Álgebra y conjuntos Booleanos[1] en sistemas de control

Lógica binaria

Funciones lógicas

Algebra de Boole

Mapas de Karnaugh

[1]Floyd, T. L. (2006). *Fundamentos de sistemas digitales*.

LÓGICA BINARIA

La lógica binaria consiste en variables binarias y operaciones lógicas.

LÓGICA BINARIA

La lógica binaria consiste en variables binarias y operaciones lógicas.

Las variables **A, B, C, x, y, z**, etc.

LÓGICA BINARIA

La lógica binaria consiste en variables binarias y operaciones lógicas.

Las variables **A, B, C, x, y, z**, etc.

Hay tres operaciones lógicas básicas:

Producto lógico **AND(.)**
Suma lógica **OR(+)**
Negación **NOT(‘).**

LÓGICA BINARIA

La lógica binaria consiste en variables binarias y operaciones lógicas.

Las variables **A, B, C, x, y, z**, etc.

Hay tres operaciones lógicas básicas:

Producto lógico **AND(.)**
Suma lógica **OR(+)**
Negación **NOT(‘).**

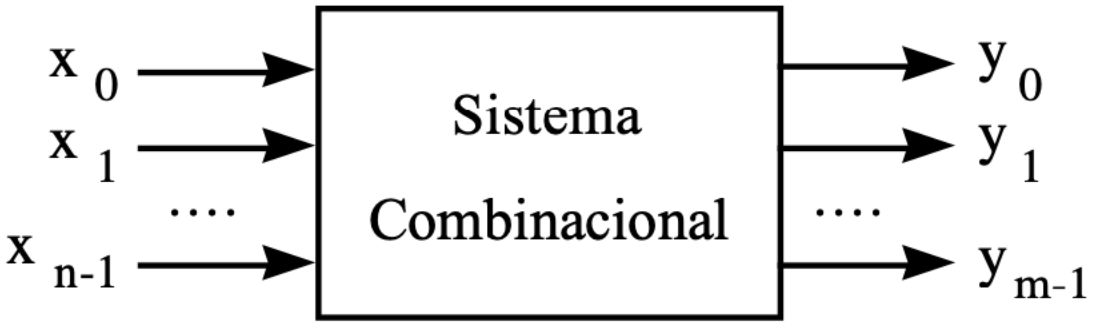
La aritmética binaria: 1 + 1= 10
Lógica binaria: 1 + 1 = 1

Funciones lógicas

$$y = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots\ldots, x_1, x_0) \rightarrow \{0,1\} \quad donde \quad y, x_i \in \{0,1\}$$

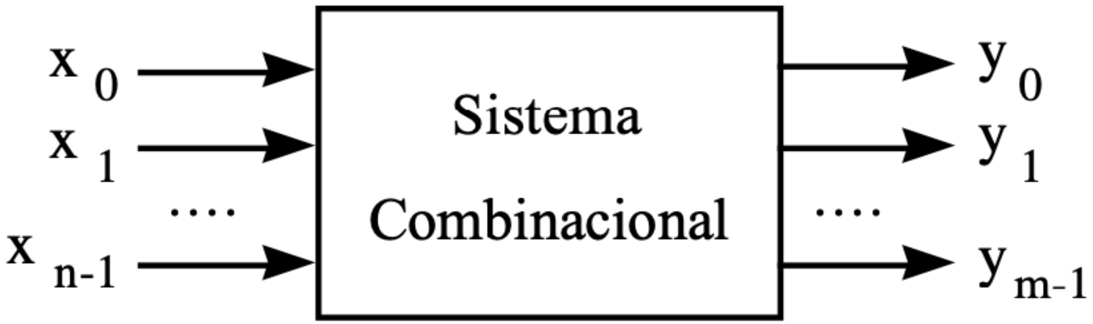
Funciones lógicas

$$y = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots\ldots, x_1, x_0) \rightarrow \{0,1\} \quad donde \quad y, x_i \in \{0,1\}$$



Funciones lógicas

$$y = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots\ldots, x_1, x_0) \rightarrow \{0,1\} \quad donde \quad y, x_i \in \{0,1\}$$



$$Y = F(X)$$

$$X = (x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0) \quad Y = (y_{m-1}, \ldots, y_1, y_0)$$

$$y_i = f_i(x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0) \quad 0 \leq i \leq m-1$$

Funciones lógicas de una variable

Existen cuatro funciones lógicas de una variable

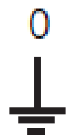
x_0	$f_0(x_0)$	$f_1(x_0)$	$f_2(x_0)$	$f_3(x_0)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

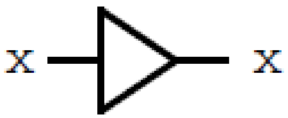
Funciones lógicas de una variable

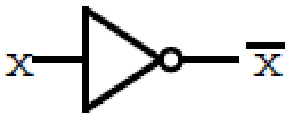
Existen cuatro funciones lógicas de una variable

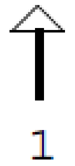
x_0	$f_0(x_0)$	$f_1(x_0)$	$f_2(x_0)$	$f_3(x_0)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$$f_0(x_0)=0 \qquad f_1(x_0)=x_0 \qquad f_2(x_0)=\bar{x}_0 \qquad f_3(x_0)=1$$





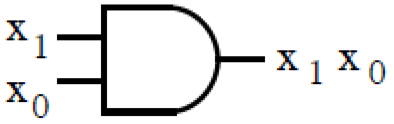




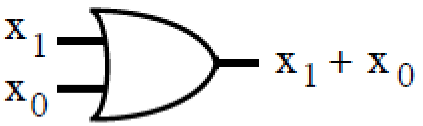
Funciones lógicas de dos variables

Function	x_1x_0				
	00	01	10	11	
f_0	0	0	0	0	
f_1	0	0	0	1	AND
f_2	0	0	1	0	
f_3	0	0	1	1	
f_4	0	1	0	0	
f_5	0	1	0	1	
f_6	0	1	1	0	EXCLUSIVE-OR (XOR)
f_7	0	1	1	1	OR
f_8	1	0	0	0	NOR
f_9	1	0	0	1	EQUIVALENCE (EQU)
f_{10}	1	0	1	0	
f_{11}	1	0	1	1	
f_{12}	1	1	0	0	
f_{13}	1	1	0	1	
f_{14}	1	1	1	0	NAND
f_{15}	1	1	1	1	

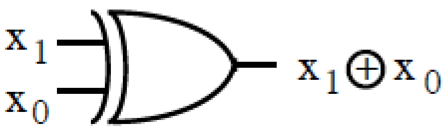
$f_{AND}(x_1,x_0)=x_1x_0$



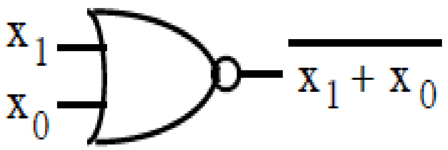
$f_{OR}(x_1,x_0)=x_1+x_0$



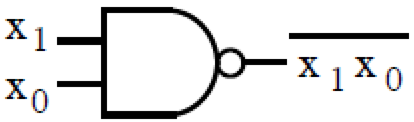
$f_{XOR}(x_1,x_0)=x_1\oplus x_0$



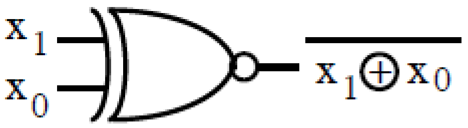
$f_{NOR}(x_1,x_0)=\overline{x_1+x_0}$



$f_{NAND}(x_1,x_0)=\overline{x_1x_0}$



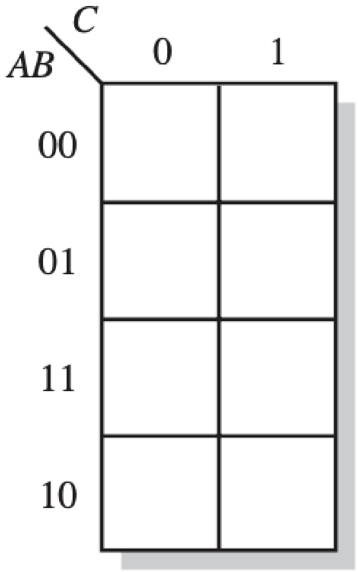
$f_{XNOR}(x_1,x_0)=\overline{x_1\oplus x_0}$



Representación de una función lógica:

Entradas			Salida
A	*B*	*C*	*X*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

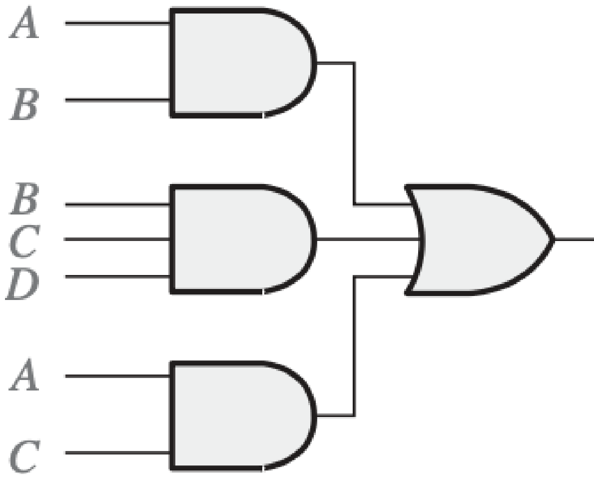
a) Tabla de verdad



b) Mapa de Karnaugh.

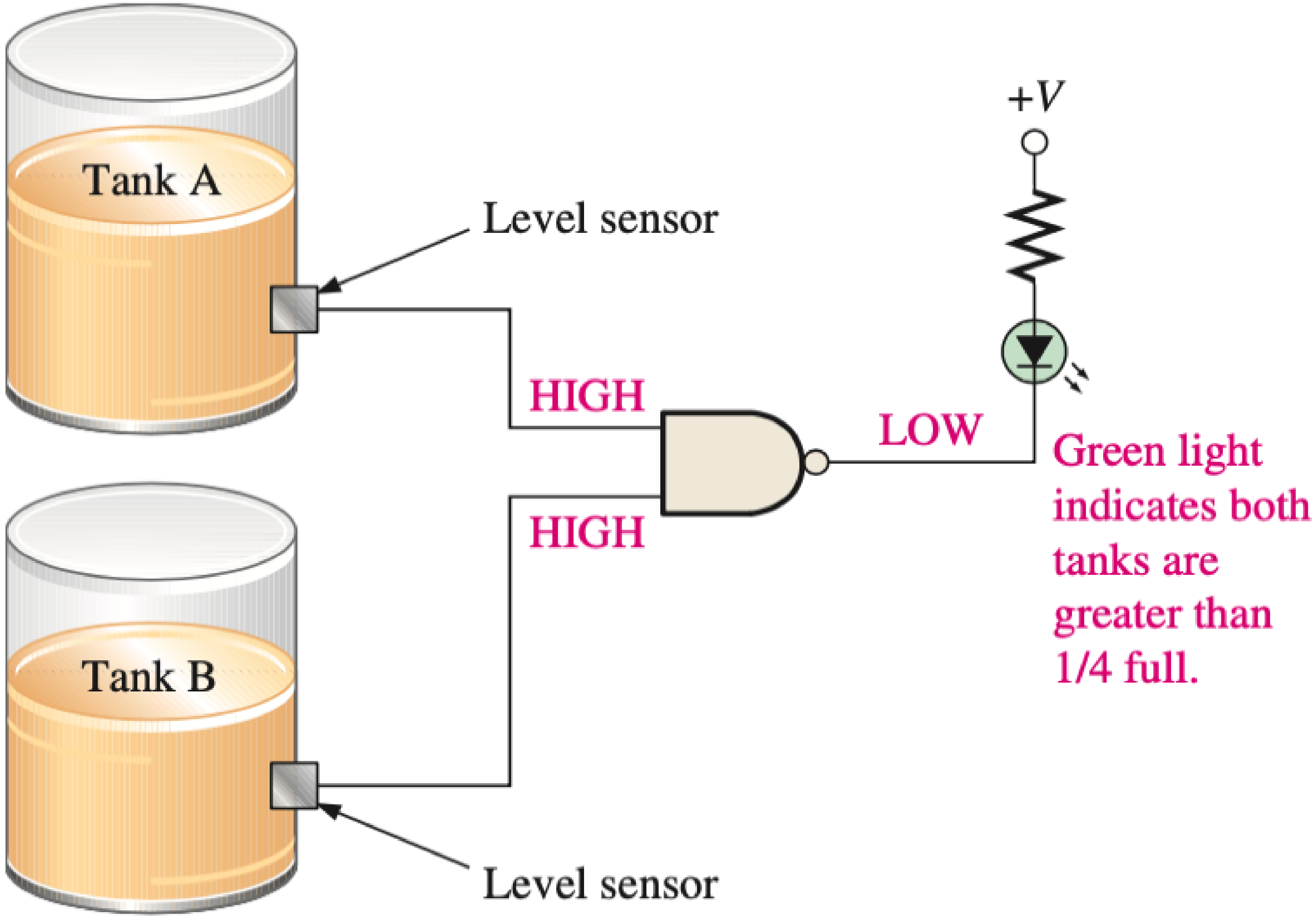
$$AB + BCD + AC$$

c) Expresiones algebraicas.



d) Logigramas.

Ejemplo



Tank A
Level sensor
+V
HIGH
LOW
HIGH
Green light indicates both tanks are greater than 1/4 full.
Tank B
Level sensor

Algebra de Boole

Las leyes básicas del álgebra de Boole:

Propiedad Conmutativa: $A \cdot B = B \cdot A$ dual $A + B = B + A$.

Propiedad Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ dual $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Propiedad Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ dual $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$.

Reglas del algebra Booleana

1. $A + 0 = A$
2. $A + 1 = 1$
3. $A \cdot 0 = 0$
4. $A \cdot 1 = A$
5. $A + A = A$
6. $A + \overline{A} = 1$
7. $A \cdot A = A$
8. $A \cdot \overline{A} = 0$
9. $\overline{\overline{A}} = A$
10. $A + AB = A$
11. $A + \overline{A}B = A + B$
12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

TEOREMAS DE DeMORGAN

$$\overline{XY} = \bar{X} + \bar{Y}$$

$$\overline{X + Y} = \bar{X}\bar{Y}$$

TEOREMAS DE DeMORGAN

$$\overline{XY} = \bar{X} + \bar{Y}$$

$$\overline{X + Y} = \bar{X}\bar{Y}$$

EJEMPLO

Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{XYZ}$ y $\overline{X + Y + Z}$.

TEOREMAS DE DeMORGAN

$$\overline{XY} = \bar{X} + \bar{Y}$$

$$\overline{X + Y} = \bar{X}\bar{Y}$$

EJEMPLO

Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{XYZ}$ y $\overline{X + Y + Z}$.

$$\overline{XYZ} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$$

$$\overline{X + Y + Z} = \bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z}$$

EJEMPLO

Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del algebra de Boole:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

EJEMPLO

Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del algebra de Boole:

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

distributiva	$AB + AB + AC + BB + BC$
regla 7	$AB + AB + AC + B + BC$
regla 5	$AB + AC + B + BC$
regla 10	$AB + AC + B$
regla 10	$\boxed{B + AC}$

EJEMPLO

Aplicación de los teoremas de DeMorgan y del algebra de Boole a la expresión:

$$\overline{\overline{A+B\overline{C}}+D(\overline{E+\overline{F}})}$$

EJEMPLO

Aplicación de los teoremas de DeMorgan y del algebra de Boole a la expresión:

$$\overline{\overline{A+B\overline{C}}+D(\overline{E+\overline{F}})}$$

Teorema de DeMorgan

$$\overline{(\overline{A+B\overline{C}})+(\overline{D(E+\overline{F})})}=(\overline{\overline{A+B\overline{C}}})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})$$

regla 9

$$(\overline{\overline{A+B\overline{C}}})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})=(A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})$$

Teorema de DeMorgan

$$(A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})=(A+B\overline{C})(\overline{D}+(\overline{\overline{E+\overline{F}}}))$$

regla 9

$$(A+B\overline{C})(\overline{D}+(\overline{\overline{E+\overline{F}}}))=(A+B\overline{C})(\overline{D}+E+\overline{F})$$

Expresiones estándar a partir de una tabla de verdad

Entradas			Salida
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Expresiones estándar a partir de una tabla de verdad

Entradas			Salida
A	*B*	*C*	*X*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$011 \rightarrow \bar{A}BC$$
$$100 \rightarrow A\bar{B}\bar{C}$$
$$110 \rightarrow AB\bar{C}$$
$$111 \rightarrow ABC$$

SoP

Expresiones estándar a partir de una tabla de verdad

Entradas			Salida
A	*B*	*C*	*X*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$011 \rightarrow \bar{A}BC$$
$$100 \rightarrow A\bar{B}\bar{C}$$
$$110 \rightarrow AB\bar{C}$$
$$111 \rightarrow ABC$$

SoP $X = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$

Expresiones estándar a partir de una tabla de verdad

Entradas			Salida
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$011 \rightarrow \overline{A}BC$$
$$100 \rightarrow A\overline{B}\overline{C}$$
$$110 \rightarrow AB\overline{C}$$
$$111 \rightarrow ABC$$

SoP $$X = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

$$000 \rightarrow A+B+C$$
$$001 \rightarrow A+B+\overline{C}$$
$$010 \rightarrow A+\overline{B}+C$$
$$101 \rightarrow A+B+\overline{C}$$

Expresiones estándar a partir de una tabla de verdad

Entradas			Salida
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$011 \rightarrow \overline{A}BC$$
$$100 \rightarrow A\overline{B}\overline{C}$$
$$110 \rightarrow AB\overline{C}$$
$$111 \rightarrow ABC$$

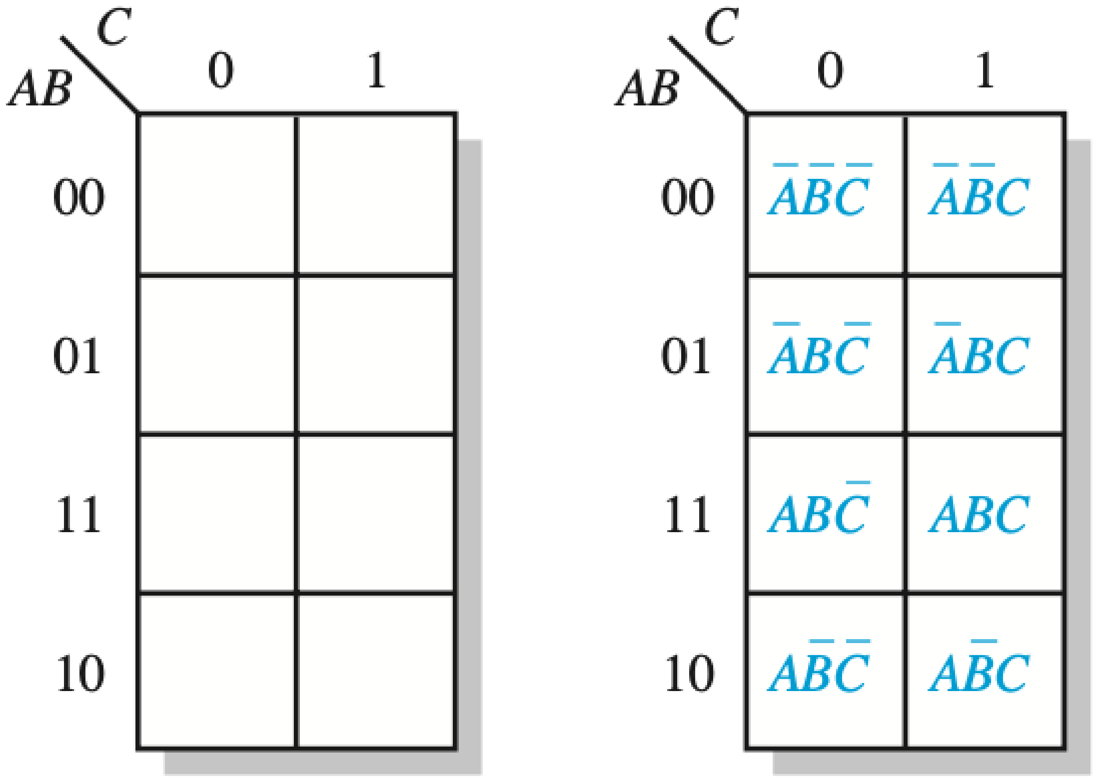
SoP $X = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$

$$000 \rightarrow A+B+C$$
$$001 \rightarrow A+B+\overline{C}$$
$$010 \rightarrow A+\overline{B}+C$$
$$101 \rightarrow A+B+\overline{C}$$

PoS $X = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+B+\overline{C})$

Mapas de Karnaugh

Es un método sistemático para simplificar es simplificar una expresión booleana

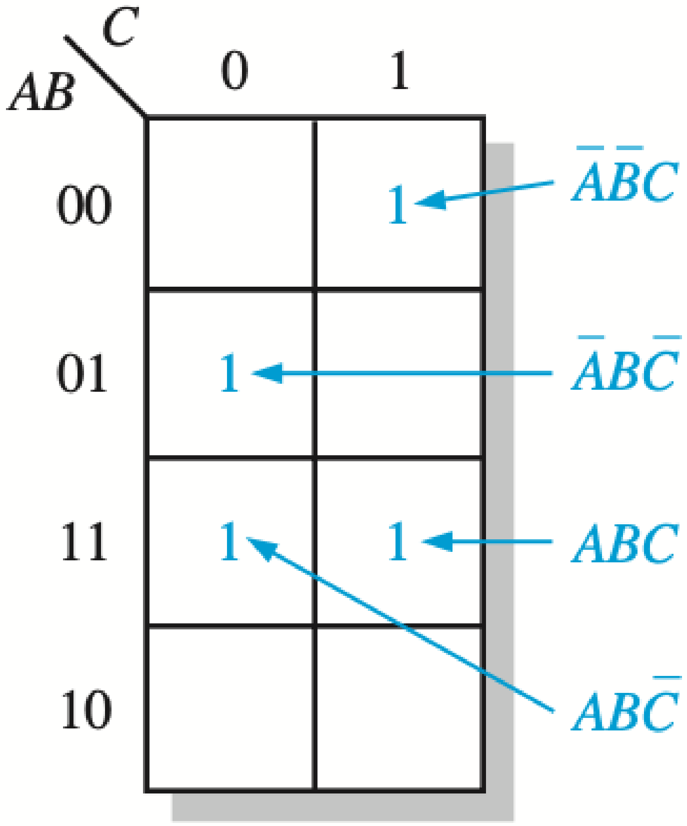


Mapa de Karnaugh de una SoP

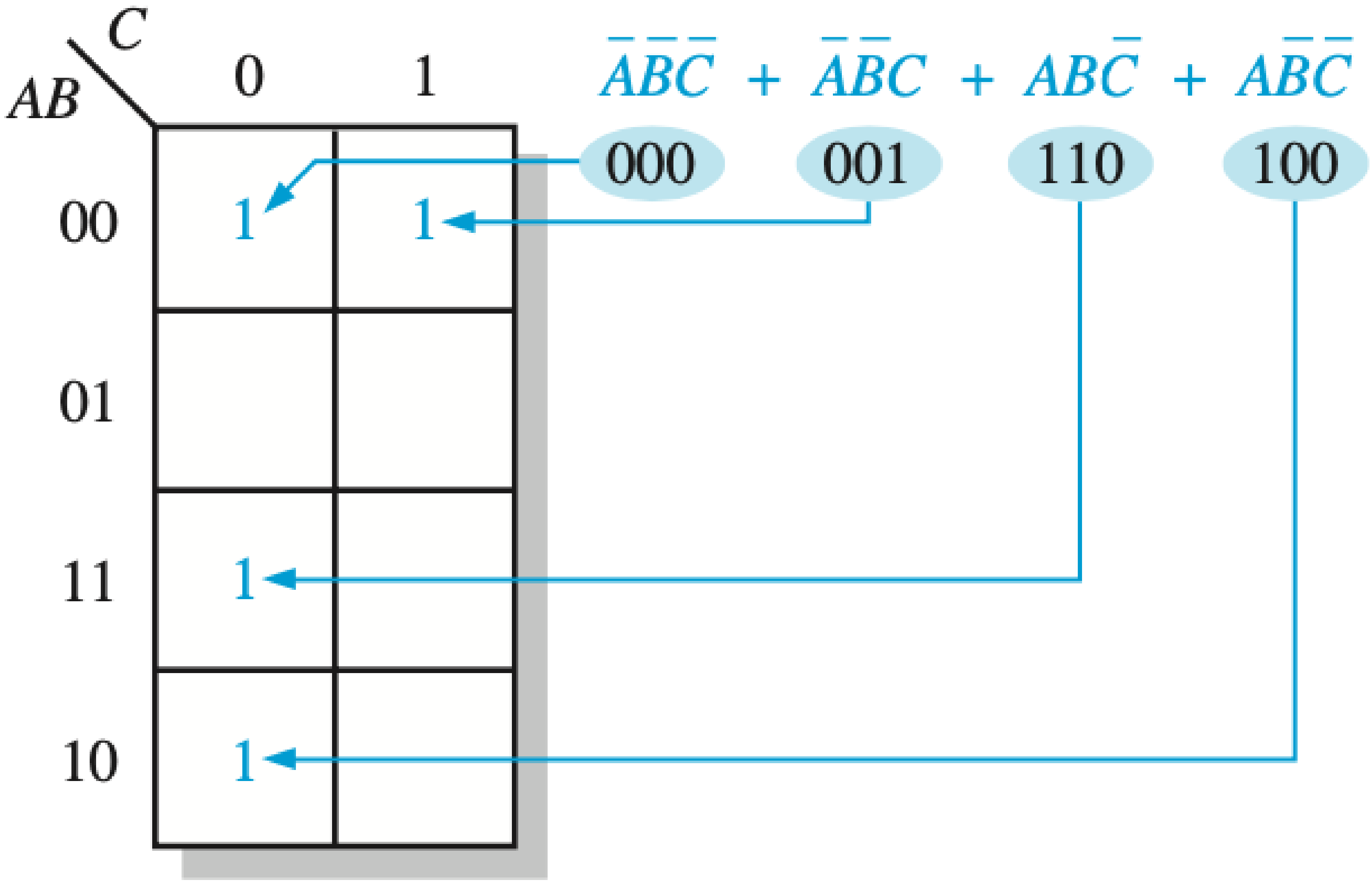
$$\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

$$\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

$$001 \quad 010 \quad 110 \quad 111$$



EJEMPLO



C
AB
0
1
00
01
11
10
1
1
1
1
$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$
000
001
110
100

Simplificación de una SoP mediante el mapa de Karnaugh

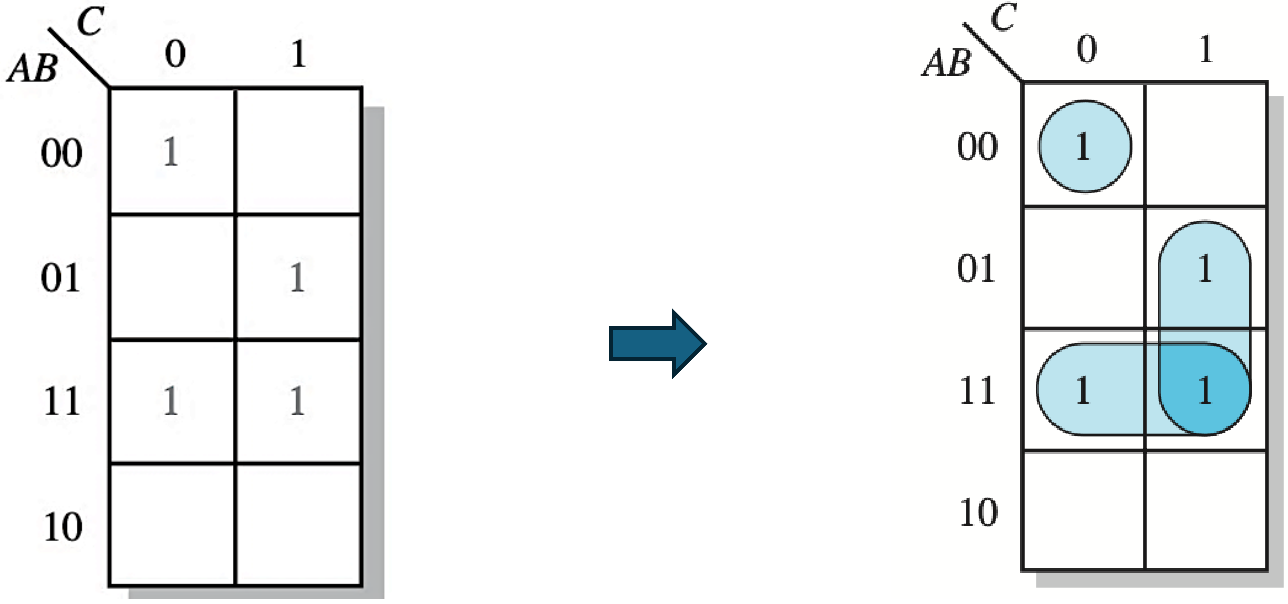
Paso 1. Agrupar (las celdas deben ser potencias de 2 (e.g, 1, 2, 4, 8, o 16)

AB \ C	0	1
00	1	
01		1
11	1	1
10		

La finalidad es maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el número de estos grupos.

Simplificación de una SoP mediante el mapa de Karnaugh

Paso 1. Agrupar (adyacentes)



La finalidad es maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el número de estos grupos.

Simplificación de una SoP mediante el mapa de Karnaugh

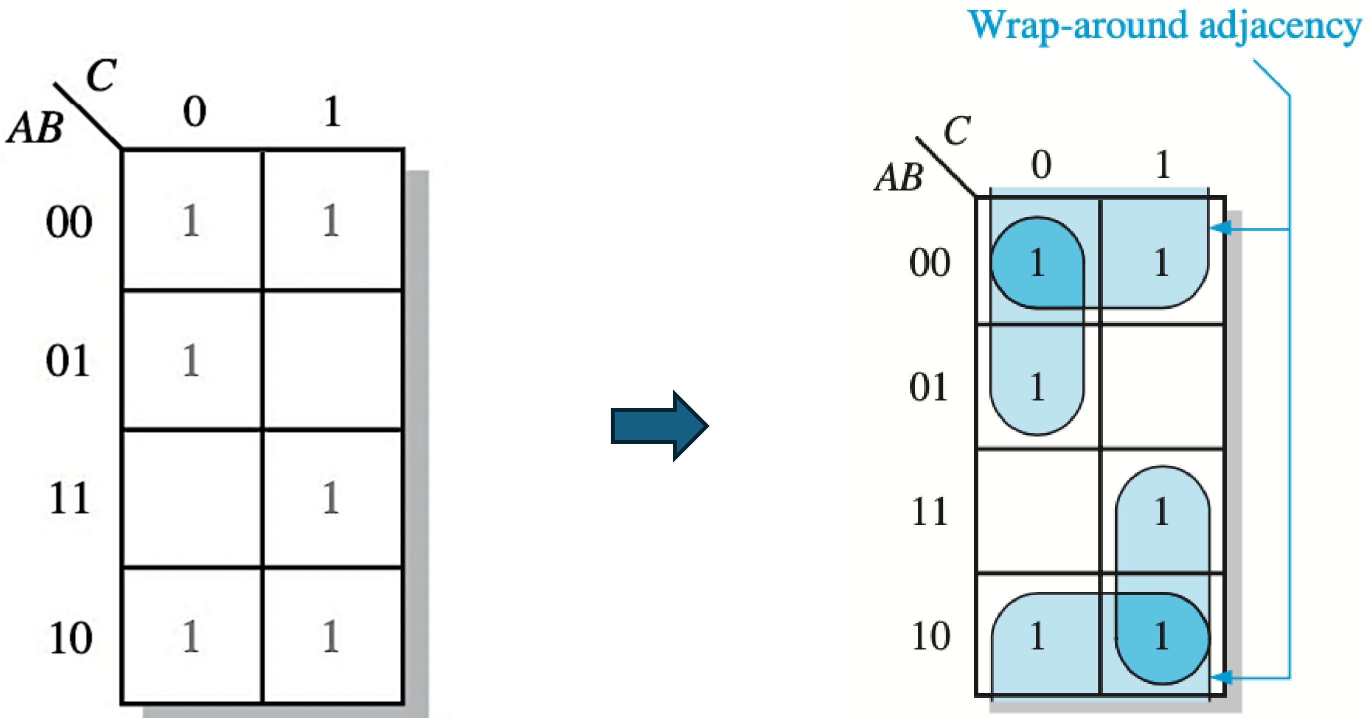
Paso 1. Agrupar

AB \ C	0	1
00	1	1
01	1	
11		1
10	1	1

La finalidad es maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el número de estos grupos.

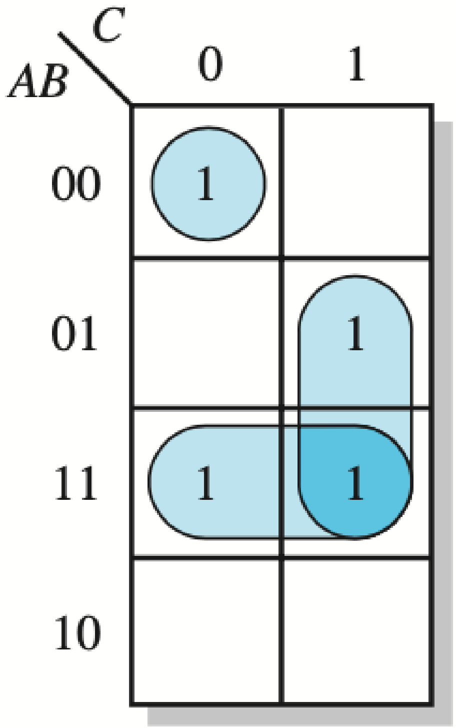
Simplificación de una SoP mediante el mapa de Karnaugh

Paso 1. Agrupar

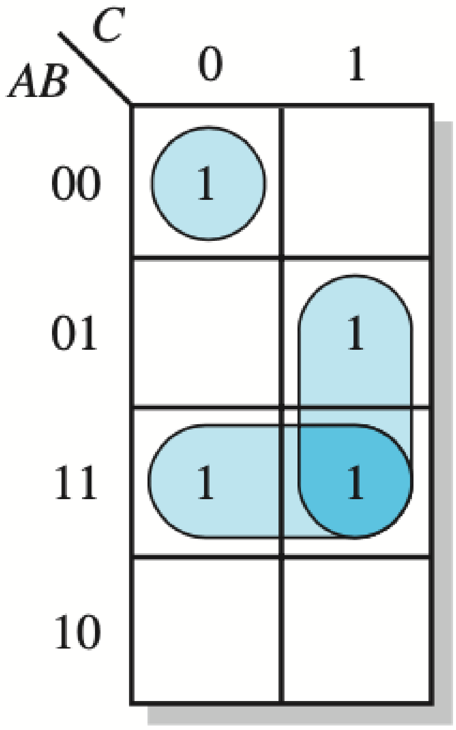


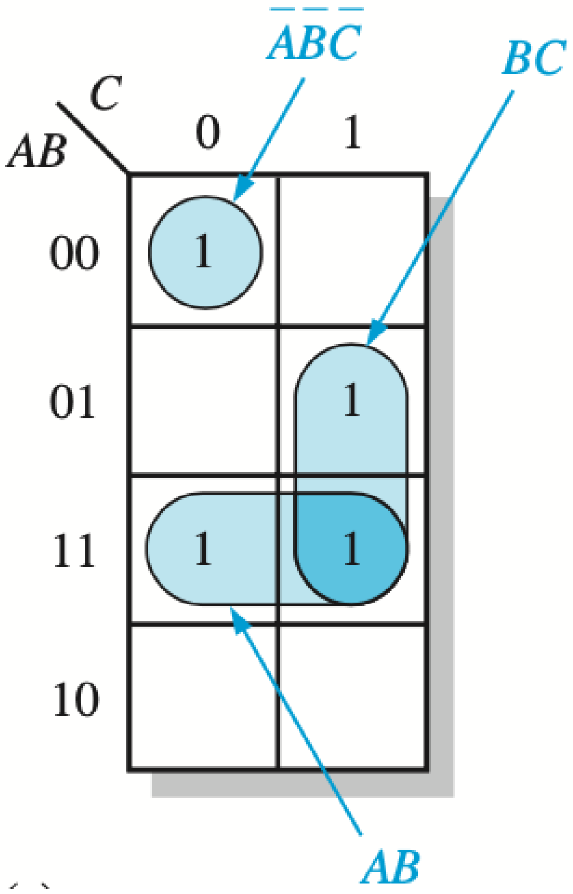
La finalidad es maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el número de estos grupos.

Paso 2. Determinar los productos para cada uno de los mapas de Karnaugh

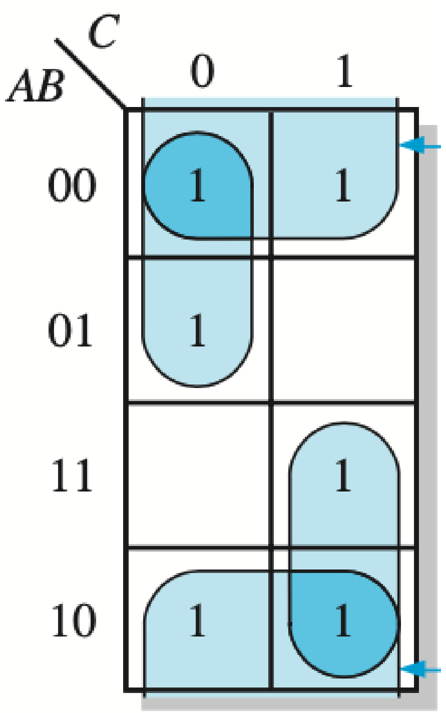


Paso 2. Determinar los productos para cada uno de los mapas de Karnaugh

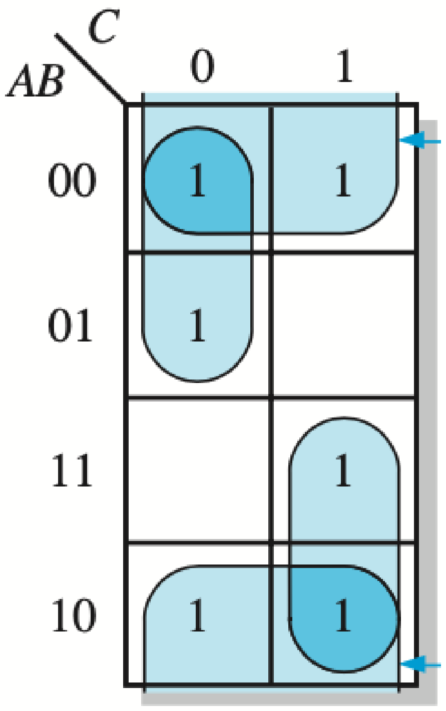


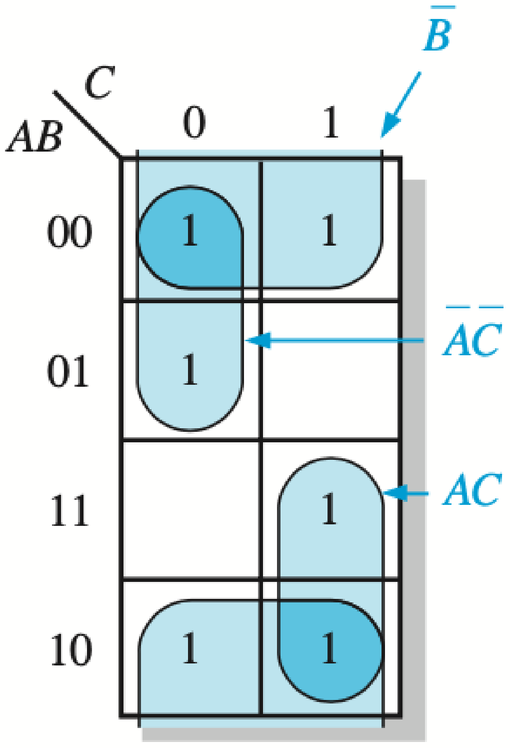


Paso 2. Determinar los productos para cada uno de los mapas de Karnaugh

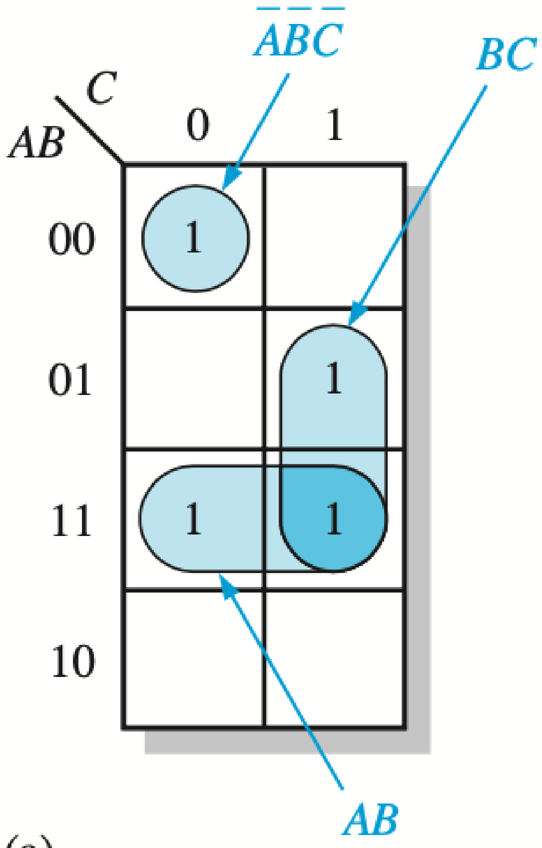


Paso 2. Determinar los productos para cada uno de los mapas de Karnaugh



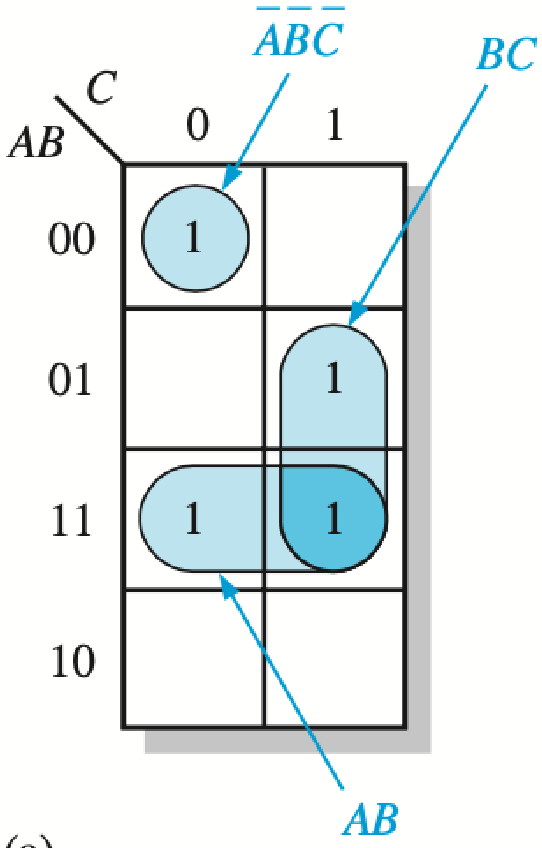


Paso 3. Obtener la expresión suma de productos mínima



(a)

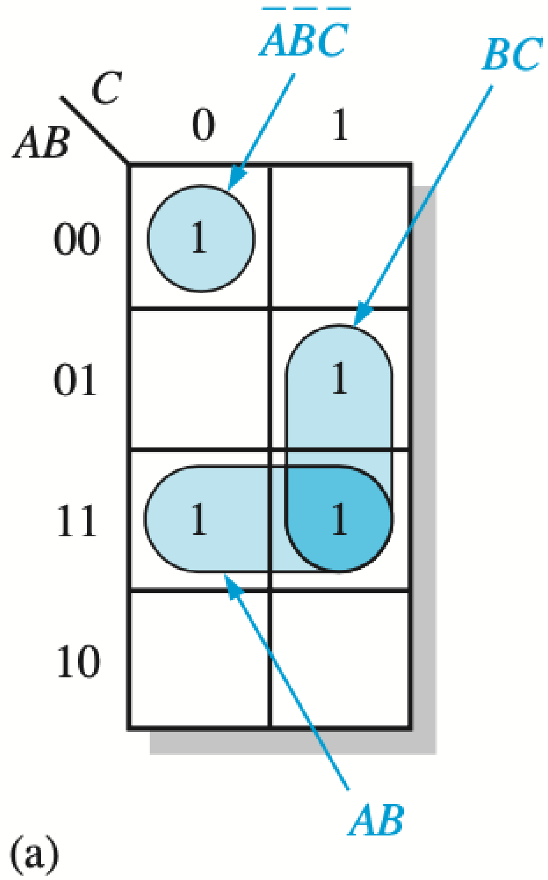
Paso 3. Obtener la expresión suma de productos mínima

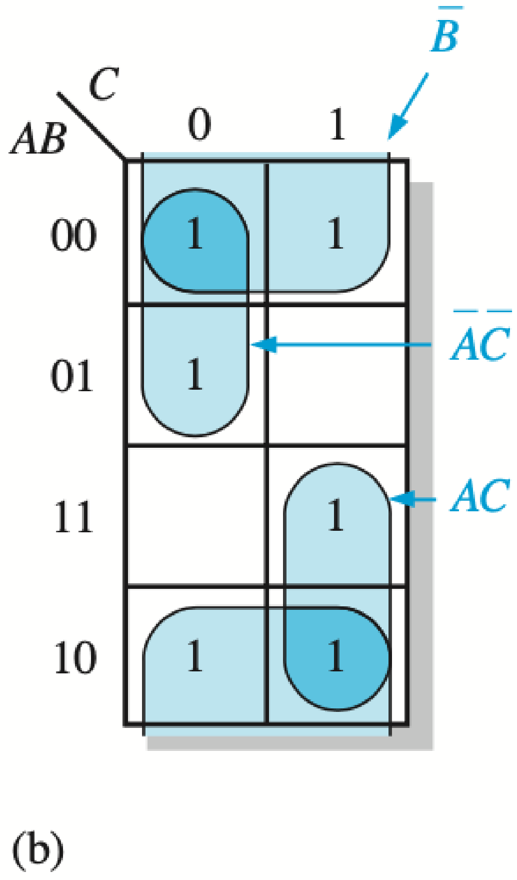


(a)

(a) $AB + BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

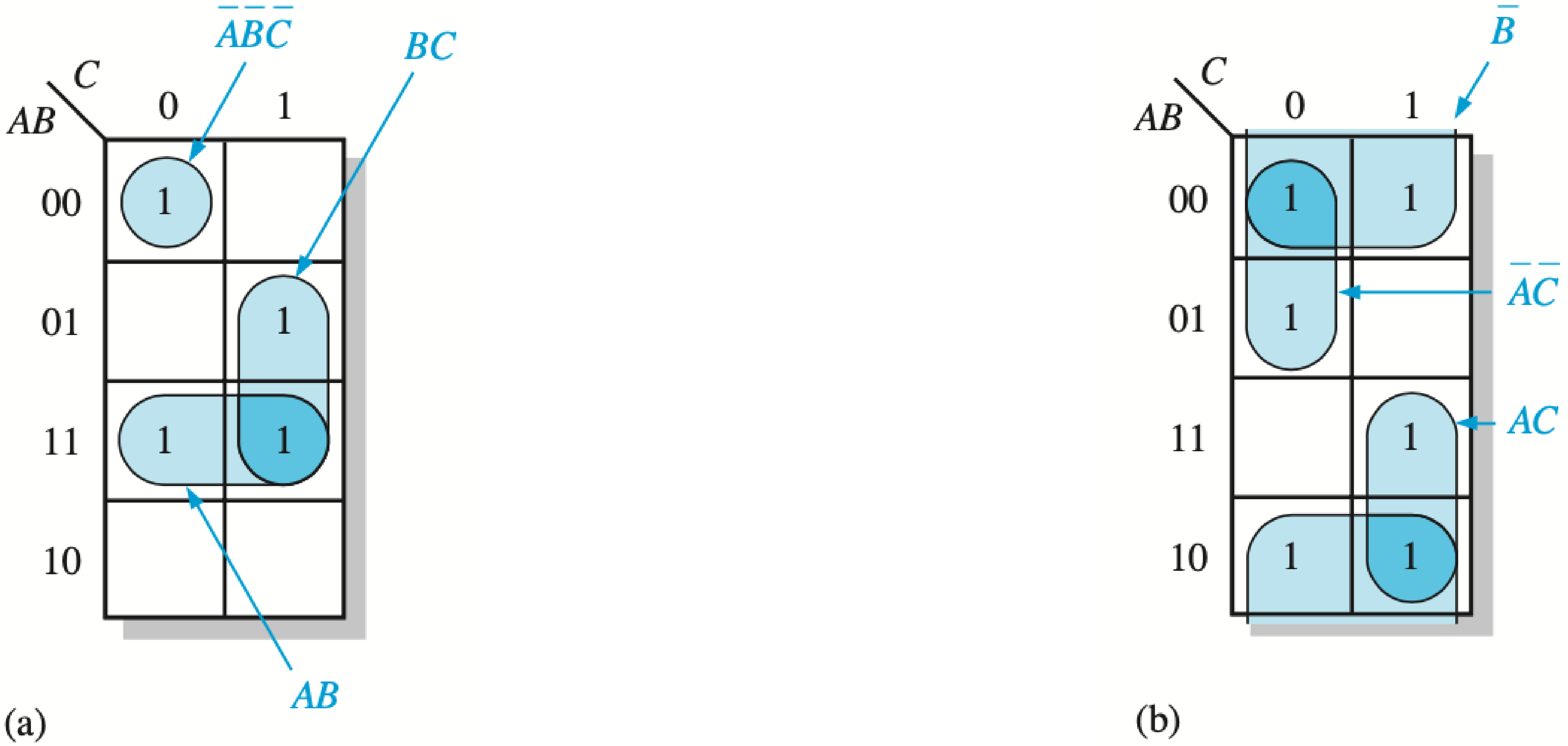
Paso 3. Obtener la expresión suma de productos mínima





(a) $AB + BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

Paso 3. Obtener la expresión suma de productos mínima



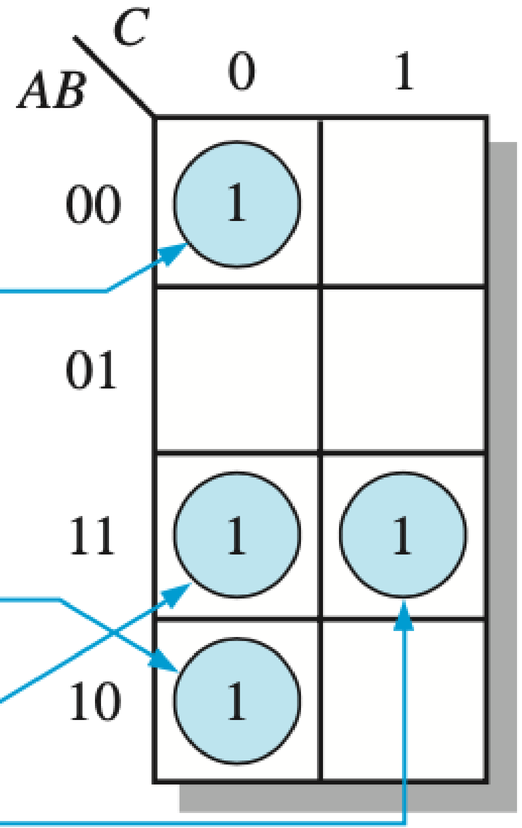
(a) $AB + BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

(b) $\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + AC$

Mapa de Karnaugh a partir de la tabla de verdad

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

Inputs			Output
A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



Ejercicio

1. Simplificar la siguiente expresión usando las leyes y reglas del algebra de Boole

$$[A\bar{B}(C+BD)+\bar{A}\bar{B}]C \Longrightarrow \bar{B}C$$

2. Utilizar un mapa de Karnaugh para simplificar

$$A\bar{B}C+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C} \Longrightarrow \bar{B}+\bar{A}C$$

Cuidado con el orden de las casillas

AB \ C	0	1
00		
01		
11		
10		

$$[A\bar{B}(C+BD)+\bar{A}\bar{B}]C$$

$$(A\bar{B}C + A\bar{B}BD + \bar{A}\bar{B})C$$

$$(A\bar{B}C + A\cdot 0\cdot D + \bar{A}\bar{B})C$$

$$(A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B})C$$

$$A\bar{B}CC + \bar{A}\bar{B}C$$

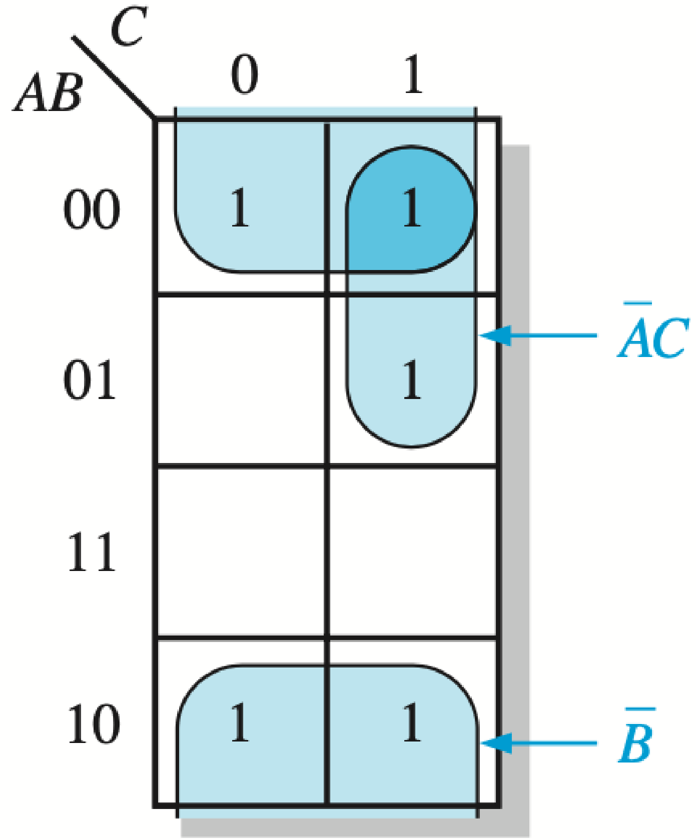
$$A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$$

$$\bar{B}C(A+\bar{A})$$

$$\boxed{\bar{B}C}$$

$$A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$$

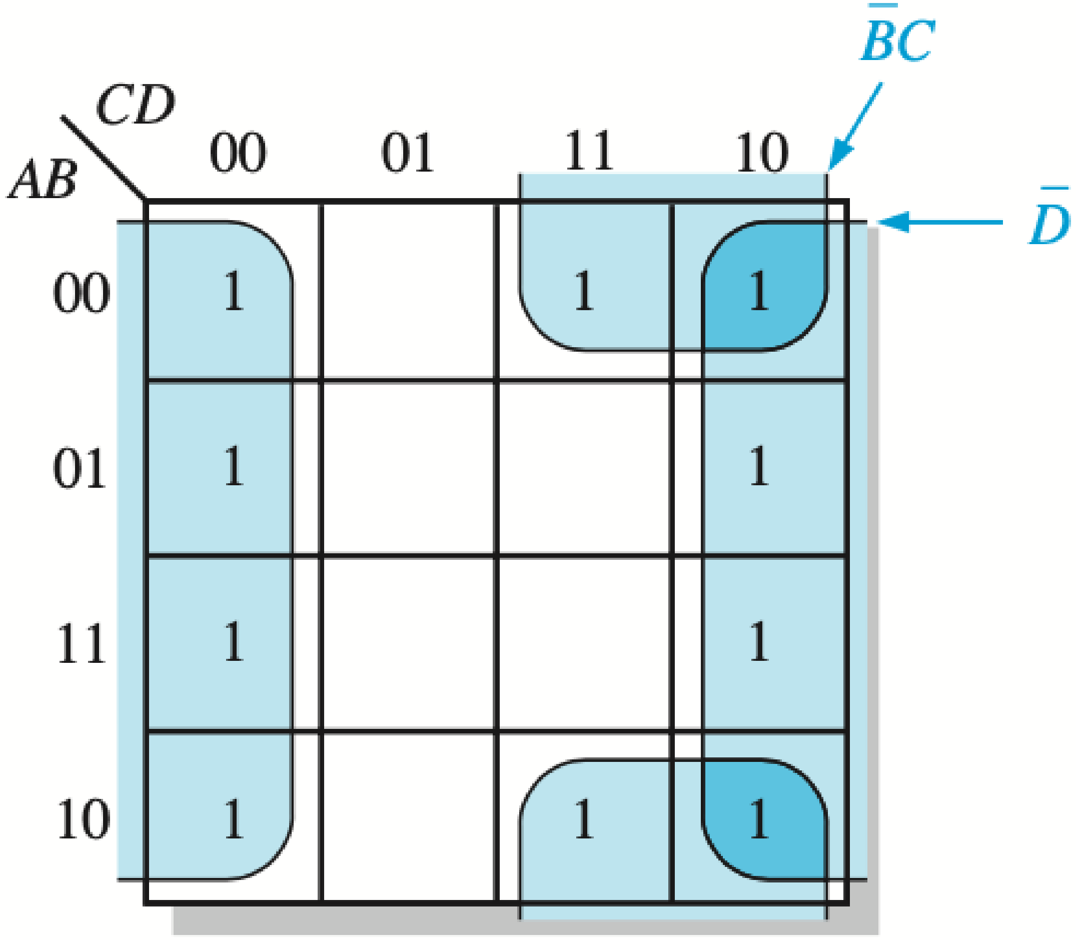
$$101 + 011 + 011 + 000 + 100$$



EJEMPLO

$$\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + A\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + ABC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$$

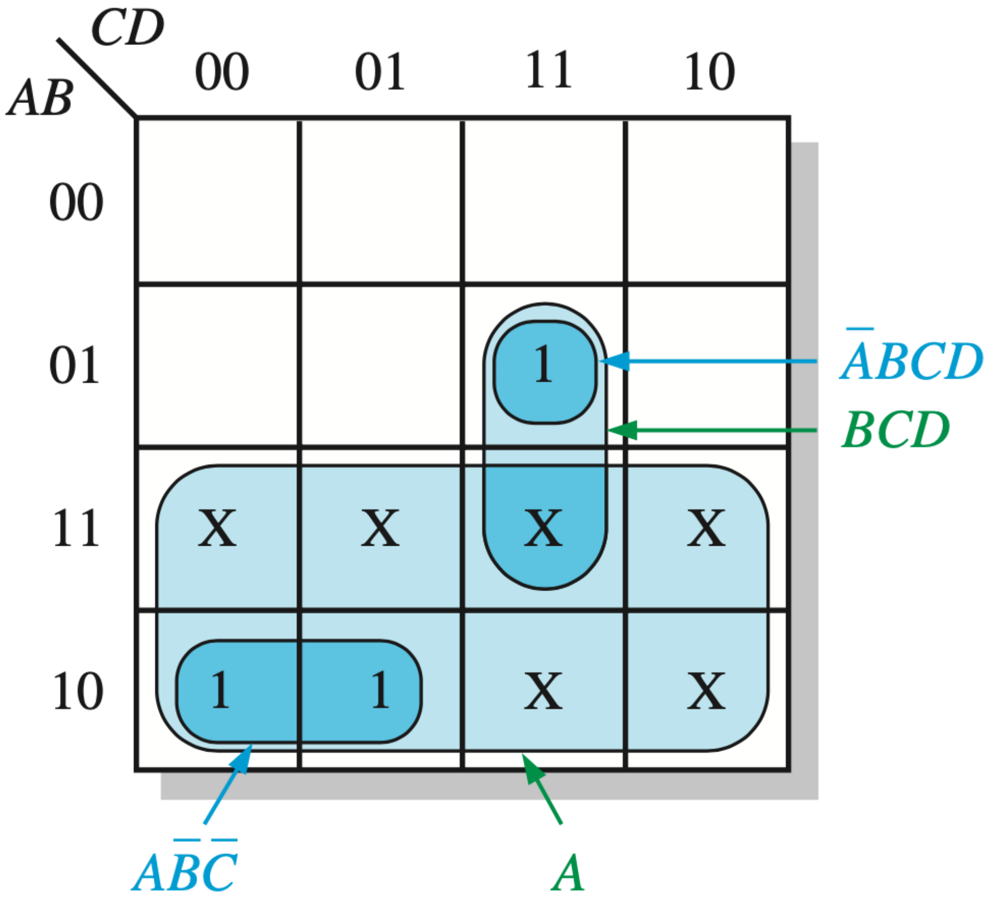
AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$



$$\overline{D} + \overline{B}C$$

Condiciones indiferentes/superfluas

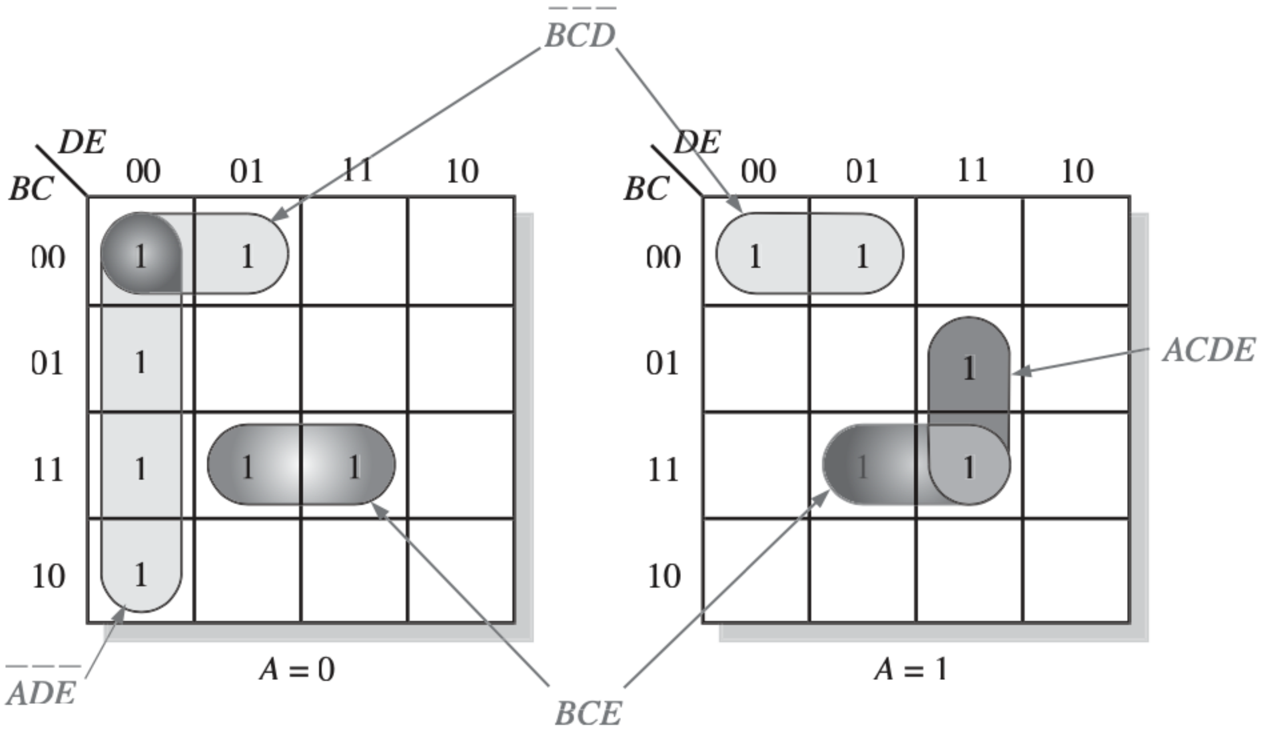
Inputs				Output
A	*B*	*C*	*D*	*Y*
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

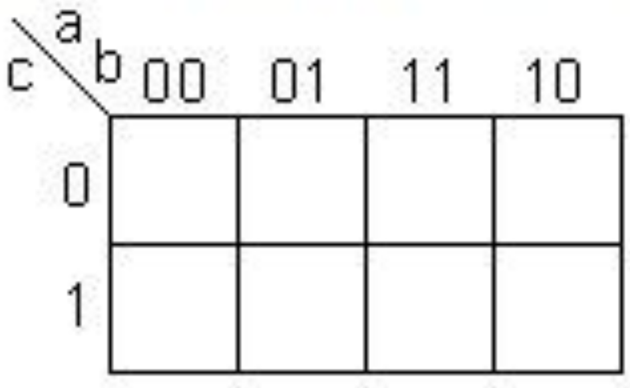


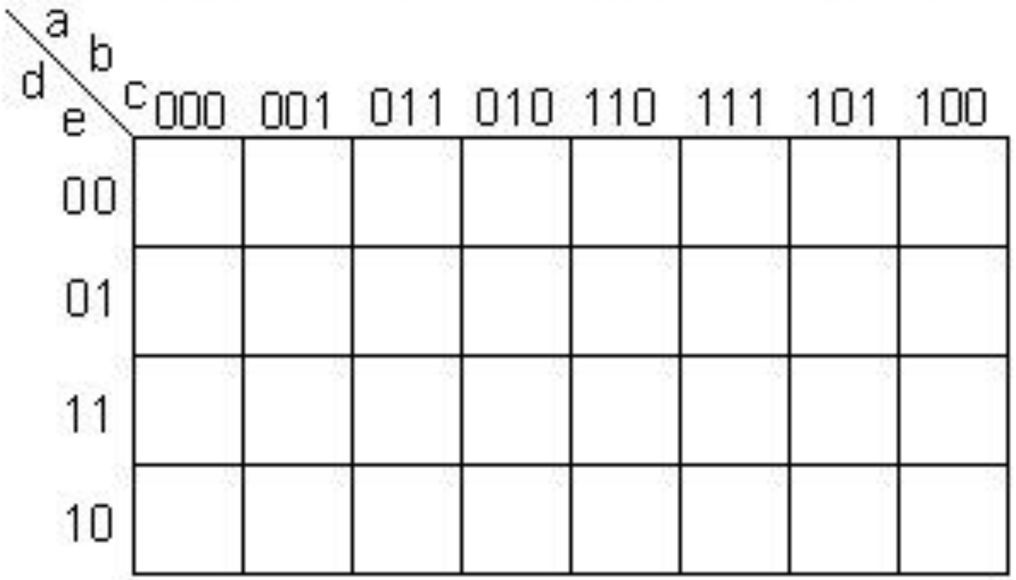
Sin condiciones indiferentes $Y = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BCD$

Con condiciones indiferentes $Y = A + BCD$

Otras configuraciones







Tarea

Utilizar un mapa de Karnaugh para simplificar

$$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + W\overline{X}YZ + W\overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{W}YZ + W\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$