдём от трудно анализируемых случайных величин к более простым детерминированным характеристикам сообщества, несущим конкретный биологический смысл.

Определение 2.1. *Диаметром множества $D \subset \mathbb{R}^N$ называется величина*

$$\operatorname{diam}(D) = \sup_{\substack{x \in D \\ y \in D}} \|x - y\|_{\mathbb{R}^N}.$$

Замечание 2.1. *Очевидно, что при стремлении к нулю диметра измеримого множества, его мера также стремится к нулю.*

Определение 2.2. *Мы будем говорить, что система множеств $\left\{D_r \subset \mathbb{R}^N\right\}_{r>0}$ стягивается в точку $x \in \mathbb{R}^N$ при $r \to 0+0$, если*

1. $\forall r > 0 \quad x \in \overline{D_r}$,
2. $\operatorname{diam}(D_r) \xrightarrow[r \to 0+0]{} 0.$

Определение 2.3. *Пусть некоторая числовая величина $f = f(D)$ является функцией от множества. Мы будем называть число $y \in \mathbb{R}$ пределом f при стягивании D в точку $x \in \mathbb{R}^N$, если для любой системы множеств $\left\{D_r \subset \mathbb{R}^N\right\}_{r>0}$, стягивающейся в x, верно*

$$f(D_r) \xrightarrow[r \to 0+0]{} y.$$

При этом мы будем обозначать

$$y = \lim_{D \to x} f(D).$$

Определение 2.4. *Мы будем называть пространственным моментом порядка k величину*

$$\widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = \lim_{\substack{D_1 \to x_1 \\ D_2 \to x_2 \\ \ldots \\ D_k \to x_k}} \frac{\mathbb{E}\Big(N_t^{i_1}(D_1) N_t^{i_2}(D_2) \cdot \ldots \cdot N_t^{i_k}(D_k)\Big)}{\mu(D_1)\mu(D_2) \cdot \ldots \cdot \mu(D_k)},$$

при условии, что все точки $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k \in \mathbb{R}^N$ различны. В случае совпадающих точек пространственный момент считается по определению равным нулю.

Замечание 2.2. *Исходя из определения, можно заключить, что, если*

$$(1, 2, \ldots, k) \to (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$$

некоторая перестановка набора $\overline{1, k}$, то

$$\widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = \widetilde{M}_{i_{\nu_1} i_{\nu_2} \ldots i_{\nu_k}}(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_k}, t).$$

Замечание 2.3. *Поскольку рассматриваемые процессы являются стационарными, то есть поворот и параллельный перенос не влияют на распределение особей, то*

$$\widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\theta, x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1, t)$$

где θ — начало координат в $\mathbb{R}^N$. Поэтому мы можем ввести дополнительные обозначения для пространственных моментов

$$M_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, t) = \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\theta, x_1, \ldots, x_{k-1}, t),$$

уменьшив тем самым количество пространственных переменных на единицу. Из этого, в частности, следует, что первый пространственный момент зависит только от времени.

Введённые величины имеют смысл некоторых статистических характеристик многовидового сообщества, усреднённых по всевозможным реализациям точечных процессов, описывающих распределение индивидов. Так, первый момент $M_i(t)$ описывает среднюю плотность вида i к моменту времени t, а второй момент $M_{ij}(x, t)$ отражает среднюю плотность пар особей в момент времени t, в которых первый индивид является представителем вида i, а второй — вида j и сдвинут относительно первого на вектор x.

Весьма интересен с биологической точки зрения вопрос о поведении пространственных моментов при увеличении расстояния между рассматриваемыми точками пространства. Ядра разброса и конкуренции стремятся к нулю на бесконечности. Это означает, что вероятность появления потомка конкретной особи на большом удалении от неё мала. Аналогично вероятность смерти особи от индивида, находящегося от неё на большом расстоянии, также мала. Рассмотрим некоторые области D_1 и D_2 в $\mathbb{R}^N$ и начнём увеличивать расстояние между ними. При этом, исходя из сказанного выше, особи из D_1 будут всё меньше конкурировать с особями из D_2, а вероятность попадания потомков индивидов из D_1 в D_2 будет стремиться к нулю. Иными словами, особи из D_1 будут всё меньше влиять на численность организмов в D_2. Очевидно, особи из D_2 также будут оказывать всё менее существенное влияние на численность индивидов в D_1. Таким образом, случайные величины $N_t^i(D_1)$ и $N_t^j(D_2)$ становятся независимыми при увеличении расстояния между D_1 и D_2. Однако, как известно, математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Эти рассуждения позволяют нам сформулировать следующий факт.

Замечание 2.4. *Пусть*

$$\rho = \min_{\substack{p=\overline{1,k}\\ q=\overline{1,k}\\ p\neq q}} \|x_p - x_q\|_{\mathbb{R}^N},$$

тогда

$$\lim_{\rho\to+\infty} \widetilde{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1, x_2, \dots, x_k, t) = \widetilde{M}_{i_1}(t)\widetilde{M}_{i_2}(t) \cdot \ldots \cdot \widetilde{M}_{i_k}(t).$$

Поскольку пространственные моменты зависят от времени, имеет смысл говорить об их динамике. Следующей целью будет вывод интегро–дифференциальных уравнений, описывающих изменение моментов во времени.

2.2.2 Динамика первых моментов

Замечание 2.5. *В дальнейших выкладках запись вида $\overline{o}(\delta t)$ будет обозначать величину, обладающую свойством*

$$\lim_{\delta t\to 0+0} \frac{\overline{o}(\delta t)}{\delta t} = 0,$$

а под $\overline{o}_{\delta t}(1)$ будет подразумеваться величина, стремящаяся к нулю при $\delta t \to 0+0$.

Пусть D — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ малой меры $\mu(D)$, а δt — некоторый малый промежуток времени. Напомним, время до рождения новой особи вида i распределено по экспоненциальному закону с параметром b_i, при этом положение потомка является случайной величиной с плотностью вероятности $m_i(x - x_0)$, где m_i — ядро разброса вида i, а x_0 — положение родителя. Поэтому вероятность того, что представитель вида i, находящийся в точке x, породит новую особь в точке $y \in D$ за промежуток времени δt, равна $\delta t \cdot b_i m_i(y - x) + \overline{o}(\delta t)$. Просуммируем последнее выражение по всем представителям и получим вероятность появления новой особи вида i в точке $y \in D$ в период времени между t и $t + \delta t$:

$$p^i_+(y, \delta t) = \delta t \sum_{x\in X^i_t} b_i m_i(y - x) + \overline{o}(\delta t).$$

Остаётся лишь проинтегрировать данное представление по всем точкам y области D, чтобы получить вероятность рождения нового организма вида i в D в промежуток времени $[t; t + \delta t]$:

$$p^i_+(D, \delta t) = \int_D p^i_+(y, \delta t)\, dy = \delta t \sum_{x\in X^i_t} \int_D b_i m_i(y - x)\, dy + \mu(D)\overline{o}(\delta t).$$

Исходя из тех же соображений, выведем вероятность смерти особи вида i, находящейся в D, в период $[t; t + \delta t]$ с учётом конкуренции и естественной смертности. Время жизни индивида распределено экспоненциально с параметром d_i, поэтому вероятность того, что он умрёт за время δt, равна $\delta t \cdot d_i + \overline{o}(\delta t)$. Время до смерти особи вида i, расположенной в точке $x \in D$, от конкуренции с представителем вида j, находящимся в точке $y \in \mathbb{R}^N$, также распределено экспоненциально, однако уже с параметром $s_{ij} w_{ij}(x-y)$, то есть вероятность смерти рассматриваемого индивида от взаимодействия с конкурентом за промежуток времени δt равна $\delta t \cdot s_{ij} w_{ij}(x-y) + \overline{o}(\delta t)$. Поскольку нас интересует конкуренция со всеми членами многовидового сообщества, нам необходимо просуммировать данное выражение по всем видам j и по всем представителям вида j, исключая, однако, из рассмотрения конкуренцию особи самой с собой. В итоге, суммарная вероятность смерти рассмотренного выше организма имеет форму

$$p_-^i(x, \delta t) = \delta t \left(d_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{y \in X_t^j \\ y \neq x}} s_{ij} w_{ij}(x-y) \right) + \overline{o}(\delta t).$$

Как и ранее, теперь нам необходимо проинтегрировать полученную формулу по всей области D. При выполнении данной операции учтём, что, если в некоторой точке $x \in D$ в момент времени t не было особи вида i, то величина $p_-^i(x, \delta t)$, очевидно, равна нулю, поэтому вместо интеграла мы получим сумму по всем особям вида i в области D в момент времени t. Таким образом,

$$p_-^i(D, \delta t) = \int\limits_D p_-^i(x, \delta t)\, dx = \delta t \sum_{x \in X_t^i \bigcap D} \left(d_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{y \in X_t^j \\ y \neq x}} s_{ij} w_{ij}(x-y) \right) + N_t^i(D)\overline{o}(\delta t).$$

Рассмотрим случайную величину $\Delta_{\delta t} N_t^i(D) = N_{t+\delta t}^i(D) - N_t^i(D)$, показывающую изменение численности вида i в области D за время δt. Ясно, что она тем больше, чем больше особей вида i родилось, и тем меньше, чем больше особей вида i умерло. Таким образом, её можно представить в виде следующей разности

$$\begin{aligned} \Delta_{\delta t} N_t^i(D) =& p_+^i(D, \delta t) - p_-^i(D, \delta t) = \\ =& \delta t \left(\sum_{x \in X_t^i} \int\limits_D b_i m_i(y-x)\, dy - \sum_{x \in X_t^i \bigcap D} \left(d_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{y \in X_t^j \\ y \neq x}} s_{ij} w_{ij}(x-y) \right) \right) + \\ & + \big(\mu(D) - N_t^i(D)\big)\overline{o}(\delta t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Разделим последнее равенство на $\mu(D)\delta t$ и возьмём математическое ожидание от обеих частей. Получим

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}\big(\Delta_{\delta t} N_t^i(D)\big)}{\mu(D)\delta t} &= \mathbb{E}\sum_{x\in X_t^i}\frac{\int\limits_D b_i m_i(y-x)\,dy}{\mu(D)}-\\ &-\frac{1}{\mu(D)}\mathbb{E}\sum_{x\in X_t^i\bigcap D} d_i-\\ &-\frac{1}{\mu(D)}\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n}\sum_{x\in X_t^i\bigcap D}\sum_{\substack{y\in X_t^j\\ y\neq x}} s_{ij}w_{ij}(x-y)+\\ &+\left(1-\mathbb{E}\frac{N_t^i(D)}{\mu(D)}\right)\overline{o}_{\delta t}(1).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь первое слагаемое соответствует вкладу рождаемости в изменение численности, второе — вкладу естественной смертности, а третье — вкладу конкурентной смертности. Устремим диаметр области D к нулю, стягивая её в некоторую точку $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Тогда мера этой области также устремится к нулю, поэтому, поскольку ядра m_i непрерывны,

$$\frac{\int\limits_D b_i m_i(y-x)\,dy}{\mu(D)} \xrightarrow[D\to x_0]{} b_i m_i(x_0-x). \tag{2.5}$$

Кроме того, исходя из представления (2.2), задающего явный вид величины $N_t^i(D)$, получаем

$$\sum_{x\in X_t^i\bigcap D} d_i = d_i\sum_{x\in X_t^i\bigcap D} 1 = d_i N_t^i(D), \tag{2.6}$$

поэтому по определению пространственного момента

$$\frac{1}{\mu(D)}\mathbb{E}\sum_{x\in X_t^i\bigcap D} d_i = d_i\frac{\mathbb{E}N_t^i(D)}{\mu(D)} \xrightarrow[D\to x_0]{} d_i\widetilde{M}_i(x_0,t).$$

В свою очередь,

$$\frac{\mathbb{E}\big(\Delta_{\delta t} N_t^i(D)\big)}{\mu(D)\delta t} = \frac{\mathbb{E}N_{t+\delta t}^i(D)}{\mu(D)\delta t} - \frac{\mathbb{E}N_t^i(D)}{\mu(D)\delta t} \xrightarrow[D\to x_0]{} \frac{\widetilde{M}_i(x_0,t+\delta t)-\widetilde{M}_i(x_0,t)}{\delta t}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{M}_i(x_0,t+\delta t)-\widetilde{M}_i(x_0,t)}{\delta t} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} b_i m_i(x_0-x)\widetilde{M}_i(x,t)\,dx-\\ &-d_i\widetilde{M}_i(x_0,t)-\\ &-\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^N} s_{ij}w_{ij}(x_0-y)\widetilde{M}_{ij}(x_0,y,t)\,dy+\\ &+\Big(1-\widetilde{M}_i(x_0,t)\Big)\overline{o}_{\delta t}(1).\end{aligned}$$

Поскольку $1 - \widetilde{M}_i(x_0, t)$ не зависит от δt, то

$$\left(1 - \widetilde{M}_i(x_0, t)\right) \overline{o}_{\delta t}(1) = \overline{o}_{\delta t}(1).$$

Воспользовавшись также альтернативной формой записи пространственных моментов из замечания 2.3 и радиальной симметричностью ядер, приходим к следующему выражению:

$$\frac{M_i(t+\delta t) - M_i(t)}{\delta t} = b_i M_i(t) \int\limits_{\mathbb{R}^N} m_i(x)\, dx - d_i M_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} s_{ij} w_{ij}(y) M_{ij}(y, t)\, dy + \overline{o}_{\delta t}(1).$$

Устремляя δt к нулю и учитывая, что $\int\limits_{\mathbb{R}^N} m_i(x)\, dx = 1$, получим уравнения динамики первых пространственных моментов n-видового биологического сообщества:

$$\frac{dM_i}{dt}(t) = (b_i - d_i) M_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} s_{ij} w_{ij}(y) M_{ij}(y, t)\, dy, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.7}$$

2.2.3 Общий вид уравнений динамики

Применяя аналогичные рассуждения, можно вывести уравнения динамики пространственного момента любого порядка. Рассмотрим k замкнутых ограниченных непересекающихся конгруэнтных областей $D_1, D_2, \ldots, D_k$ в $\mathbb{R}^N$ малого размера, а также малый промежуток времени δt. Введём случайную величину

$$\Delta = N^{i_1}_{t+\delta t}(D_1) N^{i_2}_{t+\delta t}(D_2) \cdot \ldots \cdot N^{i_k}_{t+\delta t}(D_k) - N^{i_1}_t(D_1) N^{i_2}_t(D_2) \cdot \ldots \cdot N^{i_k}_t(D_k).$$

Добавляя и вычитая вспомогательные слагаемые, получим

$$\begin{aligned}
\Delta = & N^{i_1}_{t+\delta t}(D_1) N^{i_2}_{t+\delta t}(D_2) \cdot \ldots \cdot N^{i_k}_{t+\delta t}(D_k) - N^{i_1}_t(D_1) N^{i_2}_{t+\delta t}(D_2) \cdot \ldots \cdot N^{i_k}_{t+\delta t}(D_k) + \\
& + N^{i_1}_t(D_1) N^{i_2}_{t+\delta t}(D_2) \cdot \ldots \cdot N^{i_k}_{t+\delta t}(D_k) - N^{i_1}_t(D_1) N^{i_2}_t(D_2) \cdot \ldots \cdot N^{i_k}_{t+\delta t}(D_k) + \\
& + \ldots + \\
& + N^{i_1}_t(D_1) N^{i_2}_t(D_2) \cdot \ldots \cdot N^{i_k}_{t+\delta t}(D_k) - N^{i_1}_t(D_1) N^{i_2}_t(D_2) \cdot \ldots \cdot N^{i_k}_t(D_k) = \\
= & \sum_{p=1}^{k} \prod_{q=1}^{p-1} N^{i_q}_{t+\delta t}(D_q) \cdot \Delta_{\delta t} N^{i_p}_t(D_p) \cdot \prod_{q=p+1}^{k} N^{i_q}_t(D_q) = \\
= & \sum_{p=1}^{k} \prod_{q=1}^{p-1} \left(N^{i_q}_t(D_q) + \Delta_{\delta t} N^{i_q}_t(D_q)\right) \cdot \Delta_{\delta t} N^{i_p}_t(D_p) \cdot \prod_{q=p+1}^{k} N^{i_q}_t(D_q).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Определение 2.5. *Пусть D — некоторая область в $\mathbb{R}^N$. Мы будем обозначать за $\underline{O}(D)$ некоторую функцию от D, для которой существует такая константа C, что выполнено следующее условие:*

$$\varlimsup_{\operatorname{diam}(D) \to 0+0} \frac{\underline{O}(D)}{\mu(D)} \leqslant C.$$

Явное представление (2.3) для величин вида $\Delta_{\delta t} N_t^{i_q}(D_q)$ позволяет заключить, что

$$\Delta_{\delta t} N_t^{i_q}(D_q) = \delta t \left(\sum_{x \in X_t^{i_q}} \int_{D_q} b_{i_q} m_{i_q}(y-x)\,dy - \sum_{x \in X_t^{i_q} \bigcap D_q} \left(d_{i_q} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{y \in X_t^j \\ y \neq x}} s_{i_q j} w_{i_q j}(x-y) \right) \right) +$$
$$+ \big(\mu(D_q) - N_t^{i_q}(D_q)\big)\overline{o}(\delta t) = \delta t \cdot \underline{O}(D_q) + \underline{O}(D_q)\overline{o}(\delta t) = \underline{O}(D_q) \cdot \big(\delta t + \overline{o}(\delta t)\big).$$

Учтём также, что $N_t^{i_q}(D_q)$ является $\underline{O}(D_q)$. Это следует из того факта, что в одной точке пространства не могут находиться несколько особей одновременно, поэтому невозможен такой вариант, что при стремлении диаметра области D_q к нулю количество представителей вида i_q в D_q неограниченно растёт относительно меры рассматриваемой области. Значит,

$$\prod_{q=1}^{p-1} \Big(N_t^{i_q}(D_q) + \Delta_{\delta t} N_t^{i_q}(D_q) \Big) = \prod_{q=1}^{p-1} N_t^{i_q}(D_q) + \underline{O}(D_1) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_{p-1})\big(\delta t + \overline{o}(\delta t)\big).$$

Подставляя последнее выражение в (2.8), получаем

$$\Delta = \sum_{p=1}^{k} \prod_{q=1}^{p-1} N_t^{i_q}(D_q) \cdot \Delta_{\delta t} N_t^{i_p}(D_p) \cdot \prod_{q=p+1}^{k} N_t^{i_q}(D_q) +$$
$$+ \sum_{p=1}^{k} \underline{O}(D_1) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_{p-1})\big(\delta t + \overline{o}(\delta t)\big) \cdot \Delta_{\delta t} N_t^{i_p}(D_p) \cdot \prod_{q=p+1}^{k} N_t^{i_q}(D_q) =$$
$$= \sum_{p=1}^{k} \Delta_{\delta t} N_t^{i_p}(D_p) \cdot \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} N_t^{i_q}(D_q) +$$
$$+ \sum_{p=1}^{k} \underline{O}(D_1) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_{p-1})\big(\delta t + \overline{o}(\delta t)\big) \cdot \underline{O}(D_p)\big(\delta t + \overline{o}(\delta t)\big) \cdot \underline{O}(D_{p+1}) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_k) =$$
$$= \sum_{p=1}^{k} \Delta_{\delta t} N_t^{i_p}(D_p) \cdot \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} N_t^{i_q}(D_q) + \underline{O}(D_1)\underline{O}(D_2) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_k) \sum_{p=1}^{k} \big(\delta t + \overline{o}(\delta t)\big)\big(\delta t + \overline{o}(\delta t)\big).$$

Окончательно:

$$\Delta = \sum_{p=1}^{k} \Delta_{\delta t} N_t^{i_p}(D_p) \cdot \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} N_t^{i_q}(D_q) + \underline{O}(D_1)\underline{O}(D_2) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_k)\overline{o}(\delta t). \qquad (2.9)$$

Таким образом, основной вклад в Δ вносят величины, равные изменению численности вида i_p, умноженному на произведение численностей остальных видов в начальный момент времени, остальное пренебрежимо мало при стремлении δt к нулю. Воспользуемся выражением (2.3), чтобы переписать (2.9) в явном виде:

$$\Delta = \sum_{p=1}^{k} \delta t \left(\sum_{x \in X_t^{i_p}} \int\limits_{D_p} b_{i_p} m_{i_p}(y-x)\, dy - \sum_{x \in X_t^{i_p} \bigcap D_p} \left(d_{i_p} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{y \in X_t^j \\ y \neq x}} s_{i_p j} w_{i_p j}(x-y) \right) \right) \times$$
$$\times \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} N_t^{i_q}(D_q) +$$
$$+ \underline{O}(D_1)\underline{O}(D_2) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_k)\overline{o}(\delta t).$$

После раскрытия скобок имеем

$$\Delta = \delta t \sum_{p=1}^{k} \sum_{x \in X_t^{i_p}} \int\limits_{D_p} b_{i_p} m_{i_p}(y-x)\, dy \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} N_t^{i_q}(D_q) -$$
$$- \delta t \sum_{p=1}^{k} \sum_{x \in X_t^{i_p} \bigcap D_p} d_{i_p} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} N_t^{i_q}(D_q) -$$
$$- \delta t \sum_{p=1}^{k} \sum_{x \in X_t^{i_p} \bigcap D_p} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{y \in X_t^j \\ y \neq x}} s_{i_p j} w_{i_p j}(x-y) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} N_t^{i_q}(D_q) +$$
$$+ \underline{O}(D_1)\underline{O}(D_2) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_k)\overline{o}(\delta t).$$

Применяя выражение (2.6) для упрощения второй группы слагаемых, получим

$$\Delta = \delta t \sum_{p=1}^{k} \sum_{x \in X_t^{i_p}} \int\limits_{D_p} b_{i_p} m_{i_p}(y-x)\, dy \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} N_t^{i_q}(D_q) -$$
$$- \delta t \sum_{p=1}^{k} d_{i_p} \prod_{q=1}^{k} N_t^{i_q}(D_q) -$$
$$- \delta t \sum_{p=1}^{k} \sum_{x \in X_t^{i_p} \bigcap D_p} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{y \in X_t^j \\ y \neq x}} s_{i_p j} w_{i_p j}(x-y) \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} N_t^{i_q}(D_q) +$$
$$+ \underline{O}(D_1)\underline{O}(D_2) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_k)\overline{o}(\delta t).$$

Теперь разделим обе части полученного уравнения на $\mu(D_1)\mu(D_2) \cdot \ldots \cdot \mu(D_k)\delta t$. В силу определения $\underline{O}(D_1),\ \ldots,\ \underline{O}(D_k)$

$$\frac{\underline{O}(D_1)\underline{O}(D_2) \cdot \ldots \cdot \underline{O}(D_k)\overline{o}(\delta t)}{\mu(D_1)\mu(D_2) \cdot \ldots \cdot \mu(D_k)\delta t} = \overline{o}_{\delta t}(1),$$

при этом стремление диаметров рассматриваемых областей к нулю не влияет на асимптотику данной величины. Этот факт будет использован позже для перехода к пределу при стягивании областей в точки. Приходим к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{\mu(D_1)\mu(D_2)\cdot\ldots\cdot\mu(D_k)\delta t} &= \sum_{p=1}^{k}\sum_{x\in X_t^{i_p}}\frac{\int\limits_{D_p} b_{i_p}m_{i_p}(y-x)\,dy}{\mu(D_p)}\prod_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}-\\&-\sum_{p=1}^{k}d_{i_p}\prod_{q=1}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}-\\&-\sum_{p=1}^{k}\sum_{x\in X_t^{i_p}\bigcap D_p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{y\in X_t^j\\y\neq x}}\frac{s_{i_pj}w_{i_pj}(x-y)}{\mu(D_p)}\prod_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}+\\&+\overline{o}_{\delta t}(1),\end{aligned}$$

которое после взятия математического ожидания переходит в

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}\Delta}{\mu(D_1)\mu(D_2)\cdot\ldots\cdot\mu(D_k)\delta t} &= \mathbb{E}\sum_{p=1}^{k}\sum_{x\in X_t^{i_p}}\frac{\int\limits_{D_p} b_{i_p}m_{i_p}(y-x)\,dy}{\mu(D_p)}\prod_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}-\\&-\mathbb{E}\sum_{p=1}^{k}d_{i_p}\prod_{q=1}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}-\\&-\mathbb{E}\sum_{p=1}^{k}\sum_{x\in X_t^{i_p}\bigcap D_p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{y\in X_t^j\\y\neq x}}\frac{s_{i_pj}w_{i_pj}(x-y)}{\mu(D_p)}\prod_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}+\\&+\overline{o}_{\delta t}(1).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Здесь первое, второе и третье слагаемые описывают вклад рождаемости, естественной смертности и конкурентной смертности в динамику численности видов соответственно. Более того, при $k=1$ данное равенство, очевидно, переходит в уравнение (2.4).

Проведём дополнительный анализ правой части (2.10). Наша цель заключается в том, чтобы разделить слагаемые, описывающие влияние индивидов из областей D_q при $q\neq p$, от слагаемых, описывающих влияние индивидов, находящихся вне этих областей. Это необходимо для того, чтобы получить верные представления предельных выражений после стягивания рассматриваемых областей в точки. При таком переходе суммы, описывающие влияние индивидов извне, переходят в соответствующие интегралы, поскольку дополнение до стягивающихся областей стремится ко всему пространству. В свою очередь, суммы, описывающие влияние изнутри, стремятся к соответствующим выражениям в конкретных точках.

Введём следующие множества:

$$D'_p=\bigcup_{\substack{1\leqslant r\leqslant k\\r\neq p}}D_r,\quad p=\overline{1,k},$$

$$D_p^* = \bigcup_{\substack{1 \leqslant r \leqslant k \\ r \neq p \\ i_r = i_p}} D_r, \quad p = \overline{1, k}.$$

Множества D'_p необходимы нам, чтобы “отсеять” особи, находящиеся в областях D_r $(r \neq p)$ и конкурирующие с видом i_p в D_p. Множества D_p^* выполняют схожую функцию, однако для учёта рождаемости. При этом в D_p^* объединение ведётся при дополнительном условии $i_r = i_p$, поскольку только особи вида i_p могут увеличивать численность вида i_p (для конкуренции дополнительное условие, очевидно, не требуется). Новые обозначения позволяют нам записать (2.10) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{E}\Delta}{\mu(D_1)\mu(D_2)\cdot\ldots\cdot\mu(D_k)\delta t} = \\
&\quad = \mathbb{E}\sum_{p=1}^{k}\sum_{x\in X_t^{i_p}\bigcap D_p^*}\frac{\int\limits_{D_p} b_{i_p} m_{i_p}(y-x)\,dy}{\mu(D_p)}\prod_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}+ \\
&\quad + \mathbb{E}\sum_{p=1}^{k}\sum_{x\in X_t^{i_p}\setminus D_p^*}\frac{\int\limits_{D_p} b_{i_p} m_{i_p}(y-x)\,dy}{\mu(D_p)}\prod_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}- \\
&\quad - \mathbb{E}\sum_{p=1}^{k} d_{i_p}\prod_{q=1}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}- \\
&\quad - \mathbb{E}\sum_{p=1}^{k}\sum_{x\in X_t^{i_p}\bigcap D_p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{y\in X_t^{j}\setminus D'_p\\ y\neq x}}\frac{s_{i_pj}w_{i_pj}(x-y)}{\mu(D_p)}\prod_{\substack{q=1\\q\neq p}}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}- \\
&\quad - \mathbb{E}\sum_{p=1}^{k}\sum_{x\in X_t^{i_p}\bigcap D_p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{y\in X_t^{j}\bigcap D'_p} s_{i_pj}w_{i_pj}(x-y)\prod_{q=1}^{k}\frac{N_t^{i_q}(D_q)}{\mu(D_q)}+ \\
&\quad + \overline{o}_{\delta t}(1).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Устремим диаметры множеств D_p к нулю, стягивая их в различные точки $x_p \in \mathbb{R}^N$ при $p = \overline{1, k}$. Тогда по определению

$$\frac{\mathbb{E}\Big(N_t^{i_1}(D_1)N_t^{i_2}(D_2)\cdot\ldots\cdot N_t^{i_k}(D_k)\Big)}{\mu(D_1)\mu(D_2)\cdot\ldots\cdot\mu(D_k)\delta t} \xrightarrow[\substack{D_1\to x_1\\ D_2\to x_2\\ \ldots\\ D_k\to x_k}]{} \frac{\widetilde{M}_{i_1i_2\ldots i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)}{\delta t},$$

а значит,

$$\frac{\mathbb{E}\Delta}{\mu(D_1)\mu(D_2)\cdot\ldots\cdot\mu(D_k)\delta t} \xrightarrow[\substack{D_1\to x_1\\ D_2\to x_2\\ \ldots\\ D_k\to x_k}]{} \frac{\widetilde{M}_{i_1i_2\ldots i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, t+\delta t) - \widetilde{M}_{i_1i_2\ldots i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)}{\delta t}.$$

В свою очередь, правая часть представления (2.11) с учётом определения пространственных моментов и предела (2.5) будет стремиться к

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{k}\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant k\\ q\neq p\\ i_q=i_p}} b_{i_p} m_{i_p}(x_p-x_q)\widetilde{M}_{i_1\ldots i_{p-1}i_{p+1}\ldots i_k}(x_1,\ldots,x_{p-1},x_{p+1},\ldots,x_k,t)+\\
&+\sum_{p=1}^{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b_{i_p} m_{i_p}(x_p-x)\widetilde{M}_{i_1 i_2\ldots i_k}(x_1,\ldots,x_{p-1},x,x_{p+1},\ldots,x_k,t)\,dx-\\
&-\sum_{p=1}^{k} d_{i_p}\widetilde{M}_{i_1 i_2\ldots i_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k,t)-\\
&-\sum_{p=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^N} s_{i_p j} w_{i_p j}(x_p-y)\widetilde{M}_{i_1 i_2\ldots i_k j}(x_1,x_2,\ldots,x_k,y,t)\,dy-\\
&-\sum_{p=1}^{k}\sum_{\substack{q=1\\ q\neq p}}^{k} s_{i_p i_q} w_{i_p i_q}(x_p-x_q)\widetilde{M}_{i_1 i_2\ldots i_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k,t)+\\
&+\overline{o}_{\delta t}(1).
\end{aligned}
$$

При стремлении δt к нулю приходим к следующей системе уравнений динамики пространственных моментов порядка k в n-видовом сообществе:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\widetilde{M}_{i_1 i_2\ldots i_k}}{\partial t}(x_1,x_2,\ldots,x_k,t)=\\
&\qquad=\sum_{p=1}^{k}\sum_{\substack{1\leqslant q\leqslant k\\ q\neq p\\ i_q=i_p}} b_{i_p} m_{i_p}(x_p-x_q)\widetilde{M}_{i_1\ldots i_{p-1}i_{p+1}\ldots i_k}(x_1,\ldots,x_{p-1},x_{p+1},\ldots,x_k,t)+\\
&\qquad+\sum_{p=1}^{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b_{i_p} m_{i_p}(x_p-x)\widetilde{M}_{i_1 i_2\ldots i_k}(x_1,\ldots,x_{p-1},x,x_{p+1},\ldots,x_k,t)\,dx-\\
&\qquad-\sum_{p=1}^{k} d_{i_p}\widetilde{M}_{i_1 i_2\ldots i_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k,t)-\\
&\qquad-\sum_{p=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^N} s_{i_p j} w_{i_p j}(x_p-y)\widetilde{M}_{i_1 i_2\ldots i_k j}(x_1,x_2,\ldots,x_k,y,t)\,dy-\\
&\qquad-\sum_{p=1}^{k}\sum_{\substack{q=1\\ q\neq p}}^{k} s_{i_p i_q} w_{i_p i_q}(x_p-x_q)\widetilde{M}_{i_1 i_2\ldots i_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k,t),\\
&\qquad i_1=\overline{1,n},\ i_2=\overline{1,n},\ \ldots,\ i_k=\overline{1,n}.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Запись системы (2.12) можно упростить ввиду того, что по замечанию 2.3 каждый момент на самом деле зависит от меньшего числа пространственных переменных. Проведём “сдвиг” моментов в точку расположения первого рассматриваемого вида, то есть преобразование

$$\widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\theta, x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1, t),$$

где θ — начало координат в $\mathbb{R}^N$. Отметим, что при $p = 1$

$$\widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_1, \ldots, x_{p-1}, x, x_{p+1}, \ldots, x_k, t) = \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x, x_2, x_3, \ldots, x_k, t),$$

поэтому в данном конкретном случае преобразование будет иметь вид

$$\widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x, x_2, x_3, \ldots, x_k, t) = \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\theta, x_2 - x, x_3 - x, \ldots, x_k - x, t).$$

В итоге получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}}{\partial t}(\theta, x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1, t) = \\
&\quad = \sum_{p=1}^{k} \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant k \\ q \neq p \\ i_q = i_p}} b_{i_p} m_{i_p}\big((x_p - x_1) - (x_q - x_1)\big) \times \\
&\qquad\qquad \times \widetilde{M}_{i_1 \ldots i_{p-1} i_{p+1} \ldots i_k}(\theta, x_2 - x_1, \ldots, x_{p-1} - x_1, x_{p+1} - x_1, \ldots, x_k - x_1, t) + \\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} b_{i_1} m_{i_1}(x_1 - x) \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\theta, x_2 - x, \ldots, x_k - x, t)\, dx + \\
&\quad + \sum_{p=2}^{k} \int\limits_{\mathbb{R}^N} b_{i_p} m_{i_p}\big((x_p - x_1) - (x - x_1)\big) \times \\
&\qquad\qquad \times \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\theta, x_2 - x_1, \ldots, x_{p-1} - x_1, x - x_1, x_{p+1} - x_1, \ldots, x_k - x_1, t)\, dx - \\
&\quad - \sum_{p=1}^{k} d_{i_p} \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\theta, x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1, t) - \\
&\quad - \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} s_{i_p j} w_{i_p j}\big((x_p - x_1) - (y - x_1)\big) \times \\
&\qquad\qquad \times \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k j}(\theta, x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1, y - x_1, t)\, dy - \\
&\quad - \sum_{p=1}^{k} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} s_{i_p i_q} w_{i_p i_q}\big((x_p - x_1) - (x_q - x_1)\big) \widetilde{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\theta, x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1, t), \\
&\quad i_1 = \overline{1, n},\ i_2 = \overline{1, n},\ \ldots,\ i_k = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Переобозначим аргументы пространственных моментов. Пусть

$$\begin{aligned}
&x_p - x_1 \xrightarrow{\text{def}} x_{p-1}, \quad p = \overline{2, k}, \\
&x_0 = \theta.
\end{aligned}$$

Сделаем также соответствующие замены переменных под знаком интеграла. Пользуясь формой записи

$$M_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, t) = \widetilde{M}_{i_1 i_2 \dots i_k}(\theta, x_1, \dots, x_{k-1}, t),$$

можно представить систему уравнений динамики моментов порядка k в n-видовом сообществе следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial t}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, t) = \\
&\qquad = \sum_{p=1}^{k} \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant k \\ q \neq p \\ i_q = i_p}} b_{i_p} m_{i_p}(x_{p-1} - x_{q-1}) M_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_k}(x_1, \dots, x_{p-2}, x_p, \dots, x_{k-1}, t) + \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^N} b_{i_1} m_{i_1}(-x) M_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1 - x, \dots, x_{k-1} - x, t)\, dx + \\
&\qquad + \sum_{p=2}^{k} \int_{\mathbb{R}^N} b_{i_p} m_{i_p}(x_{p-1} - x) M_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1, \dots, x_{p-2}, x, x_p, \dots, x_{k-1}, t)\, dx - \\
&\qquad - \sum_{p=1}^{k} d_{i_p} M_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, t) - \\
&\qquad - \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^N} s_{i_p j} w_{i_p j}(x_{p-1} - y) M_{i_1 i_2 \dots i_k j}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, y, t)\, dy - \\
&\qquad - \sum_{p=1}^{k} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{k} s_{i_p i_q} w_{i_p i_q}(x_{p-1} - x_{q-1}) M_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, t), \\
&\qquad i_1 = \overline{1, n},\ i_2 = \overline{1, n},\ \dots,\ i_k = \overline{1, n}, \quad x_0 = \theta.
\end{aligned}$$

В частности, уравнения динамики вторых моментов имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{ij}}{\partial t}(x, t) &= \delta_{ij} b_i m_i(-x) M_i(t) + \delta_{ji} b_j m_j(x) M_j(t) + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} b_i m_i(-y) M_{ij}(x - y, t)\, dy + \int_{\mathbb{R}^N} b_j m_j(x - y) M_{ij}(y, t)\, dy - \\
&- d_i M_{ij}(x, t) - d_j M_{ij}(x, t) - \\
&- \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^N} s_{ik} w_{ik}(-y) M_{ijk}(x, y, t)\, dy - \sum_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^N} s_{jk} w_{jk}(x - y) M_{ijk}(x, y, t)\, dy - \\
&- s_{ij} w_{ij}(-x) M_{ij}(x, t) - s_{ji} w_{ji}(x) M_{ij}(x, t), \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Отметим, что с точностью до замены переменных данная система совпадает с системой, представленной в [12].

Замечание 2.6. *В одновидовом случае применение факториальных моментов вместо пространственных позволяет упростить вид выводимых уравнений, сохраняя смысл* *описываемых величин. Подробнее о таком подходе можно прочитать в работе [25].*

Замечание 2.7. *Поскольку во всех уравнениях динамики ядра разброса m_i и конкуренции w_{ij} всегда домножены на коэффициенты рождаемости b_i и агрессивности s_{ij} соответственно, в дальнейшем мы будем для сокращения записи обозначать*

$$\begin{aligned} &\overline{m}_i(x) = b_i m_i(x) && i = \overline{1,n}, \\ &\overline{w}_{ij}(x) = s_{ij} w_{ij}(x) && i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

2.3 Вывод исследуемой системы уравнений

Нас будет интересовать состояние равновесия многовидового биологического сообщества, то есть такое его состояние, когда пространственные моменты перестают зависеть от времени (это, в частности, означает, что их производные по времени обращаются в ноль). Данная ситуация весьма интересна с точки зрения экологии, поскольку сообщество, находящееся в состоянии равновесия, будет в среднем неизменно во времени, то есть, к примеру, в нём может наблюдаться долгосрочное сосуществование разных видов. Введём следующие обозначения для стационарных первых, вторых и третьих моментов:

$$\begin{aligned} &N_i = M_i(t) && i = \overline{1,n}, \\ &C_{ij}(x) = M_{ij}(x,t) && i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}, \\ &T_{ijk}(x,y) = M_{ijk}(x,y,t) && i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Поставим задачу об их нахождении.

Исходя из уравнений динамики первых и вторых пространственных моментов (2.7) и (2.13), приравняв производные в левой части к нулю, запишем следующую систему:

$$\begin{cases} 0 = (b_i - d_i)N_i - \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{ik}(y) C_{ik}(y)\, dy, \quad i = \overline{1,n} \\ 0 = \delta_{ij}\overline{m}_i(-x)N_i + \delta_{ji}\overline{m}_j(x)N_j + \\ \qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{m}_i(-y) C_{ij}(x-y)\, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{m}_j(x-y) C_{ij}(y)\, dy - \\ \qquad - d_i C_{ij}(x) - d_j C_{ij}(x) - \\ \qquad - \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{ik}(-y) T_{ijk}(x,y)\, dy - \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{jk}(x-y) T_{ijk}(x,y)\, dy - \\ \qquad - \overline{w}_{ij}(-x) C_{ij}(x) - \overline{w}_{ji}(x) C_{ij}(x), \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Напомним, здесь d_i — естественная смертность вида i; $\overline{m}_i = b_i m_i$, где m_i — ядро разброса, а b_i — интенсивность рождаемости вида i; $\overline{w}_{ij} = s_{ij} w_{ij}$, где w_{ij} — ядро конкуренции, а s_{ij} — сила конкуренции вида i по отношению к виду j. Все вышеописанные величины известны. Под δ_{ij} понимается символ Кронекера. Проведём некоторые упрощения рассматриваемой системы. Очевидно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{m}_j(x-y)C_{ij}(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{m}_j(y)C_{ij}(x-y)\,dy.$$

Кроме того, все ядра принадлежат классу $K(\mathbb{R}^N)$, то есть, в частности, они радиально симметричны, значит,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{m}_i(-y)C_{ij}(x-y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{m}_i(y)C_{ij}(x-y)\,dy.$$

Ясно, что $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, причём они не равны нулю только в случае, когда $i = j$, из чего следует, что

$$\delta_{ij}\overline{m}_i(-x)N_i + \delta_{ji}\overline{m}_j(x)N_j = 2\delta_{ij}\overline{m}_i(x)N_i.$$

Воспользовавшись неизменностью пространственного момента при проведении сдвигов, а также замечанием 2.2 о перестановке аргументов, мы можем провести следующую цепочку преобразований:

$$T_{ijk}(x,y) = \widetilde{M}_{ijk}(\theta,x,y) = \widetilde{M}_{jik}(x,\theta,y) = \widetilde{M}_{jik}(\theta,-x,y-x) = T_{jik}(-x,y-x),$$

где θ — начало координат в $\mathbb{R}^N$. В таком случае

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{jk}(x-y)T_{ijk}(x,y)\,dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{jk}(x-y)T_{jik}(-x,y-x)\,dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{jk}(y-x)T_{jik}(-x,y-x)\,dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{jk}(y)T_{jik}(-x,y)\,dy.\end{aligned}$$

В итоге получаем упрощённую систему

$$\begin{cases} 0 =(b_i-d_i)N_i - \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{ik}(y)C_{ik}(y)\,dy, \quad i=\overline{1,n} \\ 0 =2\delta_{ij}\overline{m}_i(x)N_i + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\overline{m}_i(y)+\overline{m}_j(y)\Big)C_{ij}(x-y)\,dy - \\ \qquad -\Big(d_i+d_j+\overline{w}_{ij}(x)+\overline{w}_{ji}(x)\Big)C_{ij}(x) - \\ \qquad -\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\overline{w}_{ik}(y)T_{ijk}(x,y)+\overline{w}_{jk}(y)T_{jik}(-x,y)\Big)\,dy, \quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Из первой группы уравнений системы (2.15) имеем

$$N_i = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{ik}(y) C_{ik}(y)\, dy}{b_i - d_i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.16}$$

поэтому ясно, что, зная функции $C_{ij}(x)$, можно легко найти числа N_i. Рассмотрим более подробно вторую группу уравнений, а именно систему

$$\begin{cases} 0 = & 2\delta_{ij}\overline{m}_i(x) N_i + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\overline{m}_i(y) + \overline{m}_j(y)\Big) C_{ij}(x-y)\, dy - \\ & - \Big(d_i + d_j + \overline{w}_{ij}(x) + \overline{w}_{ji}(x)\Big) C_{ij}(x) - \\ & - \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\overline{w}_{ik}(y) T_{ijk}(x,y) + \overline{w}_{jk}(y) T_{jik}(-x,y)\Big)\, dy, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Общий вид уравнений динамики указывает на то, что не имеет смысла пытаться уравнять количество неизвестных и количество представленных в (2.17) уравнений путём добавления уравнений динамики третьих моментов. Дело в том, что на динамику k-го момента всегда влияют $(k+1)$-е пространственные моменты, поэтому данный процесс расширения системы будет бесконечным. Попытаемся вместо этого уменьшить количество неизвестных. Одним из стандартных подходов, применямых для таких целей, является метод замыканий. Идея метода состоит в том, чтобы путём введения дополнительных условий связи выразить моменты старшего порядка через моменты младших порядков. Подробнее о данном подходе можно прочитать в [13] и [14]. В текущей работе мы будем использовать трёхпараметрические замыкания второго порядка, а именно замыкания третьих пространственных моментов вида:

$$\begin{aligned} T_{ijk}(x,y) = & \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} \frac{C_{ij}(x) C_{ik}(y)}{N_i} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} \frac{C_{ij}(x) C_{jk}(y-x)}{N_j} + \\ & + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} \frac{C_{ik}(y) C_{jk}(y-x)}{N_k} - \frac{\beta}{\alpha+\gamma} N_i N_j N_k, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\alpha + \gamma \neq 0$. Переобозначим

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha} &= \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}, \\ \widetilde{\beta} &= \frac{\beta}{\alpha+\gamma}, \\ \widetilde{\gamma} &= \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Также введём стандартную нотацию для свёртки двух функций и скалярного произведения в $L_1(\mathbb{R}^N)$:

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x)\,dx,$$

$$[f * g](x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\,dy.$$

Кроме того, учтём, что из определения пространственных моментов напрямую следует, что

$$C_{ij}(x) = C_{ji}(-x), \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \tag{2.20}$$

Используя (2.18) с подстановкой (2.19), а также соотношением (2.20), можно записать

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{ik}(y)T_{ijk}(x,y)\,dy = \widetilde{\alpha}\frac{\langle \overline{w}_{ik}, C_{ik}\rangle}{N_i}C_{ij}(x) + \widetilde{\beta}\frac{[\overline{w}_{ik} * C_{jk}](-x)}{N_j}C_{ij}(x) + \\ + \widetilde{\gamma}\frac{[\overline{w}_{ik}C_{ik} * C_{kj}](x)}{N_k} - \widetilde{\beta}s_{ik}N_iN_jN_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \overline{w}_{jk}(y)T_{jik}(-x,y)\,dy = \widetilde{\alpha}\frac{\langle \overline{w}_{jk}, C_{jk}\rangle}{N_j}C_{ij}(x) + \widetilde{\beta}\frac{[\overline{w}_{jk} * C_{ik}](x)}{N_i}C_{ij}(x) + \\ + \widetilde{\gamma}\frac{[\overline{w}_{jk}C_{kj} * C_{ik}](x)}{N_k} - \widetilde{\beta}s_{jk}N_iN_jN_k.\end{aligned}$$

Из (2.16) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}\frac{\langle \overline{w}_{ik}, C_{ik}\rangle}{N_i}C_{ij}(x) = \widetilde{\alpha}(b_i - d_i)C_{ij}(x),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\alpha}\frac{\langle \overline{w}_{jk}, C_{jk}\rangle}{N_j}C_{ij}(x) = \widetilde{\alpha}(b_j - d_j)C_{ij}(x).$$

После подстановки замыкания (2.18) в систему (2.17) получим систему

$$\left\{\begin{aligned} &0 = 2\delta_{ij}\overline{m}_i(x)N_i + \Big[\big(\overline{m}_i + \overline{m}_j\big) * C_{ij}\Big](x) - \\ &\quad - \Big(\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1-\widetilde{\alpha})(d_i + d_j) + \overline{w}_{ij}(x) + \overline{w}_{ji}(x)\Big)C_{ij}(x) - \\ &\quad - \widetilde{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{[\overline{w}_{ik} * C_{jk}](-x)}{N_j} + \frac{[\overline{w}_{jk} * C_{ik}](x)}{N_i}\right)C_{ij}(x) - \\ &\quad - \widetilde{\gamma}\sum_{k=1}^{n}\frac{[\overline{w}_{ik}C_{ik} * C_{kj}](x) + [\overline{w}_{jk}C_{kj} * C_{ik}](x)}{N_k} - \\ &\quad - \widetilde{\beta}N_iN_j\sum_{k=1}^{n}(s_{ik} + s_{jk})N_k, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},\end{aligned}\right. \tag{2.21}$$

которая больше не содержит неизвестных величин $T_{ijk}(x,y)$. Данная система, которую мы будем называть системой уравнений равновесия, и является основным предметом изучения текущей работы.

Замечание 2.8. *Исходя из замечания 2.4, описывающего поведение пространственных моментов на бесконечности, можно заключить, что*

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N}\to+\infty} C_{ij}(x) = N_i N_j, \quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}.$$

Эти равенства являются дополнительными условиями для отбора решений системы (2.21)*, которыми мы будем пользоваться далее.*

Прежде, чем приступать к дальнейшему исследованию рассматриваемых уравнений, мы должны описать вспомогательный аппарат матричных банаховых пространств и классов функций $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$.

3 Матричные банаховы пространства

3.1 Определение и свойства

Пусть пространство $\mathbb{B}$ банахово и имеет норму $\|\cdot\|$. Рассмотрим матричное банахово пространство $\mathbb{B}^{m\times n}$, то есть пространство матриц, компонентами которых являются элементы пространства $\mathbb{B}$. На данном пространстве введём норму по правилу

$$\|F\|_{m\times n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\|F_{ij}\|, \tag{3.1}$$

где

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^{m\times n}.$$

Лемма 3.1. *Пространство $\mathbb{B}^{m\times n}$ с нормой* (3.1) *банахово.*

Доказательство. Линейность пространства $\mathbb{B}^{m\times n}$ очевидна. Докажем его полноту относительно нормы (3.1). Пусть некоторая последовательность элементов $\{F^k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{B}^{m\times n}$ фундаментальна. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall p,q > K \quad \|F^p - F^q\|_{m\times n} < \varepsilon.$$

Однако ясно, что

$$\forall i \in \overline{1,m} \quad \forall j \in \overline{1,n} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \|F^p_{ij}\| \leqslant \|F^p\|_{m\times n},$$

значит, $\|F^p_{ij} - F^q_{ij}\| < \varepsilon$, то есть все последовательности, состоящие из компонент элементов исходной последовательности, также фундаментальны (в пространстве $\mathbb{B}$). Поскольку $\mathbb{B}$ банахово, то любая такая последовательность имеет предел. Обозначим

$$F = \begin{bmatrix} \lim\limits_{k\to+\infty} F_{11}^k & \dots & \lim\limits_{k\to+\infty} F_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lim\limits_{k\to+\infty} F_{m1}^k & \dots & \lim\limits_{k\to+\infty} F_{mn}^k \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^{m\times n}.$$

Покажем, что $F^k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbb{B}^{m\times n}} F$. Из определения пределов для каждой из последовательностей $\{F_{ij}^k\}_{k=1}^{+\infty}$ получим

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_{ij} = K_{ij}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall k > K_{ij} \quad \|F_{ij}^k - F_{ij}\| < \frac{\varepsilon}{mn}.$$

Следовательно

$$\|F^k - F\|_{m\times n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \|F_{ij}^k - F_{ij}\| < mn \cdot \frac{\varepsilon}{mn} = \varepsilon.$$

□

Замечание 3.1. *В дальнейшем, говоря о матричных банаховых пространствах* $\mathbb{B}^{m\times n}$*, мы будем всегда подразумевать, что на них введена норма* (3.1).

Для исследований нам также понадобится концепция компактных и предкомпактных множеств в банаховых пространствах.

Определение 3.1. *Подмножество банахова пространства называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие. Множество называется предкомпактным, если его замыкание компактно.*

Выведем критерий компактности в пространстве $\mathbb{B}^{m\times n}$.

Замечание 3.2. *Пусть M — некоторое подмножество матричного банахова пространства $\mathbb{B}^{m\times n}$. Под записью вида $M|_{ij}$, где $i \in \overline{1,m}$, а $j \in \overline{1,n}$, мы будем подразумевать проекцию M на компоненту ij, то есть*

$$M|_{ij} = \Big\{ F_{ij} \;\Big|\; F \in M \Big\}.$$

Лемма 3.2. *Множество $M \subset \mathbb{B}^{m\times n}$ компактно в $\mathbb{B}^{m\times n}$ тогда и только тогда, когда каждое из множеств $M|_{ij}$ при $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ компактно в $\mathbb{B}$.*

Доказательство. **Необходимость**. Рассмотрим любые открытые покрытия $\mathfrak{U}_{ij}$ множеств $M|_{ij}$. Данные покрытия порождают открытое покрытие

$$\mathfrak{U} = \left\{ U = \bigtimes_{i=1}^{n} \bigtimes_{j=1}^{m} U_{ij} \;\middle|\; U_{ij} \in \mathfrak{U}_{ij} \right\}$$

множества M. По условию компактности M из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{U^k\}_{k=1}^N$. Ясно, что множества $\{U^k|_{ij}\}_{k=1}^N$ являются покрытиями множеств $M|_{ij}$. При этом они по построению являются подпокрытиями покрытий $\mathfrak{U}_{ij}$ и конечны. Таким образом, все множества $M|_{ij}$ компактны.

Достаточность. Рассмотрим любое открытое покрытие $\mathfrak{U}$ множества M. Оно порождает открытые покрытия $\mathfrak{U}_{ij} = \{U|_{ij}\}_{U\in\mathfrak{U}}$ множеств $M|_{ij}$. В силу компактности каждого из множеств $M|_{ij}$ из покрытий $\mathfrak{U}_{ij}$ можно выделить конечные подпокрытия $\mathfrak{U}'_{ij}$. Рассмотрим семейство множеств

$$\mathfrak{U}' = \left\{ U \in \mathfrak{U} \,\middle|\, \exists i, j : \; U|_{ij} \in \mathfrak{U}'_{ij} \right\}.$$

Это семейство конечно, по построению является подсемейством семейства $\mathfrak{U}$, а кроме того, покрывает полностью множество M. Таким образом, M компактно. □

3.2 Компактность операторов в матричных банаховых пространствах

Для дальнейшего исследования нам будет также необходимо понятие компактного оператора.

Определение 3.2. *Оператор $\mathcal{A}$, действующий из банахова пространства $\mathbb{B}_1$ в банахово пространство $\mathbb{B}_2$, называется компактным, если образ любого ограниченного в $\mathbb{B}_1$ множества предкомпактен в $\mathbb{B}_2$.*

Как и многие свойства сущностей, связанных с матричными банаховыми пространствами, данное определение можно выразить в покомпонентных терминах. Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — банаховы пространства. Оператор $\mathcal{A}$, действующий из $\mathbb{B}_1^{m_1\times n_1}$ в $\mathbb{B}_2^{m_2\times n_2}$, компактен тогда и только тогда, когда одновременно компактны все операторы следующего вида:*

$$\mathcal{A}_{ij}F = (\mathcal{A}F)_{ij}, \quad i = \overline{1, m_2},\; j = \overline{1, n_2},$$

то есть сужения оператора $\mathcal{A}$ на всевозможные компоненты пространства $\mathbb{B}_2^{m_2\times n_2}$.

Доказательство. **Необходимость**. Пусть оператор $\mathcal{A} : \mathbb{B}_1^{m_1\times n_1} \to \mathbb{B}_2^{m_2\times n_2}$ компактен, а M — некоторое ограниченное множество в $\mathbb{B}_1^{m_1\times n_1}$. По определению это означает, что множество $\mathcal{A}M = \{\mathcal{A}F\}_{F\in M}$ предкомпактно в $\mathbb{B}_2^{m_2\times n_2}$. По лемме 3.2 это означает, что все множества

$$(\mathcal{A}M)|_{ij}, \quad i = \overline{1, m_2},\; j = \overline{1, n_2}$$

предкомпактны в $\mathbb{B}_2$. Значит, операторы $\mathcal{A}_{ij}$ отображают любое ограниченное множество в предкомпактное и являются компактными.

Достаточность. Пусть каждый из операторов $\mathcal{A}_{ij}$ компактен и M — произвольное ограниченное множество в $\mathbb{B}_1^{m_1\times n_1}$. Тогда предкомпактны все множества $\mathcal{A}_{ij}M = \{\mathcal{A}_{ij}F\}_{F\in M}$. Однако

$$\{\mathcal{A}_{ij}F\}_{F\in M} = \Big\{\big(\mathcal{A}F\big)_{ij}\Big\}_{F\in M} = \Big(\{\mathcal{A}F\}_{F\in M}\Big)\Big|_{ij},$$

что по лемме 3.2 означает компактность образа множества M под действием оператора $\mathcal{A}$. Из этого следует, что $\mathcal{A}$ компактен. □

4 Пространство $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$

4.1 Определение

Теперь введём некоторое специальное функциональное пространство, в котором мы далее будем искать компоненты решения системы уравнений равновесия (2.21).

Рассмотрим множество функций вида $f = F + \eta$, где $F \in L_p(\mathbb{R}^N)$, а $\eta \in \mathbb{R}$. Будем в дальнейшем называть функцию F функциональной, а число η — числовой частью элемента f и обозначать их $\mathcal{F}f$ и $\mathcal{N}f$ соответственно. Очевидно, что рассмотренное множество линейно относительно операций сложения и умножения на число, вводимых по следующим правилам:

$$\begin{aligned} f + g &= (\mathcal{F}f + \mathcal{F}g) + (\mathcal{N}f + \mathcal{N}g),\\ \lambda f &= (\lambda\mathcal{F}f) + \lambda\mathcal{N}f, \end{aligned}$$

где f, g — любые элементы вышеупомянутого множества, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Введём на обозначенном множестве структуру нормированного пространства, определив норму элемента $f = \mathcal{F}f + \mathcal{N}f$ по правилу

$$\|f\| = \|\mathcal{F}f\|_{L_p} + |\mathcal{N}f|. \tag{4.1}$$

Полученное пространство обозначим за $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$ и в дальнейшем будем обозначать норму (4.1) через $\|f\|_{\widehat{L_p}}$.

Замечание 4.1. *Ясно, что $L_p(\mathbb{R}^N)$ является замкнутым линейным подпространством пространства $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$.*

Лемма 4.1. *Элементы f и g пространства $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$ равны тогда и только тогда, когда равны их функциональные и числовые части соответственно.*

Доказательство. Утверждение леммы напрямую следует из определения нормы (4.1) и того факта, что ненулевая константа не может принадлежать $L_p(\mathbb{R}^N)$. □

Лемма 4.2. *Пространство $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$ банахово.*

Доказательство. Мы уже упоминали линейность, осталось показать только полноту пространства $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$. Предположим, что некоторая последовательность элементов

$\{f_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$ фундаментальна. Покажем, что найдётся такой элемент $f \in \widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$, что $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)} f$. Из фундаментальности рассматриваемой последовательности следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall k_1,\, k_2 > K \quad \|f_{k_1} - f_{k_2}\|_{\widehat{L_p}} < \varepsilon,$$

то есть

$$\|\mathcal{F} f_{k_1} - \mathcal{F} f_{k_2}\|_{L_p} + |\mathcal{N} f_{k_1} - \mathcal{N} f_{k_2}| < \varepsilon.$$

Если сумма двух неотрицательных слагаемых меньше ε, то и каждое из них по отдельности также меньше ε. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F} f_{k_1} - \mathcal{F} f_{k_2}\|_{L_p} < \varepsilon, \\ &|\mathcal{N} f_{k_1} - \mathcal{N} f_{k_2}| < \varepsilon, \end{aligned}$$

то есть последовательности $\{\mathcal{F} f_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset L_p(\mathbb{R}^N)$ и $\{\mathcal{N} f_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ фундаментальны в соответствующих пространствах. Однако полнота пространств $L_p(\mathbb{R}^N)$ и $\mathbb{R}$ относительно соответствующих норм влечёт за собой существование таких элементов $F \in L_p(\mathbb{R}^N)$ и $\eta \in \mathbb{R}$, что $\mathcal{F} f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{L_p(\mathbb{R}^N)} F$ и $\mathcal{N} f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathbb{R}} \eta$. Это, очевидно, означает, что $f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)} f = F + \eta \in \widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$. □

4.2 Предкомпактность в $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$

Установим критерии предкомпактности множеств из пространства $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$. Широко известна следующая теорема, являющаяся критерием предкомпактности в полных метрических пространствах:

Теорема (Критерий Хаусдорфа)**.** *Подмножество Y полного метрического пространства X с метрикой ρ предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для множества Y, то есть такое конечное множество $Y^\varepsilon \subset X$, что*

$$\forall y \in Y \quad \exists y^\varepsilon \in Y^\varepsilon: \quad \rho(y, y^\varepsilon) < \varepsilon.$$

Доказательство. См. [9, с. 109] □

Замечание 4.2. *Для произвольного множества $K \subset \widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$ мы в дальнейшем будем использовать следующие обозначения:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}K &= \big\{\mathcal{F}f \mid f \in K\big\}, \\ \mathcal{N}K &= \big\{\mathcal{N}f \mid f \in K\big\}. \end{aligned}$$

Лемма 4.3. *Множество $K \subset \widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}K$ предкомпактно в $L_p(\mathbb{R}^N)$, а $\mathcal{N}K$ предкомпактно в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. **Необходимость.** По критерию Хаусдорфа для любого $\varepsilon > 0$ у предкомпактного множества K в полном метрическом пространстве $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$ существует конечная ε-сеть K^ε. При этом ясно, что $\mathcal{F}K^\varepsilon$ и $\mathcal{N}K^\varepsilon$ также являются конечными множествами. Для любого элемента $f \in K$ найдётся такой элемент $g \in K^\varepsilon$, что

$$\varepsilon > \|f - g\|_{\widehat{L_p}} = \|\mathcal{F}f - \mathcal{F}g\|_{L_p} + |\mathcal{N}f - \mathcal{N}g|.$$

Из этого напрямую следует, что

$$\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}g\|_{L_p} < \varepsilon,$$
$$|\mathcal{N}f - \mathcal{N}g| < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора f можно сделать вывод, что в ε-окрестности любого элемента $F \in \mathcal{F}K$ найдётся элемент $F^\varepsilon \in \mathcal{F}K^\varepsilon$, а в ε-окрестности любого элемента $\eta \in \mathcal{N}K$ найдётся элемент $\eta^\varepsilon \in \mathcal{N}K^\varepsilon$. Таким образом, множества $\mathcal{F}K^\varepsilon$ и $\mathcal{N}K^\varepsilon$ являются конечными ε-сетями для множеств $\mathcal{F}K$ и $\mathcal{N}K$ соответственно. По критерию Хаусдорфа это означает, что $\mathcal{F}K$ и $\mathcal{N}K$ предкомпактны в $L_p(\mathbb{R}^N)$ и $\mathbb{R}$ соответственно.

Достаточность. По критерию Хаусдорфа для предкомпактных множеств $\mathcal{F}K$ и $\mathcal{N}K$ при любом $\varepsilon > 0$ существуют конечные $\varepsilon/2$-сети, то есть такие конечные множества $M \subset L_p(\mathbb{R}^N)$ и $L \subset \mathbb{R}$, что

$$\forall F \in \mathcal{F}K \quad \exists F^{\varepsilon/2} \in M : \quad \|F - F^{\varepsilon/2}\|_{L_p} < \varepsilon/2,$$
$$\forall \eta \in \mathcal{N}K \quad \exists \eta^{\varepsilon/2} \in L : \quad |\eta - \eta^{\varepsilon/2}| < \varepsilon/2.$$

Обозначим $K^\varepsilon = \{F + \eta \mid F \in M, \eta \in L\} \subset \widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$. Данное множество является конечным, так как его мощность не превосходит мощности декартова произведения $M \times L$. Кроме того, из определения множеств M и L для любого $f = F + \eta \in K$ найдётся элемент $f^\varepsilon = F^{\varepsilon/2} + \eta^{\varepsilon/2} \in K^\varepsilon$ такой, что

$$\|f - f^\varepsilon\|_{\widehat{L_p}} = \|F - F^{\varepsilon/2}\|_{L_p} + |\eta - \eta^{\varepsilon/2}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Значит, множество K^ε является конечной ε-сетью для множества K. В силу произвольности ε по критерию Хаусдорфа множество K предкомпактно в $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^N)$ существует более конкретный критерий предкомпактности множеств.

Теорема (Критерий Рисса). *Множество K предкомпактно в $L_p(\mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

1. $\exists M > 0 : \ \forall f \in K \quad \|f\|_{L_p} < M,$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \quad \forall h \in \mathbb{R}^N : \ \|h\|_{\mathbb{R}^N} < \delta \quad \forall f \in K \ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|f(x+h) - f(x)\Big|^p dx < \varepsilon.$

Доказательство. Основную идею доказательства можно найти в [8, с. 291]. □

Покажем, что в пространстве $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$ критерий почти не меняется.

Теорема 1. *Множество K предкомпактно в $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

1. $\exists M > 0 : \forall f \in K \quad \|f\|_{\widehat{L_p}} < M$,

2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad \forall h \in \mathbb{R}^N : \|h\|_{\mathbb{R}^N} < \delta \quad \forall F \in \mathcal{F}K \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|F(x+h) - F(x)\Big|^p dx < \varepsilon.$

Доказательство. По лемме 4.3 множество K предкомпактно тогда и только тогда, когда предкомпактны множества $\mathcal{F}K$ и $\mathcal{N}K$. Таким образом, если K предкомпактно в $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$, то для множества $\mathcal{F}K$ выполнен критерий Рисса, а множество $\mathcal{N}K$ ограничено (следствие теоремы Больцано–Вейерштрасса), что с учётом определения нормы (4.1) влечёт справедливость упомянутых условий. С другой стороны, если вышеупомянутые условия верны, то множество $\mathcal{F}K$ удовлетворяет критерию Рисса, а множество $\mathcal{N}K$ ограничено. Выходит, что они оба предкомпактны в соответствующих пространствах, а значит, K компактно в $\widehat{L_p}(\mathbb{R}^N)$. □

5 Вспомогательные утверждения

Приведём некоторые вспомогательные утверждения, которые мы будем использовать далее.

Определение 5.1. *Будем называть измеримые функции, принимающие не более, чем счётное число значений, простыми.*

Замечание 5.1. *Известно, что на множестве конечной меры функция измерима тогда и только тогда, когда она может быть представлена как равномерный предел простых функций (см. [9, с.292]). Кроме того, на множестве конечной меры функция интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда она может быть представленна в виде равномерного предела простых функций, каждая из которых интегрируема (см. [9, с.294]).*

Замечание 5.2. *Интегрируемость по Лебегу функции f равносильна интегрируемости по Лебегу ее модуля (см. [9, с.297]).*

Определение 5.2. *Мера μ пространства X называется σ-конечной, если найдётся такая система измеримых множеств $\mathfrak{D} = \{D_k \subset X \mid \mu(D_k) < +\infty\}_{k=1}^{+\infty}$, что*

$$X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} D_k.$$

При этом, если $\mathfrak{D}$ монотонно возрастает, то есть при любом $k \in \mathbb{N}$ имеет место вложение $D_k \subset D_{k+1}$, то она называется исчерпыванием пространства X.

Напомним определение интегрируемости функции по Лебегу в случае, когда $\mu(X) = +\infty$ и мера μ пространства X σ-конечна.

Определение 5.3. *Пусть X — пространство с σ-конечной мерой μ, причём $\mu(X) = +\infty$. Измеримая функция f называется интегрируемой на X, если:*

1. *она интегрируема на любом измеримом подмножестве $A \subset X$ конечной меры,*
2. *для любого исчерпывания $\mathfrak{D} = \{D_k\}_{k=1}^{+\infty}$ пространства X существует предел*

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{D_k} f(x) d\mu, \tag{5.1}$$

3. *рассмотренный предел не зависит от конкретного выбора исчерпывания $\mathfrak{D}$.*

При этом (5.1) *называется интегралом f по X (см. [9, с.306]).*

Определение 5.4. *Пусть $\{D_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — исчерпывание пространства X, а $D_0 = \varnothing$. Мы будем называть систему множеств*

$$\mathfrak{M} = \left\{M_k = D_k \backslash D_{k-1}\right\}_{k=1}^{+\infty}$$

мозаикой на X.

Ясно, что предел (5.1) может быть переписан в виде

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{M_k} f(x)\, d\mu,$$

где $M_k = D_k \backslash D_{k-1}$, а $D_0 = \varnothing$. Поэтому мы имеем право сформулировать определение 5.3 в более удобном в рамках текущего исследования виде.

Определение 5.5. *Пусть X — пространство с σ-конечной мерой μ, причём $\mu(X) = +\infty$. Измеримая функция f называется интегрируемой на X, если:*

1. *она интегрируема на любом измеримом подмножестве $A \subset X$ конечной меры,*
2. *для любой мозаики $\mathfrak{M} = \{M_k\}_{k=1}^{+\infty}$ на X сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{M_k} f(x)\, d\mu,$$

3. *сумма рассмотренного ряда не зависит от конкретного выбора мозаики $\mathfrak{M}$.*

При этом, в силу замечания 5.2 сходимость ряда понимается в абсолютном смысле, а сумма данного ряда называется интегралом f по X.

Замечание 5.3. *Всюду далее везде, где это не оговорено особо, под мерой μ будет подразумеваться стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}^N$, при этом мы будем обозначать $d\mu$ через dx.*

Лемма 5.1. *Пусть f — измеримая функция N переменных, $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}^N$ верно $|f(x)| \leqslant g(x)$, тогда $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$.*

Доказательство. Ясно, что стандартная мера на $\mathbb{R}^N$ является σ-конечной. Рассмотрим любую мозаику $\mathfrak{M} = \{M_k\}_{k=1}^{+\infty}$ на $\mathbb{R}^N$. Поскольку $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, то $g \in L_1(M_k)$ при любом натуральном k, причём $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{M_k} g(x)\,dx < +\infty$.

Фиксируем любое $k \in \mathbb{N}$. В силу интегрируемости g на множестве M_k конечной меры существует последовательность интегрируемых простых функций $\{g_m\}_{m=1}^{+\infty}$ такая, что

$$g_m(x) \underset{\substack{m\to+\infty \\ x\in M_k}}{\rightrightarrows} g(x).$$

В свою очередь, f измерима, то есть для неё существует последовательность простых функций $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ такая, что

$$f_m(x) \underset{\substack{m\to+\infty \\ x\in M_k}}{\rightrightarrows} f(x).$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K = K(\varepsilon): \quad \forall m > K\ \forall x \in M_k \quad \begin{cases} |f(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon/2 \\ |g(x) - g_m(x)| \leqslant \varepsilon/2. \end{cases}$$

Значит,

$$\begin{cases} |f_m(x)| \leqslant |f(x)| + \varepsilon/2 \\ |g(x)| \leqslant |g_m(x)| + \varepsilon/2 \end{cases} \Longrightarrow |f_m(x)| \leqslant |g_m(x)| + \varepsilon.$$

Из свойства мажорируемости следует интегрируемость f_m на M_k при любом натуральном m, что влечёт интегрируемость и самой функции f на том же множестве. Кроме того, получаем, что

$$\int\limits_{M_k} |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{M_k} g(x)\,dx.$$

В силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ по признаку сравнения получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{M_k} |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Это означает, что $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Следствие 5.1. *Если $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, а g — ограничена почти всюду и измерима, то $fg \in L_1(\mathbb{R}^N)$.*

Определение 5.6. *Пусть числовая функция f измерима на множестве X с мерой μ. Положим $U_f(M) = \{x \in X \mid f(x) > M\}$. Существенным супремумом функции f называется величина*

$$\operatorname*{ess\,sup}_X f = \inf\Big\{M \in \mathbb{R} \;\Big|\; \mu\big(U_f(M)\big) = 0\Big\}.$$

Замечание 5.4. *Существенный супремум обобщает понятие обычного супремума на случай, когда множеством меры нуль можно пренебречь. Фактически, измеримая функция почти всюду меньше своего существенного супремума. Кроме того, измеримая функция ограничена почти всюду тогда и только тогда, когда существенный супремум её модуля конечен. Это означает, что по следствию 5.1 произведение интегрируемой функции с измеримой функцией, имеющей ограниченный существенный супремум модуля, интегрируемо.*

Лемма 5.2. *Если $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall h \in \mathbb{R}^N : \; \|h\|_{\mathbb{R}^N} \leqslant \delta \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x+h) - f(x)| \, dx \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. См. [8, с. 216]. □

Теорема (Фубини)**.** *Пусть для почти всех $y \in \mathbb{R}^N$ существует интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x,\, y)| \, dx = F(y),$$

причём

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} F(y) \, dy < +\infty,$$

тогда существуют интегралы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x,\, y) \, dx \, dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,\, y) \, dy \right) dx,$$

а кроме того, верно равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,\, y) \, dx \right) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x,\, y) \, dy \right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x,\, y) \, dx \, dy.$$

Доказательство. См. [9, с. 318]. □

Теорема (Об интегрируемости свёртки)**.** *Если $f,\, g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, то определена свёртка $[f * g]$, которая также принадлежит $L_1(\mathbb{R}^N)$.*

Доказательство. Доказательство аналогично [15, с. 503]. □

Замечание 5.5. *В дальнейших выкладках мы будем пользоваться следующим очевидным утверждением:*

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^N)\ \forall y \in \mathbb{R}^N \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x+y)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx.$$

Определение 5.7. *Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего из банахова пространства $\mathbb{B}_1$ с нормой $\|\cdot\|_1$ в банахово пространство $\mathbb{B}_2$ с нормой $\|\cdot\|_2$ называется число*

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x\in\mathbb{B}_1\setminus\{\theta\}} \frac{\|\mathcal{A}x\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1=1} \|\mathcal{A}x\|_2,$$

где θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{B}_1$.

Замечание 5.6. *Исходя из свойств точной верхней грани, приведённое определение эквивалентно совокупности двух следующих фактов:*

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{B}_1 \quad \|\mathcal{A}x\|_2 \leqslant \|\mathcal{A}\|\cdot\|x\|_1,\\
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in \mathbb{B}_1 : \begin{cases}\|x_\varepsilon\|_1 = 1,\\ \|\mathcal{A}\|\cdot\|x_\varepsilon\|_1 - \|\mathcal{A}x_\varepsilon\|_2 < \varepsilon.\end{cases}
\end{aligned}$$

6 Операторы, действующие в $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$

Рассмотрим частный случай $p = 1$ и проанализируем некоторые отображения, действующие в $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$. В дальнейшем мы покажем, что оператор, порождённый системой уравнений (2.21), может быть представлен в виде некоторой композиции рассмотренных отображений.

6.1 Линейные отображения

6.1.1 Функционал скалярного произведения

Введём класс интегрируемых существенно ограниченных функций:

$$BL_1(\mathbb{R}^N) = \left\{\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N)\ \middle|\ \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| < +\infty\right\} \tag{6.1}$$

и в дальнейшем будем обозначать

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{BL_1} &= \max\left\{\|\varphi\|_{L_1}, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N}|\varphi|\right\},\\
\|\varphi\|^*_{BL_1} &= \max\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\,dx\right|, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N}|\varphi|\right\}.
\end{aligned}$$

Замечание 6.1. *Для любой функции* $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^N)$ *справедливо нестрогое неравенство* $\|\varphi\|^*_{BL_1} \leqslant \|\varphi\|_{BL_1}$*, при этом равенство имеет место, когда* φ *почти всюду неотрицательна.*

Замечание 6.2. *По следствию 5.1 при любых* $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ *и* $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^N)$ *функция* $f\varphi$ *интегрируема.*

Покажем, что для элемента $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ и функции $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^N)$ корректно определена операция вида

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Раскладывая f на функциональную и числовую часть под знаком интеграла, получаем

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big((\mathcal{F}f)(x) + \mathcal{N}f\Big)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}f)(x)\varphi(x)\,dx + \mathcal{N}f \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx = \\ &= \langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle + \mathcal{N}f \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Поскольку $\mathcal{F}f \in L_1(\mathbb{R}^N)$, а $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^N)$, то по замечанию 6.2 выражение $\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle$ определено корректно, а значит, и операция (6.2) имеет смысл. При этом очевидно, что данная операция является билинейной и симметричной. При фиксированной функции φ операцию (6.2) можно рассматривать как линейный функционал над $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 6.1. *Линейный функционал* $d_\varphi(f) = \langle f, \varphi \rangle$*, определённый выражением* (6.2)*, является ограниченным, и его норма* $\|d_\varphi\|$ *равна* $\|\varphi\|^*_{BL_1}$*.*

Доказательство. Оценим результат применения функционала d_φ к произвольной функции $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned}\Big|d_\varphi(f)\Big| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big((\mathcal{F}f)(x) + \mathcal{N}f\Big)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|(\mathcal{F}f)(x)\Big| \cdot |\varphi(x)|\,dx + |\mathcal{N}f| \cdot \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| \cdot \|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f| \cdot \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx\right| \leqslant \|\varphi\|^*_{BL_1} \|f\|_{\widehat{L_1}}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Таким образом, $\|d_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|^*_{BL_1}$. Покажем, что на самом деле имеет место точное равенство.

Если φ почти всюду равна нулю (то есть $\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| = 0$), то приведённая выше оценка переходит в тождество. Действительно, тогда $\langle f, \varphi \rangle = 0$ при любом $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^n)$, то есть функционал d_φ имеет нулевую норму. При этом $\|\varphi\|^*_{BL_1} = 0$, и утверждение леммы верно. Пусть $\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| > 0$. Тогда возможны лишь следующие два случая.

1) Пусть $\|\varphi\|^*_{BL_1} = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx\right|$. Рассмотрим функцию $f(x) \equiv 1$. Это элемент пространства $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, для которого $\mathcal{F}f \equiv 0$ и $\|f\|_{\widehat{L_1}} = 1$. Действие функционала d_φ на f будет иметь вид

$$d_\varphi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx,$$

а поэтому

$$\Big|d_\varphi(f)\Big| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx\right| = \|\varphi\|^*_{BL_1}\|f\|_{\widehat{L_1}}.$$

Значит, по замечанию 5.6 $\|d_\varphi\| = \|\varphi\|^*_{BL_1}$.

2) Пусть $\|\varphi\|^*_{BL_1} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi|$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ введём следующее множество:

$$M_\varepsilon = \Big\{x \in \mathbb{R}^N \;\Big|\; |\varphi(x)| > \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| - \varepsilon\Big\}.$$

Из определения видно, что при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ имеет место вложение $M_{\varepsilon_1} \subset M_{\varepsilon_2}$, то есть $\mu(M_{\varepsilon_1}) \leqslant \mu(M_{\varepsilon_2})$. Будем считать, что $\varepsilon < 1/2 \cdot \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi|$, тогда

$$\begin{aligned} +\infty > \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|\,dx \geqslant \int\limits_{M_\varepsilon} |\varphi(x)|\,dx > \int\limits_{M_\varepsilon} \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| - \varepsilon\Big)\,dx = \\ = \mu(M_\varepsilon)\cdot\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| - \varepsilon\Big) > \frac{1}{2}\mu(M_\varepsilon)\cdot \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi|, \end{aligned}$$

и в силу конечности существенного супремума функции φ имеем

$$\mu(M_\varepsilon) < +\infty.$$

Рассмотрим

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\operatorname{sgn}\varphi(x)\cdot \mathbb{1}_{M_\varepsilon}(x)}{\mu(M_\varepsilon)},$$

где

$$\operatorname{sgn}\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \varphi(x) > 0,\\ 0, & \varphi(x) = 0,\\ -1, & \varphi(x) < 0,\end{cases}$$

$$\mathbb{1}_{M_\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in M_\varepsilon,\\ 0, & x \notin M_\varepsilon.\end{cases}$$

Данная функция интегрируема. Более того,

$$\|f_\varepsilon\|_{L_1} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f_\varepsilon(x)|\,dx = \frac{1}{\mu(M_\varepsilon)}\int\limits_{M_\varepsilon} dx = 1.$$

Таким образом, $f_\varepsilon \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, причём, $\mathcal{N} f_\varepsilon = 0$, то есть $\|f_\varepsilon\|_{\widehat{L_1}} = \|f_\varepsilon\|_{L_1} = 1$. Имеем

$$\begin{aligned}\left|d_\varphi(f_\varepsilon)\right| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\operatorname{sgn}\varphi(x)\cdot\varphi(x)\cdot \mathbb{1}_{M_\varepsilon}(x)}{\mu(M_\varepsilon)}\,dx\right| = \frac{1}{\mu(M_\varepsilon)}\left|\int\limits_{M_\varepsilon}|\varphi(x)|\,dx\right| = \frac{1}{\mu(M_\varepsilon)}\int\limits_{M_\varepsilon}|\varphi(x)|\,dx > \\ &> \frac{1}{\mu(M_\varepsilon)}\int\limits_{M_\varepsilon}\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N}|\varphi| - \varepsilon\Big)\,dx = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N}|\varphi| - \varepsilon = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N}|\varphi|\cdot\|f_\varepsilon\|_{\widehat{L_1}} - \varepsilon = \\ &= \|\varphi\|^*_{BL_1}\|f_\varepsilon\|_{\widehat{L_1}} - \varepsilon.\end{aligned}$$

Исходя из замечания 5.6, это означает, что норма функционала d_φ равна $\|\varphi\|^*_{BL_1}$. $\square$

6.1.2 Мультипликативный оператор

Пусть $\Phi \in \Big(BL_1(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{M}$, действующий на элементы F из $\Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$ по правилу $\mathcal{M}F = \Phi \odot F$, где под $\odot$ подразумевается покомпонентное умножение матриц, то есть

$$\Phi \odot F = \begin{bmatrix} \Phi_{11}F_{11} & \Phi_{12}F_{12} & \dots & \Phi_{1n}F_{1n} \\ \Phi_{21}F_{21} & \Phi_{22}F_{22} & \dots & \Phi_{2n}F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n1}F_{n1} & \Phi_{n2}F_{n2} & \dots & \Phi_{nn}F_{nn} \end{bmatrix}.$$

Образ данного оператора лежит в $\Big(L_1(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$. Действительно, расписывая выражение $\Phi_{ij}F_{ij}$ более подробно, получаем, что

$$\Phi_{ij}F_{ij} = \Phi_{ij}\mathcal{F}F_{ij} + \Phi_{ij}\mathcal{N}F_{ij},$$

при этом, исходя из замечания 6.2, $\Phi_{ij}\mathcal{F}F_{ij} \in L_1(\mathbb{R}^N)$, и очевидно, что $\Phi_{ij}\mathcal{N}F_{ij} \in BL_1(\mathbb{R}^N) \subset L_1(\mathbb{R}^N)$. Таким образом, поскольку $L_1(\mathbb{R}^N) \subset \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, оператор $\mathcal{M}$ действует в $\Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$.

Лемма 6.2. *Оператор $\mathcal{M}$ является линейным оператором в пространстве $\Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$, имеющим норму $\|\mathcal{M}\| = \max\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}\|\Phi_{ij}\|_{BL_1}$.*

Доказательство. Линейность рассматриваемого оператора очевидна. Оценим норму образа элемента F под действием $\mathcal{M}$. Поскольку $\Phi \odot F \in \Big(L_1(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$, то

$$\|\Phi \odot F\|_{n\times n} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\|\Phi_{ij}F_{ij}\|_{L_1} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\Big\langle\big|\Phi_{ij}\big|, \big|F_{ij}\big|\Big\rangle.$$

Исходя из замечания 6.1 и леммы 6.1 о норме функционала скалярного произведения, получаем, что

$$\Big\langle \big|\Phi_{ij}\big|, \big|F_{ij}\big| \Big\rangle \leqslant \Big\| |\Phi_{ij}| \Big\|^*_{BL_1} \Big\| |F_{ij}| \Big\|_{\widehat{L_1}} = \|\Phi_{ij}\|_{BL_1} \|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}}, \tag{6.4}$$

причём данная оценка является точной. В итоге

$$\|\Phi \odot F\|_{n\times n} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|\Phi_{ij}\|_{BL_1}\|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\Phi_{ij}\|_{BL_1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}}.$$

Пусть

$$\max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\Phi_{ij}\|_{BL_1} = \|\Phi_{pq}\|_{BL_1},$$

а элемент $F \in \Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$ таков, что при $i \neq p$ и $j \neq q$ компоненты $F_{ij} = 0$. Тогда, используя (6.4), получим следующую точную оценку

$$\|\Phi \odot F\|_{n\times n} = \|\Phi_{pq}F_{pq}\|_{L_1} = \Big\langle \big|\Phi_{pq}\big|, \big|F_{pq}\big| \Big\rangle \leqslant \|\Phi_{pq}\|_{BL_1}\|F_{pq}\|_{\widehat{L_1}} = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\Phi_{ij}\|_{BL_1}\|F\|_{n\times n}.$$

Выходит, что

$$\|\mathcal{M}\| = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\Phi_{ij}\|_{BL_1}.$$

□

6.1.3 Оператор свёртки

Покажем, что для элемента $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ и функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N)$ корректно определена операция свёртки, то есть операция вида

$$[f * \varphi](x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\varphi(y)\,dy.$$

Представляя $f(x)$ в виде $\mathcal{F}f(x) + \mathcal{N}f$, получим

$$\begin{aligned}
[f * \varphi](x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big((\mathcal{F}f)(x-y) + \mathcal{N}f\Big)\varphi(y)\,dy = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{F}f)(x-y)\varphi(y)\,dy + \mathcal{N}f \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)\,dy = \\
&= [\mathcal{F}f * \varphi](x) + \mathcal{N}f \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\,dy.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

По теореме об интегрируемости свёртки $[\mathcal{F}f * \varphi] \in L_1(\mathbb{R}^N)$, поэтому можно заключить, что $[f * \varphi] \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\Big([f * \varphi]\Big) &= [\mathcal{F}f * \varphi], \\ \mathcal{N}\Big([f * \varphi]\Big) &= \mathcal{N}f \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\, dy. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Очевидно, что операция (6.5) является симметричной и билинейной. При фиксированной функции φ её можно рассматривать как оператор в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 6.3. *Оператор* $\mathcal{C}_\varphi f = [f * \varphi]$*, определённый выражением* (6.5)*, является линейным компактным оператором с нормой* $\|\mathcal{C}_\varphi\| = \|\varphi\|_{L_1}$.

Доказательство. Линейность оператора $\mathcal{C}_\varphi$ очевидна. Оценим норму образа функции $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ под действием этого оператора, применив теорему Фубини для смены порядка интегрирования:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}_\varphi f\|_{\widehat{L_1}} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|[\mathcal{F}f * \varphi](x)\Big|\, dx + \left|\mathcal{N}f \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\, dy\right| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|(\mathcal{F}f)(x-y)\Big| \cdot |\varphi(y)|\, dy\, dx + |\mathcal{N}f| \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)|\, dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)| \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|(\mathcal{F}f)(x-y)\Big|\, dx \right) dy + |\mathcal{N}f| \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)|\, dy = \\ &= \|\mathcal{F}f\|_{L_1} \|\varphi\|_{L_1} + |\mathcal{N}f| \cdot \|\varphi\|_{L_1} = \|\varphi\|_{L_1} \|f\|_{\widehat{L_1}}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Покажем, что оценку (6.7) невозможно улучшить.

Пусть $B_\delta = \Big\{x \in \mathbb{R}^N \;\Big|\; \|x\|_{\mathbb{R}^N} \leqslant \delta\Big\}$. Определим функцию

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(B_\delta)}, & x \in B_\delta, \\ 0, & x \notin B_\delta. \end{cases}$$

Ясно, что $f_\delta \in L_1(\mathbb{R}^N) \subset \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. При этом $\mathcal{N}f_\delta = 0$ и $\|f_\delta\|_{\widehat{L_1}} = \|f_\delta\|_{L_1} = 1$. Оператор $\mathcal{C}_\varphi$ действует на f_δ следующим образом:

$$\mathcal{C}_\varphi f_\delta = \frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{B_\delta} \varphi(x-y)\, dy.$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
\|\varphi - \mathcal{C}_\varphi f_\delta\|_{\widehat{L_1}} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\varphi(x) - \frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{B_\delta} \varphi(x-y)\,dy\right| dx = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{B_\delta} \Big(\varphi(x) - \varphi(x-y)\Big)\,dy\right| dx \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{B_\delta} |\varphi(x) - \varphi(x-y)|\,dy\,dx = \\
&= \frac{1}{\mu(B_\delta)} \int\limits_{B_\delta} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x) - \varphi(x-y)|\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Здесь смена порядка интегрирования обусловлена теоремой Фубини. По лемме 5.2 для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что, как только $\|y\|_{\mathbb{R}^N} < \delta$,

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x) - \varphi(x-y)|\,dy < \varepsilon.
$$

Значит, если выбрать δ таким образом, то

$$
\|\varphi - \mathcal{C}_\varphi f_\delta\|_{\widehat{L_1}} < \frac{1}{B_\delta} \int\limits_{B_\delta} \varepsilon\,dy = \varepsilon.
$$

Выходит,

$$
\mathcal{C}_\varphi f_\delta \xrightarrow[\delta \to 0+0]{\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)} \varphi,
$$

откуда следует, что

$$
\|C_\varphi f_\delta\|_{\widehat{L_1}} \xrightarrow[\delta \to 0+0]{} \|\varphi\|_{\widehat{L_1}} = \|\varphi\|_{L_1} \|f_\delta\|_{\widehat{L_1}},
$$

а значит, исходя из замечания 5.6, $\|\mathcal{C}_\varphi\| = \|\varphi\|_{\widehat{L_1}}$.

Осталось доказать компактность оператора $\mathcal{C}_\varphi$. В силу линейности для этого достаточно показать, что образ единичного шара под действием $\mathcal{C}_\varphi$ предкомпактен в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. Пусть $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ и $\|f\|_{\widehat{L_1}} \leqslant 1$, тогда

$$
\|\mathcal{C}_\varphi f\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|\mathcal{C}_\varphi\| \cdot \|f\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|\varphi\|_{L_1}.
$$

Для $h \in \mathbb{R}^N$ рассмотрим выражение:

$$
\begin{aligned}
I(h) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\Big(\mathcal{F}\big(\mathcal{C}_\varphi f\big)\Big)(x+h) - \Big(\mathcal{F}\big(\mathcal{C}_\varphi f\big)\Big)(x)\right| dx = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x+h-y)\big(\mathcal{F}f\big)(y)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)\big(\mathcal{F}f\big)(y)\,dy\right| dx =
\end{aligned}
$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\varphi(x+h-y) - \varphi(x-y)\Big) \big(\mathcal{F}f\big)(y)\, dy \right| dx.$$

Применяя теорему Фубини для смены порядка интегрирования, можно заключить, что

$$I(h) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|\varphi(x+h-y) - \varphi(x-y)\Big| \cdot \Big|\big(\mathcal{F}f\big)(y)\Big|\, dy\, dx =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|\varphi(x+h-y) - \varphi(x-y)\Big|\, dx \right) \cdot \Big|\big(\mathcal{F}f\big)(y)\Big|\, dy =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|\varphi(x+h) - \varphi(x)\Big|\, dx \right) \cdot \Big|\big(\mathcal{F}f\big)(y)\Big|\, dy.$$

Поскольку φ интегрируема, то по лемме 5.2 для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что, как только $\|h\|_{\mathbb{R}^N} < \delta$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

При таком выборе h будем иметь

$$I(h) < \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big|\big(\mathcal{F}f\big)(y)\Big|\, dy = \varepsilon \|\mathcal{F}f\|_{L_1} \leqslant \varepsilon \|f\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \varepsilon.$$

Итак, для образа единичного шара под действием оператора $\mathcal{C}_\varphi$ выполнены все условия теоремы 1, что эквивалентно его предкомпактности и означает компактность оператора $\mathcal{C}_\varphi$. $\square$

Теперь рассмотрим аналог оператора свёртки в пространстве $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$. Пусть набор функций $\left\{\varphi_{ij} \mid i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right\}$ является подмножеством $L_1(\mathbb{R}^N)$. Определим оператор $\mathcal{C}$, действующий по правилу

$$\mathcal{C}F = \begin{bmatrix} [\varphi_{11} * F_{11}] & [\varphi_{12} * F_{12}] & \dots & [\varphi_{1n} * F_{1n}] \\ [\varphi_{21} * F_{21}] & [\varphi_{22} * F_{22}] & \dots & [\varphi_{2n} * F_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\varphi_{m1} * F_{m1}] & [\varphi_{m2} * F_{m2}] & \dots & [\varphi_{mn} * F_{mn}] \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Лемма 6.4. *Оператор $\mathcal{C}$ является линейным компактным оператором в пространстве $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ с нормой $\|\mathcal{C}\| = \max\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\varphi_{ij}\|_{L_1}$.*

Доказательство. Линейность $\mathcal{C}$ и принадлежность его образа пространству $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ следуют из свойств свёртки в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. Найдём норму рассматриваемого оператора. Пусть $F \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$, тогда, используя лемму 6.3, получим

$$\|\mathcal{C}F\|_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|[\varphi_{ij} * F_{ij}]\right\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_{ij}\|_{L_1}\|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}\|\varphi_{ij}\|_{L_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}} = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}\|\varphi_{ij}\|_{L_1}\cdot\|F\|_{n\times n}.$$

Покажем, что данная оценка не может быть улучшена. Пусть

$$\max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}\|\varphi_{ij}\|_{L_1} = \|\varphi_{pq}\|_{\widehat{L_1}}.$$

Исходя из леммы 6.3 и замечания 5.6, найдётся такая функция $f_\varepsilon \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, что

$$\|f_\varepsilon\|_{\widehat{L_1}} = 1,$$
$$\left\|[\varphi_{pq} * f_\varepsilon]\right\|_{\widehat{L_1}} > \|\varphi_{pq}\|_{L_1}\|f_\varepsilon\|_{\widehat{L_1}} - \varepsilon.$$

Рассмотрим элемент $F^\varepsilon \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ вида

$$F^\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & F^\varepsilon_{pq} & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где все компоненты, кроме F^ε_{pq}, равны нулю, а $F^\varepsilon_{pq} = f_\varepsilon$. Очевидно, $\|F^\varepsilon\|_{n\times n} = 1$. Выходит, что

$$\|\mathcal{C}F^\varepsilon\|_{n\times n} = \left\|[\varphi_{pq} * F^\varepsilon_{pq}]\right\|_{\widehat{L_1}} = \left\|[\varphi_{pq} * f_\varepsilon]\right\|_{\widehat{L_1}} > \|\varphi_{pq}\|_{L_1}\|f_\varepsilon\|_{\widehat{L_1}} + \varepsilon =$$
$$= \|\varphi_{pq}\|_{L_1} + \varepsilon = \|\varphi_{pq}\|_{L_1}\|F^\varepsilon\|_{n\times n} + \varepsilon.$$

По замечанию 5.6 это означает, что

$$\|\mathcal{C}\| = \|\varphi_{pq}\|_{L_1} = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}\|\varphi_{ij}\|_{L_1}.$$

Докажем, что оператор компактен. В силу линейности, а также леммы 3.3 достаточно показать, что образ единичного шара пространства $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ под действием оператора $\mathcal{C}_{ij}$ предкомпактен в $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ при любом $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, где $\mathcal{C}_{ij}$ определяется выражением

$$\mathcal{C}_{ij}F = (\mathcal{C}F)_{ij}, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}.$$

Обозначим
$$B_1 = \Big\{ F \in \Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n} \;\Big|\; \|F\|_{n\times n} \leqslant 1 \Big\}.$$
Ясно, что
$$\mathcal{C}_{ij}F = [\varphi_{ij} * F_{ij}] = \mathcal{C}_{\varphi_{ij}} F_{ij}.$$

Однако по лемме 6.3 оператор $\mathcal{C}_{\varphi_{ij}}$ компактен, значит, он отображает любое ограниченное множество в предкомпактное. При этом множество $M = \{F_{ij}\}_{F\in B_1}$ ограничено, выходит, множество
$$\mathcal{C}_{\varphi_{ij}} M = \big\{\mathcal{C}_{\varphi_{ij}} f\big\}_{f\in M} = \big\{\mathcal{C}_{ij}F\big\}_{F\in B_1}$$
предкомпактно, то есть оператор $\mathcal{C}_{ij}$ отображает единичный шар в предкомпактное множество и является компактным. $\square$

6.2 Квадратичные операторы

6.2.1 Определение и свойства

Помимо линейных операторов нам также понадобятся так называемые квадратичные операторы, однако для начала нам придётся ввести понятие билинейного оператора.

Определение 6.1. *Пусть X_1, X_2 и Y — линейные пространства над полем вещественных чисел. Будем называть отображение $\mathcal{B}:\ X_1 \times X_2 \to Y$ билинейным оператором, если*
$$\forall x, y \in X_1, \quad \forall z \in X_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathcal{B}(x + \lambda y, z) = \mathcal{B}(x, z) + \lambda \mathcal{B}(y, z),$$
$$\forall x \in X_1, \quad \forall y, z \in X_2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathcal{B}(x, y + \lambda z) = \mathcal{B}(x, y) + \lambda \mathcal{B}(x, z).$$
Если $X_1 = X_2 = Y = Z$, то мы будем говорить, что $\mathcal{B}$ действует в пространстве Z.

Для билинейных операторов, действующих в банаховых пространствах, определено понятие нормы.

Определение 6.2. *Пусть в банаховых пространствах $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ и $\mathbb{B}_3$ заданы нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_3$ соответственно. Нормой билинейного оператора $\mathcal{B}$, действующего из $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ в $\mathbb{B}_3$, будем называть число*
$$\|\mathcal{B}\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{B}_1\setminus\{\theta_1\}\\ y\in\mathbb{B}_2\setminus\{\theta_2\}}} \frac{\|\mathcal{B}(x,y)\|_3}{\|x\|_1\|y\|_2} = \sup_{\substack{\|x\|_1=1\\ \|y\|_2=1}} \|\mathcal{B}(x,y)\|_3,$$
где θ_1 и θ_2 — нулевые элементы пространств $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ соответственно.

Замечание 6.3. *Исходя из понятия точной верхней грани, определение нормы били-*

нейного оператора $\mathcal{B}$ эквивалентно совокупности следующих фактов:

$$\forall x \in \mathbb{B}_1\ \forall y \in \mathbb{B}_2 \quad \|\mathcal{B}(x,y)\|_3 \leqslant \|\mathcal{B}\| \cdot \|x\|_1 \|y\|_2,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 : \quad \begin{cases} \|x_\varepsilon\|_1 = 1, \\ \|y_\varepsilon\|_2 = 1, \\ \|\mathcal{B}\| \cdot \|x_\varepsilon\|_1 \|y_\varepsilon\|_2 - \|\mathcal{B}(x_\varepsilon, y_\varepsilon)\|_3 < \varepsilon. \end{cases}$$

Определение 6.3. *Будем называть оператор $\mathcal{A}: X \to Y$ квадратичным, если существует такой билинейный оператор $\mathcal{B}: X \times X \to Y$, что*

$$\forall x \in X \quad \mathcal{A}x = \mathcal{B}(x,x).$$

При этом мы будем говорить, что $\mathcal{B}$ порождает $\mathcal{A}$, а $\mathcal{A}$ порождён $\mathcal{B}$.

Квадратичные операторы, очевидно, не являются линейными, поэтому мы не можем говорить об их норме в классическом смысле. Однако мы можем ввести следующее понятие.

Определение 6.4. *Будем называть K-нормой квадратичного оператора $\mathcal{A}$, действующего из банахова пространства $\mathbb{B}_1$ с нормой $\|\cdot\|_1$ в банахово пространство $\mathbb{B}_2$ с нормой $\|\cdot\|_2$, число*

$$\|\mathcal{A}\|_K = \sup_{x \in \mathbb{B}_1 \setminus \{\theta_1\}} \frac{\|\mathcal{A}x\|_2}{\|x\|_1^2} = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|\mathcal{A}x\|_2.$$

Замечание 6.4. *K-норма квадратичного оператора, действующего в банаховых пространствах, не превосходит нормы порождающего его билинейного оператора.*

Лемма 6.5. *Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно, а $\mathcal{A}: \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ — квадратичный оператор, порождённый билинейным оператором $\mathcal{B}$. Тогда для любых элементов $x, y \in \mathbb{B}_1$ имеет место оценка*

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_2 \leqslant \|\mathcal{B}\| \Big(\|x\|_1 + \|y\|_1 \Big) \|x - y\|_1.$$

Доказательство. Исходя из билинейности оператора $\mathcal{B}$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x,x) - \mathcal{B}(y,y) &= \mathcal{B}(x,x) - \mathcal{B}(x,y) + \mathcal{B}(x,y) - \mathcal{B}(y,y) = \\ &= \mathcal{B}(x, x-y) + \mathcal{B}(x-y, y). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_2 &= \|\mathcal{B}(x, x-y) + \mathcal{B}(x-y, y)\|_2 \leqslant \|\mathcal{B}(x, x-y)\|_2 + \|\mathcal{B}(x-y, y)\|_2 \leqslant \\ &\leqslant \|\mathcal{B}\| \cdot \|x\|_1 \|x-y\|_1 + \|\mathcal{B}\| \cdot \|x-y\|_1 \|y\|_1 = \\ &= \|\mathcal{B}\| \Big(\|x\|_1 + \|y\|_1 \Big) \|x-y\|_1. \end{aligned}$$

□

Следствие 6.1. *Действующий в банаховых пространствах квадратичный оператор $\mathcal{A}$, порождённый билинейным оператором $\mathcal{B}$, является липшицевым в любом шаре радиуса R с центром в нуле с константой липшицевости $L = 2R\|\mathcal{B}\|$.*

Приведём примеры квадратичных операторов, действующих в $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$.

6.2.2 Оператор самосвёртки

Пусть $\left\{\varphi_{ij} \mid i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}\right\} \subset BL_1(\mathbb{R}^N)$. Рассмотрим билинейный оператор $\mathcal{S}$, действующий на элементы $F, G \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ по правилу

$$\mathcal{S}(F,G) = \left[\sum_{k=1}^{n}\Big([\varphi_{ik}F_{ik} * G_{kj}] + [\varphi_{jk}G_{kj} * F_{ik}]\Big)\right]_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,n}}. \tag{6.9}$$

Покажем, что данный оператор действует в $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$. Действительно, если $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^N)$, а $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, то

$$\varphi(x)f(x) = \varphi(x)\Big(\mathcal{F}f + \mathcal{N}f\Big) = \varphi(x)\mathcal{F}f(x) + \mathcal{N}f\cdot\varphi(x).$$

Исходя из следствия 5.1, произведение $\varphi\mathcal{F}f$ является интегрируемой функцией. Очевидно, что $\mathcal{N}f\cdot\varphi(x)$ также интегрируема, то есть $\varphi f \in L_1(\mathbb{R}^N)$. Таким образом, из представления (6.5) получаем, что $[\varphi f * g] \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, причём

$$\mathcal{F}\Big([\varphi f * g]\Big) = [\varphi f * \mathcal{F}g],$$
$$\mathcal{N}\Big([\varphi f * g]\Big) = \mathcal{N}g\int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)f(y)\,dy.$$

Из этого следует, что каждый компонент образа элементов F и G под действием оператора $\mathcal{S}$ является функцией из $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, то есть $\mathcal{S}(F,G) \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$.

Проведём оценку нормы данного билинейного оператора.

Лемма 6.6. *Норма билинейного оператора $\mathcal{S}$ не превосходит числа $2\max\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}\|\varphi_{ij}\|_{BL_1}$.*

Доказательство. Для начала рассмотрим выражение $[\varphi f * g]$, в котором $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^N)$, а $f, g \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. Из леммы 6.3 следует, что

$$\Big\|[\varphi f * g]\Big\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|f\varphi\|_{L_1}\|g\|_{\widehat{L_1}}. \tag{6.10}$$

Однако

$$\|f\varphi\|_{L_1} = \Big\langle |f|, |\varphi| \Big\rangle = d_{|\varphi|}\big(|f|\big),$$

поэтому по лемме 6.1 о норме функционала скалярного произведения

$$\|f\varphi\|_{L_1} \leqslant \Big\||\varphi|\Big\|^*_{BL_1}\Big\||f|\Big\|_{\widehat{L_1}} = \|\varphi\|_{BL_1}\|f\|_{\widehat{L_1}}. \tag{6.11}$$

Таким образом,

$$\Big\|[\varphi f * g]\Big\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|\varphi\|_{BL_1}\|f\|_{\widehat{L_1}}\|g\|_{\widehat{L_1}}. \tag{6.12}$$

При этом данная оценка является точной, поскольку оценки (6.10) и (6.11) точны в силу лемм 6.3 и 6.1.

Пусть теперь $F, G \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$. Исходя из оценки (6.12), получим, что

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k=1}^{n}\Big([\varphi_{ik}F_{ik} * G_{kj}] + [\varphi_{jk}G_{kj} * F_{ik}]\Big)\right\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \\
&\quad\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\Big\|[\varphi_{ik}F_{ik} * G_{kj}]\Big\|_{\widehat{L_1}} + \Big\|[\varphi_{jk}G_{kj} * F_{ik}]\Big\|_{\widehat{L_1}}\right) \leqslant \\
&\quad\leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(\|\varphi_{ik}\|_{BL_1}\|F_{ik}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{kj}\|_{\widehat{L_1}} + \|\varphi_{jk}\|_{BL_1}\|G_{kj}\|_{\widehat{L_1}}\|F_{ik}\|_{\widehat{L_1}}\Big) \leqslant \\
&\quad\leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(\|\varphi_{ik}\|_{BL_1} + \|\varphi_{jk}\|_{BL_1}\Big)\|F_{ik}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{kj}\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \\
&\quad\leqslant 2\max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}}}\|\varphi_{pq}\|_{BL_1}\sum_{k=1}^{n}\|F_{ik}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{kj}\|_{\widehat{L_1}}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}(F,G)\|_{n\times n} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}\Big([\varphi_{ik}F_{ik} * G_{kj}] + [\varphi_{jk}G_{kj} * F_{ik}]\Big)\right\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \\
&\leqslant 2\max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}}}\|\varphi_{pq}\|_{BL_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|F_{ik}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{kj}\|_{\widehat{L_1}}.
\end{aligned}$$

Ясно, что для норм любых элементов F и G из $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ в силу дистрибутивности верно следующее:

$$\begin{aligned}
\|F\|_{n\times n}\|G\|_{n\times n} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}}\right)\cdot\left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\|G_{pq}\|_{\widehat{L_1}}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{pq}\|_{\widehat{L_1}},
\end{aligned} \tag{6.13}$$

поэтому

$$\|\mathcal{S}(F,G)\|_{n\times n} \leqslant 2\max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}}}\|\varphi_{pq}\|_{BL_1}\|F\|_{n\times n}\|G\|_{n\times n},$$

что в силу произвольности F и G означает, что

$$\|\mathcal{S}\| \leqslant 2\max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}}}\|\varphi_{pq}\|_{BL_1}.$$

□

6.2.3 Свёрточно–мультипликативный оператор

Пусть $\{\varphi_{ij} \mid i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\} \subset BL_1(\mathbb{R}^N)$. Определим билинейный оператор $\mathcal{P}$ следующим образом:

$$\Big(\mathcal{P}(F,G)\Big)(x) = \left[\sum_{k=1}^{n} \Big([\varphi_{ik} * F_{jk}](-x) + [\varphi_{jk} * F_{ik}](x) \Big) G_{ij}(x) \right]_{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,n}}, \tag{6.14}$$

где $F, G \in \Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$. Покажем, что данный оператор действует в $\Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$.

Для любых функций $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$ и $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^N)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}
\Big|[f * \varphi](x)\Big| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)\Big((\mathcal{F}f)(y) + \mathcal{N}f\Big)\, dy \right| \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x-y)| \cdot |(\mathcal{F}f)(y)|\, dy + |\mathcal{N}f| \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)|\, dy \leqslant \\
&\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| \cdot \|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f| \cdot \|\varphi\|_{L_1} \leqslant \|\varphi\|_{BL_1} \|f\|_{\widehat{L_1}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, свёртка f и φ является ограниченной функцией. Из этого, в частности, следует, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} \Big| \mathcal{F}\big([f * \varphi]\big) \Big| < +\infty,$$

то есть $\mathcal{F}\big([f * \varphi]\big) \in BL_1(\mathbb{R}^N)$. Пусть теперь $f, g \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, причём $\mathcal{F}f \in BL_1(\mathbb{R}^N)$. Рассмотрим их произведение:

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \Big(\mathcal{F}f(x) + \mathcal{N}f\Big) \cdot \Big(\mathcal{F}g(x) + \mathcal{N}g\Big) = \\
&= \mathcal{F}f(x) \cdot \mathcal{F}g(x) + \mathcal{N}g\mathcal{F}f(x) + \mathcal{N}f\mathcal{F}g(x) + \mathcal{N}f\mathcal{N}g.
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{F}f \in BL_1(\mathbb{R}^N)$, то по следствию 5.1 функция $\mathcal{F}f\mathcal{F}g$ интегрируема. Очевидно, что функции $\mathcal{N}g\mathcal{F}f$ и $\mathcal{N}f\mathcal{F}g$ также интегрируемы. Значит, $fg \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, причём

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\big(fg\big) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g + \mathcal{N}g\mathcal{F}f + \mathcal{N}f\mathcal{F}g, \\
&\mathcal{N}\big(fg\big) = \mathcal{N}f\mathcal{N}g.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Исходя из приведённых выше фактов, заключаем, что все компоненты элемента $\mathcal{P}(F,G)$ представляют собой функции из $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, то есть образ оператора $\mathcal{P}$ лежит в $\Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$.

Оценим норму рассматриваемого билинейного оператора. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 6.7. *Норма билинейного оператора $\mathcal{P}$ не превосходит числа* $2 \max\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\varphi_{ij}\|_{BL_1}$.

Доказательство. Пусть $f, g \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^n)$ и при этом $\mathcal{F}f \in BL_1(\mathbb{R}^N)$. Воспользуемся представлением (6.15) для оценки нормы fg.

$$\begin{aligned}\Big\|\mathcal{F}(fg)\Big\|_{L_1} &= \Big\|\mathcal{F}f\mathcal{F}g + \mathcal{N}g\mathcal{F}f + \mathcal{N}f\mathcal{F}g\Big\|_{L_1} \leqslant \\ &\leqslant \Big\|\mathcal{F}f\mathcal{F}g\Big\|_{L_1} + \Big\|\mathcal{N}g\mathcal{F}f\Big\|_{L_1} + \Big\|\mathcal{N}f\mathcal{F}g\Big\|_{L_1} \leqslant \\ &\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f| \cdot \|\mathcal{F}g\|_{L_1} + |\mathcal{N}g| \cdot \|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f| \cdot \|\mathcal{F}g\|_{L_1},\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\|fg\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f| \cdot \|\mathcal{F}g\|_{L_1} + |\mathcal{N}g| \cdot \|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f| \cdot \|\mathcal{F}g\|_{L_1} + |\mathcal{N}f| \cdot |\mathcal{N}g| \leqslant \\ \leqslant \|g\|_{\widehat{L_1}}\Big(\|\mathcal{F}f\|_{BL_1} + |\mathcal{N}f|\Big).\end{aligned}$$

Положим $\|f\|_{B\widehat{L_1}} = \|\mathcal{F}f\|_{BL_1} + |\mathcal{N}f|$, тогда последнюю оценку можно переписать в виде

$$\|fg\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|f\|_{B\widehat{L_1}}\|g\|_{\widehat{L_1}}. \tag{6.16}$$

Будем для удобства обозначать $(\mathcal{I}f)(x) = f(-x)$. Очевидно, что $\|\mathcal{I}f\|_{\widehat{L_1}} = \|f\|_{\widehat{L_1}}$, а существенные супремумы функций $|f|$ и $|\mathcal{I}f|$ совпадают. Поэтому $\|\mathcal{I}f\|_{B\widehat{L_1}} = \|f\|_{B\widehat{L_1}}$, и из оценки (6.16) следует, что

$$\|\mathcal{I}f \cdot g\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|f\|_{B\widehat{L_1}}\|g\|_{\widehat{L_1}}, \tag{6.17}$$

Пусть теперь $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^N)$, а $f \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, тогда $\mathcal{F}\big([\varphi * f]\big) \in BL_1(\mathbb{R}^N)$. Из представления (6.6) следует, что $\mathcal{F}\big([\varphi * f]\big) = [\varphi * \mathcal{F}f]$, а кроме того,

$$\begin{aligned}\Big|[\varphi * \mathcal{F}f](x)\Big| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)(\mathcal{F}f)(y)\,dy\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x-y)| \cdot \Big|(\mathcal{F}f)(y)\Big|\,dy \leqslant \\ \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| \cdot \|\mathcal{F}f\|_{L_1}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} \Big|\mathcal{F}\big([\varphi * f]\big)\Big| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\varphi| \cdot \|\mathcal{F}f\|_{L_1}.$$

С другой стороны, по лемме 6.3

$$\Big\|\mathcal{F}\big([\varphi * f]\big)\Big\|_{L_1} = \Big\|[\varphi * \mathcal{F}f]\Big\|_{L_1} \leqslant \|\varphi\|_{L_1}\|\mathcal{F}f\|_{L_1},$$

а значит,

$$\Big\|\mathcal{F}\big([\varphi * f]\big)\Big\|_{BL_1} \leqslant \|\varphi\|_{BL_1}\|\mathcal{F}f\|_{L_1},$$

то есть

$$\Big\|[\varphi * f]\Big\|_{B\widehat{L_1}} = \Big\|\mathcal{F}\big([\varphi * f]\big)\Big\|_{BL_1} + \Big|\mathcal{N}\big([\varphi * f]\big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{BL_1}\|\mathcal{F}f\|_{L_1} + |\mathcal{N}f| \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)|\, dy \leqslant \tag{6.18}$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{BL_1}\|f\|_{\widehat{L_1}}.$$

Исходя из оценок (6.16), (6.17) и (6.18), мы можем заключить, что, если $f, g \in \widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$, а $\varphi \in BL_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\Big\|[\varphi * f]g\Big\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|\varphi\|_{BL_1}\|f\|_{\widehat{L_1}}\|g\|_{\widehat{L_1}},$$
$$\Big\|\mathcal{I}\big([\varphi * f]\big)g\Big\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|\varphi\|_{BL_1}\|f\|_{\widehat{L_1}}\|g\|_{\widehat{L_1}}$$

Поэтому, если $F, G \in \Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$, то

$$\Big\|\Big(\mathcal{P}(F,G)\Big)_{ij}\Big\|_{\widehat{L_1}} = \Big\|\sum_{k=1}^{n}\Big(\mathcal{I}\Big([\varphi_{ik} * F_{jk}]\Big) + [\varphi_{jk} * F_{ik}]\Big)G_{ij}\Big\|_{\widehat{L_1}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\Big\|\mathcal{I}\Big([\varphi_{ik} * F_{jk}]\Big)G_{ij}\Big\|_{\widehat{L_1}} + \Big\|[\varphi_{jk} * F_{ik}]G_{ij}\Big\|_{\widehat{L_1}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big(\|\varphi_{ik}\|_{BL_1}\|F_{jk}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{ij}\|_{\widehat{L_1}} + \|\varphi_{jk}\|_{BL_1}\|F_{ik}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{ij}\|_{\widehat{L_1}}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}}}\|\varphi_{pq}\|_{BL_1}\sum_{k=1}^{n}\Big(\|F_{jk}\|_{\widehat{L_1}} + \|F_{ik}\|_{\widehat{L_1}}\Big)\|G_{ij}\|_{\widehat{L_1}}.$$

Из (6.13) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|F_{jk}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{ij}\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|F\|_{n\times n}\|G\|_{n\times n},$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|F_{ik}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{ij}\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \|F\|_{n\times n}\|G\|_{n\times n}.$$

Таким образом,

$$\Big\|\mathcal{P}(F,G)\Big\|_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big\|\Big(\mathcal{P}(F,G)\Big)_{ij}\Big\|_{\widehat{L_1}} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}}}\|\varphi_{pq}\|_{BL_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|F_{jk}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{ij}\|_{\widehat{L_1}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|F_{ik}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{ij}\|_{\widehat{L_1}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}}}\|\varphi_{pq}\|_{BL_1}\|F\|_{n\times n}\|G\|_{n\times n},$$

что в силу произвольности F и G означает, что

$$\|\mathcal{P}\| \leqslant 2 \max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}}} \|\varphi_{pq}\|_{BL_1}.$$

$\square$

6.2.4 Скалярно–матричный оператор

Пусть задан набор числовых констант $\left\{\lambda_{ijk} \in \mathbb{R} \;\middle|\; i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n}\right\}$. Рассмотрим билинейный оператор, действующий на элементы $F, G \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ следующим образом:

$$\mathcal{R}(F,G) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}F_{11}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{11k}\mathcal{N}G_{1k} & \mathcal{N}F_{21}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{12k}\mathcal{N}G_{1k} & \dots & \mathcal{N}F_{n1}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{1nk}\mathcal{N}G_{1k} \\ \mathcal{N}F_{12}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{21k}\mathcal{N}G_{2k} & \mathcal{N}F_{22}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{22k}\mathcal{N}G_{2k} & \dots & \mathcal{N}F_{n2}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{2nk}\mathcal{N}G_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{N}F_{1n}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{n1k}\mathcal{N}G_{nk} & \mathcal{N}F_{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{n2k}\mathcal{N}G_{nk} & \dots & \mathcal{N}F_{nn}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{nnk}\mathcal{N}G_{nk} \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

Видно, что образ данного оператора лежит в пространстве числовых матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$, поэтому, поскольку $\mathbb{R} \subset \widehat{L_1}(\mathbb{R}^n)$, он действует в $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$.

Лемма 6.8. *Норма билинейного оператора $\mathcal{R}$ не превосходит числа*

$$\max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}\\ r=\overline{1,n}}} |\lambda_{pqr}|.$$

Доказательство. Пусть $F, G \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$, тогда

$$\left|\mathcal{N}F_{ji}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ijk}\mathcal{N}G_{ik}\right| \leqslant |\mathcal{N}F_{ji}|\sum_{k=1}^{n}|\lambda_{ijk}|\cdot|\mathcal{N}G_{ik}| \leqslant \|F_{ji}\|_{\widehat{L_1}}\sum_{k=1}^{n}|\lambda_{ijk}|\cdot\|G_{ik}\|_{\widehat{L_1}}.$$

Поэтому верна следующая оценка нормы образа F и G под действием оператора $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \Big\|\mathcal{R}(F,G)\Big\|_{n\times n} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\mathcal{N}\Big(\mathcal{R}(F,G)\Big)_{ij}\right| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\mathcal{N}F_{ji}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ijk}\mathcal{N}G_{ik}\right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|\lambda_{ijk}|\cdot\|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{ik}\|_{\widehat{L_1}} \leqslant \max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}\\ r=\overline{1,n}}}|\lambda_{pqr}|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|F_{ij}\|_{\widehat{L_1}}\|G_{ik}\|_{\widehat{L_1}}. \end{aligned}$$

В силу (6.13) это означает, что

$$\left\|\mathcal{R}(F,G)\right\|_{n\times n} \leqslant \max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}\\ r=\overline{1,n}}} |\lambda_{pqr}| \cdot \|F\|_{n\times n}\|G\|_{n\times n}.$$

Поскольку элементы F и G были выбраны произвольно, то из этого следует, что

$$\|\mathcal{R}\| \leqslant \max_{\substack{p=\overline{1,n}\\ q=\overline{1,n}\\ r=\overline{1,n}}} |\lambda_{pqr}|.$$

□

Следствие 6.2. *Квадратичный оператор, порождённый билинейным оператором $\mathcal{R}$, действует в конечномерное пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$, а кроме того, переводит любое ограниченное множество в ограниченное в силу конечности его K-нормы. Из этого следует, что данный оператор компактен, поскольку в конечномерном пространстве любое ограниченное множество предкомпактно.*

7 Система уравнений равновесия в пространстве $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$

7.1 Оператор равновесия

Теперь мы готовы переформулировать систему (2.21) в терминах пространства $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$. Введём новые неизвестные функции

$$Q_{ij} = \frac{C_{ij}}{N_i}.$$

Замечание 2.8 о поведении пространственных моментов на бесконечности постулирует, что

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N}\to+\infty} C_{ij}(x) = N_iN_j,$$

поэтому

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^N}\to+\infty} Q_{ij}(x) = N_j.$$

Это наводит на мысль, что неизвестные функции Q_{ij} можно искать в пространстве $\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)$. В таком случае можно сказать, что $\mathcal{N}Q_{ij} = N_j$.

Будем всюду далее дополнительно считать, что ядра конкуренции и разброса принадлежат множеству существенно ограниченных суммируемых функций $BL_1(\mathbb{R}^N)$. Разделим обе части уравнений (2.21) на N_i. Получим

$$\begin{cases} 0 = 2\delta_{ij}\overline{m}_i(x) + \left[\left(\overline{m}_i + \overline{m}_j\right) * \dfrac{C_{ij}}{N_i}\right](x) - \\ \quad - \left(\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1-\widetilde{\alpha})(d_i + d_j) + \overline{w}_{ij}(x) + \overline{w}_{ji}(x)\right)\dfrac{C_{ij}(x)}{N_i} - \\ \quad - \widetilde{\beta}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\overline{w}_{ik} * \dfrac{C_{jk}}{N_j}\right](-x) + \left[\overline{w}_{jk} * \dfrac{C_{ik}}{N_i}\right](x)\right)\dfrac{C_{ij}(x)}{N_i} - \\ \quad - \widetilde{\gamma}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\overline{w}_{ik}\dfrac{C_{ik}}{N_i} * \dfrac{C_{kj}}{N_k}\right](x) + \left[\overline{w}_{jk}\dfrac{C_{kj}}{N_k} * \dfrac{C_{ik}}{N_i}\right](x)\right) - \\ \quad - \widetilde{\beta}N_j\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(s_{ik} + s_{jk})N_k, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

В новых обозначениях неизвестных данная система записывается следующим образом:

$$\begin{cases} 0 = 2\delta_{ij}\overline{m}_i(x) + \left[\left(\overline{m}_i + \overline{m}_j\right) * Q_{ij}\right](x) - \\ \quad - \left(\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1-\widetilde{\alpha})(d_i + d_j) + \overline{w}_{ij}(x) + \overline{w}_{ji}(x)\right)Q_{ij}(x) - \\ \quad - \widetilde{\beta}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left([\overline{w}_{ik} * Q_{jk}](-x) + [\overline{w}_{jk} * Q_{ik}](x)\right)Q_{ij}(x) - \\ \quad - \widetilde{\gamma}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left([\overline{w}_{ik}Q_{ik} * Q_{kj}](x) + [\overline{w}_{jk}Q_{kj} * Q_{ik}](x)\right) - \\ \quad - \widetilde{\beta}\mathcal{N}Q_{ji}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(s_{ik} + s_{jk})\mathcal{N}Q_{ik}, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{7.1}$$

Перепишем (7.1) в операторной форме. Пусть

$$M = \begin{bmatrix} \overline{m}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{m}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{m}_n \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 2\overline{w}_{11} & \overline{w}_{12} + \overline{w}_{21} & \dots & \overline{w}_{1n} + \overline{w}_{n1} \\ \overline{w}_{21} + \overline{w}_{12} & 2\overline{w}_{22} & \dots & \overline{w}_{2n} + \overline{w}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{w}_{n1} + \overline{w}_{1n} & \overline{w}_{n2} + \overline{w}_{2n} & \dots & 2\overline{w}_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \left(2\widetilde{\alpha}b_1 + 2(1-\widetilde{\alpha})d_1\right)^{-1} & \dots & \left(\widetilde{\alpha}(b_1 + b_n) + (1-\widetilde{\alpha})(d_1 + d_n)\right)^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\widetilde{\alpha}(b_n + b_1) + (1-\widetilde{\alpha})(d_n + d_1)\right)^{-1} & \dots & \left(2\widetilde{\alpha}b_n + 2(1-\widetilde{\alpha})d_n\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть также $\mathcal{C}$ — оператор аналогичный оператору свёртки (6.8) с $\varphi_{ij} = \overline{m_i} + \overline{m}_j$; $\mathcal{S}$ — квадратичный оператор, порождённый билинейным оператором самосвёртки (6.9), для которого $\varphi_{ij} = \overline{w}_{ij}$; $\mathcal{P}$ — квадратичный оператор, порождённый билинейным свёрточно–

мультипликативным оператором (6.14), для которого $\varphi_{ij} = \overline{w}_{ij}$; а $\mathcal{R}$ — квадратичный оператор, порождённый билинейным скалярно–матричным оператором (6.19), для которого $\lambda_{ijk} = s_{ik} + s_{jk}$. Рассмотрим оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{E}F = \Omega \odot \Big(2M + \mathcal{C}F - W \odot F - \widetilde{\beta}\mathcal{P}F - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F\Big),$$

где под $\odot$ подразумевается покомпонентное умножение матриц. Нетрудно видеть, что операторное уравнение $Q = \mathcal{E}Q$ эквивалентно системе (7.1). В дальнейшем мы будем называть оператор $\mathcal{E}$ оператором равновесия.

Определение 7.1. *Неподвижной точкой отображения $\mathcal{A}$, действующего из множества X в X, называется элемент $x \in X$ такой, что $x = \mathcal{A}x$.*

Таким образом, мы свели задачу об отыскании равновесных пространственных моментов к задаче нахождения неподвижной точки оператора равновесия.

7.2 Существование неподвижной точки оператора равновесия

Прежде, чем переходить к исследованию существования неподвижной точки оператора равновесия, отметим следующий факт.

Лемма 7.1. *Неподвижная точка оператора равновесия не может быть нулевым элементом пространства $\Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$.*

Доказательство. Нулевой элемент пространства $\Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$ — это матрица

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{L_1} & \theta_{L_1} & \dots & \theta_{L_1} \\ \theta_{L_1} & \theta_{L_1} & \dots & \theta_{L_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{L_1} & \theta_{L_1} & \dots & \theta_{L_1} \end{bmatrix},$$

где θ_{L_1} — нулевой элемент пространства $L_1(\mathbb{R}^N)$. Рассмотрим действие оператора $\mathcal{E}$ на Θ покомпонентно. Пусть $i = \overline{1,n}$, тогда

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{E}\Theta\big)_{ii}(x) &= 2\overline{m}_i(x) + 2\big[\overline{m}_i * 0\big](x) - 2\overline{w}_{ii}(x)\cdot 0 - \\ &- \widetilde{\beta}\sum_{k=1}^{n}\Big([\overline{w}_{ik} * 0](-x) + [\overline{w}_{ik} * 0](x)\Big)\cdot 0 \\ &- \widetilde{\gamma}\sum_{k=1}^{n}\Big([\overline{w}_{ik}\cdot 0 * 0](-x) + [\overline{w}_{ik}\cdot 0 * 0](x)\Big) - \\ &- 2\widetilde{\beta}\cdot 0\cdot\sum_{k=1}^{n} s_{ik}\cdot 0 = 2\overline{m}_i(x). \end{aligned}$$

Поскольку по постановке задачи $b_i > 0$, а $\|m_i\|_{L_1} = 1$, то $\overline{m}_i = b_i m_i \neq \theta_{L_1}$. Выходит,

$\big(\mathcal{E}\Theta\big)_{ii} \neq \theta_{L_1} = \Theta_{ii}$, а значит, $\mathcal{E}\Theta \neq \Theta$, то есть Θ не является неподвижной точкой оператора равновесия. $\square$

В дальнейшем мы будем обозначать

$$\mu = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\overline{m}_i + \overline{m}_j\|_{L_1} = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} (b_i + b_j) = 2 \max_{i=\overline{1,n}} b_i,$$

$$\nu = 2 \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\overline{w}_{ij}\|_{BL_1},$$

$$\xi = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}\\ k=\overline{1,n}}} |s_{ik} + s_{jk}| = 2 \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} s_{ij},$$

$$\eta = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \|\overline{w}_{ij} + \overline{w}_{ji}\|_{BL_1},$$

$$\omega = \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} |\Omega_{ij}| = \left(\min_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \Big| \widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \widetilde{\alpha})(d_i + d_j) \Big| \right)^{-1}$$

Из построения модели следует, что μ и ω — положительные числа. В свою очередь, ν, ξ и η неотрицательны, причём они равны нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты агрессивности s_{ij} равны нулю. Мы также будем предполагать, что параметры модели и замыкания подобраны так, что величина ω определена корректно, то есть выполнено условие

$$\min_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \Big| \widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \widetilde{\alpha})(d_i + d_j) \Big| > 0. \tag{7.2}$$

Замечание 7.1. *Учитывая леммы 6.2, 6.4, 6.6, 6.7, 6.8, а также замечание 6.4, можно заключить, что для любого элемента* $F \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ *верны следующие оценки:*

$$\|W \odot F\|_{n\times n} \leqslant \eta \|F\|_{n\times n}, \tag{7.3}$$

$$\|\mathcal{C}F\|_{n\times n} \leqslant \mu \|F\|_{n\times n},$$

$$\|\mathcal{S}F\|_{n\times n} \leqslant \nu \|F\|^2_{n\times n},$$

$$\|\mathcal{P}F\|_{n\times n} \leqslant \nu \|F\|^2_{n\times n},$$

$$\|\mathcal{R}F\|_{n\times n} \leqslant \xi \|F\|^2_{n\times n}.$$

Замечание 7.2. *Исходя из следствия 6.1 и лемм 6.6, 6.7, 6.8, операторы* $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ *и* $\mathcal{R}$ *липшицевы в любом шаре радиуса* R *с центром в нуле. При этом константа липшицевости для операторов* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{P}$ *равна* $2\nu R$*, а константа липшицевости для оператора* $\mathcal{R}$ *равна* $2\xi R$*.*

Широко известны следующие принципы существования неподвижных точек.

Теорема (Принцип Банаха)**.** *Пусть оператор* $\mathcal{A}$ *действует в полном метрическом пространстве* X *с метрикой* ρ*, причём существует* $q \in [0;1)$ *такое, что для любых* $x, y \in X$ *выполнено условие*

$$\rho\big(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y\big) \leqslant q\rho(x, y), \tag{7.4}$$

тогда в X *существует и притом единственная неподвижная точка оператора* $\mathcal{A}$*.*

Доказательство. См. [9, с. 75]. □

Замечание 7.3. *Оператор* $\mathcal{A}$*, обладающий свойством* (7.4)*, называется сжимающим.*

Теорема (Принцип Лере–Шаудера)**.** *Пусть оператор* $\mathcal{A}$*, действующий в банаховом пространстве* $\mathbb{B}$*, является компактным и переводит некоторое замкнутое выпуклое ограниченное множество* $B \subset \mathbb{B}$ *в некоторое множество* $B' \subset B$*, тогда у* $\mathcal{A}$ *существует по крайней мере одна неподвижная точка в* B*.*

Доказательство. См. [5]. □

Используя данные теоремы, можно доказать более общий принцип существования неподвижной точки оператора, действующего в банаховом пространстве, который не является ни сжимающим, ни компактным.

Теорема 2 (Красносельский)**.** *Пусть операторы* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *действуют в некотором банаховом пространстве* $\mathbb{B}$*, причём* $\mathcal{A}$ *— компактный, а* $\mathcal{B}$ *— сжимающий. Пусть* $B \subset \mathbb{B}$ *является замкнутым выпуклым ограниченным множеством, причём*

$$\forall x \in B \ \forall y \in B \quad \mathcal{A}x + \mathcal{B}y \in B,$$

тогда у оператора $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ *существует по крайней мере одна неподвижная точка в* B*.*

Доказательство. См. [6]. □

Замечание 7.4. *Ясно, что при* $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ *рассмотренная теорема переходит в принцип Банаха, а при* $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ *— в принцип Лере–Шаудера. Здесь за* $\mathcal{O}$ *обозначен оператор, переводящий любой элемент в нулевой.*

Применим данную теорему, чтобы найти достаточные условия существования у оператора равновесия неподвижной точки.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (7.2)*,* $|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}| > 0$*, и существует по крайней мере один коэффициент агрессивности* s_{ij}*, не равный нулю. Пусть также*

$$D = \left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega}\right)^2 - 8\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big)\sum_{i=1}^{n} b_i \geqslant 0,$$

а положительное число R таково, что

$$\begin{cases} \omega\big(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R\big) < 1 \\ \dfrac{-\mu - \eta + \dfrac{1}{\omega} - \sqrt{D}}{2\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big)} \leqslant R \leqslant \dfrac{-\mu - \eta + \dfrac{1}{\omega} + \sqrt{D}}{2\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big)}, \end{cases}$$

тогда у оператора равновесия существует неподвижная точка в шаре радиуса R с центром в нуле.

Доказательство. Представим оператор равновесия в виде суммы $\mathcal{K} + \mathcal{H}$, где

$$\mathcal{K}F = \Omega \odot \Big(\mathcal{C}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F\Big),$$

$$\mathcal{H}F = \Omega \odot \Big(2M - W \odot F - \widetilde{\beta}\mathcal{P}F - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}F\Big)$$

По лемме 6.4 и следствию 6.2 операторы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{R}$ компактны, поэтому и оператор $\mathcal{K}$ компактен, поскольку растяжение (умножение на константу) не влияет на компактность, а сумма компактных операторов является компактным оператором. В свою очередь, $\mathcal{H}$ липшицев в любом шаре радиуса R с центром в нуле, поскольку, исходя из оценки (7.3), а также замечания 7.2,

$$\begin{aligned} \big\|\mathcal{H}F - \mathcal{H}G\big\|_{n\times n} &\leqslant \omega\Big(\big\|W \odot (F-G)\big\|_{n\times n} + |\widetilde{\beta}| \cdot \big\|\mathcal{P}F - \mathcal{P}G\big\|_{n\times n} + |\widetilde{\gamma}| \cdot \big\|\mathcal{S}F - \mathcal{S}G\big\|_{n\times n}\Big) \leqslant \\ &\leqslant \omega\big(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R\big)\|F - G\|_{n\times n}, \end{aligned}$$

для любых $F, G \in \Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$ с нормой, не превосходящей числа R. Кроме того, $\mathcal{H}$ сжимающий в данном шаре, если $\omega\big(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R\big) < 1$.

Пусть $F, G \in \Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$, причём их нормы не превосходят числа R. Тогда, используя замечание 7.1, можно провести следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}F + \mathcal{H}G\|_{n\times n} &= \left\|\Omega \odot \Big(\mathcal{C}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F + 2M - W \odot G - \widetilde{\beta}\mathcal{P}G - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}G\Big)\right\|_{n\times n} \leqslant \\ &\leqslant \omega\Big(\|\mathcal{C}F\|_{n\times n} + |\widetilde{\beta}|\big(\|\mathcal{R}F\|_{n\times n} + \|\mathcal{P}G\|_{n\times n}\big) + 2\|M\|_{n\times n} + \|W \odot G\|_{n\times n} + |\widetilde{\gamma}| \cdot \|\mathcal{S}G\|_{n\times n}\Big) \leqslant \\ &\leqslant \omega\left(\mu\|F\|_{n\times n} + |\widetilde{\beta}|\big(\xi\|F\|^2_{n\times n} + \nu\|G\|^2_{n\times n}\big) + 2\sum_{i=1}^{n} b_i + \eta\|G\|_{n\times n} + |\widetilde{\gamma}|\nu\|G\|^2_{n\times n}\right) \leqslant \\ &\leqslant \omega\left(\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big)R^2 + (\mu+\eta)R + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \end{aligned}$$

Для того, чтобы норма $\mathcal{K}F + \mathcal{H}G$ не превосходила R достаточно, чтобы

$$\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big)R^2 + (\mu+\eta)R + 2\sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant \frac{R}{\omega},$$

то есть
$$\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu)+|\widetilde{\gamma}|\nu\Big)R^2+\left(\mu+\eta-\frac{1}{\omega}\right)R+2\sum_{i=1}^{n}b_i\leqslant 0.$$
Из условий теоремы следует, что $a=|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu)+|\widetilde{\gamma}|\nu>0$, поэтому для выполнения вышеупомянутого неравенства необходимо, чтобы рассматриваемый квадратный трёхчлен имел вещественные корни, то есть, чтобы его дискриминант
$$D=\left(\mu+\eta-\frac{1}{\omega}\right)^2-8\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu)+|\widetilde{\gamma}|\nu\Big)\sum_{i=1}^{n}b_i$$
был неотрицательным. В таком случае корни будут равны
$$R_{1,2}=\frac{-\mu-\eta+\dfrac{1}{\omega}\pm\sqrt{D}}{2\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu)+|\widetilde{\gamma}|\nu\Big)}$$
и при всех $R\in[R_1;R_2]$ исследуемое неравенство будет выполнено.

Итак, если величина D не меньше нуля, а положительное число R таково, что
$$\begin{cases}\omega\big(\eta+2(|\widetilde{\beta}|+|\widetilde{\gamma}|)\nu R\big)<1\\ \dfrac{-\mu-\eta+\dfrac{1}{\omega}-\sqrt{D}}{2\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu)+|\widetilde{\gamma}|\nu\Big)}\leqslant R\leqslant\dfrac{-\mu-\eta+\dfrac{1}{\omega}+\sqrt{D}}{2\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi+\nu)+|\widetilde{\gamma}|\nu\Big)},\end{cases}$$
то для операторов $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$ и шара радиуса R с центром в нуле выполнены все условия теоремы 2, а значит, у оператора равновесия существует по крайней мере одна неподвижная точка в рассматриваемом шаре. □

Как можно заметить, условие $|\widetilde{\beta}|+|\widetilde{\gamma}|>0$ нам нужно только для того, чтобы коэффициент при старшей степени в возникающем при доказательстве теоремы квадратном трёхчлене не обращался в ноль. Однако невыполнение данного условия на самом деле не является причиной для того, чтобы неподвижная точка у оператора равновесия отсутствовала.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (7.2), $\widetilde{\beta}=\widetilde{\gamma}=0$, *а*
$$\rho=\frac{1}{\omega}-\mu-\eta>0,$$
тогда оператор равновесия имеет неподвижную точку в шаре радиуса
$$R=\frac{2}{\rho}\sum_{i=1}^{n}b_i$$
с центром в нуле.

Доказательство. Раскладывая оператор $\mathcal{E}$ в сумму $\mathcal{K}+\mathcal{H}$, аналогично доказательству теоремы 3, приходим к выводу, что

$$\mathcal{K}F = \Omega \odot \mathcal{C}F,$$

$$\mathcal{H}F = \Omega \odot \Big(2M - W \odot F\Big).$$

При этом для любых $F, G \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ верно неравенство

$$\big\|\mathcal{H}F - \mathcal{H}G\big\|_{n\times n} \leqslant \omega \big\|W \odot (F - G)\big\|_{n\times n} \leqslant \omega\eta \|F - G\|_{n\times n}.$$

Так как $\dfrac{1}{\omega} - \mu - \eta > 0$, а $\mu > 0$, то $\omega\eta < 1$, а значит, $\mathcal{H}$ сжимающий всюду. При этом, если нормы элементов F и G не превосходят числа R, то

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}F - \mathcal{H}G\|_{n\times n} &= \left\|\Omega \odot \Big(\mathcal{C}F + 2M - W \odot G\Big)\right\|_{n\times n} \leqslant \\
&\leqslant \omega\Big(\|\mathcal{C}F\|_{n\times n} + 2\|M\|_{n\times n} + \|W \odot G\|_{n\times n}\Big) \leqslant \\
&\leqslant \omega\left(\mu\|F\|_{n\times n} + 2\sum_{i=1}^{n} b_i + \eta\|G\|_{n\times n}\right) \leqslant \\
&\leqslant \omega\left((\mu + \eta)R + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\right).
\end{aligned}$$

Поэтому, если

$$\left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega}\right) R + 2\sum_{i=1}^{n} \leqslant 0,$$

то норма $\mathcal{K}F - \mathcal{H}G$ также не будет превосходить R. Решая данное неравенство относительно R, с учётом того, что

$$\mu + \eta - \frac{1}{\omega} = -\rho < 0,$$

получим

$$R \geqslant \frac{2}{\rho}\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Учитывая, компактность оператора $\mathcal{K}$ и сжимаемость оператора $\mathcal{H}$ всюду, можно сказать, что по теореме 2 в шаре радиуса

$$R = \frac{2}{\rho}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

с центром в нуле у $\mathcal{E}$ существует неподвижная точка. □

Осталось рассмотреть один экзотический случай, а именно вариант, когда все коэффициенты s_{ij} равны нулю. Данный случай не является сколь–либо реалистичным, поскольку в любой биологической системе присутствует конкуренция, однако для полноты картины мы рассмотрим и его.

Замечание 7.5. *Пусть выполнено условие* (7.2)*, все числа* s_{ij} *равны нулю, а* $\omega\mu < 1$*, тогда у оператора равновесия существует единственная неподвижная точка.*

Доказательство. В рамках данной теоремы оператор равновесия имеет наиболее простой вид

$$\mathcal{E}F = \Omega \odot \Big(2M + \mathcal{C}F\Big).$$

Для любой пары элементов F и G из $\Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$ имеем

$$\|\mathcal{E}F - \mathcal{E}G\|_{n\times n} = \Big\|\Omega \odot \mathcal{C}(F - G)\Big\|_{n\times n} \leqslant \omega\mu\|F - G\|_{n\times n},$$

а поскольку по условию теоремы $\omega\mu < 1$, то оператор равновесия сжимающий во всём пространстве. По принципу Банаха из этого следует существование и единственность неподвижной точки этого оператора. □

7.3 Устойчивость неподвижной точки оператора равновесия

Итак, при некоторых условиях неподвижная точка оператора равновесия существует. Теперь рассмотрим вопрос о том, как сильно изменения параметров замыкания влияют на неё. Всюду далее, чтобы подчеркнуть зависимость некоторых величин или операторов от рассматриваемых параметров, мы будем указывать их в скобках, подразумевая, что все остальные параметры фиксированы.

Приступим к оценке влияния возмущений параметров замыкания на существование неподвижной точки оператора равновесия. Прежде всего отметим следующий факт.

Замечание 7.6. *Множество точек* $\widetilde{\alpha}$*, при которых выполнено условие* (7.2)*, является открытым, то есть выполнение данного условия в некоторой точке* $\widetilde{\alpha}_0$ *влечёт за собой его выполнение в некоторой окрестности данной точки.*

Лемма 7.2. *Величины* ω *и* ω^{-1} *непрерывны по параметру* $\widetilde{\alpha}$ *всюду, где выполнено условие* (7.2)*.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \min_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \Big|x(b_i + b_j) + (1 - x)(d_i + d_j)\Big|.$$

Функции

$$f_{ij}(x) = \Big|x(b_i + b_j) + (1 - x)(d_i + d_j)\Big|, \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},$$

очевидно, непрерывны и, поскольку минимум непрерывных функций является непрерывной функцией, $f(x)$ также непрерывна. Ясно, что $\big(f(x)\big)^{-1}$ непрерывна всюду, где $f(x) \neq 0$. Остаётся лишь заметить, что

$$\omega = \big(f(\widetilde{\alpha})\big)^{-1},$$

чтобы сделать вывод о непрерывности ω и ω^{-1} по параметру $\widetilde{\alpha}$. $\square$

Следствие 7.1. *Величина*

$$D = D(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = \left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega(\widetilde{\alpha})}\right)^2 - 8\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big) \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

непрерывна по совокупности переменных $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ *и* $\widetilde{\gamma}$ *всюду, где выполнено условие* (7.2).

Доказательство. Приведённое утверждение напрямую следует из леммы 7.2 и того факта, что суперпозиция непрерывных функций непрерывна. $\square$

Следствие 7.2. *Если* $D(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) > 0$, *то существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$ *из*

$$\begin{cases} |\widetilde{\alpha}_\varepsilon - \widetilde{\alpha}| < \varepsilon, \\ |\widetilde{\beta}_\varepsilon - \widetilde{\beta}| < \varepsilon, \\ |\widetilde{\gamma}_\varepsilon - \widetilde{\gamma}| < \varepsilon, \end{cases}$$

следует, что $D(\widetilde{\alpha}_\varepsilon, \widetilde{\beta}_\varepsilon, \widetilde{\gamma}_\varepsilon) > 0$.

Доказательство. Утверждение является следствием того, что непрерывная функция сохраняет свой знак в некоторой окрестности. При этом по замечанию 7.6 ε_0 можно выбрать настолько малым, чтобы при всех $\widetilde{\alpha}$ из ε_0-окрестности точки $\widetilde{\alpha}_0$ выполнялось условие (7.2). $\square$

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (7.2), $|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}| > 0$, *и существует по крайней мере один коэффициент агрессивности* s_{ij}, *не равный нулю. Пусть также*

$$D(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = \left(\mu + \eta - \frac{1}{\omega(\widetilde{\alpha})}\right)^2 - 8\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big) \sum_{i=1}^{n} b_i > 0,$$

а положительное число R *таково, что*

$$\begin{cases} \omega(\widetilde{\alpha})\big(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R\big) < 1 \\ \dfrac{-\mu - \eta + \dfrac{1}{\omega(\widetilde{\alpha})} - \sqrt{D(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})}}{2\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big)} < R < \dfrac{-\mu - \eta + \dfrac{1}{\omega(\widetilde{\alpha})} + \sqrt{D(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})}}{2\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big)}, \end{cases}$$

тогда найдётся такое $\varepsilon_0 > 0$, *что для любого* $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$ *из условия*

$$\begin{cases} |\widetilde{\alpha}_\varepsilon - \widetilde{\alpha}| < \varepsilon, \\ |\widetilde{\beta}_\varepsilon - \widetilde{\beta}| < \varepsilon, \\ |\widetilde{\gamma}_\varepsilon - \widetilde{\gamma}| < \varepsilon, \end{cases}$$

следует, что оператор равновесия $\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}_\varepsilon, \widetilde{\beta}_\varepsilon, \widetilde{\gamma}_\varepsilon)$ *имеет неподвижную точку в шаре радиуса* R *с центром в нуле.*

Доказательство. По замечанию 7.6 в некоторой ε_1-окрестности числа $\widetilde{\alpha}$ условие (7.2) остаётся верным. В силу свойств композиции непрерывных функций, леммы 7.2 и следствия 7.1, выражения

$$|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|,$$

$$\omega(\widetilde{\alpha})\big(\eta + 2(|\widetilde{\beta}| + |\widetilde{\gamma}|)\nu R\big),$$

$$\frac{-\mu - \eta + \dfrac{1}{\omega(\widetilde{\alpha})} - \sqrt{D(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})}}{2\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big)},$$

$$\frac{-\mu - \eta + \dfrac{1}{\omega(\widetilde{\alpha})} + \sqrt{D(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})}}{2\Big(|\widetilde{\beta}|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}|\nu\Big)}$$

непрерывны по совокупности параметров $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$, при этом по следствию 7.2 величина D остаётся положительной в некоторой окрестности исходных значений $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$. Поэтому существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что при всех $\varepsilon \in [0; \varepsilon_2)$, если $|\widetilde{\alpha}_\varepsilon - \widetilde{\alpha}| < \varepsilon$, $|\widetilde{\beta}_\varepsilon - \widetilde{\beta}| < \varepsilon$, $|\widetilde{\gamma}_\varepsilon - \widetilde{\gamma}| < \varepsilon$, то

$$|\widetilde{\beta}_\varepsilon| + |\widetilde{\gamma}_\varepsilon| > 0,$$

$$\omega(\widetilde{\alpha}_\varepsilon)\big(\eta + 2(|\widetilde{\beta}_\varepsilon| + |\widetilde{\gamma}_\varepsilon|)\nu R\big) < 1,$$

$$D(\widetilde{\alpha}_\varepsilon, \widetilde{\beta}_\varepsilon, \widetilde{\gamma}_\varepsilon) > 0,$$

$$\frac{-\mu - \eta + \dfrac{1}{\omega(\widetilde{\alpha}_\varepsilon)} - \sqrt{D(\widetilde{\alpha}_\varepsilon, \widetilde{\beta}_\varepsilon, \widetilde{\gamma}_\varepsilon)}}{2\Big(|\widetilde{\beta}_\varepsilon|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}_\varepsilon|\nu\Big)} < R < \frac{-\mu - \eta + \dfrac{1}{\omega(\widetilde{\alpha}_\varepsilon)} + \sqrt{D(\widetilde{\alpha}_\varepsilon, \widetilde{\beta}_\varepsilon, \widetilde{\gamma}_\varepsilon)}}{2\Big(|\widetilde{\beta}_\varepsilon|(\xi + \nu) + |\widetilde{\gamma}_\varepsilon|\nu\Big)}.$$

Положим $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2\}$. Если

$$\begin{cases} |\widetilde{\alpha}_\varepsilon - \widetilde{\alpha}| < \varepsilon, \\ |\widetilde{\beta}_\varepsilon - \widetilde{\beta}| < \varepsilon, \\ |\widetilde{\gamma}_\varepsilon - \widetilde{\gamma}| < \varepsilon, \end{cases}$$

для некоторого $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0)$, то при неизменном выборе остальных параметров, включая число R, выполнены все условия теоремы 3. Поэтому у оператора $\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}_\varepsilon, \widetilde{\beta}_\varepsilon, \widetilde{\gamma}_\varepsilon)$ существует неподвижная точка в шаре радиуса R с центром в нуле. □

Итак, при некоторых чуть более строгих условиях неподвижная точка оператора равновесия продолжает существовать при малых возмущениях параметров замыкания. Однако возникает вопрос, насколько сильно данная неподвижная точка меняется. Для того, чтобы на него ответить, докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Оператор равновесия* $\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ *меняется непрерывно при малом изменении параметров* $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ *и* $\widetilde{\gamma}$. *То есть, если для* $\widetilde{\alpha}$ *выполнено условие* (7.2), *то* $\forall \varepsilon > 0$ *и*

$\forall R > 0\ \exists \delta = \delta(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}, \varepsilon, R) > 0$ *такое, что, как только*

$$\begin{cases} |\widetilde{\alpha}_\delta - \widetilde{\alpha}| < \delta, \\ |\widetilde{\beta}_\delta - \widetilde{\beta}| < \delta, \\ |\widetilde{\gamma}_\delta - \widetilde{\gamma}| < \delta, \end{cases}$$

то для любого элемента $F \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$*, по норме не превосходящего* R*, верно неравенство*

$$\left\| \mathcal{E}(\widetilde{\alpha}_\delta, \widetilde{\beta}_\delta, \widetilde{\gamma}_\delta)F - \mathcal{E}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})F \right\|_{n\times n} \leqslant \varepsilon,$$

причём для всех таких $\widetilde{\alpha}_\delta$ *выполнено условие* (7.2).

Доказательство. Напомним, что оператор равновесия действует по правилу

$$\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})F = \Omega(\widetilde{\alpha}) \odot \Big(2M + \mathcal{C}F - W \odot F - \widetilde{\beta}\mathcal{P}F - \widetilde{\gamma}\mathcal{S}F - \widetilde{\beta}\mathcal{R}F\Big),$$

где

$$\Omega(\widetilde{\alpha}) = \left[\Big(\widetilde{\alpha}(b_i + b_j) + (1 - \widetilde{\alpha})(d_i + d_j)\Big)^{-1}\right]_{i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}}.$$

Если выполнено условие (7.2), то все элементы матрицы $\Omega(\widetilde{\alpha})$ определены в некоторой δ_0-окрестности точки $\widetilde{\alpha}$. В силу того, что каждый из этих элементов является непрерывной функцией от $\widetilde{\alpha}$, а их число конечно, то для любого положительного ε можно найти такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что при $|\widetilde{\alpha}' - \widetilde{\alpha}| < \min\{\delta_0, \delta_1\}$ выполняется условие

$$\max_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} \Big|\Omega(\widetilde{\alpha}')_{ij} - \Omega(\widetilde{\alpha})_{ij}\Big| < \varepsilon. \tag{7.5}$$

Исходя из замечания 7.1, если норма элемента $F \in \left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ не превосходит некоторого числа R, то

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}F\|_{n\times n} &\leqslant \nu R^2, \\ \|\mathcal{S}F\|_{n\times n} &\leqslant \nu R^2, \\ \|\mathcal{R}F\|_{n\times n} &\leqslant \xi R^2, \end{aligned}$$

поэтому, если $|\widetilde{\beta}' - \widetilde{\beta}| < \delta$ и $|\widetilde{\gamma}' - \widetilde{\gamma}| < \delta$, то

$$\begin{aligned} &\Big\| \big(\widetilde{\beta}'\mathcal{P}F + \widetilde{\gamma}'\mathcal{S}F + \widetilde{\beta}'\mathcal{R}F\big) - \big(\widetilde{\beta}\mathcal{P}F + \widetilde{\gamma}\mathcal{S}F + \widetilde{\beta}\mathcal{R}F\big) \Big\|_{n\times n} = \\ &\qquad = \Big\| (\widetilde{\beta}' - \widetilde{\beta})\mathcal{P}F + (\widetilde{\gamma}' - \widetilde{\gamma})\mathcal{S}F + (\widetilde{\beta}' - \widetilde{\beta})\mathcal{R}F \Big\|_{n\times n} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \delta(2\nu + \xi)R^2. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Разность исходного и возмущённого операторов равновесия представима в виде

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})F-\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}',\widetilde{\beta}',\widetilde{\gamma}')F=\\
&\qquad=\Omega(\widetilde{\alpha}')\odot\big(\widetilde{\beta}'\mathcal{P}F+\widetilde{\gamma}'\mathcal{S}F+\widetilde{\beta}'\mathcal{R}F\big)-\Omega(\widetilde{\alpha})\odot\big(\widetilde{\beta}\mathcal{P}F+\widetilde{\gamma}\mathcal{S}F+\widetilde{\beta}\mathcal{R}F\big)\leqslant\\
&\qquad\leqslant\big(\Omega(\widetilde{\alpha}')-\Omega(\widetilde{\alpha})\big)\odot\big(\widetilde{\beta}'\mathcal{P}F+\widetilde{\gamma}'\mathcal{S}F+\widetilde{\beta}'\mathcal{R}F\big)+\\
&\qquad\quad+\Omega(\widetilde{\alpha})\odot\Big(\big(\widetilde{\beta}'\mathcal{P}F+\widetilde{\gamma}'\mathcal{S}F+\widetilde{\beta}'\mathcal{R}F\big)-\big(\widetilde{\beta}\mathcal{P}F+\widetilde{\gamma}\mathcal{S}F+\widetilde{\beta}\mathcal{R}F\big)\Big).
\end{aligned}$$

Пусть зафиксированы некоторые числа $\varepsilon>0$ и $R>0$. Положим

$$\delta_2(\varepsilon,R)=\frac{\varepsilon}{2(2\nu+\xi)R^2\omega(\widetilde{\alpha})},$$

$$\delta_3(\varepsilon,R)=\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2\big(2|\widetilde{\beta}|+|\widetilde{\gamma}|+3\delta_0\big)\big(2\nu+\xi\big)R^2}\right),$$

и обозначим $\delta=\delta(\varepsilon,R)=\min\big\{\delta_0,\ \delta_2(\varepsilon,R),\ \delta_3(\varepsilon,R)\big\}$. Тогда, исходя из (7.5), (7.6) и замечания 7.1, при

$$\begin{cases}|\widetilde{\alpha}_\delta-\widetilde{\alpha}|<\delta,\\ |\widetilde{\beta}_\delta-\widetilde{\beta}|<\delta,\\ |\widetilde{\gamma}_\delta-\widetilde{\gamma}|<\delta,\end{cases}$$

для любого элемента $F\in\Big(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\Big)^{n\times n}$, норма которого не превосходит R,получим

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{E}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})F-\mathcal{E}(\widetilde{\alpha}_\delta,\widetilde{\beta}_\delta,\widetilde{\gamma}_\delta)F\Big\|_{n\times n}\leqslant\\
&\qquad\leqslant\max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}\Big|\Omega(\widetilde{\alpha}_\delta)_{ij}-\Omega(\widetilde{\alpha})_{ij}\Big|\cdot\Big\|\widetilde{\beta}_\delta\mathcal{P}F+\widetilde{\gamma}_\delta\mathcal{S}F+\widetilde{\beta}_\delta\mathcal{R}F\Big\|_{n\times n}+\\
&\qquad\quad+\omega(\widetilde{\alpha})\Big\|(\widetilde{\beta}_\delta-\widetilde{\beta})\mathcal{P}F+(\widetilde{\gamma}_\delta-\widetilde{\gamma})\mathcal{S}F+(\widetilde{\beta}_\delta-\widetilde{\beta})\mathcal{R}F\Big\|_{n\times n}\leqslant\\
&\qquad\leqslant\max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}\Big|\Omega(\widetilde{\alpha}_\delta)_{ij}-\Omega(\widetilde{\alpha})_{ij}\Big|\cdot(2|\widetilde{\beta}_\delta|+|\widetilde{\gamma}_\delta|)(2\nu+\xi)R^2+\\
&\qquad\quad+\delta\omega(\widetilde{\alpha})(2\nu+\xi)R^2<\\
&\qquad<\frac{\varepsilon(2|\widetilde{\beta}|+|\widetilde{\gamma}|+3\delta_0)(2\nu+\xi)R^2}{2\big(2|\widetilde{\beta}|+|\widetilde{\gamma}|+3\delta_0\big)\big(2\nu+\xi\big)R^2}+\frac{\varepsilon\omega(\widetilde{\alpha})(2\nu+\xi)R^2}{2\omega(\widetilde{\alpha})(2\nu+\xi)R^2}=\\
&\qquad=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 7. *В условиях теоремы 5 при малых изменениях параметров замыкания $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ множество неподвижных точек оператора равновесия меняется непрерывно.*

Доказательство. По теореме 5 найдётся такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\delta \in [0; \varepsilon_0)$, если

$$\begin{cases} |\widetilde{\alpha}_\delta - \widetilde{\alpha}| < \delta, \\ |\widetilde{\beta}_\delta - \widetilde{\beta}| < \delta, \\ |\widetilde{\gamma}_\delta - \widetilde{\gamma}| < \delta. \end{cases}$$

то у оператора $\mathcal{E}_\delta = \mathcal{E}(\widetilde{\alpha}_\delta, \widetilde{\beta}_\delta, \widetilde{\gamma}_\delta)$ существует неподвижная точка F_δ в шаре радиуса R с центром в нуле, причём R не зависит от δ. Из теоремы 6 напрямую следует, что

$$\lim_{\delta \to 0+0} \left\| \mathcal{E}_\delta F_\delta - \mathcal{E} F_\delta \right\|_{n \times n} = 0,$$

то есть

$$\lim_{\delta \to 0+0} \left\| F_\delta - \mathcal{E} F_\delta \right\|_{n \times n} = 0,$$

а значит, при стремлении δ к нулю элемент F_δ сколь угодно близко приближается ко множеству неподвижных точек оператора $\mathcal{E}$. □

8 Заключение

В рамках данной работы была рассмотрена биологическая модель Дикмана–Лоу, описывающая многовидовые сообщества неподвижных организмов. Исходя из описания локальных свойств модели, были введены так называемые пространственные моменты: глобальные характеристики сообщества, несущие смысл некоторых средних статистических величин и представляющие наибольший интерес в рамках математической экологии. С помощью теории случайных точечных процессов была выведена система линейных интегро–дифференциальных уравнений динамики произвольного пространственного момента для n-видового сообщества в общем случае. Наиболее подробно рассматривалось состояние равновесия, то есть сценарий, при котором моменты перестают зависеть от времени.

Первые (N_i) и вторые (C_{ij}) равновесные пространственные моменты n-видового сообщества в пространстве $\mathbb{R}^N$ были изучены наиболее полно. С помощью выведенных уравнений динамики было показано, что определение данных величин требует информации о стационарных пространственных моментах всех старших порядков. Однако введение трёхпараметрического семейства замыканий третьих пространственных моментов вида

$$T_{ijk}(x,y) = \frac{1}{\alpha+\gamma}\left(\alpha\frac{C_{ij}(x)C_{ik}(y)}{N_i} + \beta\frac{C_{ij}(x)C_{jk}(y-x)}{N_j} + \gamma\frac{C_{ik}(y)C_{jk}(y-x)}{N_k} - \beta N_i N_j N_k\right),$$

где α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha + \gamma \neq 0$, позволило путём уменьшения числа неизвестных свести бесконечную систему линейных интегральных уравнений равновесной динамики к конечной, но уже нелинейной.

Для исследования разрешимости данная система была переформулирована в качестве единого уравнения в специальном банаховом пространстве $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$. Было показано, что порождаемый этим уравнением оператор равновесия $\mathcal{E}$ при определённых условиях на параметры замыкания α, β, γ, а также скалярные параметры биологической модели представим в виде суммы $\mathcal{K}+\mathcal{H}$, где оператор $\mathcal{K}$ является компактным, а $\mathcal{H}$ — сжимающим в шаре пространства $\left(\widehat{L_1}(\mathbb{R}^N)\right)^{n\times n}$ радиуса R с центром в нуле. Это позволило, применив обобщённый принцип Лере–Шаудера–Банаха, доказать существование неподвижной точки оператора $\mathcal{E}$ в этом шаре, что равносильно существованию решения исходной системы уравнений равновесия. Также было показано, что получаемое решение не может быть тривиальным, а значит, рассматриваемое состояние равновесия не является состоянием вымирания сообщества.

Был также проведён анализ устойчивости неподвижной точки оператора $\mathcal{E}$ относительно возмущений величин

$$\widetilde{\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma},$$
$$\widetilde{\beta}=\frac{\beta}{\alpha+\gamma},$$
$$\widetilde{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}.$$

Показано, что при соответствующих условиях малое изменение данных параметров не влияет на существование неподвижной точки оператора равновесия. Более того, при изменении $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ множество неподвижных точкек меняется непрерывно.

В рамках работы было впервые проведёно аналитическое исследование системы уравнений равновесной динамики, возникающей во многовидовом случае. Ранее данный анализ проводился лишь численно, а вопрос о существовании решений и их устойчивости не рассматривался вовсе. Важно отметить, что приведённые в работе результаты сформулированы для n-видового сообщества при произвольном n, в то время как до этого рассматривались максимум двухвидовые случаи. При этом вывод системы уравнений динамики пространственных моментов в общем виде ранее также не проводился.

Дальнейшим развитием текущей работы может являться исследование единственности состояния равновесия многовидового биологического сообщества. Кроме того, достаточный интерес представляет сравнение полученных результатов с результатами численного анализа. Также открытым остаётся вопрос о влиянии конкретного вида замыкания на разрешимость и единственность решения получающихся систем. Поиск критериев, накладываемых на замыкание, которые гарантировали бы разрешимость получающейся системы, может стать перспективным направлением будущих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Malthus T.R.* An essay of the principle of population, as it affects the future improvement of society with remarks on the speculations of Mr. Godwin, Mr. Condorcet, and other writers. / London: Printed for J. Johnson, in St. Paul's Church-Yard. **1798**.

[2] *Lotka A.J.* Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems. // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 6, No. 7, P. 410–415. **1920**.

[3] *Lotka A.J.* Elements of physical biology. // Baltimore: Williams & Wilkins Company, P. 460. **1925**.

[4] *Volterra V.* Variations and Fluctuations of the Number of Individuals in Animal Species living together. // ICES Journal of Marine Science, Vol. 3, Issue 1, P. 3–51. **1928**.

[5] *Leray J., Schauder J.* Topologie et équations fonctionnelles. // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 3, Tome 51, P. 45–78. **1934**.

[6] *Красносельский М.А.* Два замечания о методе последовательных приближений. // УМН, 10:1(63), С. 123–127. **1955**.

[7] *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. // М.: ГИТТЛ. **1956**.

[8] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т.5 // М.:Наука. **1974**.

[9] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. // М.: Наука. **1976**.

[10] *Kingsland S.E.* The Refactory Model: the Logistic Curve and the History of Population Ecology. // The Quaterly Reveiew of Biology, 57. P. 29–52. **1982**.

[11] *Bolker B., Pacala S.* Using moment equations to understand stochastically driven spatial pattern formation in ecological systems. // Theor. Population Biol. 52. №3. P. 179–197. **1997**.

[12] *Law R., Dieckmann U.* Moment approximations of individual-based models. // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. P. 252–270. **2000**.

[13] *Dieckmann U., Law R.* Relaxation projections and the method of moments. // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. P. 412–455. **2000**.

[14] *Murrell D.J., Dieckmann U., Law R.* On moment closures for population dynamics in continuous space. // J. Theor. Biol. 229(3). P. 421–432. **2004**.

[15] *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. // М.: МЦНМО. **2004**.

[16] *Давыдов А.А., Данченко В.И., Никитин А.А.* Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ. // Проблемы динамического управления. Сборник научных трудов, С. 15–29. **2009**.

[17] *Давыдов А.А., Данченко В.И., Звягин М.Ю.* Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества. // Труды математического института имени В.А. Стеклова, т. 267, С. 46–55. **2009**.

[18] *Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П.* Динамические системы и модели биологии. // М.: Физматлит. **2010**.

[19] *Бодров А.Г., Никитин А.А.* Качественный и численный анализ интегрального уравнения, возникающего в модели стационарных сообществ. // Докл. АН. 455. №5. С. 507–511. **2014**.

[20] *Бодров А.Г., Никитин А.А.* Исследование интегрального уравнения плотности биологического вида в пространствах различных размерностей. // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. №4. С. 7–13. **2015**.

[21] *Никитин А.А., Савостьянов А.С.* Нетривиальные стационарные точки двухвидовых самоструктурирующихся сообществ. // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. №3. С. 18–25. **2017**.

[22] *Никитин А.А., Николаев М.В.* Исследование интегрального уравнения равновесия с ядрами–куртозианами в пространствах различных размерностей. // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. №3. С. 11–19. **2018**.

[23] *Николаев М.В., Никитин А.А.* Принцип Лере-Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения. // Дифференциальные уравнения. Т. 55, №9. С. 1209—1217. **2019**.

[24] *Николаев М.В., Никитин А.А.* О существовании и единственности решения одного нелинейного интегрального уравнения // Доклады Академии наук. Т. 488, №6. С. 501—507. **2019**.

[25] *Галкин Е.Г., Никитин А.А.* Стохастическая геометрия для моделирования популяционной динамики: модель Дикмана с неподвижными особями. // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. №2. С. 11–18. **2020**.