Machine Learning para mineria de datos
Homework 1

Salazar Martinez Miguel Angel

14 de enero de 2025

1. Prove that the follwoing sets are vector spaces:

   (a) Let $C(\mathbb{R})$ be the linear space of all continuous functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Let S_c be the set of differentiable functions $u(x)$ that satisfy the differential equation $u'' = 2xu + c$ for all real x. For which value(s) of the real constant c is this set a linear subspace of $C(\mathbb{R})$?

   (b) $\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 2x_3 = 0\}$

Respuesta:

(a)

Consideremos el conjunto S_c de funciones diferenciables $u(x)$ que satisfacen la ecuación diferencial $u'' = 2xu + c$. Para que S_c sea un subespacio de $C(\mathbb{R})$, debemos verificar las propiedades de subespacio:

- Cerradura bajo la suma: Sean $u_1, u_2 \in S_c$, entonces $u_1'' = 2xu_1 + c$ y $u_2'' = 2xu_2 + c$. Sumando ambas ecuaciones:

$$(u_1 + u_2)'' = 2x(u_1 + u_2) + 2c.$$

Para que S_c sea cerrado bajo la suma, debemos tener $2c = c$, lo que implica $c = 0$.

- Cerradura bajo la multiplicación por escalares: Sea $u \in S_c$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces, $u'' = 2xu + c$. Al multiplicar por k:

$$(ku)'' = 2x(ku) + kc.$$

Para que $kc = c$, debe ser $c = 0$.

- Contiene el vector cero: La función cero $u(x) = 0$ satisface $u'' = 2x \cdot 0 + c$ solo si $c = 0$.

Por lo tanto, S_c es un subespacio solo si $c = 0$.

(b)

Sea $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$. Verifiquemos si S es un subespacio:

- Cerradura bajo la suma: Sean $x, y \in S$, es decir, $x_1 - 2x_3 = 0$ y $y_1 - 2y_3 = 0$. Entonces:

$$(x_1 + y_1) - 2(x_3 + y_3) = (x_1 - 2x_3) + (y_1 - 2y_3) = 0.$$

Por lo tanto, $x + y \in S$.

- Cerradura bajo la multiplicación por escalares: Sea $k \in \mathbb{R}$ y $x \in S$, es decir, $x_1 - 2x_3 = 0$. Entonces:

$$(kx_1) - 2(kx_3) = k(x_1 - 2x_3) = 0.$$

Por lo tanto, $kx \in S$.

- Contiene el vector cero: El vector cero $(0, 0, 0)$ satisface $x_1 - 2x_3 = 0$.

Por lo tanto, S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

2. Given the following loss function

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2$$

(a) Please provide the steps to solve for a and b by deriving the function by each of the terms and making equal to zero

(b) Now tell me how many samples $\{(x_i, y_i)\}$ you should have to have a solvable problem. Hint look at the denominator $N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$

(c) How is point (b) related to the idea that for being able to solve $Ax = b$ by matrix inversion. Hint: Remember

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i \end{pmatrix}$$

What would happen if you have only one sample to the matrix? Then do you remewmber linear independence? Related to rank of a matrix

Respuesta:

(a)

La función de pérdida es:

$$L(a, b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2 .$$

Para encontrar los valores óptimos de a y b, derivamos respecto a a y b y igualamos a cero.

1. Derivada respecto a a:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \sum_{i=1}^{N} -2x_i \left(y_i - (ax_i + b)\right) .$$

Igualando a cero:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \left(y_i - (ax_i + b)\right) = 0.$$

2. Derivada respecto a b:

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} -2 \left(y_i - (ax_i + b)\right) .$$

Igualando a cero:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - (ax_i + b)\right) = 0.$$

(b)

La condición para que el problema sea resolvible es que el determinante de la matriz asociada no sea cero:

$$N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 \neq 0.$$

Esto requiere al menos dos valores distintos de x_i. Si todos los x_i son iguales, la matriz sería singular.

(c)

El problema puede escribirse en la forma $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & N \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \sum_{i=1}^N y_i \end{pmatrix}.$$

Si solo hay una muestra, $\det(A) = 0$ y A no es invertible, lo que está relacionado con la independencia lineal y el rango de la matriz.

3. For which real numbers c do the vectors: $(c, 1, 1, 1), (1, c, 1, 1), (1, 1, c, 1), (1, 1, 1, c)$ not form a basis of $\mathbb{R}^4$? For each of the values of c that you find, what is the dimension of the subspace of $\mathbb{R}^4$ that they span?

Respuesta:

Los vectores son:

$$v_1 = (c, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, c, 1, 1), \quad v_3 = (1, 1, c, 1), \quad v_4 = (1, 1, 1, c).$$

Forman una base si $\det(A) \neq 0$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Calcula $\det(A)$ y encuentra para qué valores de c es cero. Esos valores indican cuando los vectores no forman una base. La dimensión del subespacio generado dependerá del rango de A.

4. A map $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ defined as

$$L(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Find the space of vectors $\boldsymbol{x}$ such that $A\boldsymbol{x} = 0$ i.e. the kernel space of A.

Respuesta:

La transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está definida por:

$$L(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Para encontrar $\ker(L)$, resuelve $Ax = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema no tiene solución, ya que al intentar representarlo como un sistema de ecuaciones se obtiene lo siguiente:

$$x + 2y - z = 0$$

$$3x - 3y + x = 0$$

Lo cual resulta en un sistema que no es posible resolver, ya que se trata de un sistema incompleto.

5. Find the straight line $y = b + mx$ that is the best least squares fit to the points $(0, 0)$, $(1, 3)$, and $(2, 7)$.

Respuesta:
NOTA: La recta calculada no pasa por el origen, supongo que fue un error de dedo.
Dado los puntos $(0, 0), (1, 3), (2, 7)$, ajusta la línea $y = mx + b$,seguimos los siguientes pasos:
1. Identificar los puntos: Los puntos dados son $(0, 0)$, $(1, 3)$ y $(2, 7)$.
2. Extraer las coordenadas:

$$\text{Punto 1: } (x_1, y_1) = (0, 0)$$

$$\text{Punto 2: } (x_2, y_2) = (1, 3)$$

$$\text{Punto 3: } (x_3, y_3) = (2, 7)$$

3. Calcular la pendiente (m): Para calcular la pendiente, utilizamos la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Usando los puntos $(1, 3)$ y $(2, 7)$:

$$m = \frac{7 - 3}{2 - 1} = \frac{4}{1} = 4$$

4. Calcular la ordenada al origen (b): Usamos la ecuación de la recta $y = mx + b$ con la pendiente $m = 4$ y uno de los puntos. Usamos el punto $(1, 3)$:

$$3 = 4(1) + b$$

$$3 = 4 + b \quad \Rightarrow \quad b = 3 - 4 = -1$$

5. La ecuación de la recta: La ecuación de la recta es:

$$y = 4x - 1$$