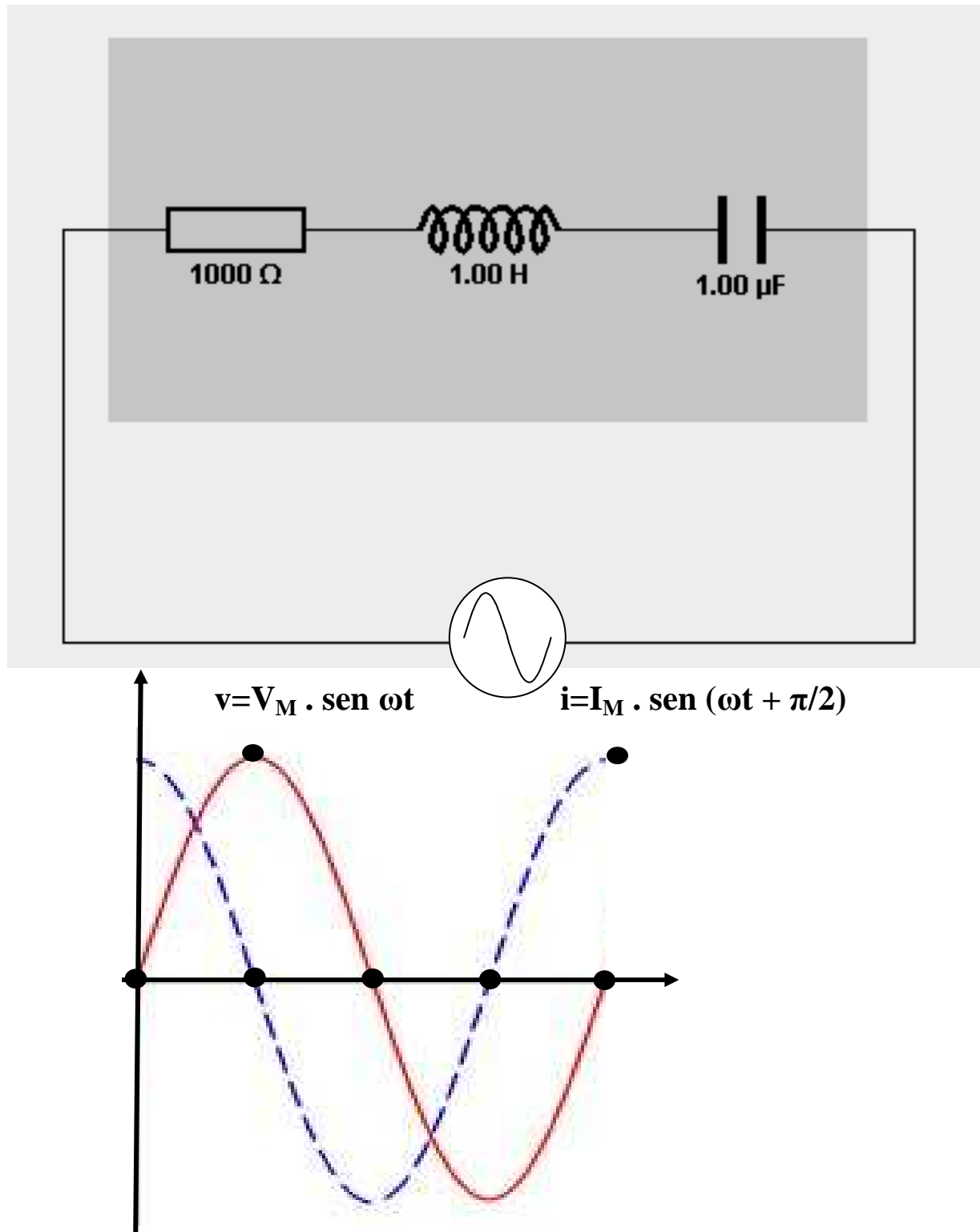


# CIRCUITOS DE CA



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
SUL-RIO-GRANDENSE  
Campus Pelotas

PROF. MARIO LUIZ F. LAMAS

CURSO DE ELETRÔNICA

## **ÍNDICE**

### **1. Indutância - pg. 1**

- 1.1. Campo Indutor e Permeabilidade Magnética, 1
- 1.2. Histereses Magnética, 2
- 1.3. Circuito Magnético, 4
- 1.4. Definição de Indutância, 5
- 1.5. Associações de Indutores, 10

### **2. Fundamentos de CA - pg. 15**

- 2.1. Fonte de Tensão Alternada Senoidal, 14
- 2.2. Ciclo, Período e Frequência, 15
- 2.3. Valor Médio das Grandezas Alternadas, 16
- 2.5. Valor Eficaz das grandezas Alternadas, 17
- 2.6. Representação Fasorial das Ondas Senoidais, 20

### **3. Circuitos Puros R, L e C - pg. 26**

- 3.1. Circuitos Puramente Resistivos, 26
- 3.2. Circuitos Puramente Capacitivos, 28
- 3.3. Circuitos Puramente Indutivos, 30

### **4. Circuitos RLC Série e Paralelo - pg. 34**

- 4.1. Circuitos RC Série, 34
- 4.2. Circuitos RL Série, 35
- 4.3. Circuitos RLC Série, 39
- 4.4. Circuitos RLC Série, 44

### **5. Método dos Números Complexos – Circuitos RLC - pg. 50**

- 5.1. Revisão de Números Complexos, 50
- 5.2. Representação complexa de Grandezas Elétricas, 54

### **6. Potência em CA - pg. 62**

- 6.1. Potência Ativa, Reativa e Aparente, 62
- 6.2. Fator de Potência, 64
- 6.3. Correção do fator de Potência, 66
- 6.4. Potência Aparente Complexa, 69

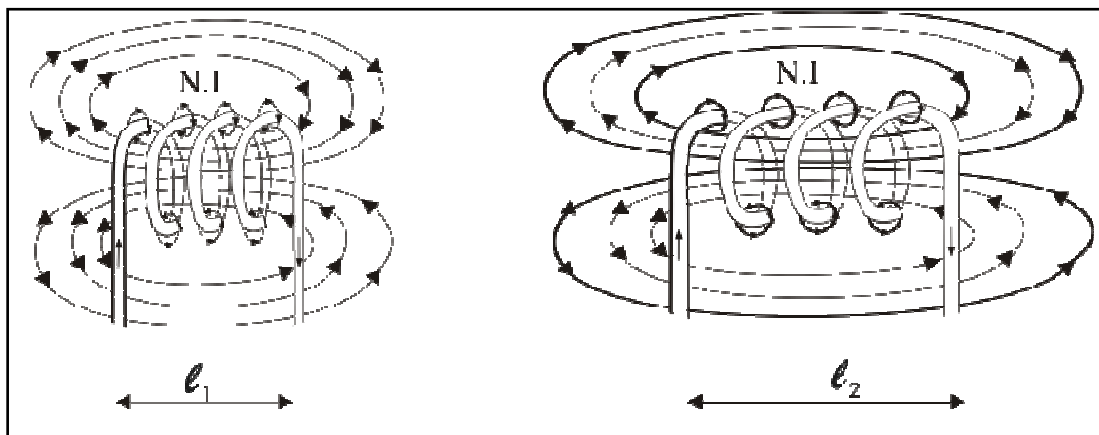
### **7. Gerador Trifásico - pg. 74**

- 7.1. Alternador Monofásico de Induzido Rotativo, 74
- 7.2. Alternador Trifásico Bipolar de Induzido Rotativo, 74
- 7.3. Agrupamento das Fases em Estrela e em Triângulo, 76
- 7.4. Potência dos Circuitos Trifásicos, 80

## 1. INDUTÂNCIA

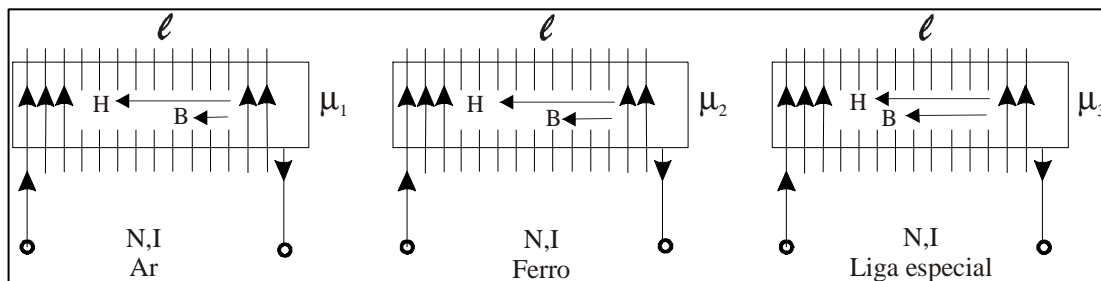
### 1.1. CAMPO INDUTOR ( $\vec{H}$ ) e PERMEABILIDADE MAGNÉTICA ( $\mu$ )

Nas duas bobinas ao lado, nota-se que o número de espiras e a corrente que as atravessa é a mesma. No entanto, o comprimento das linhas de indução em cada caso é diferente, ou seja, o comprimento do circuito magnético é diferente. No solenóide mais curto obtém-se maior intensidade de campo indutor porque há maior concentração de corrente e espiras por unidade de comprimento do circuito magnético. Sabe-se que o campo magnético é oriundo da corrente, no entanto, a geometria do condutor vai determinar se o poder de magnetização que esta corrente produz será intenso ou não.



A fim de levar em conta o grau de concentração da corrente, para efeitos de magnetização, foi criada a grandeza **INTENSIDADE DE CAMPO MAGNÉTICO** ( $\vec{H}$ ). Esta grandeza também é chamada de intensidade de campo indutor, campo indutor ou campo magnetizante. O campo indutor é uma grandeza vetorial, cujo sentido é o mesmo das linhas de indução. O módulo do campo indutor é a razão entre as ampère-espiras magnetizantes e o comprimento do circuito magnético em questão. A unidade da intensidade de campo indutor no Sistema Internacional é Ampère-espira/metro ou Ampère/metro, já que espira é uma grandeza adimensional (número puro).

Sejam três solenóides (espiras acomodadas numa forma tubular) de mesmas dimensões, mesmo número de espiras e mesma corrente, porém com núcleos de materiais diferentes. Como se pode observar no desenho, a ação de um mesmo campo indutor  $H$  produz diferentes induções e fluxos em função do material onde se estabelece o campo magnético.



A grandeza que caracteriza a qualidade magnética do material é a **permeabilidade magnética** ( $\mu$ ), sendo portanto, análoga à condutividade (inverso da resistividade) para os materiais elétricos. Permeabilidade magnética absoluta ou simplesmente permeabilidade é a constante de proporcionalidade que relaciona campo indutor  $H$  com a indução produzida  $B$ . Pode ser considerada como sendo a facilidade com que o material do meio é atravessado pelas linhas de indução ou a facilidade com que um material magnetiza-se.

$$B = \mu \cdot H$$

A unidade de permeabilidade magnética está indicada ao lado. Pode-se provar que T.m/A equivale a Henry/metro (H/m).

$$u(\mu) = \frac{u(B)}{u(H)} = \frac{T}{Ae / m} = \frac{T \cdot m}{Ae} = \frac{T \cdot m}{A}$$

No caso da eletricidade tem-se condutividade nula nos materiais isolantes. No entanto, no magnetismo, não existe o isolante magnético. Um dos piores meios de propagação do campo magnético é o vácuo e tem permeabilidade magnética absoluta ( $\mu_0$ ) com um valor bem definido.

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T.m/A}$$

Este meio é tomado como referência na comparação entre os materiais magnéticos. Em função disto, define-se como **permeabilidade relativa** ( $\mu_r$ ), a razão entre a permeabilidade absoluta de um dado material e a permeabilidade do vácuo.

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad u(\mu_r) = \text{adimensional}$$

Dai, tem-se que:  $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$

Sabe-se que:  $B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\ell}$  e que:  $B = \mu \cdot H$ . Logo, deduz-se que:

$$H = \frac{N \cdot I}{\ell}$$

A permeabilidade relativa, simplesmente, diz quantas vezes o material é mais permeável do que o vácuo. Os materiais podem ser classificados de acordo com a sua permeabilidade, sendo que eles podem ser denominados de materiais diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos.

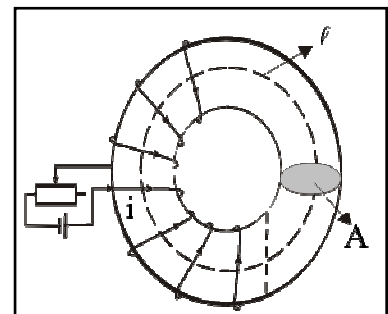
Os materiais **diamagnéticos** possuem permeabilidade constante e pouco menor que a do vácuo, ou seja, estes materiais imantam-se muito pouco e em sentido contrário ao do campo indutor. Em função disto são fracamente repelidos pelos ímãs. Como exemplos, podemos citar o bismuto, cobre, água, prata, e ouro.

Os materiais **paramagnéticos** possuem permeabilidade constante e pouco maior que a do vácuo, ou seja, estes materiais imantam-se muito pouco e no mesmo sentido do campo indutor. Em função disto são fracamente atraídos pelos ímãs. Como exemplos, podemos citar o manganês, estanho, cromo, oxigênio líquido, ar (à temperatura de 0°C e pressão de 1 atm).

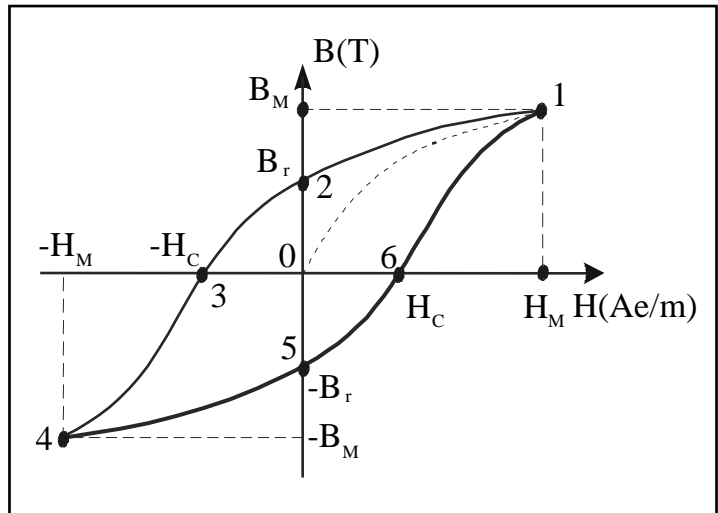
Os materiais que possuem mais importância e têm mais utilização são os materiais denominados **ferromagnéticos**. Eles possuem permeabilidade relativa muito maior do que 1, ou seja, sua permeabilidade absoluta é, notadamente, muito maior que a do vácuo. O valor da permeabilidade destes materiais é muito alta, porém é variável com a variação do campo indutor H. Como exemplos, podemos citar: ferro, níquel, cobalto e aços especiais. O pó magnético da fita K-7 é, geralmente, constituída de óxido de ferro (ou dióxido de cromo).

## 1.2. HISTERESES MAGNÉTICA

A fim de se observar todos os estágios de magnetização e desmagnetização de um material magnético, podemos introduzir este material num solenóide percorrido por uma corrente elétrica contínua variável. Anotando-se valores do campo indutor H e da indução magnética B, poderíamos montar um gráfico (veja o gráfico a seguir).



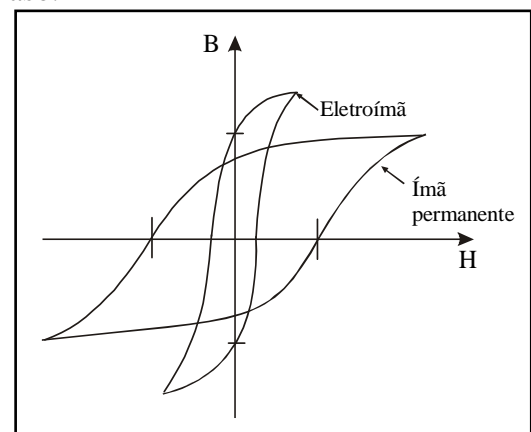
Observando-se o gráfico, vamos, inicialmente, aumentar o campo indutor, de modo que a indução magnética vai crescendo (de 0 até 1), chegando-se ao ponto de saturação magnética. Reduzindo-se o campo indutor, a indução decresce, mas com um certo atraso (linha 1 - 2), ou seja, o material mantém, para cada valor de campo indutor, uma indução magnética superior ao que ele tinha na fase inicial de magnetização. Quando o campo indutor anula-se ( $H=0$ ), ainda resta um pequeno magnetismo, ou seja, mesmo sem o campo indutor externo os ímãs elementares mantêm-se parcialmente orientados.



Este magnetismo retido no material é denominado de *magnetismo (indução) residual*. De modo a anular este magnetismo (desmagnetizar o material) deveríamos inverter o sentido da corrente no solenóide (campo indutor contrário ao anterior) e ir aumentando, gradativamente, até que a indução seja anulada ( $B=0$ ). Aplicando-se um campo indutor  $-H_C$ , a indução magnética  $B$  se anularia. O campo indutor necessário para causar este efeito é denominado de *campo coercitivo*. Nota-se na seqüência da análise gráfica que teremos um outro ponto de saturação magnética (ponto 4), porém com polaridade contrária ao ponto de saturação anterior.

Reduzindo-se a excitação na bobina magnetizadora, a indução magnética diminui até chegar ao ponto 5 ( $H = 0$ ), sobrando uma indução residual negativa. Para anular esta indução residual deve-se inverter o campo e aumentá-lo até alcançar  $H_C$ . Continuando-se a aumentar o campo indutor chega-se novamente à saturação no sentido positivo. Como percebeu-se, o valor da indução magnética segue o valor do campo indutor  $H$  com um certo atraso, ou seja, quando  $H$  chega a zero,  $B$  ainda não foi anulado. Histeresis, em grego, significa atraso.

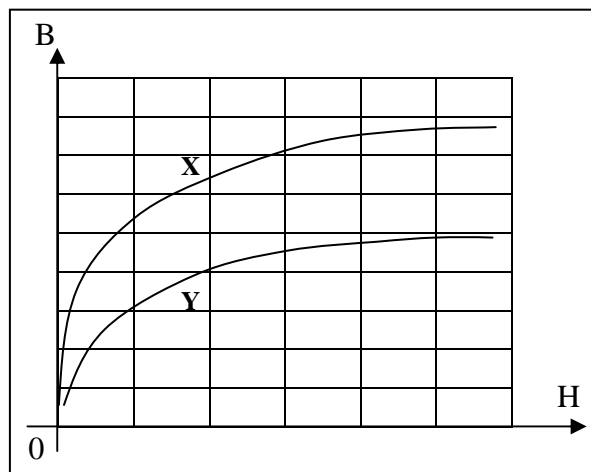
Na construção de *ímãs permanentes* é mais aconselhável materiais que se caracterizassem por possuírem indução residual elevada e campo coercitivo também elevado. Assim sendo, teríamos uma boa indução de trabalho e os ímãs seriam difíceis de serem desmagnetizados. Como exemplos de materiais utilizados podemos citar o aço com alto teor de carbono e o ferrite. Após o corte do campo indutor, alguns átomos voltam a sua posição original, mas muitos deles não conseguem este retorno, devido aos átomos de carbono, os quais não sentem a ação do campo, dificultando, então, os movimentos dos átomos. No caso de *núcleos de eletroímãs* o importante é que a indução magnética seja alta para pequenos valores de  $H$  (alta permeabilidade) e que a indução residual e o campo coercitivo sejam baixos, de modo que, ao se extinguir a corrente, a indução residual seja anulada rapidamente.



Como exemplos de materiais utilizados para núcleos de eletroímãs podemos citar o aço-doce e o aço-silício. Estes materiais têm alta permeabilidade e pequeno campo coercitivo, porém têm alta indução residual, o que não chega a ser problema, pois é facilmente anulada, já que o campo coercitivo é muito baixo.

No gráfico ao lado, existem duas curvas que representam o comportamento magnético de dois materiais diferentes. Percebe-se que aplicando um mesmo campo indutor  $H(\text{Ae/m})$ , as induções magnéticas  $B(\text{T})$  serão diferentes. Isto ocorre porque os materiais não possuem a mesma permeabilidade magnética, ou seja, a permeabilidade do material **X** é superior a do material **Y**.

Não obtém-se uma linha reta, pois o crescimento de  $B$  não é linear em relação a  $H$ . No caso de uma curva relativa ao ar, teríamos uma linha reta quase paralela ao eixo do  $H$ , com uma pequena inclinação.



Os fenômenos de histerese são em função do atrito e da inércia a que os pequenos ímãs elementares ficam submetidos e isto representa perda de energia. A área contida no ciclo de histerese resulta proporcional a energia perdida durante as operações. Os núcleos ferro-magnéticos, de um modo geral, apresentam perdas quando submetidos a campos magnéticos variáveis no tempo.

Quando um material magnético é submetido a um campo magnetizante, seus ímãs elementares orientam-se com certa dificuldade, devido ao atrito interno que existe entre os mesmos. Tal atrito também existe quando o material é submetido a um campo desmagnetizante. Quanto maior for a dificuldade de magnetizar e desmagnetizar um material, maior será esse atrito e maior a energia dissipada em forma de calor, ou seja, maior será a perda por histerese magnética.

Uma medida dessas dificuldades de magnetização e desmagnetização é o campo coercitivo. Os materiais duros, que têm campo coercitivo elevado, apresentam muitas perdas por histerese. Para redução dessas perdas deve-se usar material de baixo campo coercitivo, indução magnética baixa (material não saturado) e reduzir a frequência de variação do fluxo, quando for possível. Assim, para trabalhos envolvendo correntes alternadas é conveniente que esta área seja a menor possível, pois o material está permanentemente magnetizando-se e desmagnetizando-se e isto implica em muita perda de energia.

### 1.3. CIRCUITO MAGNÉTICO

Num circuito elétrico existe uma grandeza denominada de resistência elétrica, a qual depende do comprimento do fio condutor, do material de que ele é feito e da área de sua seção transversal. Esta grandeza constitui a oposição oferecida à corrente. No caso de um circuito magnético também existe uma *oposição oferecida ao estabelecimento de um fluxo magnético*, a qual é denominada de **relutância magnética** ( $\mathfrak{R}$ ). Quanto maior o comprimento deste circuito magnético maior será a oposição oferecida ao fluxo e quanto maior a área da seção transversal do núcleo magnético menor será a relutância.

Obviamente, a relutância depende também da permeabilidade magnética do núcleo. Portanto, para o cálculo de relutância temos a relação ao lado.

$$\mathfrak{R} = \frac{\ell}{\mu \cdot A}$$

Sendo o comprimento em **m**, a área em **m<sup>2</sup>** e a permeabilidade em **T.m/A** e sabendo-se que **T=Weber/m<sup>2</sup>**, a unidade de  $\mathfrak{R}$  será **A.e/Wb**, conforme quadro abaixo. A unidade de relutância pode ser, tanto Ampère por Weber como Ampère.espira por Weber, sendo que é mais comum esta última.

$$u(\mathfrak{R}) = \frac{\text{m}}{\text{T} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{A}}{\text{T} \cdot \text{m}^2} = \text{A} / \text{Wb} \text{ ou } \text{A.e/Wb}$$

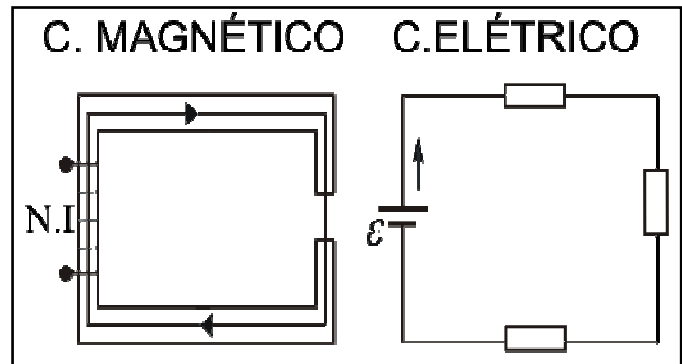
Com estas definições, podemos expressar a **LEI DE HOPKINSON**, que também é conhecida como a Lei de Ohm do eletromagnetismo. Esta lei diz que, num circuito magnético o fluxo é diretamente proporcional à **força magnetomotriz** aplicada ( $N \cdot I \Rightarrow$  causa dos fenômenos magnéticos) e inversamente proporcional á relutância magnética do circuito.

Logo, temos:  $\phi = \frac{N \cdot I}{\mathcal{R}}$  ou  $\boxed{N \cdot I = \phi \cdot \mathcal{R}}$

A Lei de Hopkinson poderia ser comparada a Lei de Ohm, sendo a primeira aplicada a um circuito magnético e a segunda aplicada a um circuito elétrico.

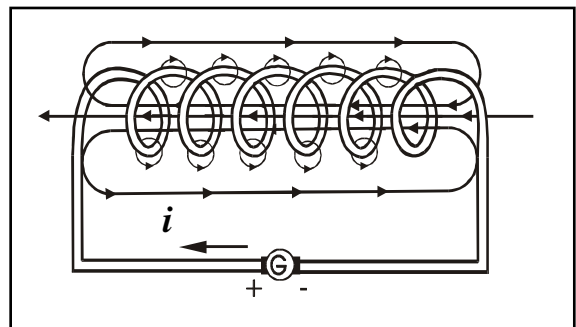
No circuito magnético, temos uma força magnetomotriz (f.m.m.  $\Rightarrow N \cdot I$ ) aplicada a bobina, um fluxo magnético ( $\phi$ ) que é constante ao longo do circuito e uma relutância total ( $\mathcal{R}_t$ ), a qual poderá ser dividida em duas parcelas, relutância do núcleo magnético ( $\mathcal{R}_n$ ) e relutância do entreferro (espaço de ar ;  $\mathcal{R}_{ef}$ ). No caso do circuito elétrico acima, temos uma força eletromotriz ( $\mathcal{E}$ ) aplicada ao circuito, uma corrente ( $I$ ) que é a mesma ao longo do circuito e uma resistência total ( $R_t$ ).

Na prática, é geralmente impossível fazer a distribuição das espiras ao longo de todo o núcleo magnético, ou seja, normalmente a bobina é colocada num ou dois locais de forma a ser possível a sua construção de maneira simples. Este procedimento traz como resultado um fenômeno indesejável, que é a dispersão magnética, a qual será desprezada no nosso estudo. Na realidade, sempre existe uma certa quantidade de linhas de indução saindo do caminho limitado pelo núcleo.



#### 1.4. DEFINIÇÃO DE INDUTÂNCIA

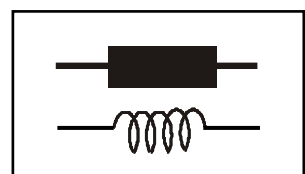
Considere um circuito formado por um solenóide alimentado por um gerador que fornece corrente contínua, a qual origina um campo magnético, cujas linhas de indução são linhas fechadas que se concatenam (atravessam) com o solenóide. Seja  $\phi$  o fluxo magnético concatenado com o circuito, podemos dizer que ele é diretamente proporcional a intensidade da corrente. Duplicando  $i$ , teremos uma duplicação de  $B$ , duplicando, pois,  $\phi$ . A constante de proporcionalidade **L** é denominada de **INDUTÂNCIA** ou **coeficiente de auto-indução**. No caso de uma bobina com  $N$  espiras teríamos a relação ao lado.



$$\boxed{L = N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta i}}$$

**Tem uma indutância de 1 henry (1H), a espira onde, por exemplo, a corrente sofre uma variação de 1A, de modo que a variação de fluxo seja de 1Wb.**

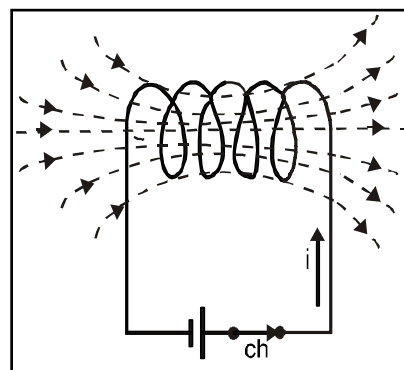
Assim como existe o componente denominado de resistor que tem a propriedade caracterizada como resistência, também existe o componente denominado de **indutor** (símbolos ao lado), o qual possui a propriedade conhecida como indutância. Esta grandeza pode ser medida através de um **indutímetro**.



No caso de circuitos que contém bobinas, teremos uma elevada indutância, a qual será ainda maior quando introduzirmos um núcleo magnético no seu interior. Em função disto, denomina-se uma bobina de indutor. No caso da introdução de um núcleo magnético no interior de uma bobina, tem-se um campo magnético indutor  $\mathbf{H}$  que não muda para uma determinada corrente  $\mathbf{i}$ , mas aumenta consideravelmente a indução magnética  $\mathbf{B}$ , pois  $\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$ , refletindo num aumento substancial na variação de fluxo.

No caso, então, de solenóides com muitas espiras enroladas em núcleos magnéticos teremos indutância de valor elevado. Comparando a indutância de um circuito onde temos um **condutor retilíneo** com a indutância de um circuito constituído por um **condutor enrolado no formato de espiral** (bobina), conclui-se que a indutância no primeiro caso é muito menor do que no segundo.

Considerando o circuito ao lado, onde temos um solenóide, uma chave e uma fonte de tensão contínua, quando fecharmos a chave, a corrente começa a crescer rapidamente. Enquanto a corrente está crescendo, as linhas de indução começam a se expandir através do circuito e esta indução magnética “corta” a bobina. Consequentemente teremos o surgimento de uma f.e.m. auto-induzida, conforme foi visto quando estudamos a Lei de Faraday. Esta f.e.m. de auto-indução atua de modo a se opor ao crescimento da corrente, de acordo com o que vimos no estudo da Lei de Lenz.



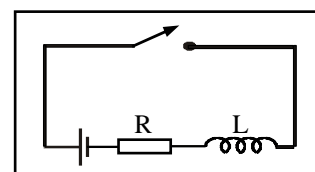
**“A INDUTÂNCIA DE UM CIRCUITO REPRESENTA A CAPACIDADE QUE O CIRCUITO POSSUI EM GERAR UMA F.E.M. DE AUTO-INDUÇÃO QUE SE OPOŊHA AS VARIAÇÕES DE CORRENTE.”**

Sabe-se que  $L = N \cdot \Delta\phi / \Delta i$  e que  $\mathcal{E} = -N \cdot \Delta\phi / \Delta t$ . Logo podemos afirmar que o valor da f.e.m. induzida é obtida através da expressão ao lado.

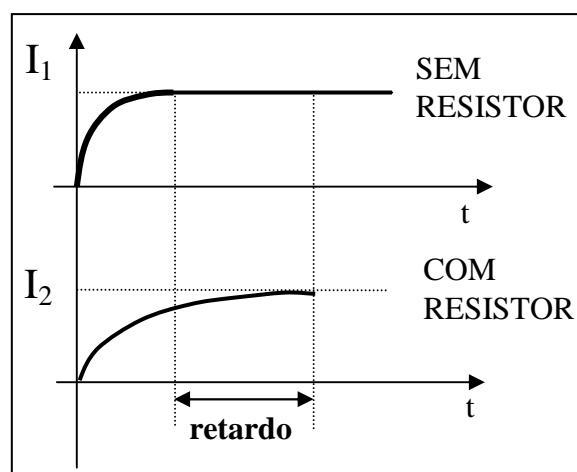
$$\mathcal{E} = -L \cdot \Delta i / \Delta t$$

**Um circuito tem uma indutância de 1H quando, por exemplo, ele se deixa induzir por 1V, sempre que a corrente variar na razão de 1A por segundo.**

No circuito ao lado, temos uma fonte CC, um resistor, um indutor e uma chave aberta. Vamos analisar a diferença na produção de uma f.e.m. considerando o circuito sem o resistor e com o resistor.



Sabe-se que o valor da f.e.m. auto-induzida depende da rapidez da variação da corrente, ou seja, quando mais rápida a variação da corrente, maior será o valor desta f.e.m. e o seu valor é função também do valor da corrente, pois correntes maiores produzem campos magnéticos mais intensos. O aumento deste campo equivale a um número maior de linhas de indução “cortando” a bobina, ou seja, a f.e.m. auto-induzida será elevada. O tempo de energização de um indutor, quando ele passa a ser alimentado diretamente por uma fonte CC não é instantâneo, embora seja muito pequeno (gráfico de  $I_1$ ). Ligando-se um resistor em série com o indutor pode-se retardar este tempo, fazendo com a corrente cresça mais lentamente (gráfico de  $I_2$ ).



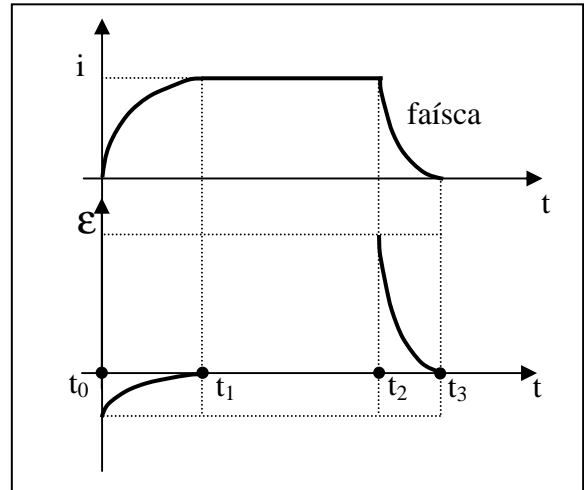


Assim como no circuito RC temos uma constante de tempo, no circuito RL também existe uma constante de tempo  $\tau$  dada pela relação ao lado.

$$\tau = \frac{L}{R}$$

A f.e.m. induzida é sempre de sentido tal que se opõe à variação imposta (Lei de Lenz). Este efeito é particularmente notável quando da abertura de chaves que interrompem repentinamente a corrente do circuito. A corrente não pode cair instantaneamente a zero, pois isto implicaria numa f.e.m. induzida infinita tendendo a manter a corrente. Esta f.e.m. aparece como uma tensão entre os terminais da chave interruptora e causa o aparecimento de uma faísca.

Em resumo, a corrente não se reduz a zero instantaneamente, mas mantém-se pela faísca. Também, quando se liga a chave, a corrente não assume seu valor contínuo repentinamente, mas leva um determinado tempo, função da indutância do circuito. Nos gráficos ao lado, nota-se que a variação da corrente é mais lenta no **fechamento** ( $t_0$ ) do que na **abertura** ( $t_2$ ) do circuito. Portanto, o pico de tensão (f.e.m.  $\mathcal{E}$ ) neste último caso é mais intenso. Isto é comprovado através da observação da constante de tempo  $\tau = L/R$ , pois na abertura da chave temos o surgimento de ar entre seus contatos, ou seja, uma resistência de valor elevadíssimo.



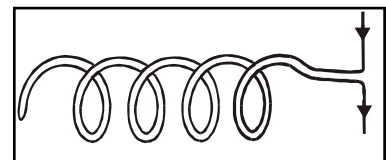
Observe no gráfico que a polaridade da tensão no fechamento do circuito, ao se estabelecer uma corrente, é contrária a polaridade da tensão na abertura do circuito. A faísca que salta na abertura da chave pode assumir dimensões grandes, quando o circuito for de alta indutância e a corrente normal for muito intensa (motores de grande potência). Frequentemente se quer evitar as faíscas, porque ela vai oxidando os contatos da chave.

No circuito analisado anteriormente, quando a corrente atinge o seu valor máximo, determinado pela tensão e resistência do circuito, ela não varia mais. Assim sendo, não teremos mais variação de fluxo, desaparecendo a f.e.m. de auto-indução. No caso de corrente contínua, a indutância só afeta a corrente no circuito quando o mesmo é **ligado** ou **desligado**, ou quando alguma condição do circuito for alterada, pois só nestas ocasiões teremos fluxo magnético variável. Se, no entanto, uma bobina for alimentada por uma tensão alternada, o efeito da indutância estará **sempre presente** no circuito, pois a corrente sofre uma variação permanente e uma f.e.m. estará sendo induzida durante todo o período da corrente alternada.

## 1.5. APLICAÇÕES PRÁTICAS DE INDUTÂNCIA

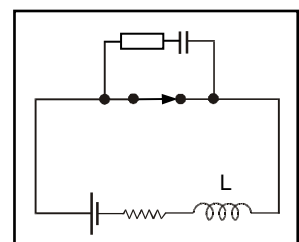
### - Resistor de fio

Ao lado, temos um resistor de fio enrolado em dupla espiral. Assim, os efeitos magnéticos se anulam, pois a corrente passa em sentido contrário nas espiras que estão lado a lado. Desta forma, temos uma **indutância nula**, fazendo com que o resistor tenha apenas o efeito resistivo (apenas resistência).

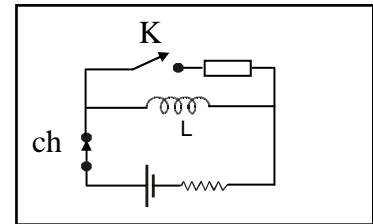


### - Circuitos com capacitor ou resistor

No caso de circuitos com elevada indutância, poderíamos utilizar a montagem ao lado. O circuito RC em paralelo com a chave tenderia a evitar o aparecimento de faíscas no instante de abertura da chave. O capacitor iria atuar no sentido de armazenar as cargas que circulariam no referido instante.

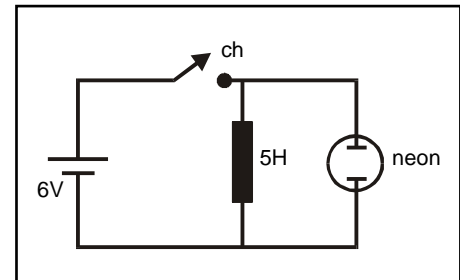


Uma outra forma de eliminar as faíscas seria através da utilização de um resistor, conforme esquema ao lado. Convém salientar que devemos fechar a chave **K** antes de abrir **ch**, pois assim a f.e.m. auto-induzida na bobina, provocaria a circulação de uma corrente na malha superior do circuito, onde está o resistor.



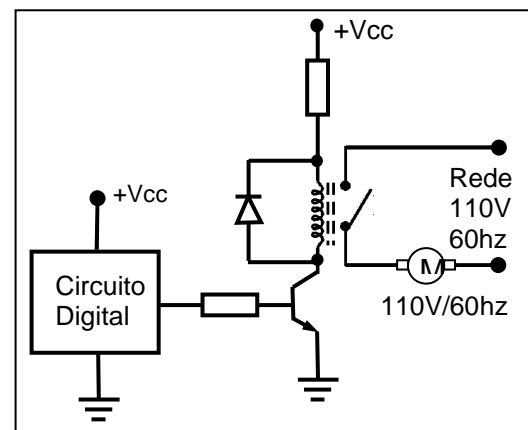
#### - Circuito com lâmpada neon

Ao lado, temos uma fonte de C.C., uma chave, um indutor e uma lâmpada neon. A diferença entre a lâmpada neon e a lâmpada comum é que a primeira exige uma determinada tensão (tensão de ignição) para acender (70V). Quando fecharmos a chave, observaremos que a lâmpada não acende. Conclui-se que a f.e.m. auto-induzida no indutor não é muito elevada. Quando abrirmos a chave, a lâmpada acenderá momentaneamente, indicando que a f.e.m. induzida entre os terminais do indutor e da lâmpada que está em paralelo, é maior do que a tensão de ignição. Isto se justifica, pois as variações de corrente e fluxo no instante de abertura ocorrem de uma forma extremamente rápida, rapidez esta que não ocorreu no fechamento do circuito.



#### - Relé com diodo

Ao lado, temos um circuito digital que controla o funcionamento de um motor elétrico, sendo que o transistor atuará como chave para operar o relé. A colocação de um diodo em paralelo com a bobina do relé tem a função de evitar a queima do transistor no momento em que o relé é desligado, pois quando este chaveamento ocorre teremos uma variação brusca do fluxo magnético na bobina, gerando nesta, a indução de uma tensão, de acordo com as Leis de Faraday e de Lenz. O diodo, então, devidamente conectado, atua como curto-circuito no processo de desenergização da bobina. O diodo inclusive é denominado de elemento “supressor” neste caso.



## 1.6. FATORES INFLUENTES NA INDUTÂNCIA

Sabe-se que a variação de  $B$  no interior de um solenóide é igual a:  $\Delta B = \frac{\mu \cdot N \cdot \Delta I}{\ell}$

Sabendo-se também que  $\Delta \phi = \Delta B \cdot A$  e que  $L = N \cdot \frac{\Delta \phi}{\Delta I}$ , teremos:  $\Delta \phi = \frac{\mu \cdot N \cdot \Delta I}{\ell} \cdot A$

Como:  $L \cdot \frac{\Delta I}{N} = \Delta \phi$ , teremos:  $L \cdot \frac{\Delta I}{N} = \frac{\mu \cdot N \cdot \Delta I}{\ell} \cdot A$ . Logo, obtém-se:  $L = \frac{\mu \cdot A \cdot N^2}{\ell}$

A indutância de uma bobina sem núcleo magnético é constante, pois a permeabilidade magnética possui um valor fixo (relutância constante) e a indutância de uma bobina com núcleo magnético é variável, em função da variação da permeabilidade. Como é comum os indutores serem usados numa faixa onde a permeabilidade não sofre variação significativa, podemos admitir que a indutância dos circuitos magnéticos com núcleos também é uma constante do circuito (exceto quando estes núcleos magnéticos estiverem próximos do ponto de saturação).

Comparando a indutância de uma bobina sem núcleo magnético com a indutância de uma bobina com núcleo magnético, deduziríamos que no primeiro caso (sem núcleo) a indutância seria muito menor, pois a relutância é muito maior.

Exemplo: Numa bobina houve uma redução de corrente de 100A para 90A num intervalo de tempo de 1ms e, com isto, gerou-se uma f.e.m. auto-induzida de 20V. Qual é a indutância da bobina?

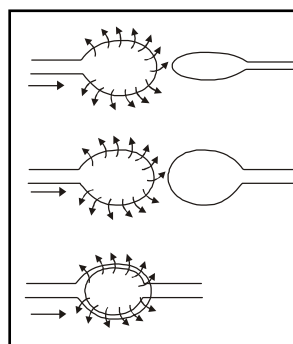
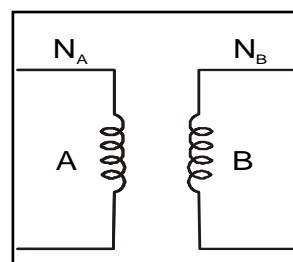
$$\begin{aligned} \varepsilon &= 20V & \Delta i &= I_2 - I_1 = 90 - 100 & \Delta i &= -10A \\ I_1 &= 100A & \mathcal{E} &= -L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} & 20 &= -L \cdot \frac{-10}{0,001} \\ I_2 &= 90A & & & & \\ \Delta t &= 0,001s & L &= \frac{20V \cdot 0,001s}{10A} & \boxed{L = 0,002H = 2mH} \\ L &=? & & & & \end{aligned}$$

### a) Noções de Indutância-mútua

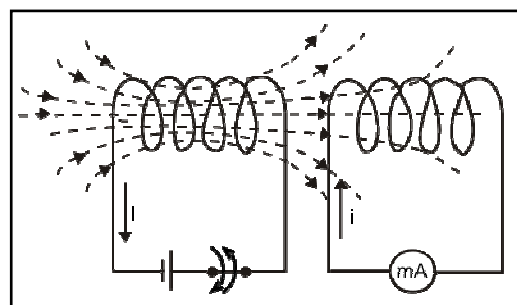
Considerando o desenho ao lado, onde existem duas bobinas próximas, uma da outra, teremos o fluxo magnético de uma bobina enlaçando as espiras da outra. Se na bobina A circular uma corrente variável, surgirá um fluxo variável, o qual dará origem a uma f.e.m. (f.e.m. auto-induzida) na própria bobina e também uma f.e.m. na bobina B (f.e.m. de mútua-indução), a qual tem um sentido tal que tenta impedir a variação do fluxo na primeira bobina (segundo Lenz).

Existe um coeficiente, denominado de **indutância-mútua** que mede o acoplamento magnético existente entre as duas bobinas. Este coeficiente depende do número de espiras das duas bobinas e da posição relativa das bobinas.

Ao lado, temos três casos de acoplamentos magnéticos. No primeiro, temos duas espiras colocadas perpendicularmente entre si, de modo que o acoplamento magnético é nulo. No segundo, temos um acoplamento magnético médio, ou seja, uma determinada quantidade de fluxo produzido numa espira consegue atingir a outra espira. E no terceiro caso, temos um acoplamento magnético máximo, pois uma espira está colocada dentro da outra.



No circuito ao lado, temos duas bobinas, sendo uma delas alimentada por uma fonte de C.C. e a outra tem, entre seus terminais, um miliamperímetro. Considerando-se que as bobinas estão próximas, de modo que o fluxo produzido por uma atinge a outra, podemos afirmar que existirá corrente induzida na bobina da direita, desde que o fluxo através dela varie. Isto será obtido nos instantes de abertura ou de fechamento da chave, sendo que no instante de abertura a variação de fluxo é mais rápida, obtendo-se, então, uma tensão induzida muito elevada. Também aparecerá corrente induzida na segunda bobina se uma das bobinas fosse movimentada, pois assim também ocorreria uma variação de fluxo magnético. Quando se deseja a indução permanente de f.e.m. se utiliza corrente alternada.



### b) Aplicação prática da mútua-indução

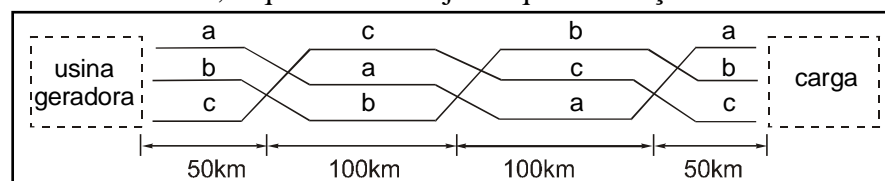
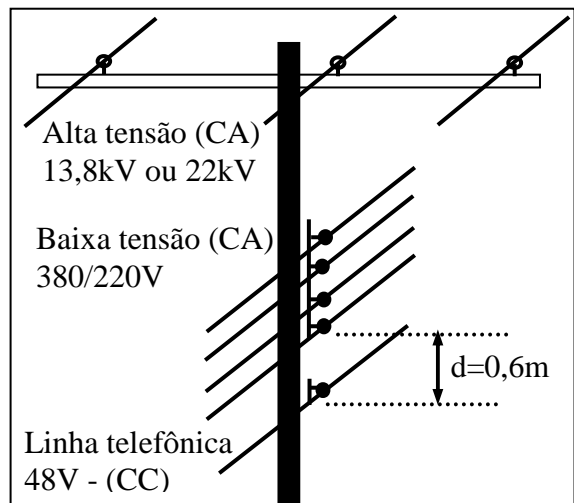
Normalmente, a energia elétrica é transmitida em corrente alternada (CA) pelo fato de podermos utilizar transformadores, pois em corrente contínua (CC) isto não seria possível. Quando esta transmissão ocorre em distâncias muito elevadas (acima de 500km), recorre-se a CC, a qual torna-se mais vantajosa (menor número de fios e fios mais finos).

#### -Transposição de condutores

As linhas telefônicas podem ser influenciadas por f.e.m. das linhas de distribuição em baixa tensão. Por este motivo, deve existir uma distância segura entre as duas.

Normalmente para tensões de baixa tensão em 380/220V, a distância mínima é de 0,6m. Como influência da f.e.m. de mútua-indução podemos citar também o caso da transposição das linhas de distribuição. Nas linhas de distribuição ou de transmissão trifásicas, pode ocorrer a mútua-indução entre os três condutores, pois as distâncias entre eles são pequenas. Em transmissão é mais comum a transposição, devido às linhas serem de grandes distâncias (geralmente centenas de quilômetros).

Pode-se equilibrar o fenômeno da mútua-indução por meio da transposição das fases. Se os condutores estiverem equidistantes, a f.e.m. de mútua-indução equilibrar-se-á e a tensão entre eles no final do trecho será igual. Caso o sistema não seja equilibrado, ocorrerá uma desigualdade de tensão entre os três condutores, o que não é desejável que aconteça.



## 1.7. ASSOCIAÇÕES DE INDUTORES

A associação de indutores deve ser considerada sob dois aspectos: sem indutância mútua e com indutância mútua. Em qualquer dos dois casos, podemos associar os indutores em série e em paralelo, sendo que será analisado, no nosso caso, somente situações sem indutância mútua.

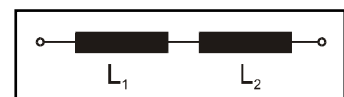
### 1º: Associação em série

Na associação em série sem indutância mútua, as bobinas deverão estar dispostas de tal modo que o campo magnético de uma não possa induzir uma f.e.m. nas outras. Como estarão em série, a mesma corrente fluirá em todas, e elas estarão sujeitas a mesma variação de corrente. As f.e.m.<sub>s</sub> são calculadas por:

$$\mathcal{E}_t = \frac{L_t \cdot \Delta i}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{L_1 \cdot \Delta i_1}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{L_2 \cdot \Delta i_2}{\Delta t}$$



Mas, no circuito série, tem-se:  $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

Sabe-se que:  $\Delta i = \Delta i_1 = \Delta i_2$

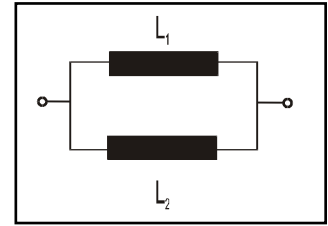
$$\frac{L_t \cdot \Delta i}{\Delta t} = \frac{L_1 \cdot \Delta i}{\Delta t} + \frac{L_2 \cdot \Delta i}{\Delta t}$$

Portanto:

$$L_t = L_1 + L_2 + \dots$$

**2º: Associação em paralelo**

Na associação em paralelo sem indutância mútua não haverá acoplamento magnético entre as bobinas e a f.e.m. induzida será a mesma em todos os indutores. Cada ramo do circuito apresentará, geralmente, uma razão de variação de corrente diferente. No circuito paralelo tem-se:



$$i_t = i_1 + i_2 \quad \mathcal{E}_t = \frac{L_t \cdot \Delta i}{\Delta t} \quad \mathcal{E}_1 = \frac{L_1 \cdot \Delta i_1}{\Delta t} \quad \mathcal{E}_2 = \frac{L_2 \cdot \Delta i_2}{\Delta t}$$

$$\Delta i_t = \Delta i_1 + \Delta i_2$$

$$\text{E ainda: } \mathcal{E}_t = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$$

$$\text{Temos também: } \Delta i = \frac{\mathcal{E} \cdot \Delta t}{L_t}$$

$$\Delta i_1 = \frac{\mathcal{E} \cdot \Delta t}{L_1}$$

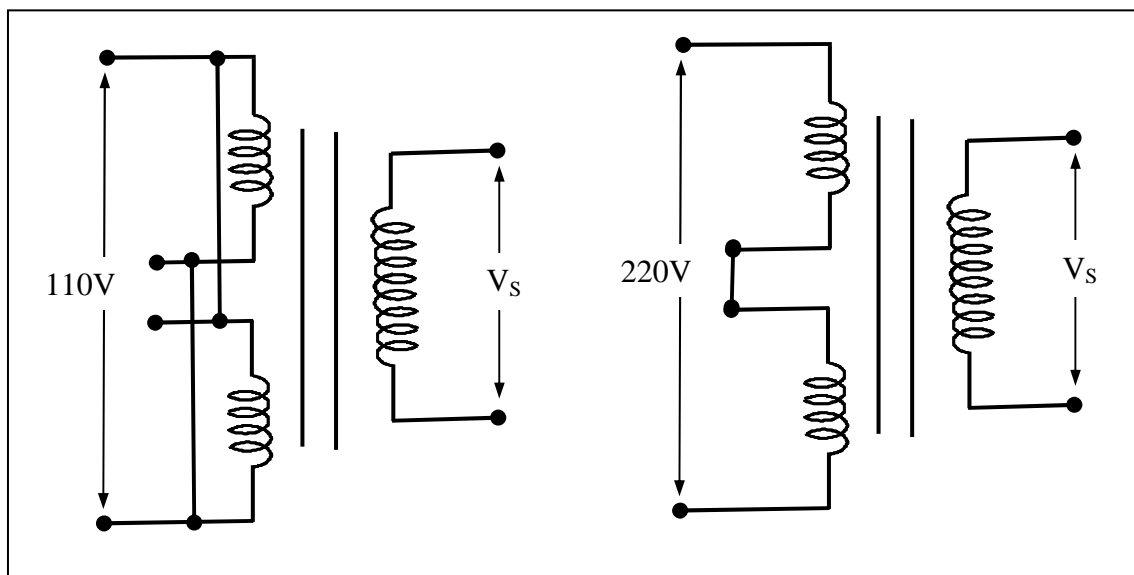
$$\Delta i_2 = \frac{\mathcal{E} \cdot \Delta t}{L_2}$$

$$\frac{\mathcal{E} \cdot \Delta t}{L_t} = \frac{\mathcal{E} \cdot \Delta t}{L_1} + \frac{\mathcal{E} \cdot \Delta t}{L_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{L_t} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots}$$

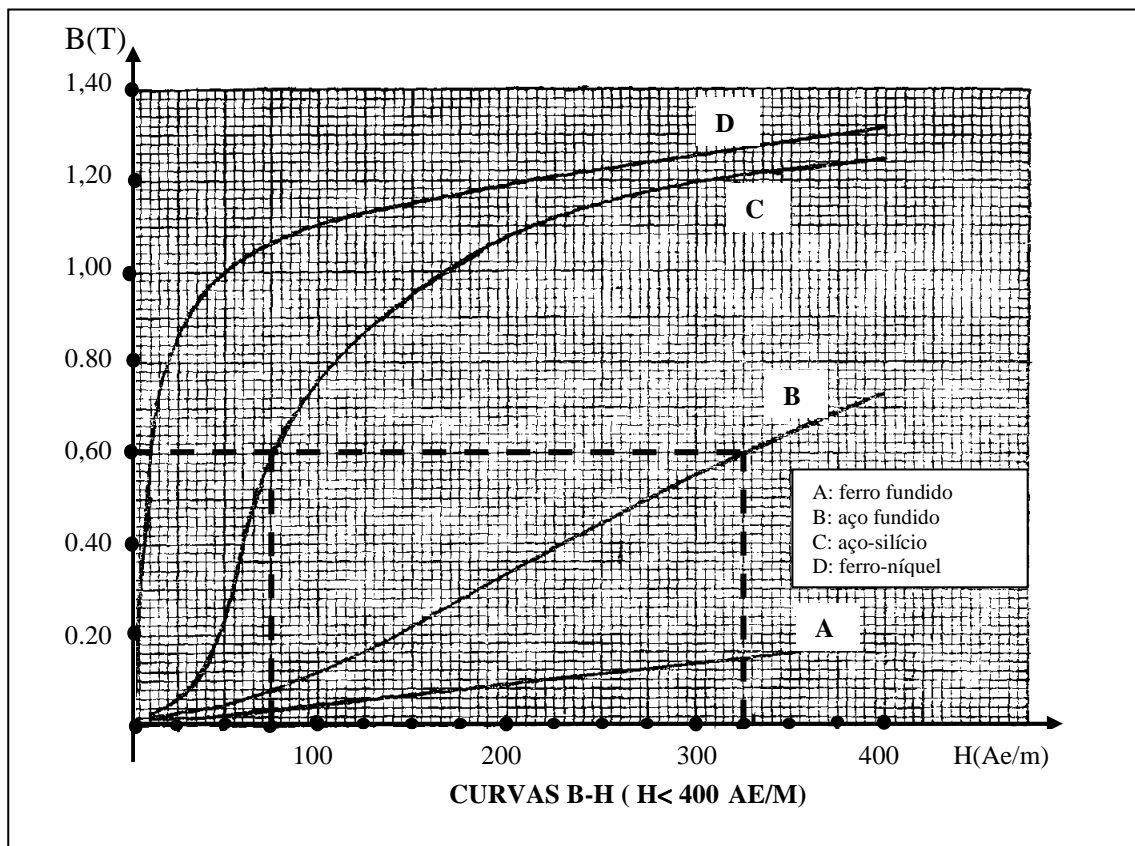
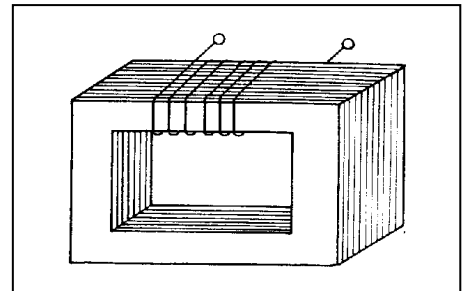
Observa-se assim, que as equações da associação de indutores são respectivamente semelhantes as da associação de resistores.

Um exemplo de aplicação de indutores em série e em paralelo seria no caso do transformador dos equipamentos elétricos que funcionam tanto em 110V como em 220V. Quando a chave seletora do equipamento é colocada em 110V as duas bobinas do primário do transformador são conectadas em paralelo, sendo que a tensão em cada bobina é a mesma (110V). Quando a tensão da rede é 220V, através da chave seletora as bobinas ficam associadas em série, podendo assim o primário receber a tensão de 220V. Neste caso então, a tensão dobrou em relação ao primeiro caso, mas o número de espiras também dobrou, de modo que a tensão induzida no secundário não muda de valor, fazendo com que o equipamento continue funcionando dentro das suas características nominais. Atualmente todo este processo é feito através de um circuito eletrônico, o qual efetua esta seleção de uma forma automática.

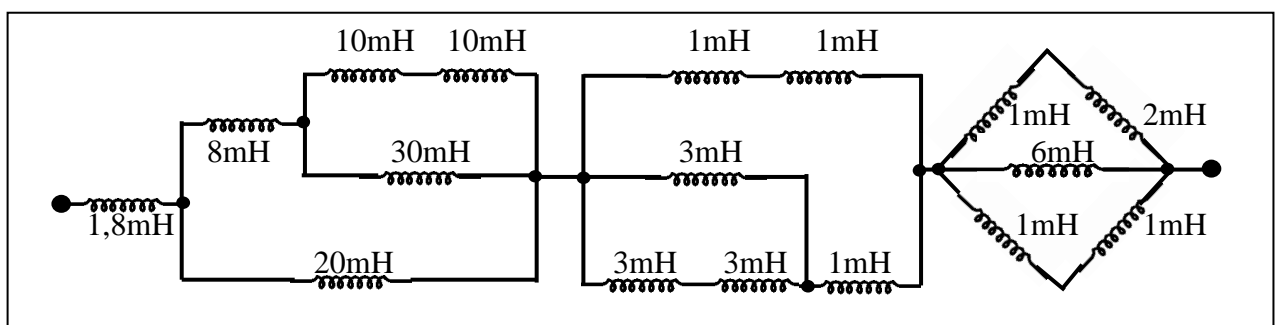


## PROBLEMAS PROPOSTOS

01. O circuito magnético ao lado, cujo núcleo é de aço-silício, possui um comprimento de 38cm e seção transversal de  $9\text{cm}^2$ . Utilizando-se o gráfico a seguir e sabendo-se também que a corrente na bobina vale 57mA, de modo que a indução magnética corresponde a 0,6T, determine:
- o número de espiras do circuito e o fluxo magnético.
  - a corrente que deveria circular, para produzir o mesmo fluxo anterior, admitindo-se que o núcleo fosse de aço fundido.

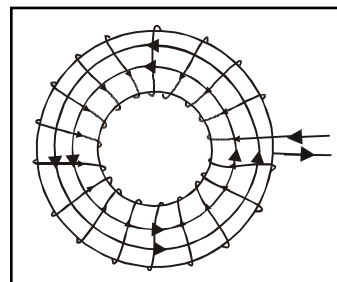


02. Um solenóide de 1m de comprimento e de 2000 espiras circulares com 5cm de raio está colocado num plano perpendicular a um campo magnético de 0,1T, o qual é anulado num intervalo de tempo igual a 2s. Determine o valor da f.e.m. induzida no solenóide e também o valor de sua indutância.
03. Calcule o valor da indutância total entre as extremidades do circuito abaixo.



04. Um solenóide com núcleo de ar possui uma indutância de  $8\text{mH}$ , seção transversal de  $10\text{cm}^2$  e 500 espiras. Considerando-se que circula por ele uma corrente de  $10\text{A}$ , determine o valor da indução magnética existente no interior do solenóide.

05. Um toróide (figura ao lado) com núcleo de ferrite de permeabilidade relativa igual a 100 é enrolado com 470 espiras, sendo que sua seção transversal vale  $4\text{cm}^2$  e seu comprimento médio vale  $10\text{cm}$ . Quanto vale sua indutância?



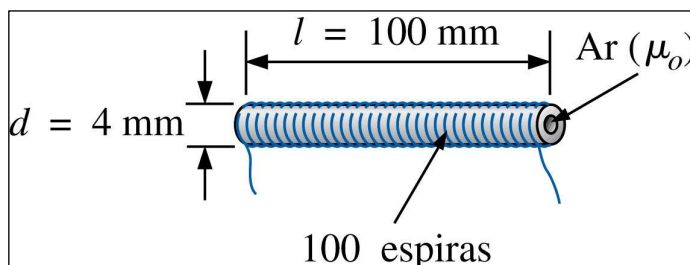
06. Calcule a indutância de um toróide com seção transversal de  $12,56\text{cm}^2$ , comprimento médio de  $75,36\text{cm}$  e de 1000 espiras, considerando que a permeabilidade magnética do núcleo vale  $32 \times 10^{-4}\text{H/m}$ .

07. Um indutor de  $0,15\text{H}$  é percorrido por uma corrente constante de  $0,4\text{A}$ . De modo que apareça nos terminais da bobina uma f.e.m. auto-induzida de  $3\text{V}$ , a corrente citada deveria ser anulada (zerada), em qual intervalo de tempo?

08. A auto-indutância (ou simplesmente indutância) de uma bobina formada por 400 espiras muito unidas é igual a  $8\text{mH}$ . Qual é o valor do fluxo magnético através da bobina quando esta é percorrida por uma corrente de  $5\text{mA}$ ?

09. Num enrolamento circula uma corrente de  $15\text{A}$ , a qual produz um fluxo magnético de  $400\mu\text{Wb}$ . Sabendo-se que a corrente decresce a zero em  $5\text{ms}$ , de modo a induzir uma f.e.m. de  $70\text{V}$ , determine o número de espiras e a indutância da bobina.

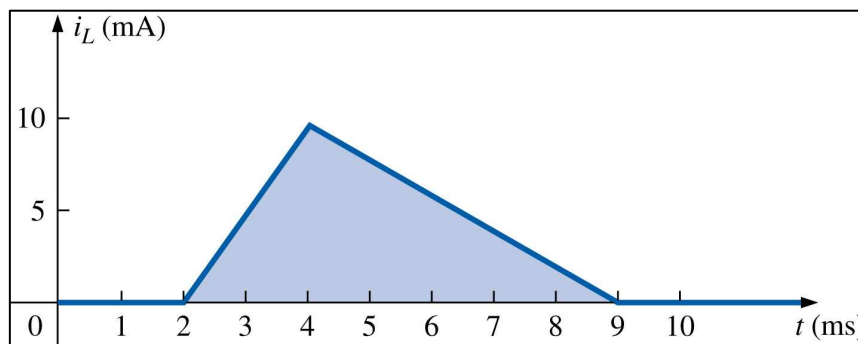
10. Uma bobina cilíndrica de  $100\text{mm}$  de comprimento, 100 espiras e seção transversal de  $4\text{mm}$  de diâmetro possui ar no seu interior. Determine o valor da indutância da bobina.



11. Calcule novamente a indutância no exercício acima, considerando que o núcleo é de ferrite, sendo a sua permeabilidade magnética relativa  $\mu_r=2000$ .

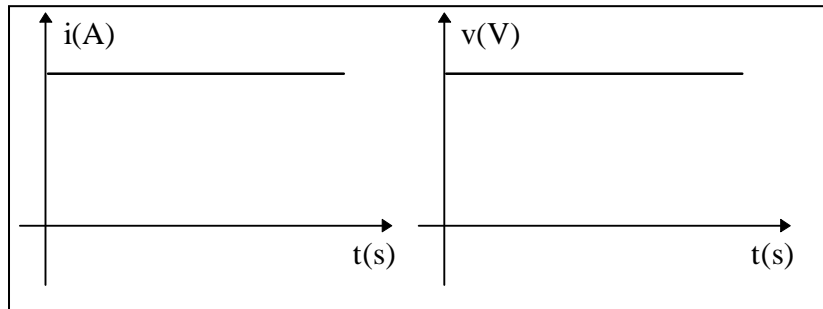
12. O gráfico ao lado mostra a variação da corrente num indutor de  $4\text{mH}$  em função do tempo. Determine o valor da tensão média no indutor entre:

- 0 e 2 miliseg;
- 2 e 4 miliseg;
- 4 e 9 miliseg.

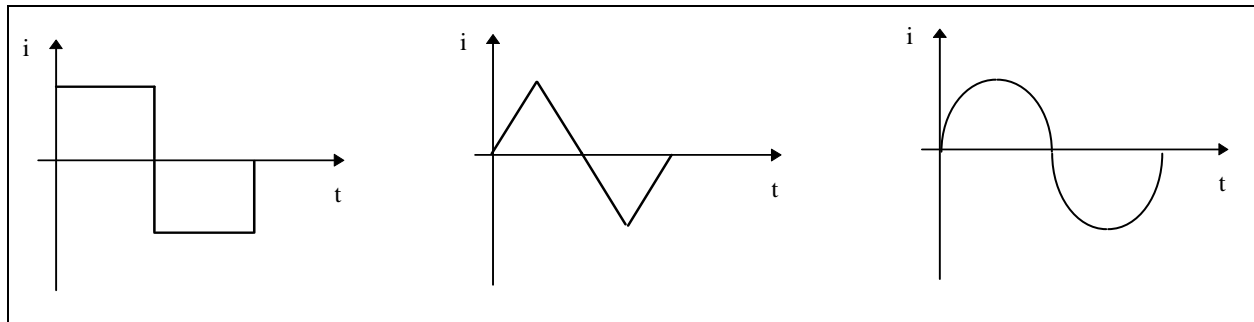


## 2. FUNDAMENTOS DE CORRENTE ALTERNADA

Até o momento nos preocupamos somente com tensões e correntes contínuas, ou seja, aquelas que possuem módulo e sentido constantes no tempo, conforme exemplos ao lado.

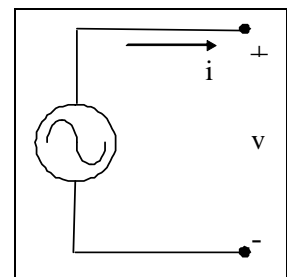


Uma tensão ou corrente é dita alternada quando muda periodicamente de módulo e sentido. Dependendo da forma como varia a grandeza em função do tempo, existem diversos tipos de tensões e correntes alternadas, ou seja, diversas formas de onda: quadrada, triangular, senoidal, etc. Entre elas a mais importante é a senoidal porque assim é gerada, transmitida e distribuída a energia elétrica.



### 2.1. FONTE DE TENSÃO ALTERNADA SENOIDAL

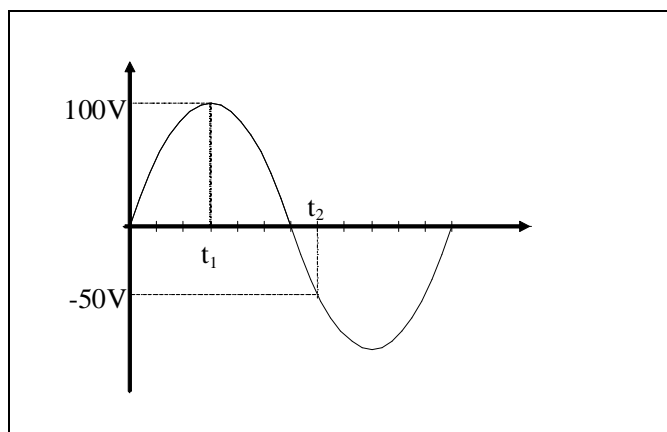
O símbolo e a convenção de sinais da fonte de tensão senoidal estão representados na figura ao lado. Os sinais representados na figura são os convencionados como positivos. Isto significa que quando a tensão tiver valor instantâneo positivo, a polaridade do terminal superior será positiva e a polaridade do terminal inferior será negativa. Quando a tensão tiver valor instantâneo negativo, o terminal superior será negativo e o inferior positivo. A tensão positiva produz corrente positiva.



Para exemplificar, observe a sequência da figura abaixo.

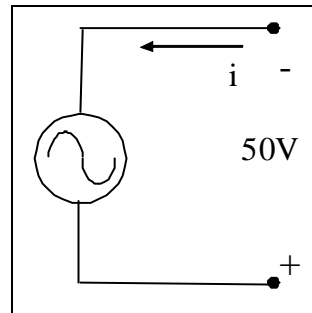
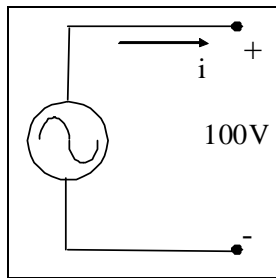
No instante  $t_1$ , a tensão é positiva com módulo 100 V. Como é positiva, pela convenção adotada, o terminal superior é positivo e o terminal inferior negativo.

No instante  $t_2$  a tensão é -50 V, isto significa que a diferença de potencial entre os terminais da fonte é 50 V e a polaridade inverteu em relação ao instante  $t_1$ , o terminal superior se tornou negativo e o terminal inferior positivo.





As correntes que circulariam em cada instante de tempo seriam as representadas nos circuitos a seguir.



Para determinar-se a tensão em cada instante de tempo, utiliza-se a seguinte expressão:

$$v = V_M \cdot \text{sen } \omega t$$

onde:

$v$  = valor instantâneo da tensão ( V );

$V_M$  = valor máximo ou de pico da tensão ( V );

$\omega$  = frequência angular ou velocidade angular ( rad/s );

$t$  = instante de tempo considerado ( s );

**Exemplo:** A expressão matemática de uma tensão alternada aplicada a um resistor é a seguinte:

$v = 200 \cdot \text{sen } 628 t$  (Volts). Determine:

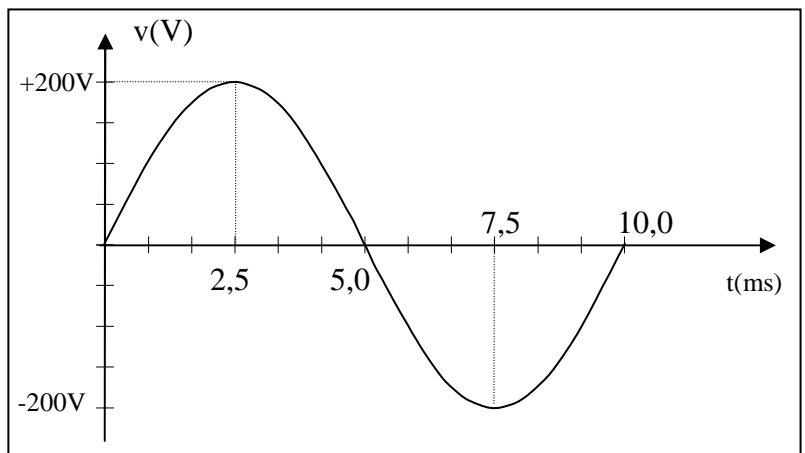
a) a tensão máxima e a frequência angular;

$V_M = 200 \text{ V}$  ;  $\omega = 628 \text{ rad/s}$

b) a tensão no instante  $t = 3 \text{ ms}$ ;

$v = 200 \cdot \text{sen}(628(\text{rad/s}) \cdot 0,003(\text{s})) = 190 \text{ V}$

c) representar graficamente a forma de onda da tensão.

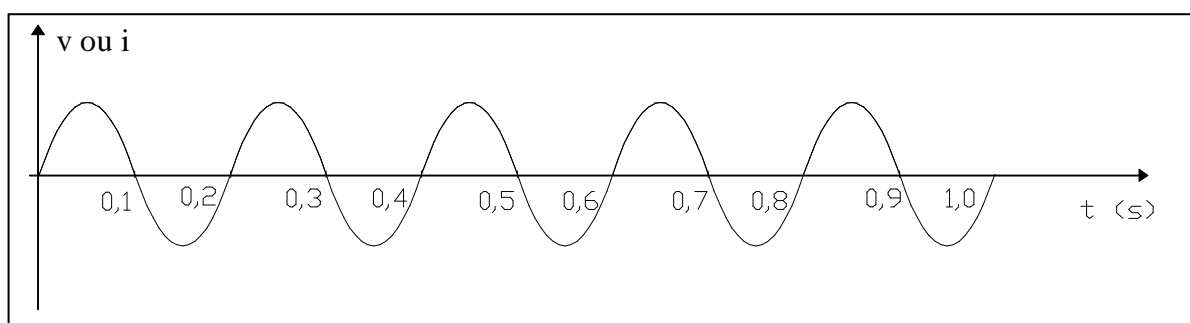


## 2.2. CICLO, PERÍODO E FREQUÊNCIA

As tensões e correntes alternadas são formas de onda periódicas, isto é, se repetem em dados intervalos de tempo. Define-se como ciclo, um conjunto de valores que se repetem periodicamente.

A parte do ciclo acima do eixo dos tempos recebe a denominação de semiciclo positivo e a parte do ciclo abaixo do eixo dos tempos é denominada semiciclo negativo. O tempo transcorrido para completar um ciclo é o período (  $T$  ) e a sua unidade é o segundo ( s ). A frequência (  $f$  ) de uma grandeza alternada é o número de ciclos que ocorrem por segundo. Portanto, a frequência se refere a rapidez com que a tensão ou corrente alternada troca de sentido. A unidade antiga de frequência era ciclos/segundo, que hoje em dia recebe a denominação de Hertz ( Hz ). Em praticamente todo o Brasil a frequência é 60 Hz. Em muitos países da Europa a frequência é 50 Hz. Na figura abaixo temos uma onda senoidal com período  $T = 0,2 \text{ s}$  ( tempo de um ciclo ) e ocorrem cinco ciclos a cada segundo, portanto a frequência é  $f = 5 \text{ Hz}$ .

$$T = \frac{1}{f}$$



### 2.3. VALOR MÉDIO DAS GRANDEZAS ALTERNADAS

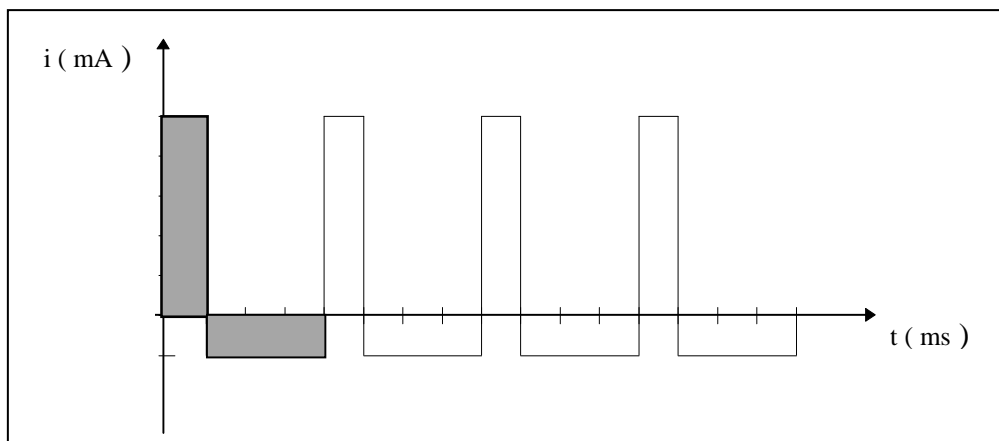
O valor médio é denominado componente CC de uma forma de onda e representa o valor que um voltímetro ou amperímetro de corrente contínua mediriam para a onda.

O valor médio é a média aritmética dos valores instantâneos, calculada no intervalo de tempo de um período. Para isso, determina-se a área formada entre a curva e o eixo dos tempos e divide-se esta área pelo período.

$I_{md}$  é a corrente média ou componente CC forma de onda. A tensão média ( $V_{md}$ ) pode ser determinada pelo mesmo processo.

$$I_{md} = \frac{\text{área}}{\text{período}}$$

**EXEMPLO :** Calcular o valor médio da corrente  $i$ .



Obs.:

# cada divisão horizontal = 2,5 ms

# cada divisão vertical = 20 mA

área (marcada) =  $100\text{mA} \times 2,5\text{ms} - 20\text{mA} \times 7,5\text{ms} = 100\mu\text{As}$

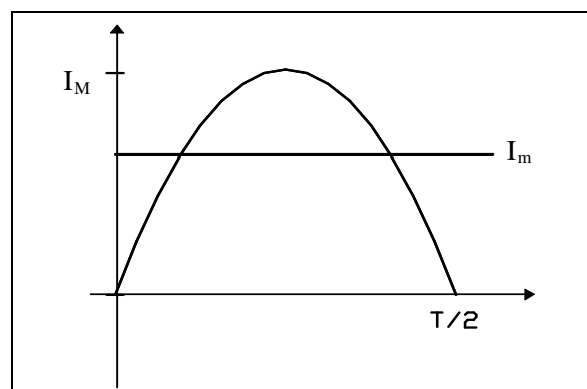
$I_{md} = 100\mu\text{As}/10\text{ms} = 10\text{ mA}$

Em se tratando de **correntes senoidais**, o **valor médio em um período é zero**, porque a área positiva é igual a área negativa. Porém, em alguns casos pode ser útil conhecer o valor médio para meio período, que é dado pelas equações abaixo.

$$I_{md} = \frac{2}{\pi} \cdot I_M \quad \text{ou} \quad I_{md} = 0,637 \cdot I_M$$

$$V_{md} = \frac{2}{\pi} \cdot V_M \quad \text{ou} \quad V_{md} = 0,637 \cdot V_M$$

A demonstração exata destas equações só pode ser feita através de cálculo integral tendo em vista o aspecto da área formada entre a curva senoidal e o eixo dos tempos.



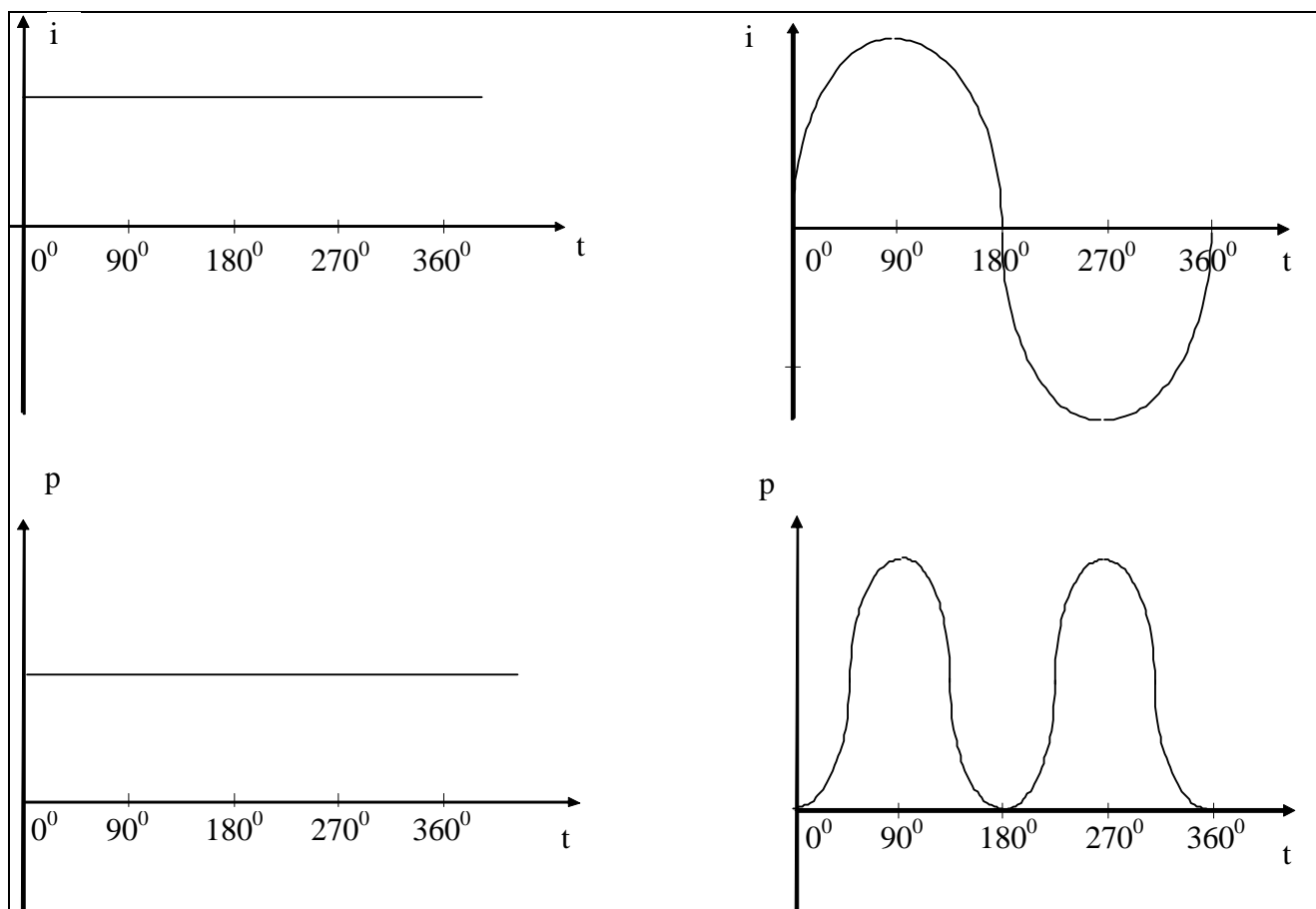
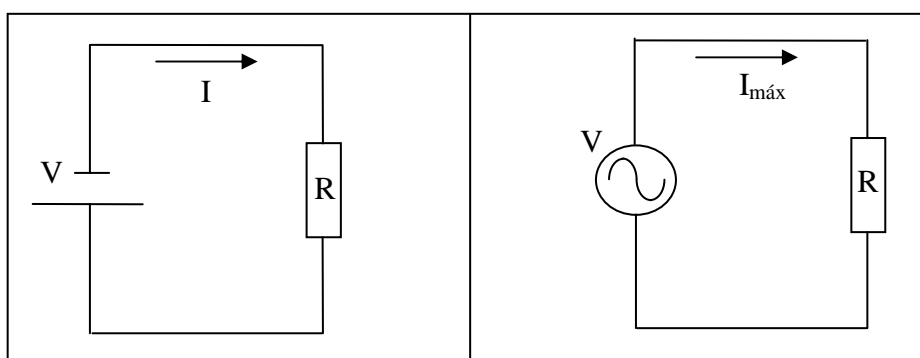
## 2.4. VALOR EFICAZ DAS GRANDEZAS ALTERNADAS

O valor eficaz de uma forma de onda está relacionado com a potência dissipada num resistor pela passagem da corrente alternada por ele.

Supondo-se que por um resistor circule corrente alternada com valor médio igual a zero, haverá dissipação de potência porque circula corrente por ele (geração de calor por efeito Joule), não importando o sentido desta corrente. Portanto, o valor médio não é adequado para cálculo de potência em corrente alternada. Para isto criou-se o conceito de valor eficaz.

Uma corrente alternada possui um valor eficaz  $I$  quando produz a mesma quantidade de calor por efeito Joule em um resistor como a que é produzida por uma corrente contínua de intensidade  $I$  no mesmo resistor, em um intervalo de tempo de um período.

Considerem-se dois circuitos de iguais resistências elétricas  $R=100\Omega$ , porém, um percorrido por corrente contínua, de intensidade 1A, e o outro percorrido por uma corrente alternada senoidal de valor máximo desconhecido.



A potência dissipada pelo resistor em corrente contínua será constante, porque a corrente é constante, com valor  $P = R.I^2 = 100.1^2 = 100 \text{ W}$ .

A potência dissipada pelo resistor em corrente alternada será variável, porque a corrente é variável. O valor de potência em cada instante de tempo é determinado pelo quadrado da corrente no instante e pela resistência, ou seja:

$$p = R \cdot i^2$$

onde:

$p$  = potência instantânea ( W );

$R$  = resistência (  $\Omega$  );

$i$  = corrente instantânea ( A ).

A equação anterior mostra-nos que a potência instantânea será sempre positiva, mesmo quando a corrente for negativa porque neste caso, a corrente elevada ao quadrado, produzirá uma potência positiva. No instante em que a corrente for zero a potência também será. Sendo assim, a curva representativa da potência em C.A. será uma senóide totalmente deslocada para acima do eixo dos tempos.

Considerando que a potência dissipada em C.C. é 100W com uma corrente constante de 1A; se a potência média dissipada no circuito de C.A. for também 100W, então a corrente alternada senoidal tem um valor eficaz de 1A.

Para produzir uma corrente eficaz de 1A em uma resistência de  $100\Omega$ , a tensão eficaz da fonte C.A. é:  $100\Omega \cdot 1A = 100V$ .

Portanto, se a potência em C.C. for igual a potência média em C.A., tem-se:

$$P_{cc} = P_{mca}$$

$$R.I^2 = \text{valor médio de } (R.i^2)$$

A intensidade da corrente contínua  $I$  é igual ao valor eficaz da corrente alternada e  $i$  é o valor instantâneo da corrente alternada.

$$R.I^2 = R \cdot \text{valor médio de } (i^2)$$

$$I^2 = \text{valor médio de } (i^2)$$

$$I = \sqrt{\text{valor médio de } (i^2)}$$

A equação acima mostra que o valor eficaz é a raiz quadrada da média dos quadrados dos valores instantâneos, ou resumidamente, **raiz média quadrática** que em inglês é Root Mean Square (abreviado RMS). Assim, o valor eficaz também é comumente chamado valor **RMS**.

#### Cálculo do valor eficaz ou RMS de tensões e correntes senoidais

$$I = \sqrt{\text{valor médio de } (i^2)}$$

$$I = \sqrt{\text{valor médio de } (I_M \cdot \sin \omega t)^2}$$

$$I = \sqrt{\text{valor médio de } (I_M^2 \cdot \sin^2 \omega t)}$$

$$I = \sqrt{I_M^2 \cdot \text{valor médio de } (\sin^2 \omega t)}$$

$$I = \sqrt{I_M^2} \cdot \sqrt{\text{valor médio de } (\sin^2 \omega t)}$$

Como o valor máximo de  $\sin^2 \omega t$  é 1, o valor médio de  $\sin^2 \omega t$  será  $\frac{1}{2}$ . Logo:

$$I = I_M \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Onde: I = valor eficaz ou rms da corrente (A);  
 $I_M$  = valor máximo da corrente (A).

Por analogia, a tensão eficaz é dada pela seguinte equação:

$$V = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

Onde: V = tensão eficaz ou rms (V);  
 $V_M$  = tensão máxima ou de pico (V).

Para caracterizar a importância do valor eficaz, vale destacar que:

1º) Através dos valores eficazes, o equacionamento para circuitos de C.A. fica semelhante ao equacionamento para circuitos de C.C. . Por exemplo, para calcular a potência média num resistor:

$$P_m = \text{valor médio de } R \cdot i^2$$

$$P_m = R \cdot \text{valor médio de } i^2$$

$$\text{Mas, valor médio de } i^2 = I^2, \text{ portanto } P_m = R \cdot I^2$$

Onde  $P_m$  = potência média dissipada no resistor ( W );  
 R = resistência (  $\Omega$  );  
 I = corrente eficaz ( A ).

Para calcular a **potência média** em corrente alternada, utiliza-se o **valor eficaz** da corrente, e **não o valor médio**, resultando em uma equação idêntica a da potência dissipada por uma resistência em corrente contínua.

2º) Os valores de tensão e corrente indicados nos equipamentos de corrente alternada (transformadores, geradores, motores, lâmpadas, chuveiros, etc) são os valores eficazes. Já a potência indicada nos equipamentos de aquecimento resistivo (fornos e chuveiros) corresponde a potência média.

3º) Os instrumentos de medida de tensões e correntes alternadas, voltímetros e amperímetros de c.a., fornecem os valores eficazes.

Exemplo: Uma tensão senoidal de 60Hz e 311V de pico é aplicada a um chuveiro de  $11\Omega$ . Pede-se:

a) A tensão contínua que deve ser aplicada ao chuveiro para que o aquecimento da água permaneça o mesmo que em C.A..

b) Calcular a potência média dissipada na resistência do chuveiro.

$$V = \frac{V_M}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220V$$

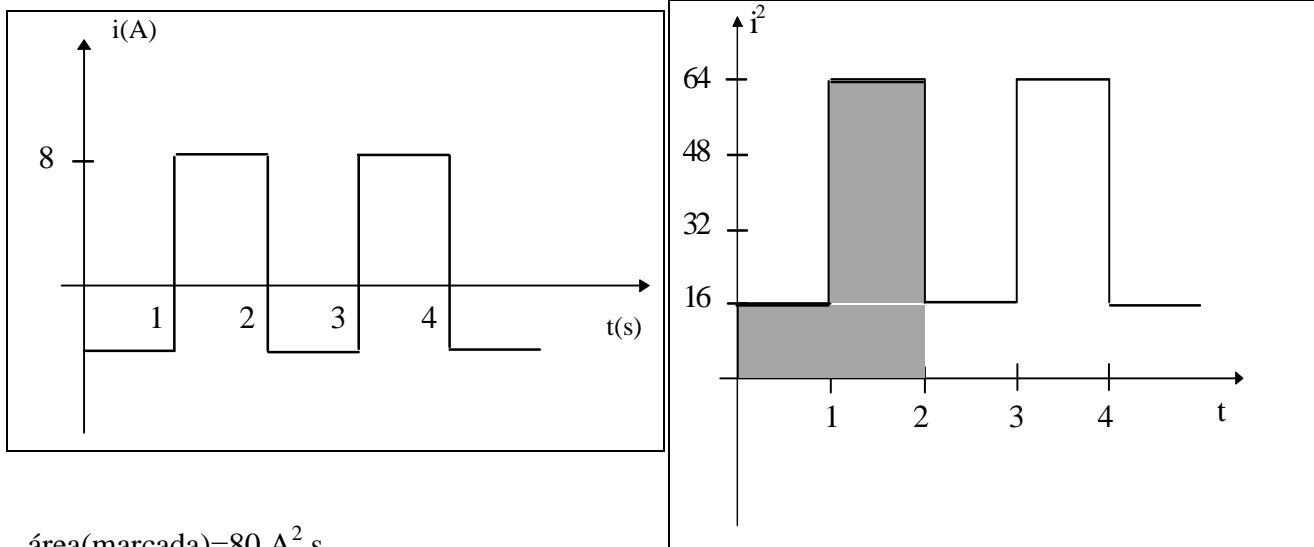
$$V_{CC} = 220V$$

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{220^2}{11} = 4400W$$

#### Cálculo do valor eficaz de outras formas de onda

O valor eficaz (ou raiz média quadrática, rms) é calculado elevando-se ao quadrado a forma de onda ponto-a-ponto. A partir disso, obtém-se a média dos quadrados dos valores instantâneos através da área formada entre curva ao quadrado e o eixo dos tempos dividida pelo período. A seguir extrai-se a raiz quadrada dessa média quadrática.

**Exemplo:** Calcular a potência média dissipada por um resistor de  $10\Omega$  percorrido pela corrente  $i$ , cuja forma de onda está apresentada a seguir.



área(marcada)= $80 \text{ A}^2 \cdot \text{s}$

média de  $i^2 = 80/2 = 40 \text{ A}^2$

$I = \sqrt{40} = 6,325 \text{ A}$

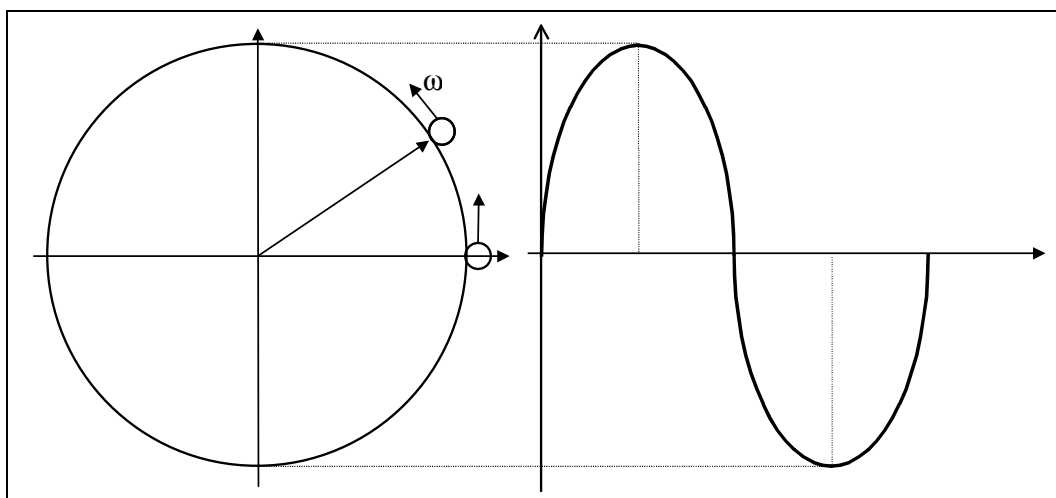
$$P = R \cdot I^2 = 10 \cdot 6,325^2$$

$$P = 400 \text{ W}$$

## 2.5. REPRESENTAÇÃO FASORIAL DAS ONDAS SENOIDAIS

As tensões e correntes senoidais podem ser representadas por um vetor, cujo módulo é igual ao valor máximo da grandeza, que gira em sentido anti-horário com velocidade angular constante. Este vetor girante é denominado **FASOR**.

Na figura dada, vemos que à medida que o fasor gira a sua projeção no eixo vertical dá a sucessão de valores instantâneos da grandeza. Neste exemplo o fasor está representando uma corrente senoidal, portanto, o comprimento do fasor representa o valor máximo da corrente.



O ângulo de deslocamento do fasor é chamado de ângulo elétrico (  $\alpha$  ), expresso em radianos elétricos ( rad E ) ou graus elétricos (  $^{\circ}\text{E}$  ). Observe que uma rotação completa do fasor (  $360^{\circ}\text{E}$  ) produz um ciclo de senóide. Por isso, pode-se relacionar ângulo elétrico com tempo e dizer que  $360^{\circ}\text{E}$  é tempo de um ciclo. Em outras palavras:

$$360^{\circ}\text{E} ( 2\pi \text{ rad E} ) \Rightarrow 1 \text{ T}$$

$$180^{\circ}\text{E} ( \pi \text{ rad E} ) \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ T}$$

A freqüência angular (  $\omega$  ) representa a velocidade com que gira o fasor, sempre em sentido anti-horário. Matematicamente, a freqüência angular é a relação entre o ângulo elétrico percorrido e tempo gasto.

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

A unidade de freqüência angular é radianos por segundo ( rd / s ).

Em uma rotação completa do fasor o ângulo elétrico percorrido é de  **$2\pi$  rad** e tempo consumido é igual a **um período ( T )**.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Considerando-se que  $T = 1 / f$ , tem-se:

$$\omega = 2\pi.f$$

A velocidade de rotação do fasor é diretamente proporcional a freqüência  $f$  da grandeza.

Tendo em vista as equações anteriores e o conhecimento da representação fasorial, a expressão matemática para as correntes alternadas (  $i = I_M \cdot \text{sen } \omega t$  ) pode ser apresentada, de forma mais genérica, de outras maneiras.

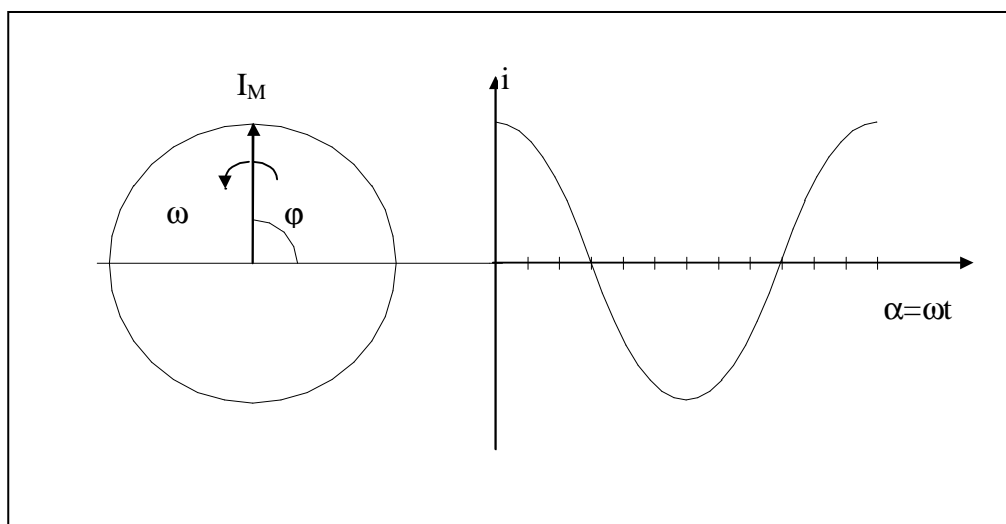
$$i = I_M \cdot \text{sen } (\omega t + \varphi)$$

$$i = I_M \cdot \text{sen } ( \theta + \varphi )$$

$$i = I_M \cdot \text{sen } ( 2\pi f.t + \varphi )$$

Onde  $\varphi$  representa o ângulo de fase inicial, ou seja, o ângulo formado entre o fasor e a horizontal no instante de tempo  $t = 0$ . Na figura dada, no instante  $t = 0$  s o fasor parte da posição  $+90^{\circ}$  em relação ao eixo horizontal de modo que a expressão matemática para esta corrente é

$$i = I_M \cdot \text{sen } (\omega t + 90^{\circ}) .$$



### Relações de fase para formas de onda senoidais

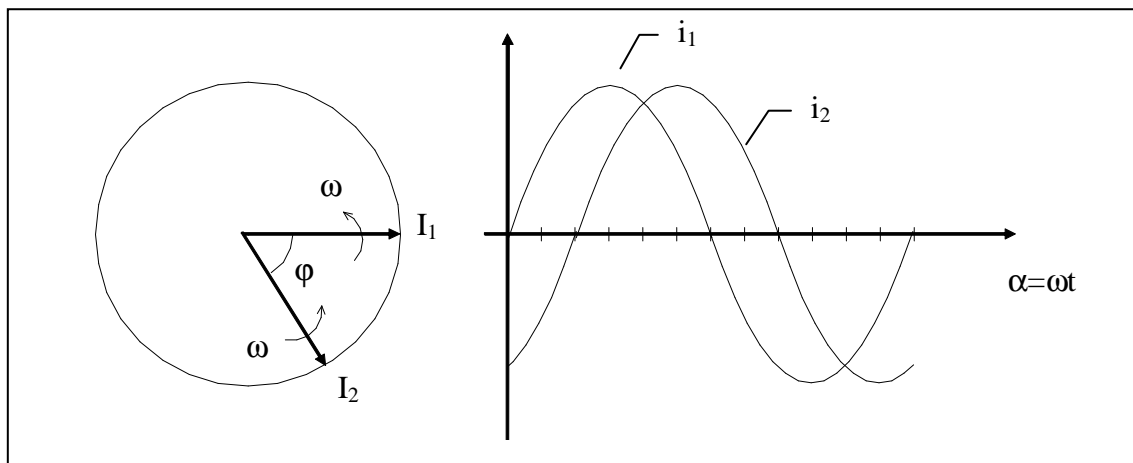
# **Grandezas defasadas:** duas ou mais formas de onda senoidais de mesma frequência estão defasadas quando não atingem valores máximos positivos no mesmo instante de tempo.

Na figura a seguir, o ângulo da fase inicial para a corrente  $i_1$  é  $0^\circ$  e o ângulo de fase inicial para a corrente  $i_2$  é  $-60^\circ$ . Assim, as expressões matemáticas para as correntes são:

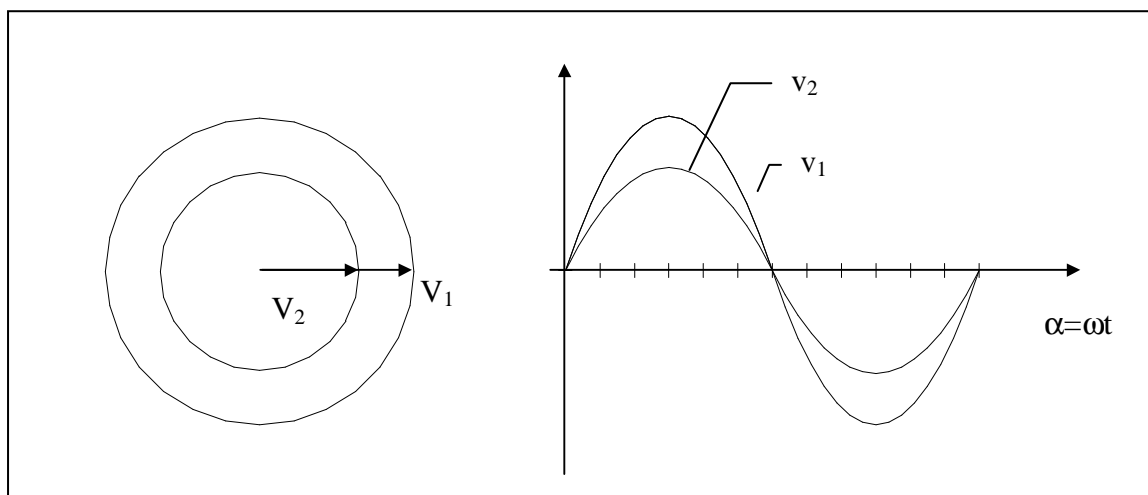
$$i_1 = 10 \sin(\omega t + 0^\circ) \text{ ou } i_1 = 10 \sin \omega t$$

$$i_2 = 10 \sin(\omega t - 60^\circ)$$

A corrente  $i_1$  atinge o valor máximo positivo primeiro que a corrente  $i_2$  que somente atingirá o valor máximo  $60^\circ$  após. Nesta situação se diz que “a corrente  $i_1$  está adiantada de  $60^\circ$  em relação a corrente  $i_2$ “, ou da mesma forma, que “a corrente  $i_2$  está atrasada de  $60^\circ$  em relação a corrente  $i_1$ ”.



# **Grandezas em fase:** duas ou mais formas de onda senoidais de mesma frequência estão em fase quando atingem valores máximos positivos no mesmo instante de tempo (figura a seguir).



$$v_1 = V_1 \cdot \sin \omega t$$

$$v_2 = V_2 \cdot \sin \omega t$$

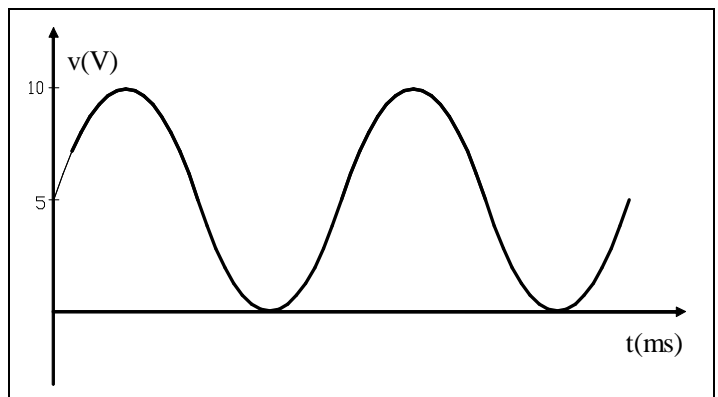


**EXERCÍCIOS**

- Quais são o período e a frequência de uma tensão que tem 12 ciclos em 46 ms?
- Para uma onda de 60Hz, qual é o tempo decorrido em um deslocamento de  $30^\circ$  do fasor?
- Uma tensão senoidal de 5V de pico e frequência 1kHz é aplicada a um resistor de  $10\Omega$ . Pede-se:
  - a expressão matemática da tensão;
  - período e frequência;
  - tensão média e tensão RMS;
  - a potência média dissipada no resistor.
- Determinar o valor instantâneo da corrente  $i = 80 \sin (400t - 30^\circ)$  A em  $t=10\text{ms}$ .
- A amplitude (valor máximo) e a frequência de uma corrente alternada senoidal valem, respectivamente, 20mA e 1kHz. Determine o valor instantâneo da corrente, decorridos  $100\mu\text{s}$  após ela ter atingido o valor zero.
- Determine o instante de tempo em que uma CA de amplitude 100mA e  $f=2\text{MHz}$  atinge 25mA.
- Determinar as relações de fase e representar fasorialmente as ondas:
  - $v = 60 \sin (377t + 50^\circ)$  V ;  $i = 3 \sin (377t - 10^\circ)$  A.
  - $v_1 = 311 \sin (100t + 50^\circ)$  V ;  $v_2 = 125 \sin (100t + 10^\circ)$  V.
  - $i_1 = 10 \sin (377t - 40^\circ)$  A ;  $i_2 = 8 \sin (377t - 10^\circ)$  A.
 Responda na forma: \_\_\_\_\_ está adiantado(a) de \_\_\_\_\_ graus em relação a \_\_\_\_\_.

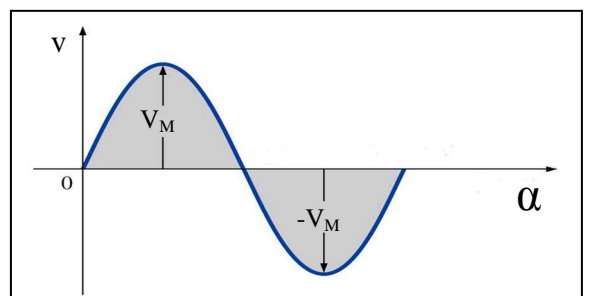
- Duas fontes de tensão senoidal de mesma frequência e com valores máximos de 200V e 100V estão ligadas em série. Considerando que as ondas estão defasadas de  $90^\circ$ , determinar o valor que um voltímetro CA mede para a associação.

- Calcular a tensão média para a forma de onda ao lado.

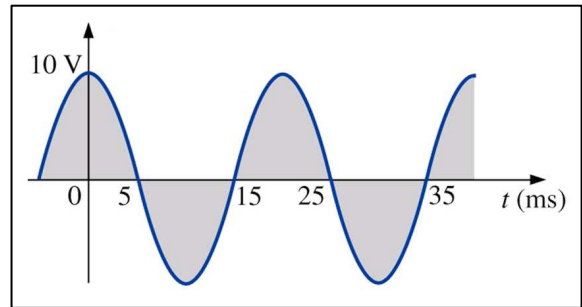


- No gráfico ao lado, a tensão varia de acordo com a seguinte equação:  $v = 5 \sin \alpha$ . Determine o valor da tensão para:

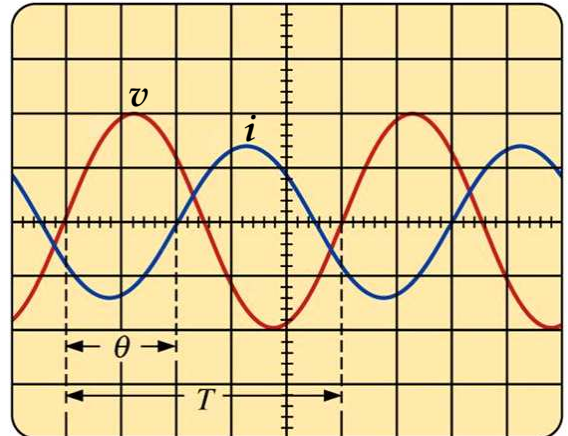
- $\alpha = 40^\circ$
- $\alpha = 0,8 \pi \text{ rad}$



11. No gráfico ao lado está representado o comportamento de uma tensão alternada senoidal. Determine a equação característica desta tensão e os valores do período e da frequência.

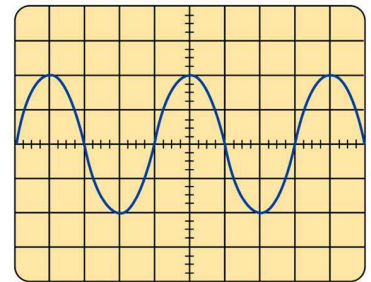


12. Ao lado, temos o desenho da tela de um osciloscópio, onde no eixo horizontal está representado o tempo (0,2 miliseg/divisão). A divisão citada refere-se aos espaços maiores (quadrados). Determine o valor do ângulo  $\theta$  de defasagem entre as duas senóides. Não esqueça que deve ser considerado os picos mais próximos a fim de se identificar qual senóide está avançada em relação a outra.

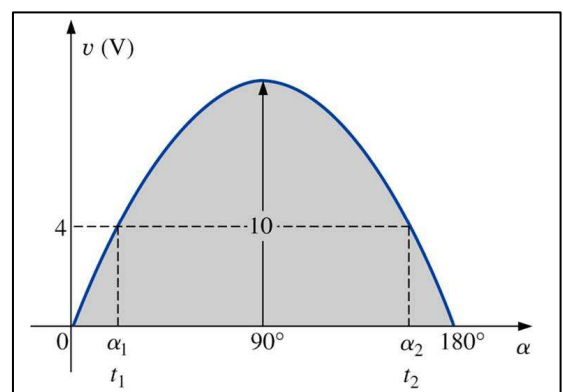


13. Na tela do osciloscópio desenhado ao lado, no eixo vertical está representada a tensão (0,1V/divisão) e no eixo horizontal está representado o tempo (50μs/divisão). A divisão citada refere-se aos espaços maiores (quadrados). Determine o valor:

- do período
- da frequência;
- de pico a pico da tensão;
- eficaz da tensão.

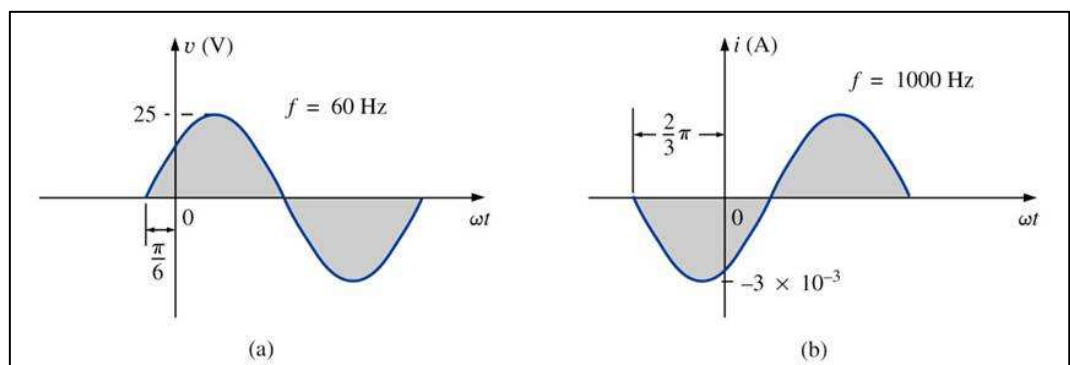


14. Considerando que, no gráfico ao lado, a tensão varia de acordo com a equação  $v = 10 \sin 377 t$ , determine os instantes de tempo (em graus, rad e miliseg) em que a tensão atinge o valor de 4V.

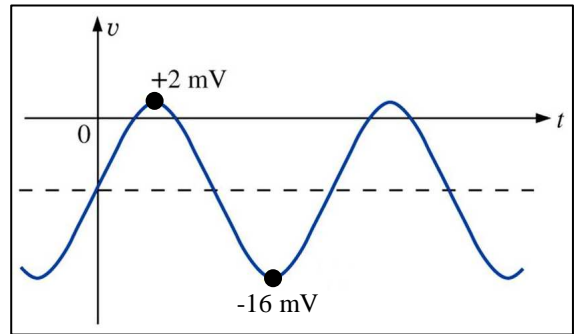


15. Nos dois gráficos dados, determine em cada caso:

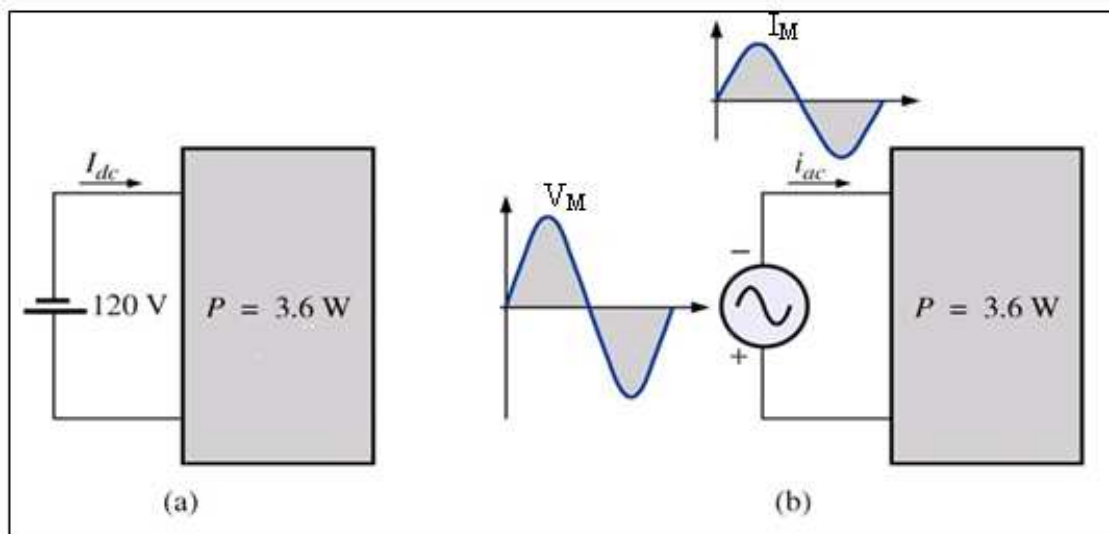
- o valor do período;
- o valor eficaz da tensão (ou corrente);
- a equação característica da tensão (ou corrente).



16. Sabendo-se que o valor médio de uma grandeza alternada senoidal equivale ao nível CC desta grandeza, determine o valor médio da tensão, cujo comportamento está representado no gráfico ao lado.

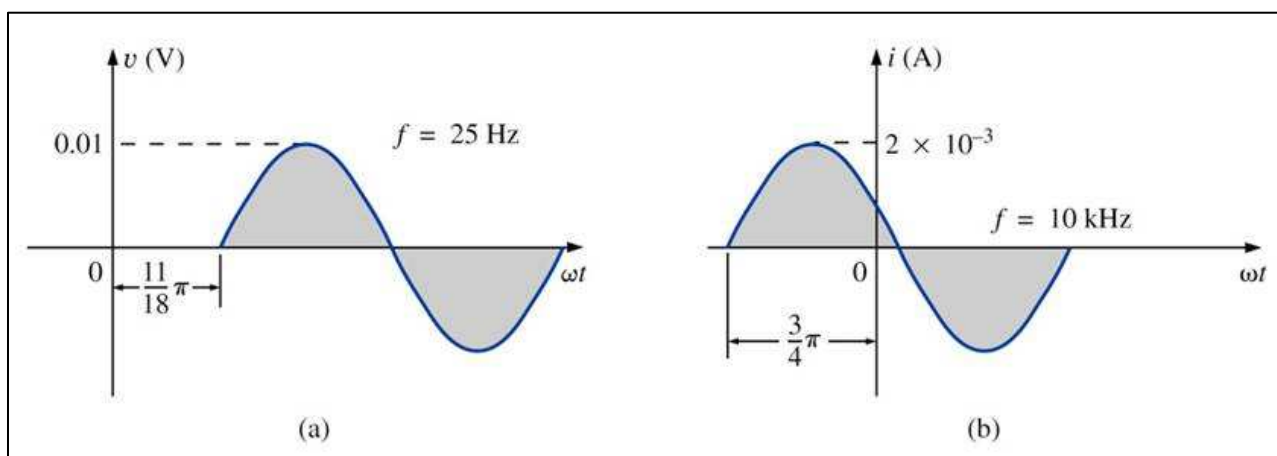


17. No desenho a abaixo, temos uma fonte CC de 120V que alimenta uma carga consumidora de 3,6W. Determine os valores máximo (valores de pico) de tensão e de corrente relativos ao caso b, de modo que a potência nesta situação seja a mesma do caso anterior (3,6W)



18. Nos dois gráficos dados, determine em cada caso:

- o valor do período;
- o valor eficaz da tensão (ou corrente);
- a equação característica da tensão (ou corrente).



### 3. CIRCUITOS PUROS

A partir de agora passaremos a aplicar as técnicas da análise fasorial a circuitos (monofásicos) alimentados com corrente alternada senoidal.

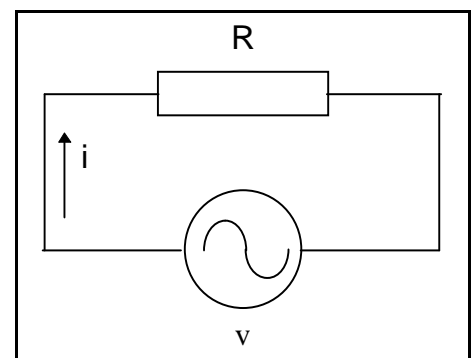
O termo “circuitos monofásicos” não exclui que o circuito possa ser alimentado por duas fases ao invés de fase e neutro.

#### 3.1. CIRCUITOS PURAMENTE RESISTIVOS

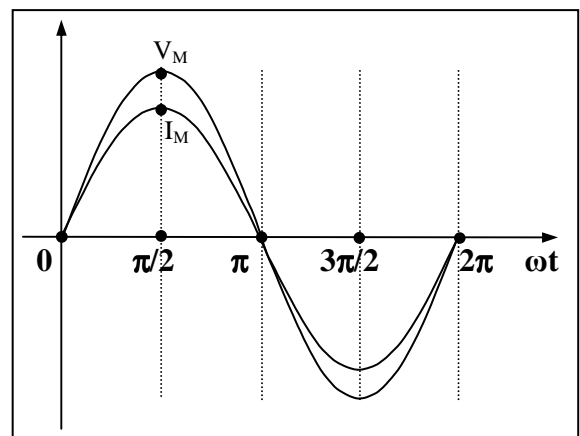
O resistor é um modelo de circuitos que possuem resistência elétrica. É muito usado para representar fornos elétricos, chuveiros, lâmpadas incandescentes, resistência de fios, cabos e também a parte resistiva de máquinas, como será visto adiante.

##### 3.1.1. RELAÇÃO ENTRE TENSÃO E CORRENTE

No circuito representado ao lado temos um resistor ligado a uma fonte ideal de tensão alternada. A Lei de Ohm aplicada em qualquer instante a esse circuito resulta  $v=R.i$ ; a queda de tensão em um resistor é diretamente proporcional à corrente que por ele circula, e o diagrama que representa as variações da tensão e da corrente ao longo de um período completo em um CPR está indicado na figura abaixo.



Em qualquer instante, a tensão possui o valor da corrente multiplicado pela resistência, que é constante. Se a corrente é zero, a tensão é zero; se a corrente aumenta, a tensão aumenta; se a corrente é máxima positiva, a tensão é máxima positiva, e assim por diante. Essa relação proporcional, com a tensão e a corrente tendo o mesmo tipo de variação ao mesmo tempo é característica de CPR e dizemos que, nesses circuitos, a tensão e a corrente estão em fase.



As equações relativas a tensão da fonte e a corrente estão indicadas ao lado, onde se comprova que estas duas grandezas estão em fase.

$$\begin{aligned} v &= 10 \operatorname{sen} \omega t \\ i &= 10 \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

Sabe-se que:  $i = \frac{v}{R} = \frac{V_M}{R} \cdot \operatorname{sen} \omega t$

Em  $\omega t = 90^\circ$  teremos:  $i = I_M$  e  $v = V_M$ . Assim, podemos dizer que:  $I_M = \frac{V_M}{R}$ .

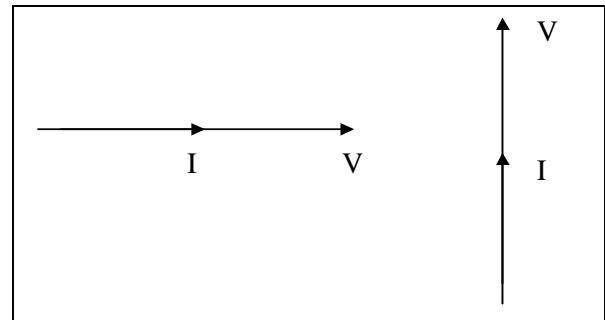
Dividindo ambos os membros da igualdade por  $\sqrt{2}$  teremos:  $\frac{I_M}{\sqrt{2}} = \frac{V_M/\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ .

Logo:  $I = \frac{V}{R}$ . Utilizando-se então os valores eficazes de tensão e corrente, a equação

utilizada em CA é a mesma utilizada em CC para circuitos puramente resistivos.

### 3.1.2 REPRESENTAÇÃO FASORIAL

Os fasores representativos da tensão e da corrente em um CPR giram com mesma velocidade angular (pois  $v$  e  $i$  têm mesma frequência) e superpostos (pois têm mesma fase).



**Exemplo:** para o circuito da figura dada, calcule as quedas de tensão nos resistores e faça os diagramas  $v$ ,  $i=f(t)$  e fasorial.

**Solução:** a tensão da fonte foi dada em valor instantâneo, portanto devemos redesenhar o circuito com o valor eficaz e frequência.

$$v = V_M \cdot \sin \omega t$$

$$V_M = 311 \text{ V}$$

$$V = \frac{V_M}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{ V}$$

$$\omega = 377 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{377}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$$

Como os resistores estão em série, pode-se somar suas resistências para obter a resistência total ligada à fonte.  $R_t = 500 + 300 = 800 \Omega$

A corrente é:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{800} = 0,275 \text{ A} = 275 \text{ mA}$$

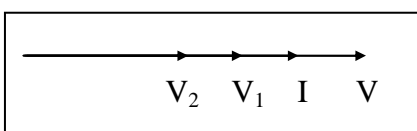
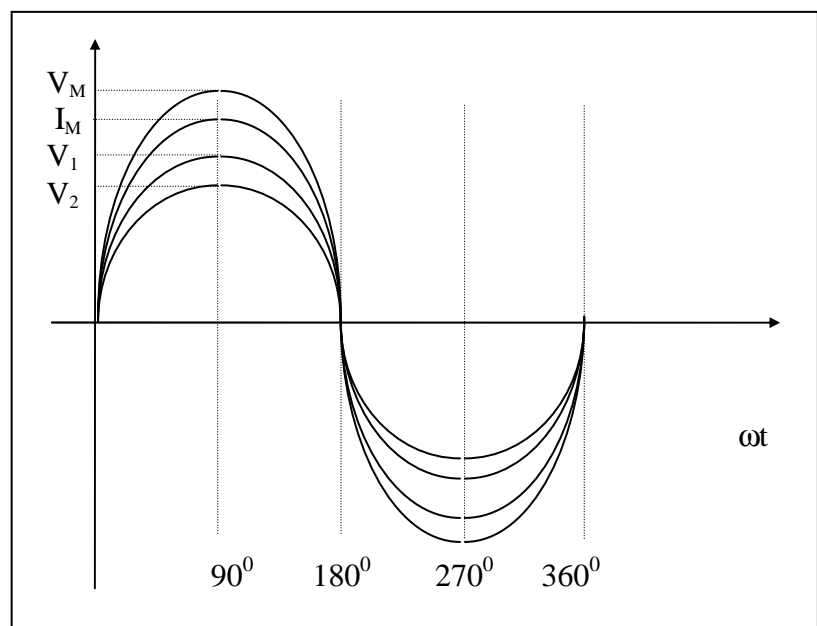
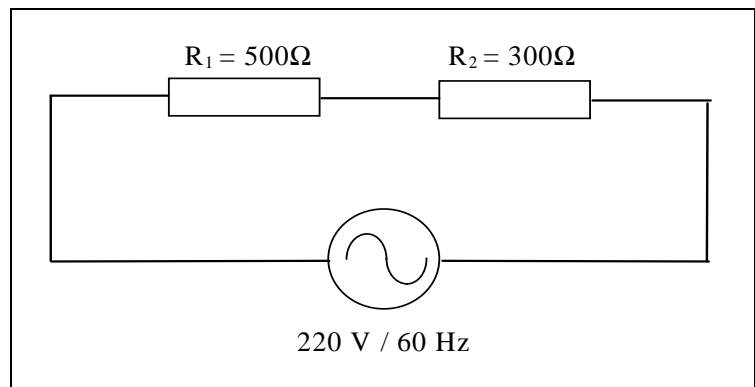
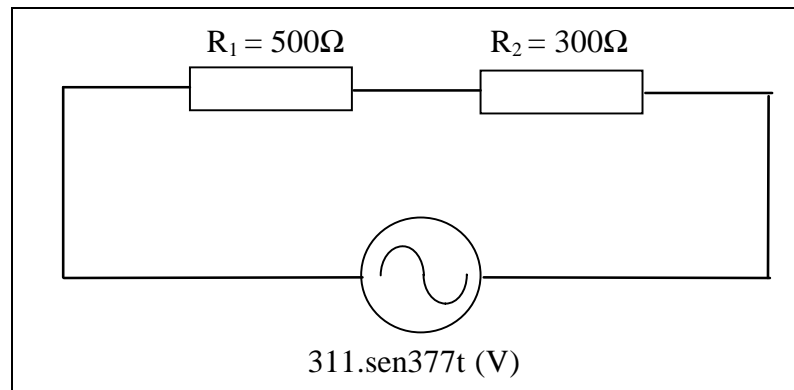
A corrente  $I$ , ao passar pelos resistores, causa quedas de tensão  $V_1$  e  $V_2$  nos mesmos.

$$V_1 = R_1 \cdot I = 500 \cdot 0,275 = 137,5 \text{ V}$$

$$V_2 = R_2 \cdot I = 300 \cdot 0,275 = 82,5 \text{ V}$$

O diagrama  $v, v_1, v_2, i=f(\omega t)$  está indicado ao lado.

O diagrama fasorial fica:



### 3.2. CIRCUITOS PURAMENTE CAPACITIVOS

O capacitor é um elemento capaz de acumular cargas elétricas e ficar carregado, apresentando tensão em seus terminais, mesmo após ter sido retirada a fonte. A corrente não o atravessa; apenas o carrega ou descarrega. Dessa forma, uma corrente contínua só circula durante um tempo de carga (ou descarga) e quando a tensão no capacitor igualar-se a da fonte, a corrente deixa de circular. Sua grandeza característica é a capacitância, medida em Farad (F).

#### 3.2.1. RELAÇÃO ENTRE TENSÃO E CORRENTE

A figura ao lado representa um capacitor puro ligado a uma fonte de C.A.. Essa idealização é muito útil, pois apesar de sempre estar presente o efeito resistivo dos condutores, esse efeito é inexpressivo em muitos casos práticos, sendo então desprezado quando se usam bons capacitores industrializados.

A relação  $V \times A$  para um capacitor é  $i = C \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$ . Essa equação sugere que só circula corrente em um capacitor se houver variação na sua tensão. Lembre-se de que um capacitor ideal não permite a passagem da corrente de uma placa para outra, e só circula corrente de carga (quando a tensão aumenta) ou descarga (quando a tensão diminui).

Agora analisemos a relação  $V \times A$  para excitação senoidal. Sabemos que o valor médio da corrente no capacitor pode ser calculado por  $I_{md} = C \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$ . Utilizemos um intervalo no gráfico  $v = f(t)$  que represente a variação que ocorre na tensão. Esse intervalo pode ser de 0 a  $T/4$ , conforme a figura dada.

Nesse intervalo, a tensão variou de 0 a  $V_M$ . Então:

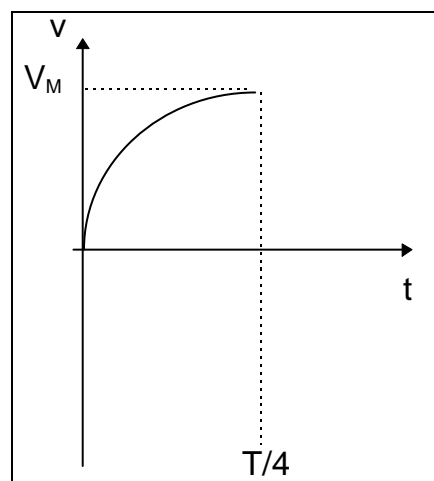
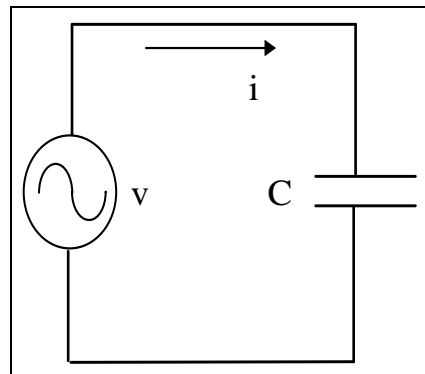
$$I_{md} = C \frac{V_M - 0}{\frac{T}{4}} = \frac{4 \cdot C \cdot V_M}{T} \quad \text{como } T = 1/f ; \quad I_{md} = 4 \cdot f \cdot C \cdot V_M$$

Considerando: 
$$\frac{I}{I_{md}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} I_M}{\frac{2}{\pi} I_M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Então: 
$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} I_{md} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} 4 \cdot f \cdot C \cdot V_M = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot V_M}{\sqrt{2}}$$

Como:  $V_M / \sqrt{2} = V$  e  $2\pi f = \omega$  ;

$$I = \omega \cdot C \cdot V$$



#### REATÂNCIA CAPACITIVA

Note que há proporcionalidade entre os valores eficazes da tensão e da corrente, e a constante de proporcionalidade é  $1/\omega C$ . Se a tensão for mantida, quanto maior for essa constante menor será a corrente e vice-versa. Portanto  $1/\omega C$  representa a oposição à circulação de corrente em um CPC, e é chamada de *reatância capacitiva* ( $X_C$ ).

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

A Lei de Ohm aplicada a um capacitor toma a forma  $V = X_C \cdot I$ .

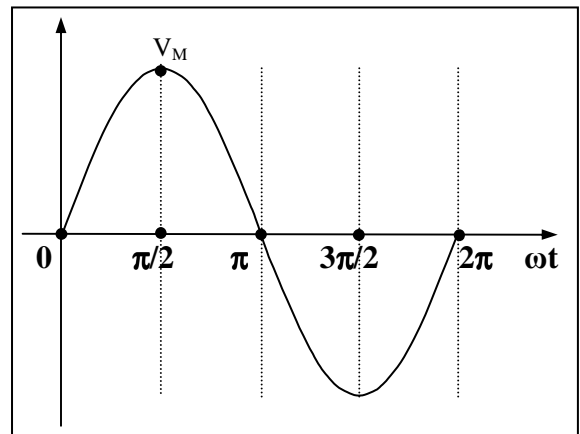
Note que deve-se usar os valores eficazes ou os valores máximos, não sendo aplicável aos valores instantâneos, pois as variações são defasadas, como veremos a seguir. A unidade de reatância capacitiva é o ohm ( $\Omega$ ).

Os capacitores se apresentam como circuito aberto para C.C. ( $\uparrow X_C = \frac{1}{\downarrow \omega \cdot C}$ ) e como curto-circuito para C.A. de alta frequência ( $\downarrow X_C = \frac{1}{\uparrow \omega \cdot C}$ ).

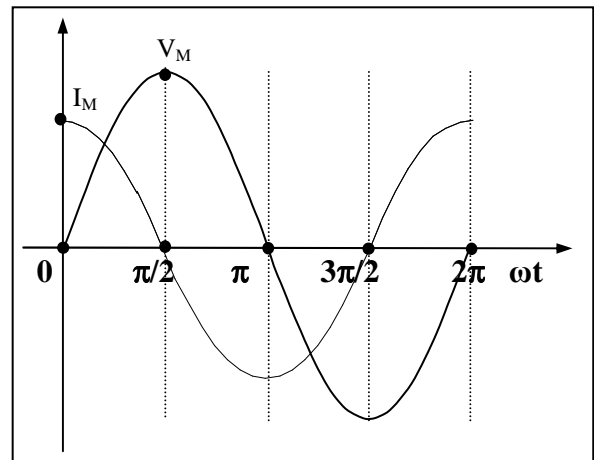
### 3.2.2. DEFASAGENS

Os valores instantâneos de tensão e corrente em um capacitor não são proporcionais. A corrente é proporcional à taxa de variação da tensão  $i = C \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ; portanto tensão e corrente em um capacitor não sofrem as mesmas variações ao mesmo tempo.

Supomos que uma tensão senoidal seja aplicada a um capacitor puro. O diagrama  $v=f(\omega t)$  está indicado ao lado.



Nos instantes 0 e 360° ocorrem as máximas variações positivas, então  $i = C \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$  nesses pontos é máxima positiva. No instante 180° ocorre a máxima variação negativa, e em 90° e 270°,  $\Delta v = 0$ . Os valores intermediários são proporcionais às variações da senoide; portanto, ligando os pontos, temos a representação senoidal a seguir.



Concluimos então que a tensão e a corrente em um CPC não estão em fase, pois não têm os mesmos tipos de variações ao mesmo tempo. Dizemos que estão defasadas, e como as variações sofridas pela corrente são sofridas pela tensão 90°E após, a defasagem é de 90°E com a *tensão em atraso*, ou com a *corrente em avanço*, que dá a mesma informação.

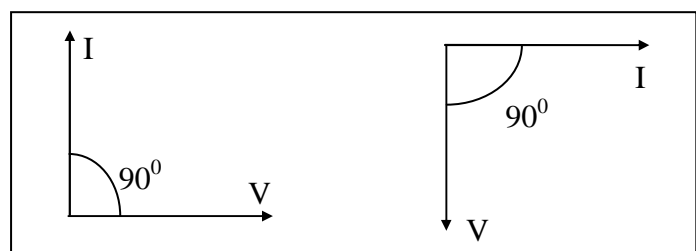
As equações relativas a tensão e a corrente estão indicadas ao lado, onde se comprova que a corrente está adiantada de 90° em relação a tensão.

$$v = 10 \sin \omega t$$

$$i = 10 \sin (\omega t + 90^\circ)$$

### 3.2.3. REPRESENTAÇÃO FASORIAL

Os fasores representativos da tensão e da corrente em um CPC giram com mesma velocidade angular (pois  $v$  e  $i$  têm a mesma frequência) e estão defasados de 90°E com a corrente em avanço.

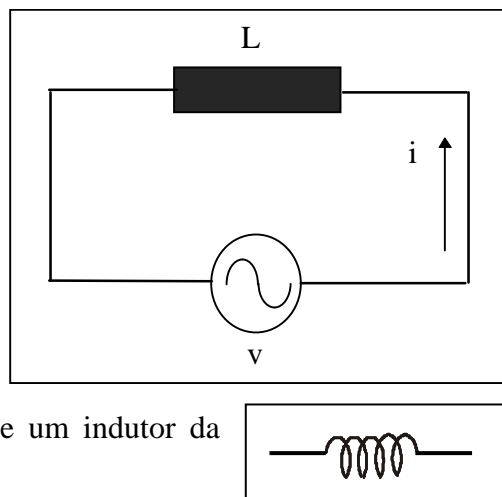


### 3.3. CIRCUITOS PURAMENTE INDUTIVOS

O indutor é um modelo de circuitos que trabalham com campo magnético criado por sua corrente. Como qualquer condutor cria campo magnético quando percorrido por corrente, todos os circuitos têm sua parcela indutiva. Na prática, porém, só tem importância o efeito indutivo de circuitos que precisam do campo magnético para funcionar ou aqueles que são influenciados de forma significativa por ele. Por exemplo, o campo magnético de um chuveiro é tão pequeno que não se fala em efeito indutivo em chuveiros. Eles são, na prática, puramente resistivos. Já um transformador é essencialmente uma máquina indutiva porque necessita do campo magnético para efetuar sua função de transformar tensão e/ou corrente.

Assim, o indutor é o típico representante de máquinas e dispositivos que contêm enrolamentos destinados a criar campo magnético, tais como geradores, motores, transformadores, eletroímãs, etc.. Sua grandeza característica é a indutância  $L$ , medida em Henry (H).

O circuito representado na figura é a idealização de um circuito indutivo puro. Tal circuito não ocorre na prática comum, pois sempre está presente o efeito resistivo dos condutores. No entanto, o estudo do efeito indutivo em separado de outros efeitos se faz necessário para que o aluno possa compreender os agrupamentos que virão a seguir. Não se esqueça que é muito comum representar-se um indutor da forma ao lado.



#### 3.3.1. RELAÇÃO ENTRE TENSÃO E CORRENTE

A relação  $V \times A$  para um indutor é  $v = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ , o que mostra que a coexistência de tensão

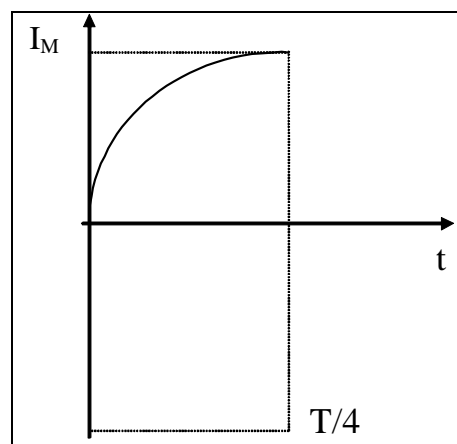
e corrente em um indutor não é tão simples como em um resistor. No resistor, a queda de tensão é diretamente proporcional à corrente ( $v=R.i$ ), tendo como oposição à corrente a resistência. No indutor, a queda de tensão é diretamente proporcional à variação da corrente, tendo como oposição à variação da corrente a indutância.

Agora aplicaremos a relação  $V \times A$  para indutores com excitação senoidal. O valor médio da tensão no indutor pode ser calculado com  $V_{md} = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ .

Utilizemos um intervalo do gráfico  $i = f(t)$  que represente a variação que ocorre na corrente. Esse intervalo pode ser de 0 a  $T/4$ .

Nesse intervalo, a corrente variou de 0 a  $I_m$ . Então:

$$V_{md} = L \frac{I_m - 0}{\frac{T}{4}} = \frac{4 \cdot L \cdot I_m}{T} \quad \text{como } T=1/f \quad V_{md} = 4 \cdot f \cdot L \cdot I_m$$



E considerando que:  $\frac{V}{V_{md}} = \frac{\frac{V_M}{\sqrt{2}}}{\frac{2 \cdot V_M}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$  Então:  $V = V_{md} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

e, para o CPI  $V = 4 \cdot f \cdot L \cdot I_m \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot I_m}{\sqrt{2}}$  Como  $I_m / \sqrt{2} = I$  e  $2\pi f = \omega$

obtem-se:  $V = \omega \cdot L \cdot I$



### REATÂNCIA INDUTIVA

Assim como no resistor e no capacitor, há proporcionalidade entre os valores eficazes da tensão e da corrente. Relembremos: resistor:  $V=R.I$ ; capacitor:  $V=(1/\omega C).I$ ; indutor:  $V=\omega.L.I$

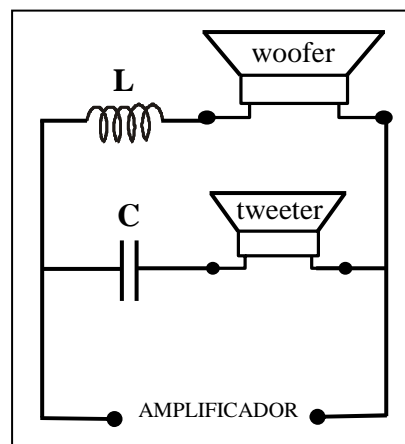
O fator  $\omega L$  representa a oposição que o indutor apresenta à circulação de corrente e é denominada de reatância indutiva ( $X_L$ ).

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$$

A unidade de reatância indutiva é o ohm. Assim, teremos:  $V = X_L \cdot I$ .

Os indutores têm a propriedade de se opor a variações da corrente, sendo essa capacidade medida pela indutância. Quanto maior for a indutância maior será a dificuldade de circular uma corrente variável ( $\uparrow X_L = \omega.L \uparrow$ ) e quanto mais rápida for essa variação, também maior será a oposição ( $\uparrow X_L = \uparrow \omega.L$ ). Se um CPI for percorrido por corrente contínua, ele se apresenta como um curto-circuito (sem oposição à passagem de corrente). Se um CPI for percorrido por C.A. de alta frequência, ele se apresenta como um circuito aberto (oposição infinita à passagem de corrente).

Uma aplicação bem prática dos circuitos RLC é a esquematizada ao lado, onde temos um sistema de alto-falantes. No tweeter (diâmetro pequeno) são produzidos os sons agudos (alta frequência) e no woofer (diâmetro grande) são produzidos os sons graves (baixa frequência). De modo que os sinais transmitidos em frequências diferentes sejam recebidos pelo alto-falante adequado, eles são associados em paralelo e ligados na saída do amplificador. Assim, o capacitor bloqueará os sinais transmitidos em baixa frequência e permitirá a passagem de sinais transmitidos em alta frequência. Com a colocação de um indutor no ramo do woofer, teremos a situação inversa.

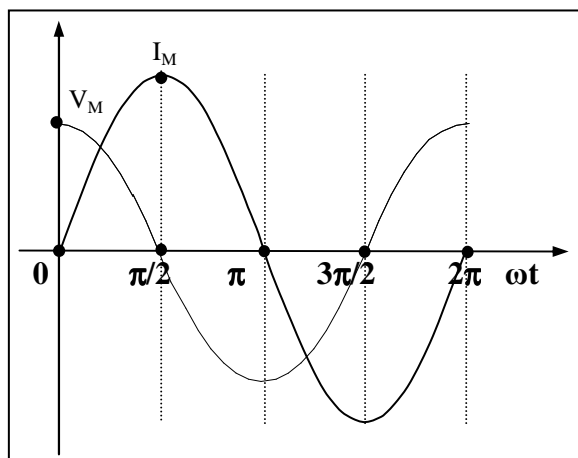


### 3.3.2. DEFASAGENS

De forma análoga ao capacitor, o indutor não possui proporcionalidade entre valores instantâneos de tensão e corrente. A tensão é proporcional à taxa de variação da corrente  $v = L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$ . Fazendo uma

análise gráfica semelhante ao que foi feito com o capacitor, obtém-se o gráfico ao lado. Dessa forma, concluímos que a corrente e a tensão em um indutor estão defasadas de  $90^\circ$ E, com a tensão em avanço, ou com a corrente em atraso, que é a mesma coisa.

As equações relativas a tensão e a corrente estão ao lado, onde se comprova que a tensão está adiantada de  $90^\circ$  em relação a corrente.

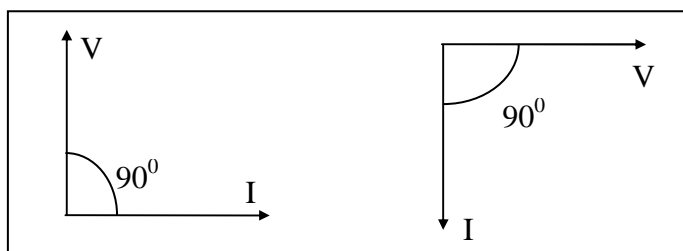


$$i = 10 \sin \omega t$$

$$v = 10 \sin (\omega t + 90^\circ)$$

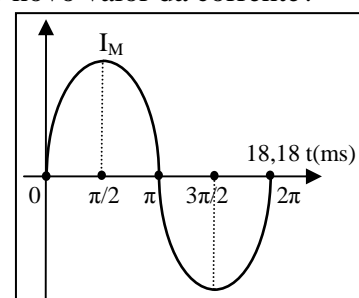
### 3.3.2. REPRESENTAÇÃO FASORIAL

Os fasores representativos de tensão e corrente em um CPI giram com a mesma velocidade angular (pois  $v$  e  $i$  têm a mesma frequência) e com defasagem de  $90^\circ$ E, com a tensão adiantada em relação à corrente.



**EXERCÍCIOS**

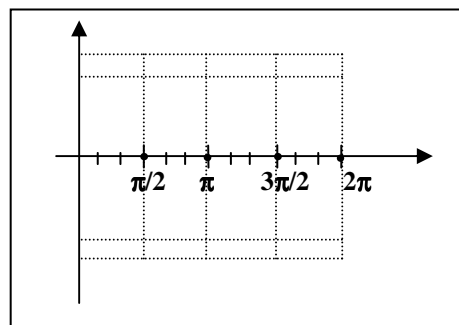
1. Sobre um resistor de 2K2 aplica-se uma tensão  $V_{RMS}=110V$  ;  $f=60Hz$ .  
a) Calcule a intensidade da corrente  $I_{RMS}$ .  
b) Alterando-se a frequência para 50Hz, o que ocorre com  $I_{RMS}$ ?
2. Um resistor de  $50\Omega$  é ligado a uma fonte CA de  $V_M=300V$  e  $f=100Hz$ . Calcule a intensidade da corrente medida por um amperímetro que está ligado em série com a carga consumidora.
3. No exercício anterior, pretende-se substituir a fonte CA por uma CC que produza a mesma dissipação de energia no resistor. Que valor deverá ter a tensão dessa fonte?
4. Uma fonte gera f.e.m.  $e = 60 \cdot \sin 500t$  (V) e possui resistência interna  $r = 2\Omega$ . Calcule o valor eficaz da corrente e da tensão no resistor de 1kW / 220V ligado a ela.
5. Calcule a reatância de um capacitor de 1nF à frequência de 50Hz, 60Hz, 1kHz e 1MHz.
6. Esboce um gráfico  $I=f(f)$  para um capacitor de  $1\mu F$  alimentado com 10V, com frequência variável de 0 a  $\infty$ . Utilize os eixos ao lado.
7. Um capacitor de  $77\mu F$  está conectado numa rede de CA, onde temos  $V_{m\acute{a}x}=170V$  e  $f=50Hz$ . Determine o valor da corrente medida por um amperímetro ligado em série com o circuito.
8. Um capacitor de  $10\mu F$  está ligado a uma fonte de tensão  $v=300\sin \omega t$ , sendo  $f=60Hz$ . Calcule o valor instantâneo da corrente em  $t=2ms$ .
9. Um capacitor de placas planas e paralelas de 5cm x 80cm cada, com um dielétrico de 0,2mm de espessura e  $K=500$  é ligado a uma fonte de 127V / 50Hz. Considerando-o como capacitor puro, calcule o valor eficaz da corrente que circulará.
10. Um capacitor de  $C=42\mu F$  é ligado a uma fonte de 220V / 60Hz. Calcule o valor da corrente.
11. Calcule a reatância de um indutor de 1mH à frequência de 50Hz, 60Hz, 1kHz e 1MHz.
12. Por uma bobina de 7mH circula uma corrente (CA) de  $I_{m\acute{a}x}=14,1A$  numa frequência de 50Hz. Determine o valor da tensão medida por um voltímetro ligado em paralelo com a bobina.
13. Um indutor puro de  $L=300mH$  é ligado a uma fonte de 127V / 50Hz. Calcule o valor da corrente medida por um amperímetro ligado em série com o indutor.
14. Se a frequência da fonte da questão anterior subir para 1kHz, qual o novo valor da corrente?
15. Um indutor puro de 3H é alimentado com uma tensão máxima (tensão de pico)  $V_M=400V$ . Sabendo-se que a corrente varia de acordo com a senóide ao lado, determine o valor instantâneo da corrente quando a tensão está com o valor referente a  $225^\circ$  elétricos.



16. Dados os pares de expressões para tensões e correntes a seguir, determine se o dispositivo envolvido é um capacitor, um indutor ou um resistor e calcule os valores de C, L e R.

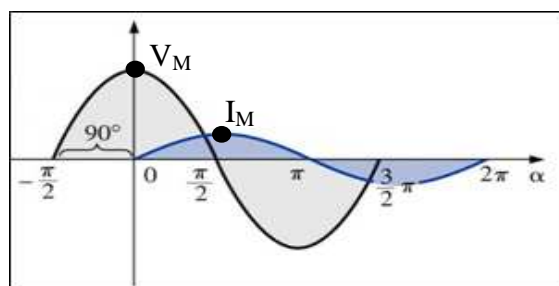
- a)  $v=100 \sin(\omega t+40^\circ)$  e  $i=20 \sin(\omega t+40^\circ)$   
 b)  $v=1000 \sin(377t+10^\circ)$  e  $i=5 \sin(377t-80^\circ)$   
 c)  $v=500 \sin(157t+30^\circ)$  e  $i=1 \sin(157t+120^\circ)$

17. Num circuito puro alimentado por CA, a tensão e a corrente variam de acordo com as equações a seguir:  $i=3 \sin(\omega t+30^\circ)$  e  $v=2 \sin(\omega t-60^\circ)$ . Identifique o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente, represente estas grandezas no gráfico ao lado e diga que tipo de circuito se trata (carga resistiva, capacitiva ou indutiva).

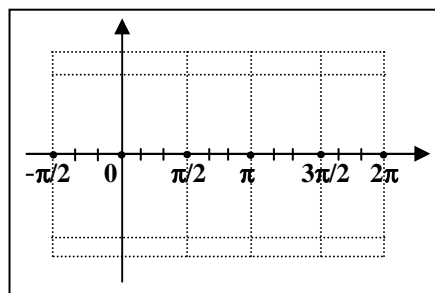


18. Em que frequência um indutor de 5mH terá a mesma reatância de um capacitor de 0,1μF?

19. Num circuito puramente indutivo (gráfico representado ao lado) circula uma corrente  $i = 10 \sin 377t$ . Sabendo-se que a indutância do indutor vale 0,1H, determine o valor máximo (valor de pico) da tensão.

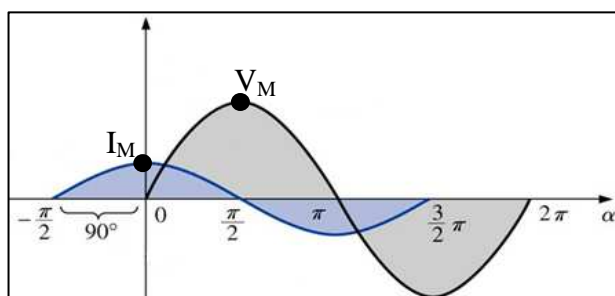


20. Refaça o problema anterior, considerando uma corrente  $i = 10 \sin(377t+30^\circ)$  e esboce as curvas de  $v$  e  $i$  no gráfico ao lado.



21. Faça novamente o problema 19, considerando que a corrente é  $i = 7 \sin(377t-70^\circ)$  e esboce as curvas de  $v$  e  $i$  num novo gráfico.

22. Num circuito puramente capacitivo (gráfico representado ao lado) é aplicada uma tensão  $v=30 \sin 400t$ . Sabendo-se que a capacitância do capacitor vale 1μF determine o o valor máximo (valor de pico) da corrente.



23. A expressão para a corrente num capacitor de 100μF é  $i = 40 \sin(500t + 60^\circ)$ . Determine a expressão senoidal (equação característica) para a tensão no capacitor.

24. São dadas a seguir expressões para a corrente em uma reatância indutiva de 20Ω. Qual é a expressão senoidal para a tensão em cada caso?

- a)  $i = 5 \sin \omega t$       b)  $i = 0,4 \sin(\omega t + 60^\circ)$

25. A seguir são apresentadas as expressões para a tensão aplicada a um capacitor de 0,5μF. Qual é a expressão para a corrente em cada caso?

- a)  $v = 127,2 \sin 754t$       b)  $v = 100 \sin(1600t-170^\circ)$

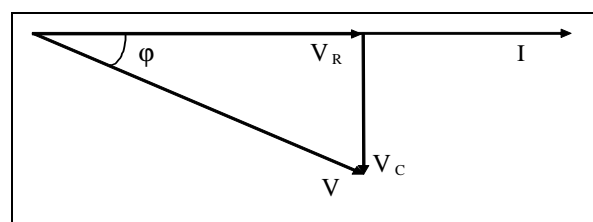
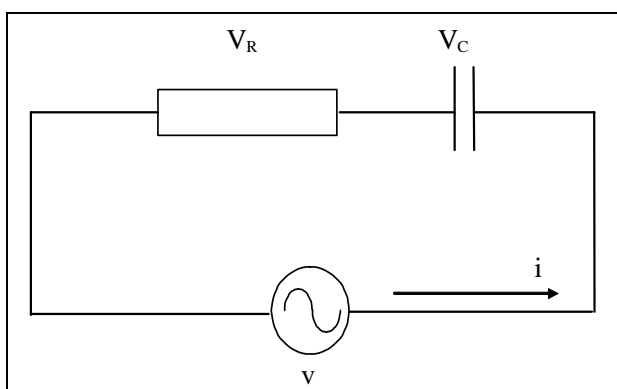
## 4. CIRCUITOS RLC SÉRIE E PARALELO

### 4.1. CIRCUITOS RC SÉRIE

#### 4.1.1. LEI DAS TENSÕES DE KIRCHHOFF PARA CA

Aplicamos a Lei de Kirchhoff das tensões ao circuito a seguir, lembrando que as tensões não podem ser somadas algebricamente, devido às defasagens. Note que temos uma soma fasorial (vetorial) e não algébrica. Projetando num diagrama os fasores correspondentes às quedas de tensão, com a corrente no referencial, temos:

$$\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_C$$



O resultado é um fasor que representa a tensão aplicada ao conjunto. Esse fasor tem módulo igual ao valor eficaz dessa tensão e está atrasado de um ângulo  $\phi$  em relação à corrente. A corrente que circula em um circuito RC avança um ângulo  $\phi$  (entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ) em relação à tensão nos extremos do circuito.

Verificamos que o triângulo tem  $V_R$  e  $V_C$  como catetos e  $V$  como hipotenusa. Aplicando teorema de Pitágoras, temos  $V^2 = V_R^2 + V_C^2$  ou

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2}$$

Da trigonometria, temos:

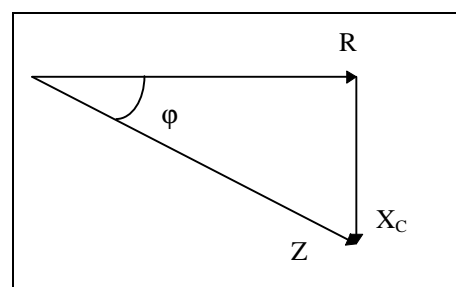
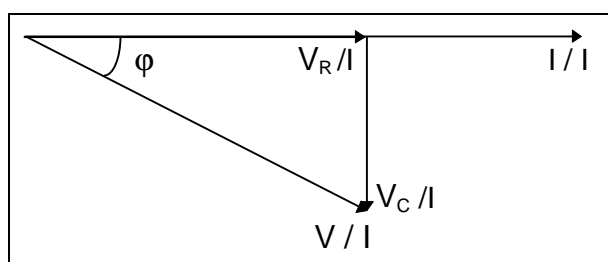
$$\sin \phi = \frac{V_C}{V}$$

$$\cos \phi = \frac{V_R}{V}$$

$$\tan \phi = \frac{V_C}{V_R}$$

#### 4.1.2. DIAGRAMA DE OPOSIÇÕES: IMPEDÂNCIA

Considerando o diagrama fasorial das tensões acima, vamos refazer o diagrama, dividindo cada tensão considerada pela corrente, que é comum aos elementos (pois estão em série).



Este novo triângulo tem dimensões de oposição ( $\frac{\text{tensão}}{\text{corrente}}$ ), onde:

$$V_R / I = R ; \quad V_C / I = X_C \quad \text{e} \quad V / I = Z$$

“Z” é chamada *impedância* do circuito, e corresponde à oposição que ele oferece à circulação da corrente. Sua unidade é o ohm ( $\Omega$ ).

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo das oposições obtido, temos  $Z^2 = R^2 + X_C^2$  ou:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

Pela trigonometria, temos:

$$\sin \varphi = \frac{X_C}{Z} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad \tan \varphi = \frac{X_C}{R}$$

Então, a Lei de Ohm aplicada a circuitos alimentados com C.A. fica:

$$V = Z \cdot I$$

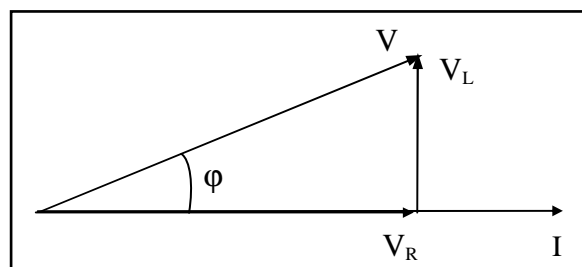
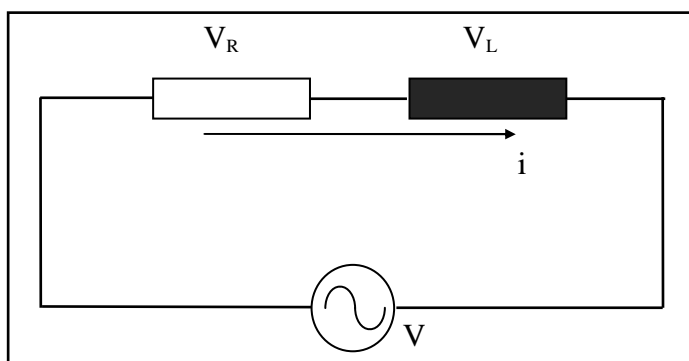
Se o circuito for CPR, ela se reduz a  $V=R \cdot I$ ; se for CPC, se reduz a  $V=X_C \cdot I$ ; genericamente,  $V=(\text{oposição}) \cdot I$ .

## 4.2. CIRCUITOS RL SÉRIE

### 4.2.1. LEI DAS TENSÕES DE KIRCHHOFF PARA CA

Aplicamos a Lei de Kirchhoff das tensões ao circuito a seguir, lembrando que as tensões não podem ser somadas algebricamente, devido às defasagens. Note que temos uma soma fasorial (vetorial) e não algébrica. Projetando num diagrama os fasores correspondentes às quedas de tensão, com a corrente no referencial, temos:

$$\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_L$$



O resultado é um fasor que representa a tensão aplicada ao conjunto. Esse fasor tem módulo igual ao valor eficaz dessa tensão e está adiantado de um ângulo  $\varphi$  em relação à corrente. A corrente que circula em um circuito RL se atrasa de um ângulo  $\varphi$  (entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ) em relação à tensão nos extremos do circuito.

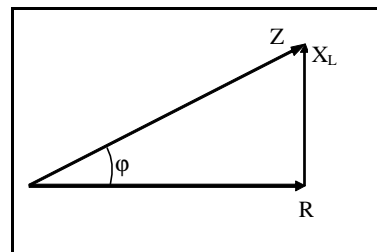
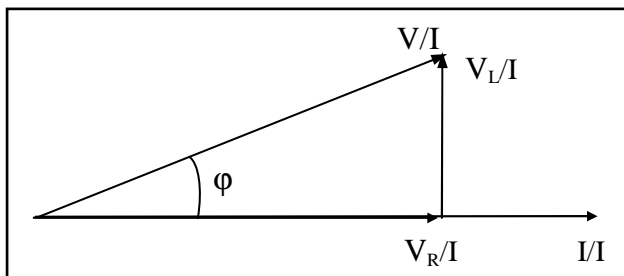
Verificamos que o triângulo tem  $V_R$  e  $V_L$  como catetos e  $V$  como hipotenusa. Aplicando teorema de Pitágoras, temos  $V^2 = V_R^2 + V_L^2$  ou  $V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2}$

Da trigonometria, temos:

$$\sin \phi = \frac{V_L}{V} \qquad \cos \phi = \frac{V_R}{V} \qquad \tan \phi = \frac{V_L}{V_R}$$

#### 4.2.2. DIAGRAMA DE OPOSIÇÕES: IMPEDÂNCIA

Considerando o diagrama fasorial das tensões do item anterior, vamos refazer o diagrama, dividindo cada tensão considerada pela corrente, que é comum aos elementos (pois estão em série).



O segundo triângulo tem dimensões de oposição ( $\frac{\text{tensão}}{\text{corrente}}$ ), onde:

$$V_R / I = R ; \qquad V_L / I = X_L \qquad \text{e} \qquad V / I = Z$$

“Z” é chamada *impedância* do circuito, e corresponde à oposição que ele oferece à circulação da corrente. Sua unidade é o ohm ( $\Omega$ ). Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo das oposições, temos:  $Z^2 = R^2 + X_L^2$  ou

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

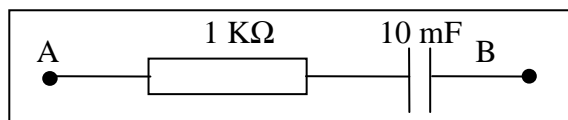
Pela trigonometria, temos:

$$\sin \phi = \frac{X_L}{Z} \qquad \cos \phi = \frac{R}{Z} \qquad \tan \phi = \frac{X_L}{R}$$

Vimos, então, que a Lei de Ohm aplicada a circuitos alimentados com C.A. fica:  $V = Z \cdot I$

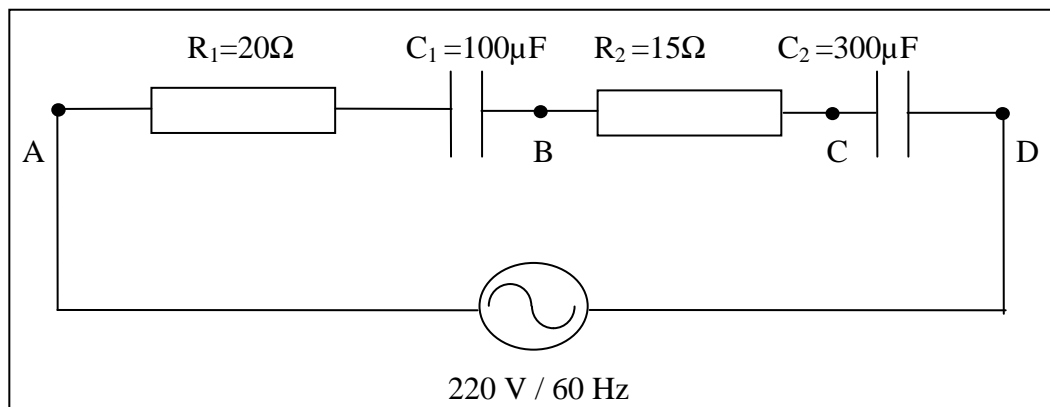
**EXERCÍCIOS**

1. Calcule a impedância  $Z_{AB}$  do circuito da figura dada para  $\omega =$  (a) 0, (b)  $500 \text{ rad/s}$  (c)  $10^6 \text{ rad/s}$  e (d)  $\infty$ .



2. Um resistor de  $10\Omega$  e um capacitor de  $220\mu\text{F}$  estão ligados em série a uma fonte de  $254\text{V}/60\text{Hz}$ . Calcule (a)  $I$ , (b)  $V_R$ , e (c)  $V_C$ .

3. Calcule (a)  $I$ , (b)  $V_{R1}$ , (c)  $V_{C1}$ , (d)  $V_{R2}$ , (e)  $V_{C2}$ , (f)  $V_{AB}$ , (g)  $V_{AC}$  e (h)  $V_{BD}$ , no circuito da figura dada, e faça o diagrama de tensões completo.

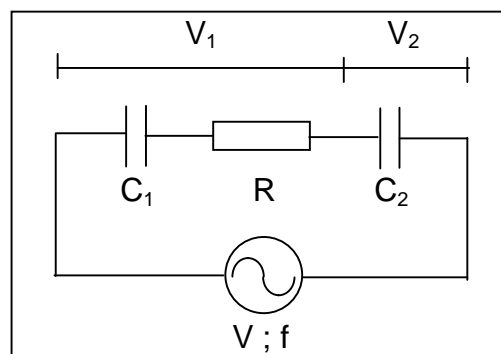


4. Se a fonte CA do exercício anterior fosse substituída por um dínamo (gerador de C.C.) de  $220\text{V}$ , qual seria o valor da corrente  $I$ ?

5. Deseja-se alimentar uma lâmpada incandescente de  $100\text{W} / 127\text{V}$  a partir de uma fonte de  $220\text{V} / 60\text{Hz}$ . Calcule qual deverá ser a capacitância do capacitor a ser ligado em série, de modo que a lâmpada funcione corretamente.

6. Determine o valor do capacitor que deve ser ligado em série com um resistor de  $750\Omega$  para limitar a corrente em  $200\text{mA}$  quando o circuito for submetido a  $240\text{V}$  em  $400\text{Hz}$ .

7. Considerando o circuito abaixo, faça os diagramas fasoriais e calcule as quedas  $V_1$  e  $V_2$ . Dados:  $R=8\Omega$ ;  $C_1=530,5\mu\text{F}$ ;  $C_2=265,3\mu\text{F}$ ;  $V=340\text{V}$ ;  $f=60 \text{ Hz}$ .



8. Um resistor de  $20\Omega$  está em série com um capacitor de  $0,1\mu\text{F}$ . Em que frequência a tensão e a corrente estarão defasadas de  $40^\circ$ ?

9. Responda as perguntas abaixo:

a) Um capacitor com ar entre as placas é ligado em série com uma lâmpada incandescente a uma fonte de CA. Se for introduzido um dielétrico de constante  $K$  alta, o que ocorre com o brilho da lâmpada? Justifique.

b) Uma bobina com núcleo de ar está ligada em série com uma lâmpada incandescente e uma fonte CA. O que acontecerá com o brilho da lâmpada se for introduzido um núcleo de ferro na bobina? Justifique.

10. Uma bobina de  $R=5\Omega$  e  $L=0,5H$  foi conectada a uma fonte. Calcule o valor da corrente, considerando que a fonte é de:

a) CC e fornece  $V=10V$ .

b) CA e fornece  $V_{RMS}=10V$  em  $50Hz$ .

Compare as correntes e justifique.

11. Através de uma bobina de resistência  $2,3\Omega$  e indutância  $30mH$ , passa uma corrente de  $5A$  quando nos seus terminais é aplicada uma tensão senoidal de  $55V$ . Calcular a frequência da corrente que atravessa a bobina.

12. Uma bobina solicita uma corrente de  $0,25A$  quando é ligada a uma bateria de  $12V$ , e uma corrente de  $1A$  quando é ligada a uma fonte de  $120V$ ,  $60Hz$ . Determinar a resistência e a indutância da mesma.

13. Uma bobina (RL série) alimentada por  $110V$  em  $60Hz$ , solicita uma corrente de  $5A$  que se atrasa de  $30^\circ$  em relação a tensão da fonte. Quais são a resistência e a indutância da bobina?

14. Um indutor de  $200mH$  e um resistor em série solicitam  $600mA$  de uma fonte de  $120V$  em  $100Hz$ . Determine o valor da impedância, da resistência do resistor e do ângulo de fase.

15. Um circuito série formado por um resistor e um indutor é alimentado por uma fonte CA de  $10V_{rms}$  em  $1kHz$ . Um amperímetro ligado em série com a fonte acusa uma corrente de  $29,94mA$  e um osciloscópio registra uma tensão de pico ( $V_{máx}$ ) de  $10,64V$  sobre o indutor. Determine o valor da indutância  $L$  e da resistência  $R$ .

16. O circuito representado abaixo é o modelo de duas bobinas ligadas em série.

Dados:  $R_1=10\Omega$ ,  $R_2=5\Omega$ ,  $L_1=12,5mH$ ,  $L_2=50mH$ ,  $V=125V$ ,  $f=50Hz$ .

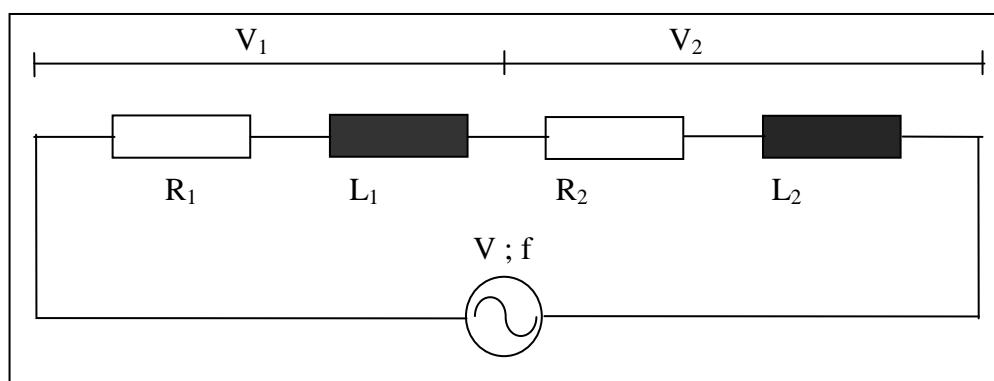
Pede-se:

a)  $I$ ;

b)  $V_{R1}$ ,  $V_{R2}$ ,  $V_{L1}$ ,  $V_{L2}$ ;

c)  $Z_1$ ,  $Z_2$ ;

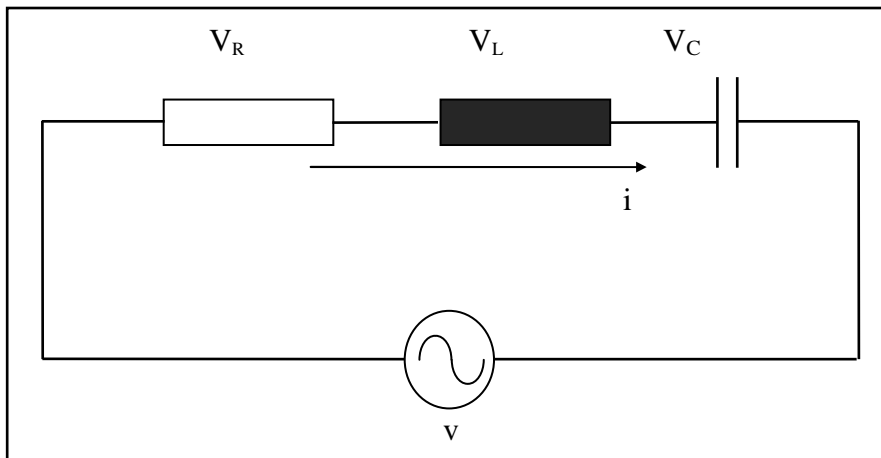
d)  $V_1$ ,  $V_2$ .





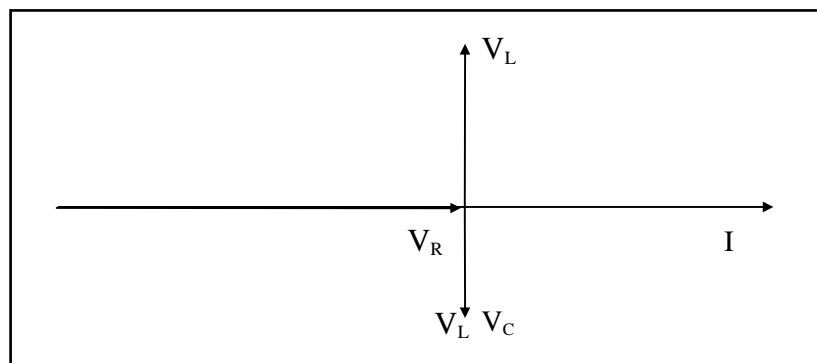
### 4.3. CIRCUITOS RLC SÉRIE

#### 4.3.1. LEI DAS TENSÕES DE KIRCHHOFF PARA CA

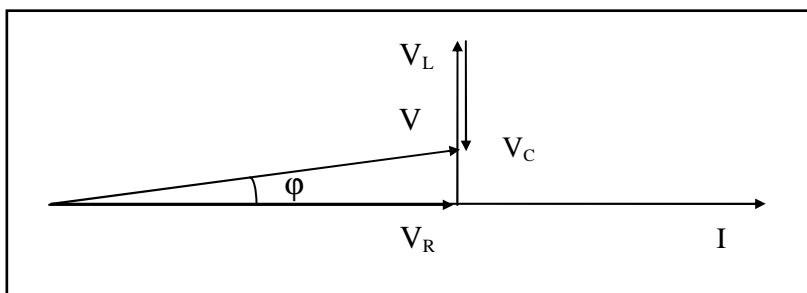


Aplicando a lei de Kirchhoff de tensão ao circuito acima resulta:  $\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$

e o diagrama dos fasores fica:



Somando as tensões:



No gráfico considerado, nota-se que o circuito possui teor indutivo, ou seja, o efeito da reatância indutiva é superior ao efeito da reatância capacitiva. Vemos que se forma um triângulo retângulo cujos catetos são a tensão no resistor e a diferença das tensões reativas, e a hipotenusa é a tensão aplicada aos extremos da associação. Aplicando trigonometria e teorema de Pitágoras:

$$\sin\varphi = \frac{|V_L - V_C|}{V}$$

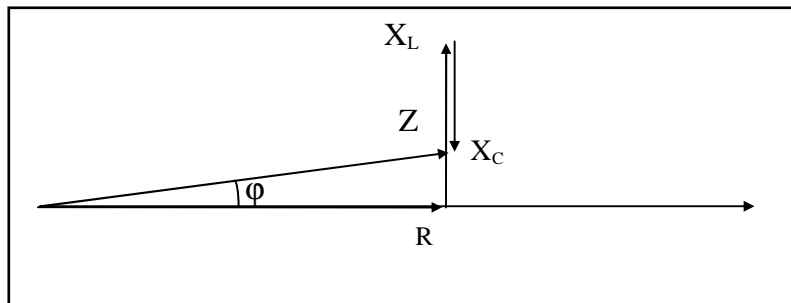
$$\cos\varphi = \frac{V_R}{V}$$

$$\tan\varphi = \frac{|V_L - V_C|}{V_R}$$

$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

### 4.3.2. DIAGRAMA DE OPOSIÇÕES: IMPEDÂNCIA

Dividindo os fasores  $V$  pelo referencial  $I$ , ficamos com um novo diagrama, agora de oposições.



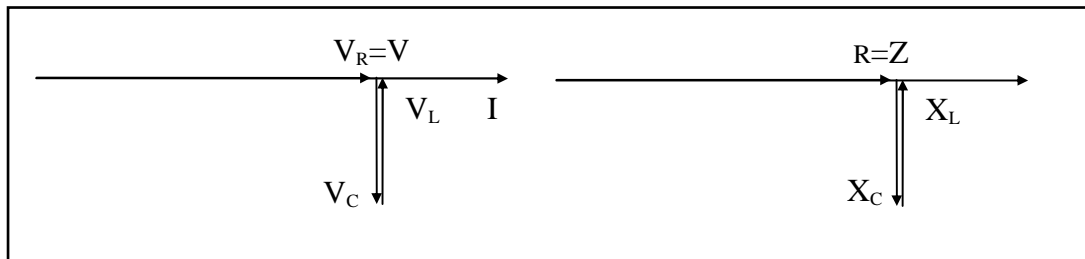
Novamente, as relações trigonométricas fornecem:

$$\sin\varphi = \frac{|X_L - X_C|}{Z} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad \tan\varphi = \frac{|X_L - X_C|}{R}$$

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

### 4.3.3. RESSONÂNCIA

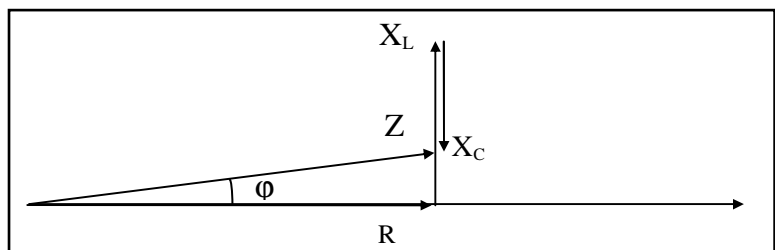
O diagrama das tensões de um circuito RLC série resulta em um triângulo retângulo cujo cateto oposto a  $\varphi$  é  $|V_L - V_C|$ . O caso particular em que esse cateto é nulo ( $V_L - V_C = 0$ ,  $V_L = V_C$ ) tem aplicações práticas importantes, e o circuito que apresenta essa característica é chamado circuito em ressonância ou circuito ressonante.



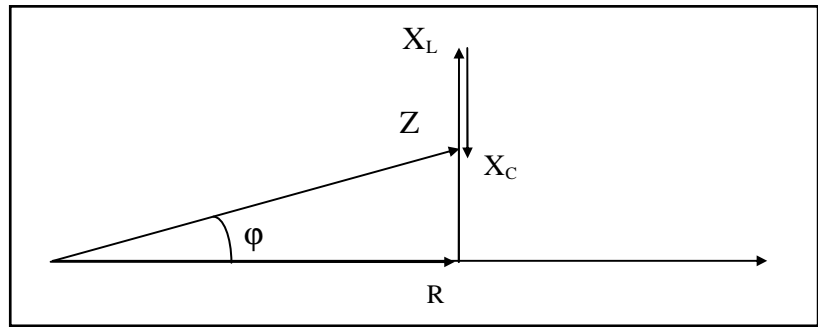
Nesse caso, toda a energia reativa é trocada entre o indutor e o capacitor, e a fonte fornece apenas a energia para o resistor. Para a fonte, o circuito é resistivo puro. A impedância do circuito fica igual a resistência, e é portanto a menor possível.

### FREQÜÊNCIA DE RESSONÂNCIA

Já é do nosso domínio que a reatância de um elemento é variável com a frequência da tensão aplicada a ele. Isso faz com que a variação da frequência em um circuito RLC mude o estado do circuito com relação à ressonância. Por exemplo, no diagrama ao lado, temos  $X_L > X_C$ . O circuito está “afastado” de um ângulo  $\varphi$  da ressonância.



Se a frequência for aumentada,  $X_L = 2\pi \cdot f \cdot L$  também aumenta e  $X_C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}$  diminui, e o circuito se afasta ainda mais da condição de ressonância.

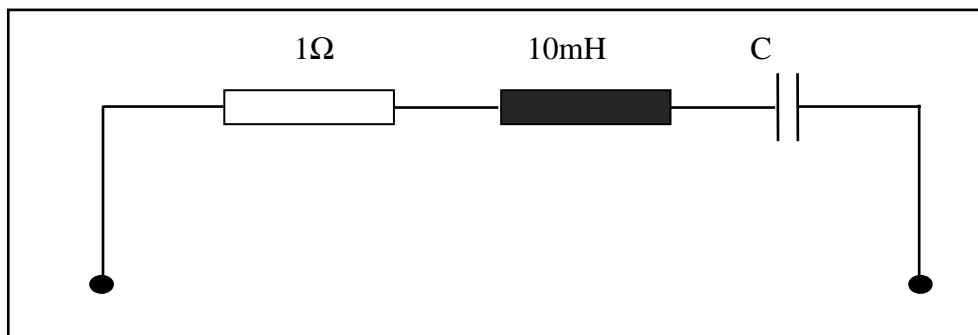


Se a frequência for reduzida, o circuito vai aproximando-se da ressonância, até que  $X_L = X_C$ . Nessa condição,  $2\pi \cdot f \cdot L = 1 / (2\pi \cdot f \cdot C)$ .

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}}$$

Essa frequência depende da indutância e da capacitância do circuito. Isso indica que um circuito com indutância L e capacitância C possui uma frequência  $f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{LC}}$  na qual ele fica ressonante.

**Exemplo:** Deseja-se ajustar o circuito dado para que sintonize na frequência de 150kHz. Qual o valor de C necessário?



Solução: aplica-se a equação da frequência de ressonância

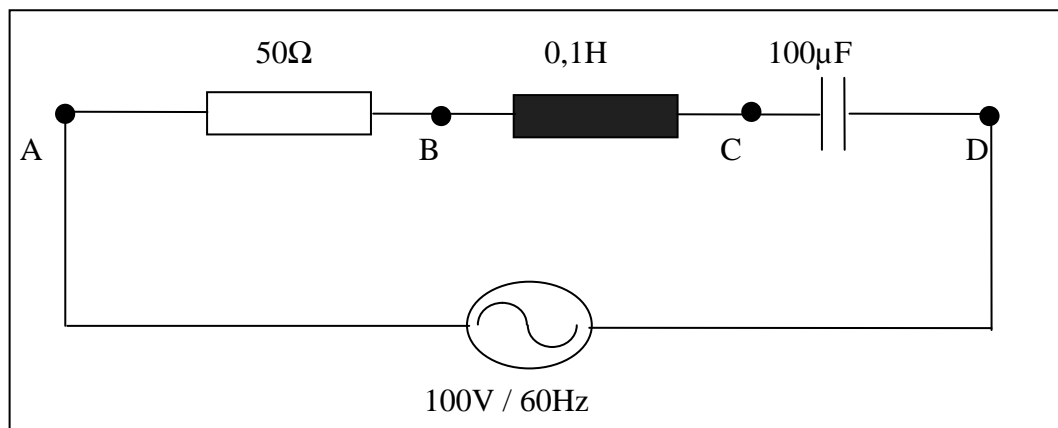
$$150 \cdot 10^3 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot C}} \Rightarrow C = 112,6 \text{ pF}$$

Isso significa que, se a capacitância for ajustada a esse valor, o circuito terá impedância igual a  $1\Omega$  para qualquer  $v_i$  de 150kHz. Para outras frequências,  $Z > 1\Omega$ .

**EXERCÍCIOS**

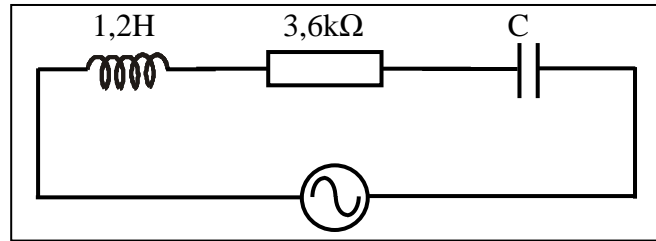
1. Num circuito RLC série, a tensão eficaz no resistor, indutor e capacitor valem, respectivamente, 30V, 90V e 50V. Determine o valor da tensão eficaz da fonte CA que alimenta o circuito.
2. Num circuito RLC série, a corrente está adiantada de  $60^\circ$  em relação a tensão. Considerando uma impedância de  $200\Omega$  e que  $X_C = 2 \cdot X_L$ , calcule a resistência e as reatâncias.
3. Calcule a impedância  $Z_{AB}$  de um circuito RLC série, onde  $R=1\Omega$ ,  $L=1H$  e  $C=1F$ , à frequência (a) 0, (b) 1mHz, (c) 1Hz, (d) 1kHz, (e) 1MHz e (f) 0,159Hz.

4. Para o circuito da figura dada, calcule  $I$ ,  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$ ,  $V_{CD}$ ,  $V_{AC}$  e  $V_{BD}$ .



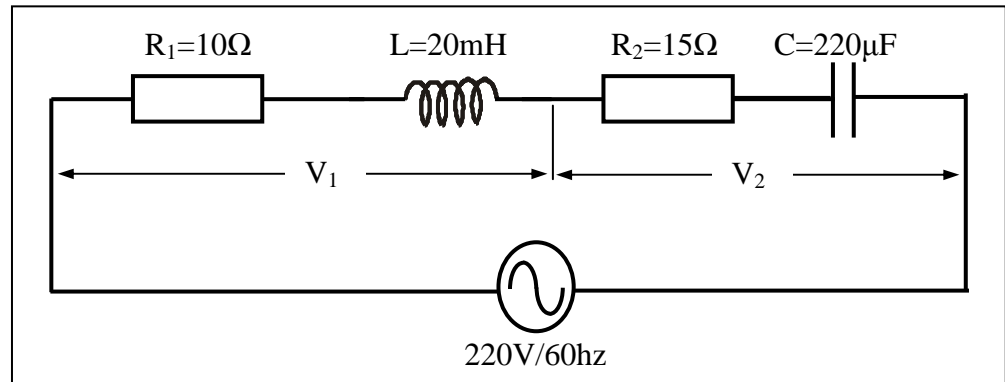
5. Qual a frequência de ressonância de um circuito RLC série, se  $R=1m\Omega$ ,  $L=1mH$  e  $C=1mF$ ?
6. O capacitor variável usado na sintonia de um receptor tem uma capacitância máxima de 365 pF e uma capacitância mínima de 30pF. (a) Que indutância é necessária para que a frequência mais baixa a ser sintonizada seja de 540kHz? (b) Qual a frequência mais alta que pode ser sintonizada com este circuito?
7. É necessário que passe uma corrente de 100mA pela bobina de um relé para que ele atue. Para fazê-lo funcionar com uma fonte de CC são necessários 24V e para que ele funcione corretamente em CA - 60Hz é necessário uma tensão  $V_{RMS}=160V$ . Determine o valor do capacitor que deve ser ligado em série com o relé para que ele funcione numa rede CA de  $V_{RMS}=120V$  em 60Hz.
8. Em que frequência a reatância indutiva de um indutor de  $57\mu H$  será igual à reatância capacitiva de um capacitor de  $57\mu F$ ?
9. Uma impedância que recebe uma tensão  $v = 170 \sin(2513.t + 30^\circ)$  V é percorrido por uma corrente  $i = 42 \sin(2513.t + 50^\circ)$  A. Achar o circuito em série de dois elementos que a carga poderia ser e identifique os valores característicos destes componentes.
10. Um circuito RLC série tem os seguintes componentes:  $R=200\Omega$ ,  $L=150mH$ ,  $C=2\mu F$ . Este circuito é alimentado por uma fonte CA senoidal que opera a 400Hz com  $V_{MÁX}=210$  V. Calcular a reatância indutiva, a reatância capacitiva, a impedância, a corrente eficaz e o ângulo de fase.
11. Num circuito RLC série, as tensões no resistor, no capacitor e no indutor valem, respectivamente, 6V, 20V e 12V. Considerando que a corrente consumida vale 10mA, determine o valor da tensão da fonte, da impedância do circuito e do ângulo de defasagem entre a corrente e a tensão da fonte.

12. Uma fonte de  $v = 140 \sin(4000t - 10^\circ)$  V está alimentando o circuito dado. Sabendo-se que a corrente que circula no circuito está adiantada de  $21,9^\circ$  em relação a tensão da fonte, determine a equação da corrente e da tensão sobre cada um dos componentes e calcule também a capacitância do capacitor.



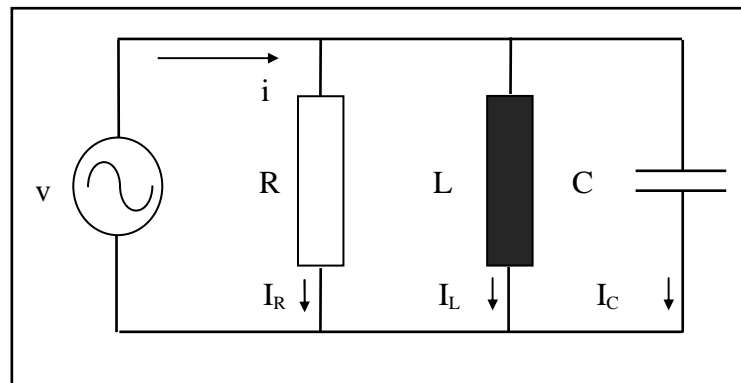
13. No circuito dado, calcule:

- $X_L$ ,  $X_C$ ,  $Z_1$  e  $Z_2$ ;
- $Z$ ,  $I$  e  $\cos \varphi$ ;
- $V_{R1}$ ,  $V_{R2}$ ,  $V_L$ ,  $V_C$ ,  $V_1$  e  $V_2$ ;
- $\cos \varphi_1$  e  $\cos \varphi_2$



## 4.4. CIRCUITOS RLC PARALELO

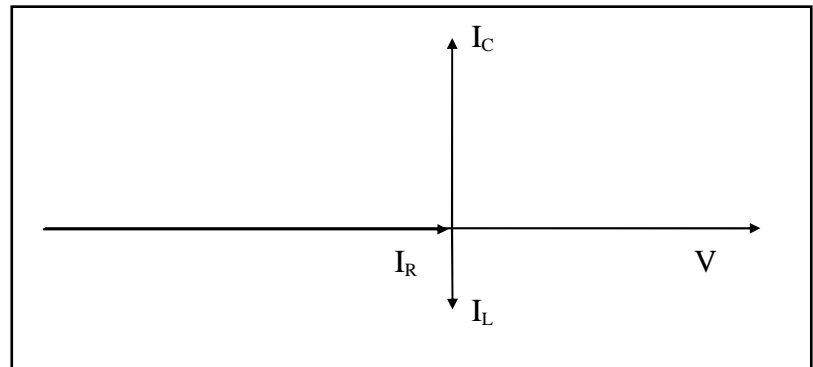
### 4.4.1. LEI DAS CORRENTES DE KIRCHHOFF PARA CA



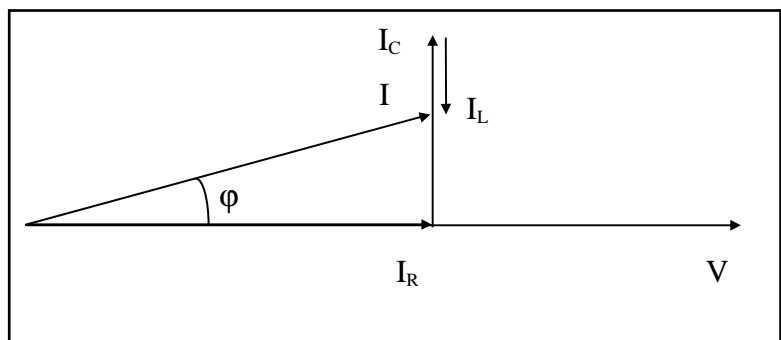
Aplicando a lei de Kirchhoff de corrente ao circuito dado resulta:

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C$$

E o diagrama dos fasores será:



Somando as correntes:



Vemos que se forma um triângulo retângulo cujos catetos são a corrente no resistor e a diferença das correntes reativas, e a hipotenusa é a corrente total da associação. Aplicando trigonometria e teorema de Pitágoras

$$\text{sen } \varphi = \frac{|I_C - I_L|}{I}$$

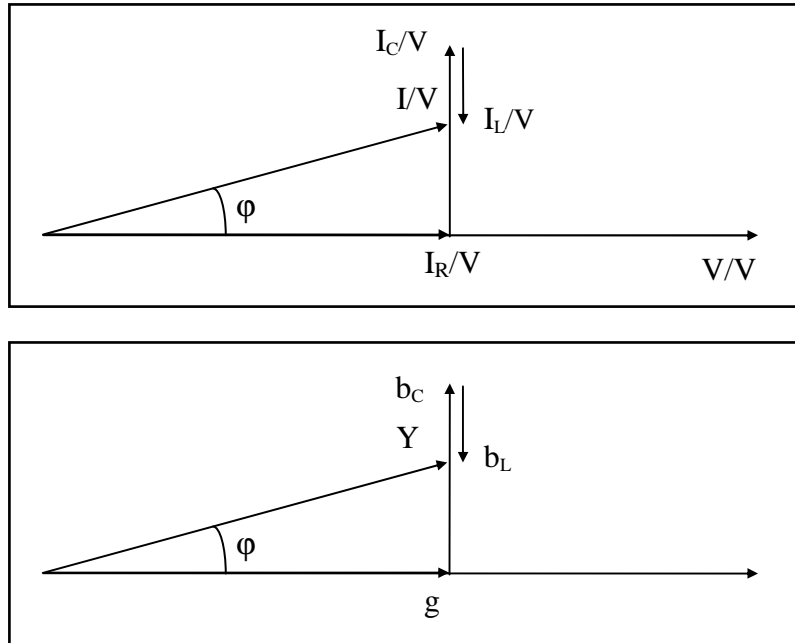
$$\text{cos } \varphi = \frac{I_R}{I}$$

$$\text{tan } \varphi = \frac{|I_C - I_L|}{I_R}$$

$$I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2$$

#### 4.4.2. DIAGRAMA DE FACILIDADES: ADMITÂNCIA

Dividindo os fasores  $I$  pelo referencial  $V$ , ficamos com um novo diagrama, agora de facilidades.



Novamente, as relações trigonométricas fornecem:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|b_C - b_L|}{Y}$$

$$\cos \varphi = \frac{g}{Y}$$

$$\tan \varphi = \frac{|b_C - b_L|}{g}$$

$$Y^2 = g^2 + (b_C - b_L)^2$$

Onde  $g$  é a condutância (facilidade oferecida pelo resistor),  $b_C$  é a suscetância capacitiva (facilidade oferecida pelo capacitor),  $b_L$  a suscetância indutiva (facilidade oferecida pelo indutor) e  $Y$  a admitância do circuito (facilidade total).

Todas representam inversos de oposições ( $I/V$  ao invés de  $V/I$ ), ou seja, facilidades oferecidas à passagem da corrente e são medidas em Mhos ou Siemens (S). Para elementos puros temos:

$$g = \frac{1}{R}$$

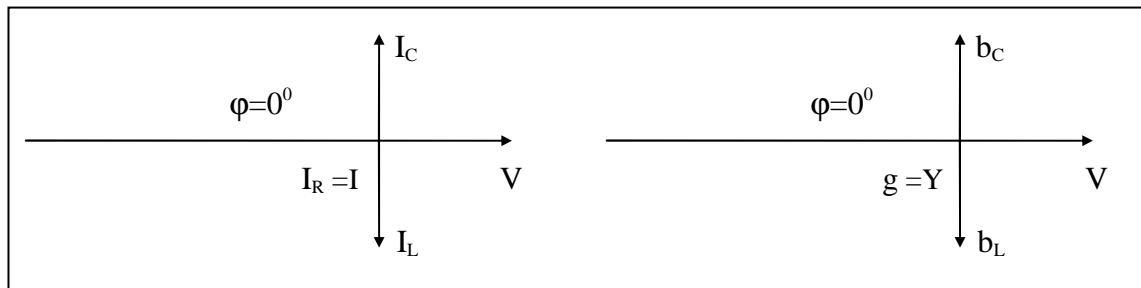
$$b_L = \frac{1}{X_L}$$

$$b_C = \frac{1}{X_C}$$

Na análise do circuito em questão, nota-se que o circuito possui teor capacitivo, ou seja, o efeito da suscetância capacitiva é superior ao efeito da suscetância indutiva. O capacitor oferece uma facilidade à passagem da corrente maior do que a facilidade oferecida pelo indutor.

#### 4.4.3. RESSONÂNCIA

Da mesma forma que na ressonância série, no diagrama das correntes de um circuito RLC paralelo pode haver cancelamento dos reativos. Isso ocorre quando  $I_L = I_C$ , e a corrente total fica igual à corrente resistiva. Para a fonte, tudo ocorre como se o circuito fosse resistivo puro.



A admitância do circuito fica igual a condutância, e é portanto a menor possível.

As aplicações da ressonância utilizam a propriedade da mínima impedância (para ressonância série) ou da mínima admitância (para ressonância paralelo).

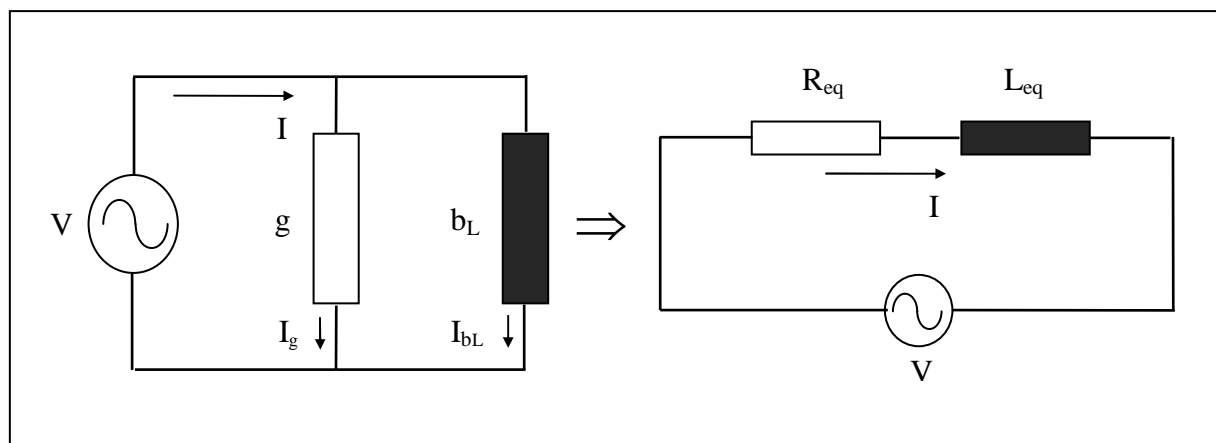
Como a condição para que haja ressonância em paralelo é a mesma da ressonância em série ( $X_L = X_C$ ), pode ser usada a mesma fórmula para o cálculo da frequência de ressonância em paralelo.

Como acontece com um circuito ressonante em série, quando se varia a frequência ou uma das reatâncias, mantendo fixos os demais valores, a corrente varia e a representação gráfica dessa variação é a curva da ressonância. Há, porém, uma diferença entre os dois circuitos. No circuito série, a corrente cresce até o máximo na ressonância, decrescendo fora desta condição. No circuito paralelo, porém, a corrente cai a um mínimo na ressonância, aumentando fora desta condição.

#### 4.5. EQÜIVALENTE SÉRIE DO CIRCUITO PARALELO

Quando se tem um circuito paralelo com duas grandezas dadas em termos de admitância, condutância e suscetância (indutiva ou capacitiva), pode-se obter o circuito série eqüivalente com grandezas dadas em termos de oposições como resistência, reatância (indutiva ou capacitiva) e impedância.

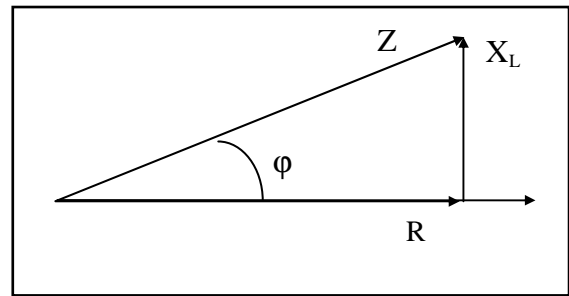
Estas relações novas que estão sendo introduzidas, terão alguma praticidade somente quando forem utilizadas para resolver circuitos paralelos e mistos. Do contrário, o conhecimento de resistência, reatância e impedância serão suficientes.





A impedância equivalente é igual ao inverso da admitância.

$$Z = \frac{1}{Y}$$

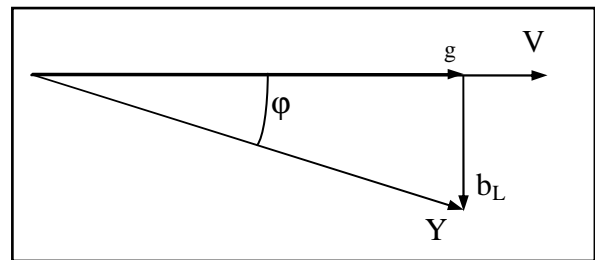


Pelo triângulo da impedância, têm-se que:

$$R_{eq} = Z_{eq} \cdot \cos \varphi \quad X_{eq} = Z_{eq} \cdot \sin \varphi$$

Também, por inspeção do triângulo da admitância, têm-se que:

$$\cos \varphi = \frac{g}{Y} \quad \sin \varphi = \frac{b}{Y}$$



Fazendo substituições de uma equação na outra, obtém-se:

$$R_{eq} = Z_{eq} \cdot \cos \varphi = \frac{1}{Y} \cdot \frac{g}{Y} \quad R_{eq} = \frac{g}{Y^2}$$

$$X_{eq} = Z_{eq} \cdot \sin \varphi = \frac{1}{Y} \cdot \frac{b}{Y} \quad X_{eq} = \frac{b}{Y^2}$$

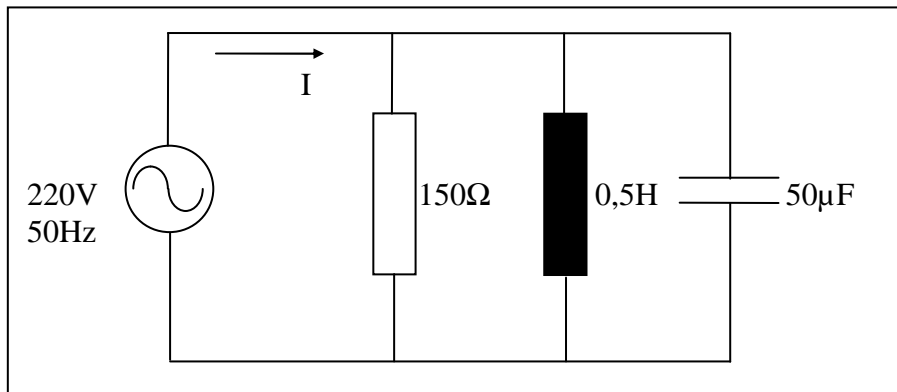
No caso de uma operação inversa, ou seja, a partir de um circuito série obtermos o circuito eqüivalente paralelo, teríamos:

$$g = \frac{R}{Z^2}$$

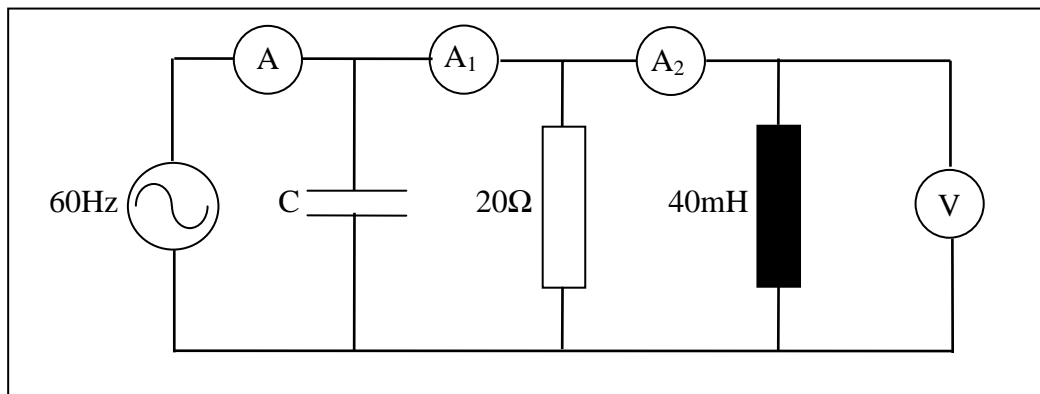
$$b = \frac{X}{Z^2}$$

**EXERCÍCIOS**

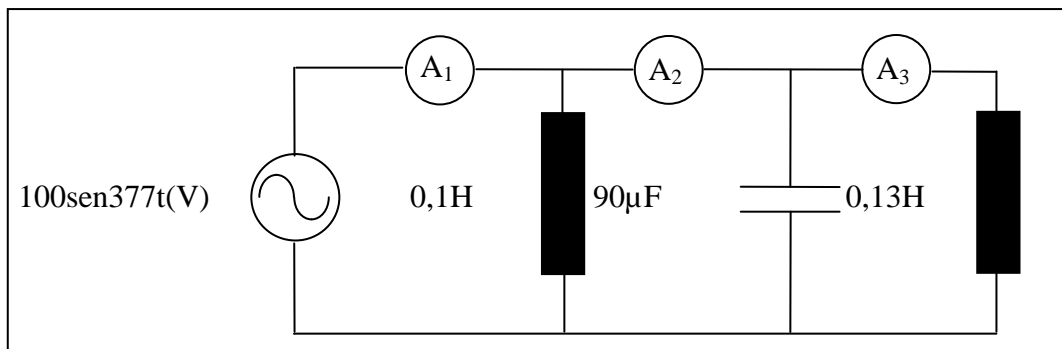
1. Para o circuito dado abaixo, determine o valor da intensidade da corrente  $I$ .



2. Para o circuito dado, calcule a indicação dos instrumentos ideais, considerando que  $C=100\mu\text{F}$  e que o amperímetro  $A_1$  indica 2A.



3. No circuito dado, calcule as indicações dos amperímetros ideais.

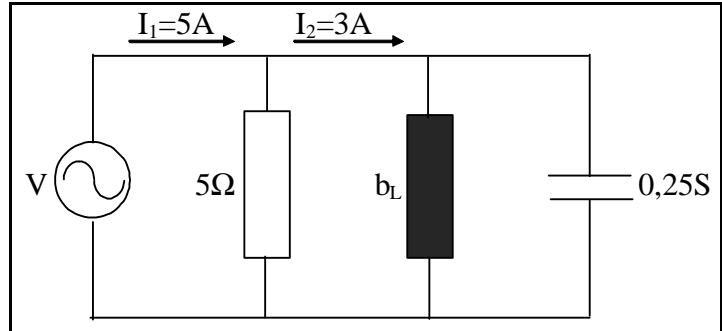


4. Analise as respostas do exercício anterior. Explique porque a corrente da fonte é menor que as outras.
5. Calcule  $C$  para que o circuito do problema 2 entre em ressonância a 100KHz.

6. Um circuito RLC paralelo, alimentado com tensão de 10V, tem os seguintes parâmetros:  $g=1\text{mS}$ ,  $b_L=5\text{mS}$ ,  $b_C=2\text{mS}$ . Pede-se:
- fazer os diagramas fasoriais;
  - calcular a corrente em cada componente;
  - explicar por que a soma algébrica das correntes nos componentes é diferente da corrente total.
  - calcular a admitância do circuito.

7. Considerando que o circuito ao lado possui teor capacitivo, determine:

- a corrente no resistor;
- a tensão aplicada;
- a corrente no capacitor;
- a suscetância indutiva;



8. Um resistor de  $10\Omega$  e um indutor de reatância  $20\Omega$  estão ligados em paralelo e alimentados por uma tensão senoidal de 16V. Calcule a impedância do circuito e a corrente na fonte.

## 5. MÉTODO DOS NÚMEROS COMPLEXOS – CIRCUITOS RLC

Nos circuitos que contêm várias malhas o diagrama fasorial pode ficar bastante complicado. Neste caso o processo dos números complexos é mais adequado que o processo trigonométrico utilizado até agora, pois o trabalho fica bastante simplificado.

Por outro lado, deve-se tomar o cuidado para que a solução do circuito não se torne um puro exercício de matemática. A análise física do comportamento do circuito deve sempre estar presente. A partir deste momento passaremos a tratar as tensões, correntes, potências, impedâncias e admitâncias do circuito como números complexos. Portanto, é conveniente fazer-se uma rápida revisão de números complexos antes de aplicar o método para análise de circuitos.

### 5.1. REVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Um número complexo é constituído de uma parte real e de uma parte imaginária. Os números reais são os comuns, que todos utilizam, por exemplo: 5; -7,5;  $\pi$ ;  $\sqrt{3}$ ; etc. Os números imaginários são as raízes quadradas de números negativos, por exemplo:  $\sqrt{-16}$ ;  $\sqrt{-100}$ ;  $\sqrt{-9}$ ;  $\sqrt{-25}$ ; etc.

Para a representação do número imaginário criou-se o operador imaginário denominado "j" ou "i". No campo da eletricidade o "j" é mais difundido porque o "i" pode causar confusão com a corrente elétrica. Por definição:

$$j = \sqrt{-1}$$

*Exemplo:*

$$\sqrt{-16} = \sqrt{(-1) \cdot 16} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} = j4$$

$$\sqrt{-100} = \sqrt{(-1) \cdot 100} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{100} = j10$$

#### 5.2.1 - Formas de Representação de um Número Complexo

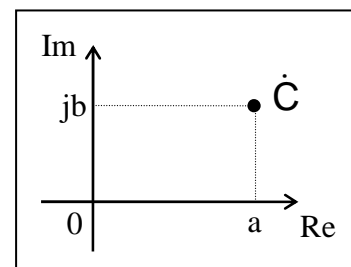
Um par de eixos ortogonais com o eixo horizontal representando os REAIS ( Re ) e o eixo vertical representando IMAGINÁRIOS ( Im ), determinam o plano complexo, no qual cada número complexo é um ponto único.

Uma letra maiúscula com um ponto em cima designa o número complexo. Embora esta não seja uma representação usual na matemática, para os objetivos de utilização como fasor é bastante conveniente.

Existem, basicamente, duas formas de representar as coordenadas desse ponto: através da **Forma Retangular** e da **Forma Polar**.

##### - Forma Retangular

O número complexo é apresentado em função das suas partes real e imaginária.

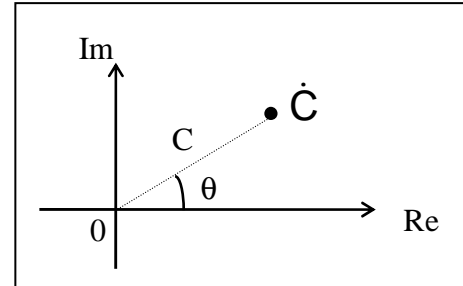


Assim, a expressão matemática do número complexo é  $\hat{C} = a + jb$

onde:  $\dot{C}$  = número complexo;  
 $a$  = parte real;  
 $jb$  = parte imaginária.

### - Forma Polar

O número complexo é apresentado em função de seu módulo e do argumento. Chama-se módulo, o comprimento do segmento que liga o ponto representativo do número complexo até origem dos eixos coordenados. O argumento é o ângulo formado entre este segmento e o eixo real.



Assim, a expressão matemática do número complexo é  $\dot{C} = C \angle \theta$  ou  $\dot{C} = |\dot{C}| \angle \theta$ .

onde:  $\dot{C}$  = número complexo;  
 $C = |\dot{C}|$  = módulo do número complexo;  
 $\theta$  = argumento ou ângulo do número complexo.

### 5.2.2 - Conjugado de um Número Complexo

O conjugado de um número complexo é obtido invertendo-se o sinal da parte imaginária ( na forma retangular ) ou o sinal do ângulo ( na forma polar ).

Seja  $\dot{C} = a + jb = |\dot{C}| \angle \theta$ , o seu complexo conjugado será :

$$\dot{C}^* = a - jb = |\dot{C}| \angle -\theta$$

### 5.2.3 - Conversão de Coordenadas

Em muitas situações é desejável fazer a conversão de coordenadas. Isto pode ser feito manualmente, utilizando-se os conhecimentos de trigonometria, ou através das máquinas calculadoras científicas, que é o processo mais rápido.

### - Conversão de Retangular para Polar

Considere o número complexo representado na figura ao lado.

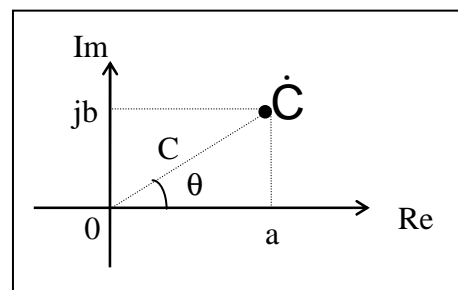
Na forma retangular

$$\dot{C} = a + jb$$

Do Teorema de Pitágoras, obtém-se

$$C^2 = a^2 + b^2$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$



E da trigonometria  $\tan \theta = \frac{b}{a}$

Portanto:  $\dot{C} = C \angle \theta$   $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

Exemplo: Representar graficamente e transformar para a forma polar o número complexo:

$$\dot{C} = 4 - j3$$

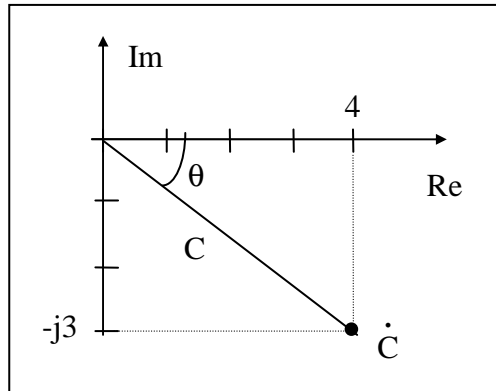
Solução:

$$C^2 = 4^2 + 3^2$$

$$C = 5$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\theta = 36,9^\circ$$



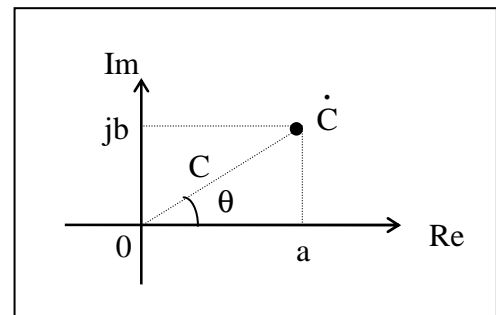
O módulo do número complexo é 5. O ângulo é negativo ( $-36,9^\circ$ ), visto que foi medido em sentido horário a partir do eixo dos reais. Portanto, o número complexo na forma polar é

$$\dot{C} = 5 \angle -36,9^\circ$$

### - Conversão de Polar para Retangular

Considere um número complexo na forma polar.

$$\dot{C} = C \angle \theta$$



Analisando a representação gráfica, e utilizando trigonometria, tem-se:

$$a = C \cos \theta ; b = C \sin \theta \quad \text{portanto: } \dot{C} = a + jb$$

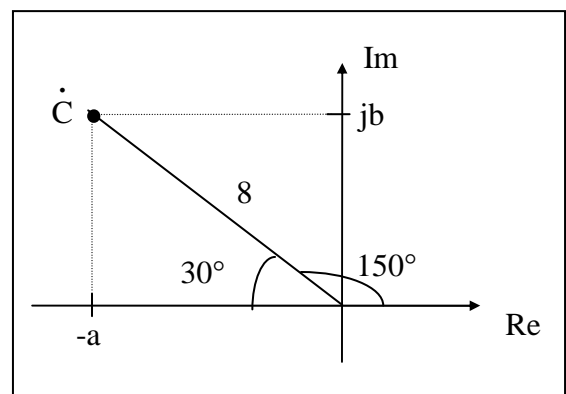
Exemplo: Representar graficamente e transformar para a forma retangular o número complexo:

$$\dot{C} = 8 \angle 150^\circ$$

$$a = 8 \cos 30^\circ = 6,93$$

$$b = 8 \sin 30^\circ = 4$$

$$\dot{C} = -6,93 + j4$$



### 5.2.4 - Operações com Números Complexos

#### - Soma e subtração

Para a somar ou subtrair dois números complexos deve-se utilizar a forma retangular. Para isto basta somar ou subtrair em separado as partes real e imaginária.

Exemplo: Sejam  $\dot{C}_1 = 10 + j8$  e  $\dot{C}_2 = 5 - j4$ , calcular:

$$1) \dot{C}_3 = \dot{C}_1 + \dot{C}_2$$

$$\dot{C}_3 = (10 + j8) + (5 - j4) = (10 + 5) + j(8 - 4) = 15 + j4$$

$$2) \dot{C}_4 = \dot{C}_1 - \dot{C}_2$$

$$\dot{C}_4 = (10 + j8) - (5 - j4) = (10 - 5) + j[8 - (-4)] = 5 + j12$$

#### - Multiplicação e divisão

Para multiplicar ou dividir números complexos é conveniente utilizar a forma polar. Se a operação for a multiplicação, multiplicam-se os módulos e somam-se os ângulos. Se a operação for divisão, dividem-se os módulos e subtraem-se os ângulos.

Exemplo: Sejam  $\dot{C}_1 = 10 \angle 40^\circ$  e  $\dot{C}_2 = 4 \angle 30^\circ$ , calcular:

$$1) \dot{C}_3 = \dot{C}_1 \cdot \dot{C}_2$$

$$\dot{C}_3 = 10 \angle 40^\circ \cdot 4 \angle 30^\circ = 10 \cdot 4 \angle 40^\circ + 30^\circ = 40 \angle 70^\circ$$

$$2) \dot{C}_4 = \dot{C}_1 / \dot{C}_2$$

$$\dot{C}_4 = \frac{10 \angle 40^\circ}{4 \angle 30^\circ} = \frac{10}{4} \angle 40^\circ - 30^\circ = 2,5 \angle 10^\circ$$

#### Exercícios:

1) Converter para a forma polar

$$a) \dot{C} = -20 + j10$$

$$\text{Resposta: } \dot{C} = 22,3 \angle 153,4^\circ$$

$$b) \dot{C} = 100 + j150$$

$$\text{Resposta: } \dot{C} = 180,3 \angle 56,3^\circ$$

$$c) \dot{C} = 500 - j300$$

$$\text{Resposta: } \dot{C} = 583,1 \angle -31^\circ$$

2) Converter para a forma retangular

$$a) \dot{C} = 500 \angle 75^\circ$$

$$\text{Resposta: } \dot{C} = 129,4 + j482,9$$

$$b) \dot{C} = 250 \angle -60^\circ$$

$$\text{Resposta: } \dot{C} = 125 - j216$$

3) Dados os números complexos  $\dot{C}_1 = 4 - j10$ ,  $\dot{C}_2 = 15 \angle 30^\circ$  e  $\dot{C}_3 = 3 + j5$ ; calcular:

$$a) \dot{C}_1 + \dot{C}_2$$

$$\text{Resposta: } 17 - j2,5$$

$$b) \dot{C}_3 - \dot{C}_2$$

$$\text{Resposta: } -10 - j2,5$$

$$c) \dot{C}_1 \cdot \dot{C}_3$$

$$\text{Resposta: } 62,8 \angle -9,2^\circ$$

$$d) \dot{C}_3 / \dot{C}_1$$

$$\text{Resposta: } 0,54 \angle 127,2^\circ$$

$$e) (\dot{C}_1 + \dot{C}_2) / \dot{C}_3$$

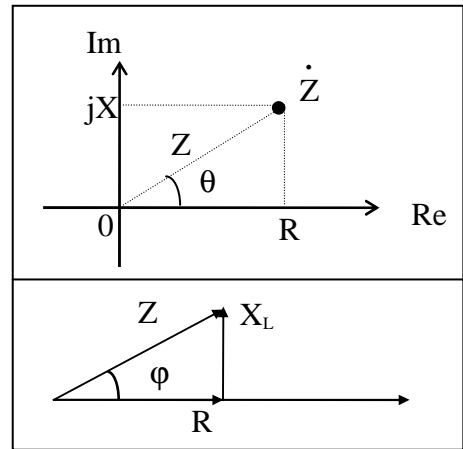
$$\text{Resposta: } 2,95 \angle -67,4^\circ$$

## 5.2. REPRESENTAÇÃO COMPLEXA DE GRANDEZAS ELÉTRICAS

Assim como o número complexo, o fasor também possui um módulo e um ângulo, portanto, cada fasor de tensão, corrente, impedância e potência pode ser representado na forma de número complexo.

### 5.3.1 - Impedância Complexa

Considere o número complexo  $\dot{Z} = R + jX$ . Sua representação gráfica é



Considere, também, o diagrama de impedâncias de um circuito RL série

Nota-se que as representações são muito semelhantes. Efetivamente, a impedância pode ser representada por um número complexo, com a resistência como parte real e a reatância como parte imaginária.

A reatância indutiva fica para cima no diagrama fasorial, portanto o sinal a ser utilizado para a reatância indutiva é positivo.

$$\dot{Z} = R + jX$$

$\dot{Z}$  = impedância complexa para RL série;  
 $R$  = resistência;  
 $+jX$  = reatância indutiva.

A reatância capacitiva fica para baixo no diagrama fasorial, portanto o sinal a ser utilizado para a reatância capacitiva é negativo.

$$\dot{Z} = R - jX$$

$\dot{Z}$  = impedância complexa para RC série;  
 $R$  = resistência;  
 $-jX$  = reatância capacitiva.

Com a impedância complexa na forma polar, tem-se

$$\dot{Z} = \sqrt{R^2 + X^2} \angle \pm \tan^{-1} X / R$$

$$\dot{Z} = Z \angle \pm \phi$$

### 5.3.2 - Tensão

O fasor tensão é geralmente usado com módulo e argumento, ou seja, na forma polar.

$$\dot{V} = V \angle \alpha$$

onde:

$\dot{V}$  = fasor tensão;  
 $V$  = módulo ou valor eficaz da tensão;  
 $\alpha$  = ângulo em relação ao eixo dos reais.

Em geral, usa-se a tensão como referencial, para isso  $\alpha=0^\circ$ .  $\dot{V} = V \angle 0^\circ$



### 5.3.3 - Corrente

O fasor corrente geralmente é usado na forma polar,  $\dot{I} = I \angle \beta$

onde:  $\dot{I}$  = fasor corrente;

$I$  = módulo ou valor eficaz da corrente;

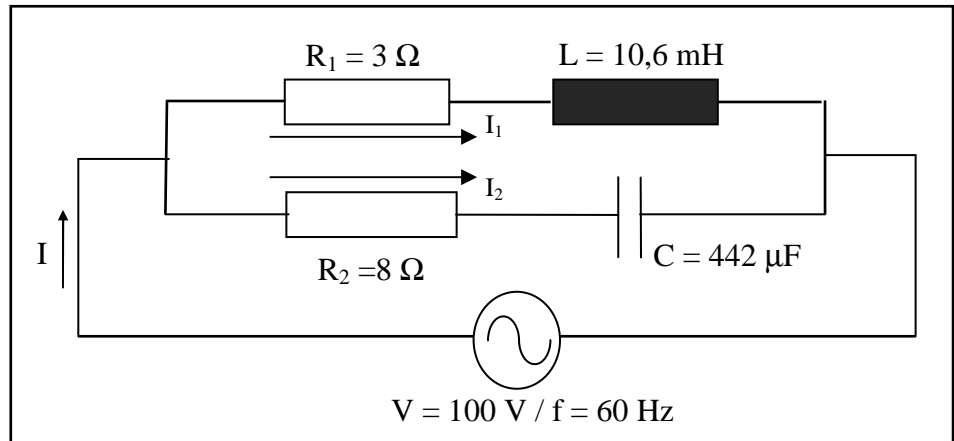
$\beta$  = ângulo em relação ao eixo dos reais.

A diferença entre os ângulos do fasor tensão ( $\alpha$ ) e do fasor corrente ( $\beta$ ) corresponde ao ângulo de defasagem entre tensão e corrente do elemento. Ou seja, representa o ângulo do fator de potência ( $\varphi$ ).  $\varphi = \alpha - \beta$

**Exemplo:** Determinar a impedância equivalente e a corrente em cada ramo.

**Solução:**

1°. Calcular a reatância indutiva e multiplicá-la por  $j$  para usar a notação complexa.



$$jX_L = j2\pi fL = j2\pi \cdot 60 \cdot 10,6 \cdot 10^{-3} = j4\Omega$$

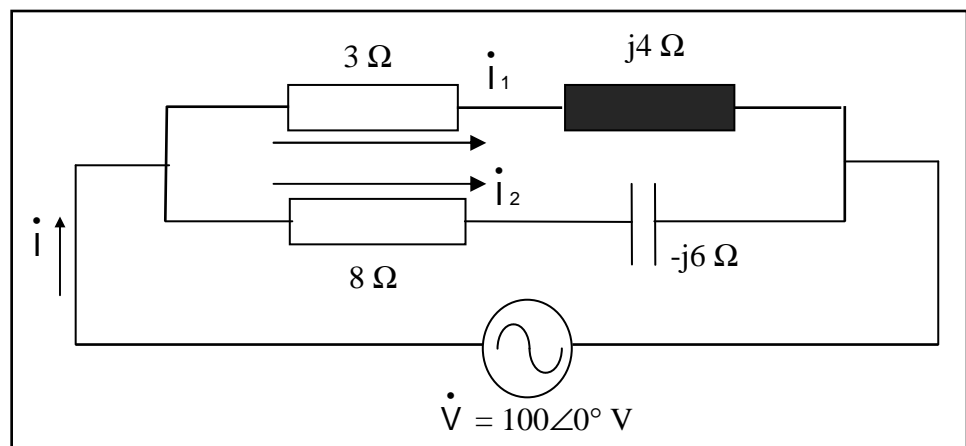
2°. Calcular a reatância capacitiva e multiplicá-la por  $-j$  para usar a notação complexa.

$$-jX_C = -j \frac{1}{2\pi fC} = -j \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 442 \cdot 10^{-6}} = -j6\Omega$$

3°. Transformar a tensão da fonte em um número complexo. O módulo será o valor eficaz da tensão e o ângulo será arbitrado (para simplificar costuma-se considerá-lo zero graus).

$$\dot{V} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

4°. Redesenhar o circuito utilizando a notação complexa.



5°. A partir desse momento pode-se tratar o circuito de corrente alternada de forma semelhante ao circuito de corrente contínua. Ao se efetuar as operações com números complexos as defasagens são levadas automaticamente em consideração.

A impedância do ramo RL, constituído de uma resistência em série com uma reatância indutiva, é  $\dot{Z}_1 = 3 + j4 = 5\angle 53,13^\circ \Omega$ . A impedância do ramo RC, constituído de uma resistência em série com uma reatância capacitiva, é  $\dot{Z}_2 = 8 - j6 = 10\angle -36,87^\circ \Omega$

A impedância equivalente do circuito resulta do paralelo entre  $Z_1$  e  $Z_2$  :

$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_1 / \dot{Z}_2$$

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{5\angle 53,13^\circ \cdot 10\angle -36,87^\circ}{3 + j4 + 8 - j6} = 4,47\angle 26,56^\circ \Omega$$

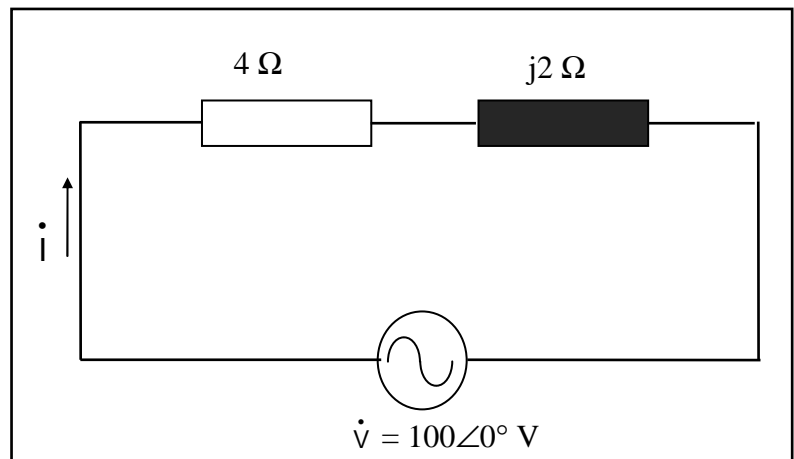
$$\dot{Z}_{eq} = (4 + j2)\Omega$$

O circuito equivalente simplificado pode ser representado através de um resistor de  $4 \Omega$  em série com um indutor de  $j2\Omega$ .

A corrente total fornecida pela fonte é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}_{eq}} = \frac{100\angle 0^\circ}{4,47\angle 26,56^\circ}$$

$$\dot{I} = 22,37\angle -26,56^\circ \text{ A}$$



Nota-se, pela comparação dos ângulos dos fasores ( $V = 100\angle 0^\circ \text{ V}$  e  $I = 22,37\angle -26,56^\circ \text{ A}$ ) que a corrente fornecida pela fonte está atrasada de  $26,56^\circ$  em relação a tensão da fonte. Conhecendo a tensão da fonte e a impedância de cada ramo, é possível determinar cada corrente..

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}_1} = \frac{100\angle 0^\circ}{5\angle 53,13^\circ} \Rightarrow \dot{I}_1 = 20\angle -53,13^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}_2} = \frac{100\angle 0^\circ}{10\angle -36,87^\circ} \Rightarrow \dot{I}_2 = 10\angle 36,87^\circ \text{ A}$$

A corrente total poderia ter sido obtida inicialmente por outro processo para, a seguir, calcular-se a impedância equivalente:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 20\angle -53,13^\circ + 10\angle 36,87^\circ$$

$$\dot{I} = 12 - j16 + 8 + j6$$

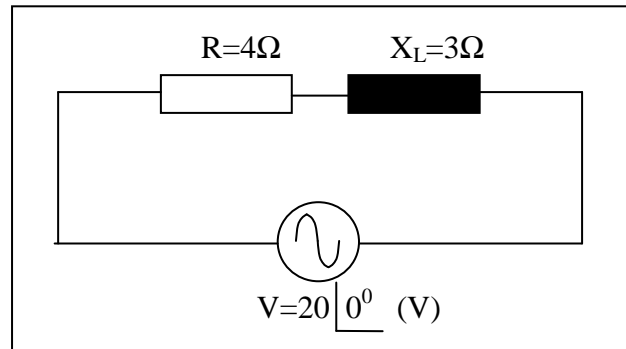
$$\dot{I} = 22,36\angle -26,56^\circ \text{ A}$$

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{100\angle 0^\circ}{22,36\angle -26,56^\circ} \Rightarrow \dot{Z}_{eq} = 4,47\angle 26,56^\circ \Omega$$

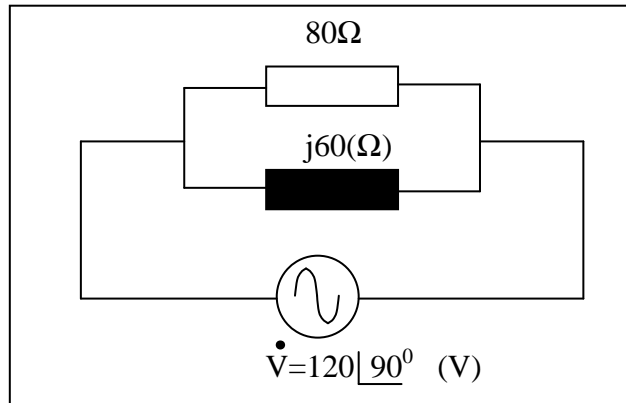
$$\dot{Z}_{eq} = (4 + j2)\Omega$$

**EXERCÍCIOS**

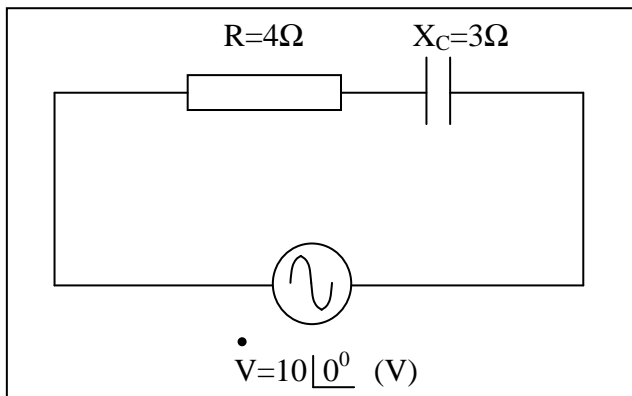
1. Determinar a intensidade da corrente no circuito e o ângulo de defasagem entre ela e a tensão da fonte.



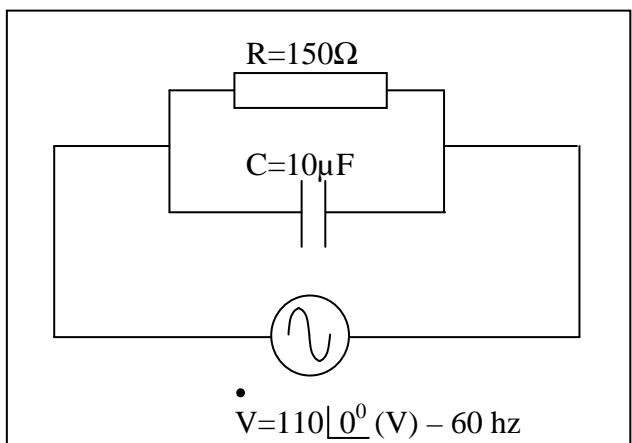
2. Determinar a impedância e a corrente  $I_T$  no circuito.



3. Com relação ao circuito, pede-se a impedância complexa (forma retangular e polar) e intensidade da corrente.



4. Com relação ao circuito dado, pede-se a impedância complexa (forma polar) e intensidade da corrente total.



5. Um circuito série contendo duas impedâncias  $Z_1$  e  $Z_2$  estão ligados a uma fonte de tensão de  $100 \angle 30^\circ \text{ V}$  com uma corrente total de  $12 \angle 0^\circ \text{ A}$ . Calcular a impedância  $Z_2$ , sabendo que a impedância  $Z_1$  é  $5 \angle 20^\circ$ .

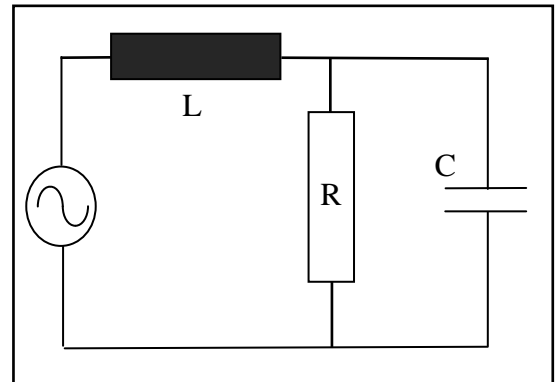
6. Determinar a impedância total na forma complexa retangular em 60 Hz.

Dados:

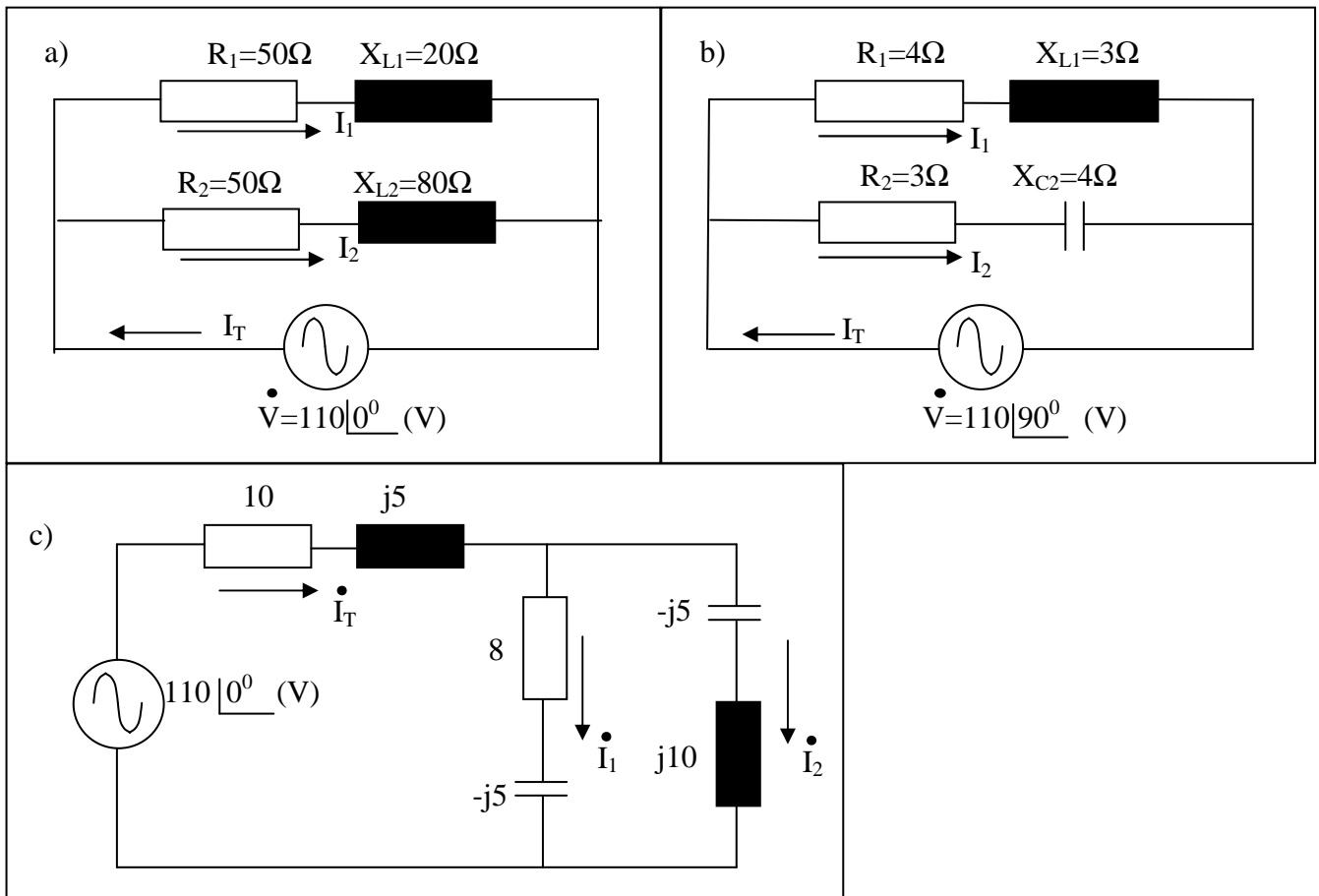
$$R=5\ \Omega$$

$$L=15,92\ \text{mH}$$

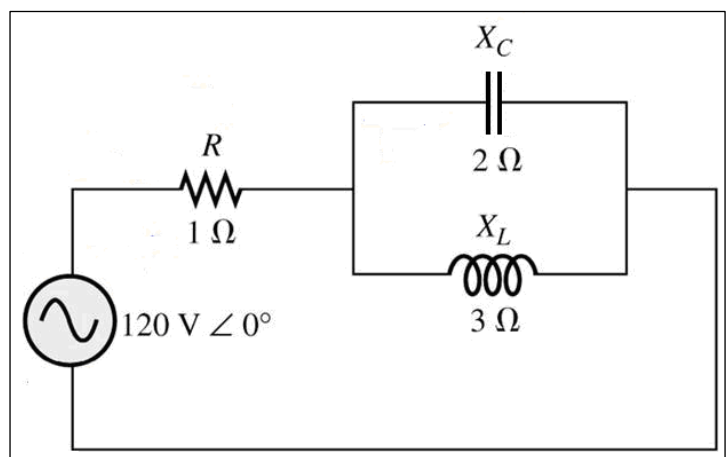
$$C=663,1\ \mu\text{F}$$



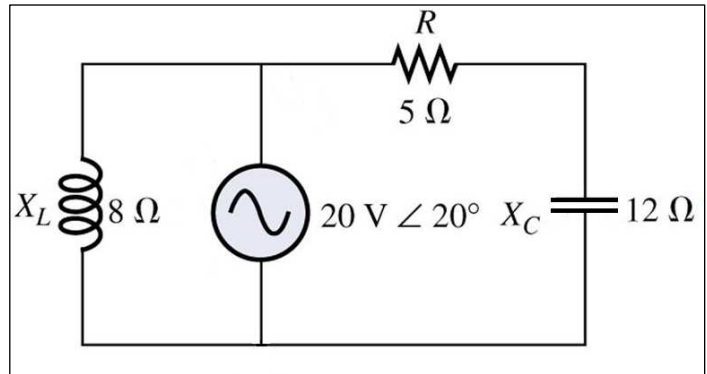
7. Nos circuitos abaixo, determinar a impedância complexa, a corrente total da fonte e as correntes em cada ramo.



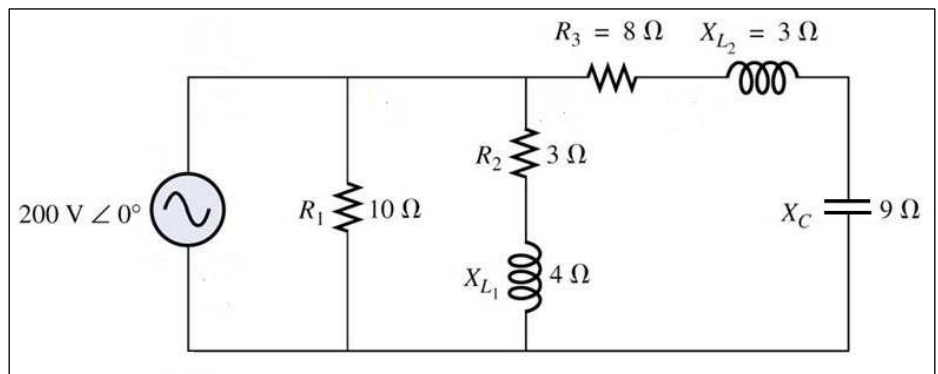
8. No circuito ao lado, determine o valor da impedância total do circuito, da corrente fornecida pela fonte, da tensão no resistor, da tensão e da corrente no capacitor,



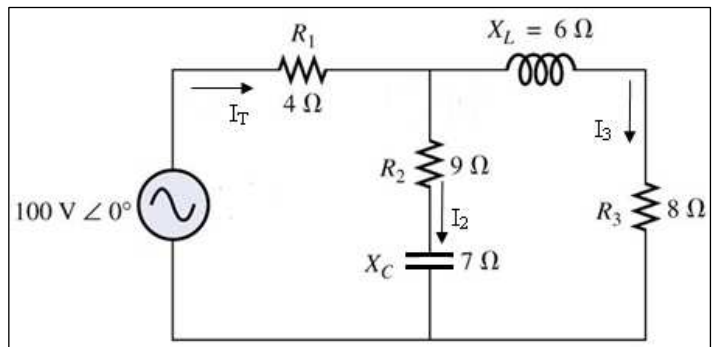
9. Analise o circuito ao lado e determine o valor da tensão no capacitor e da corrente total fornecida pela fonte.



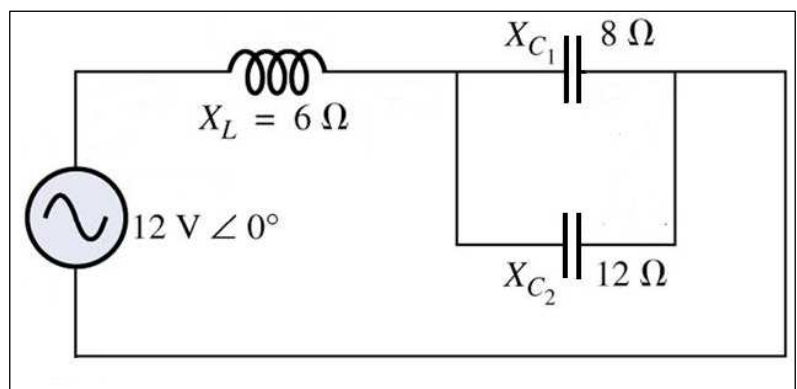
10. Para o circuito da figura dada, determine o valor da impedância total do circuito e de todas as correntes do circuito.



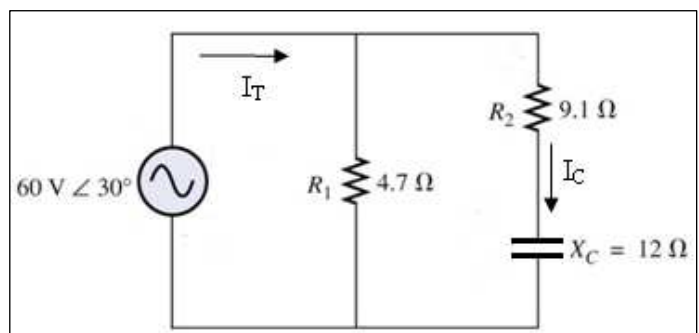
11. Para o circuito da figura dada, determine o valor de todas as correntes do circuito,



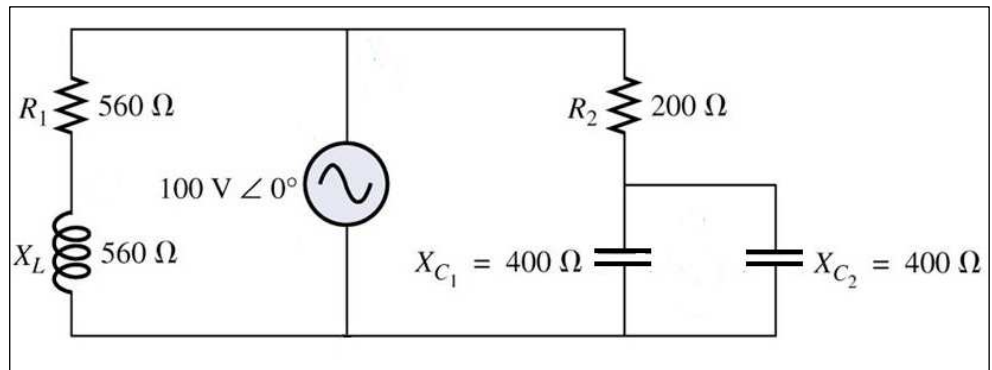
12. No circuito ao lado, determine o valor da impedância total, da corrente total, da tensão no indutor e da corrente em cada capacitor.



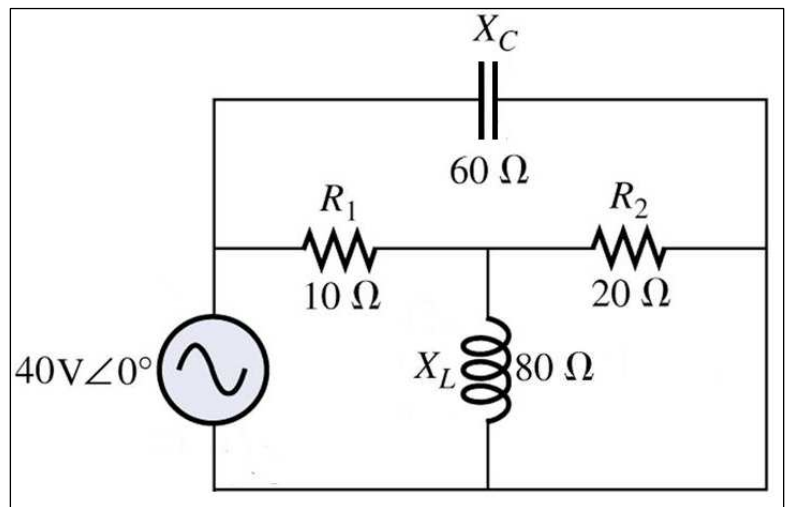
13. Considerando o circuito ao lado, determine o valor da impedância total, da corrente total e também o valor da tensão e da corrente no capacitor.,



14. No circuito ao lado, determine o valor da corrente total fornecida pela fonte e da tensão sobre o capacitor.

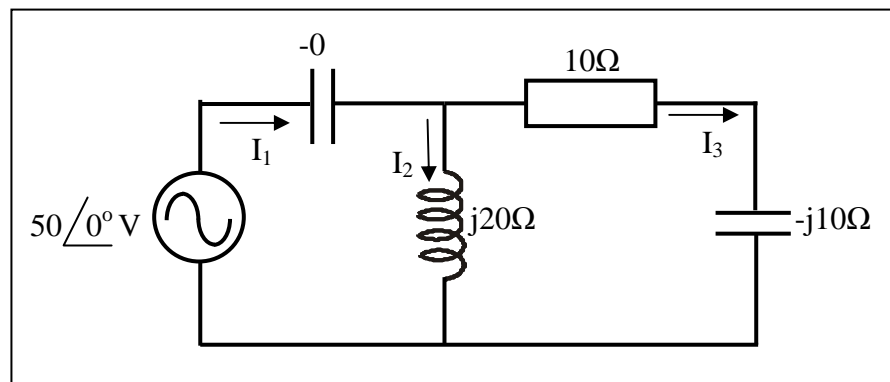


15. Para o circuito da figura dada, determine o valor da corrente total fornecida pela fonte e da tensão sobre o indutor.



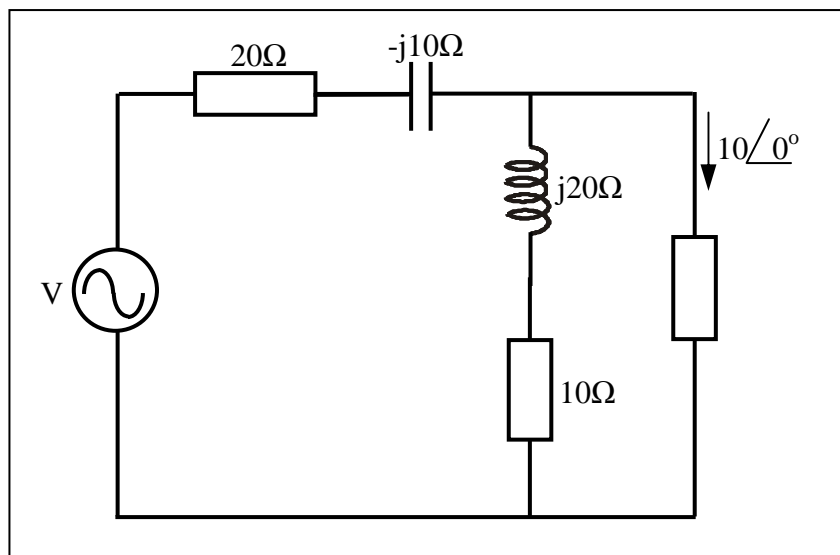
16. No circuito ao lado, determine o valor da impedância total e das correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .

Respostas:

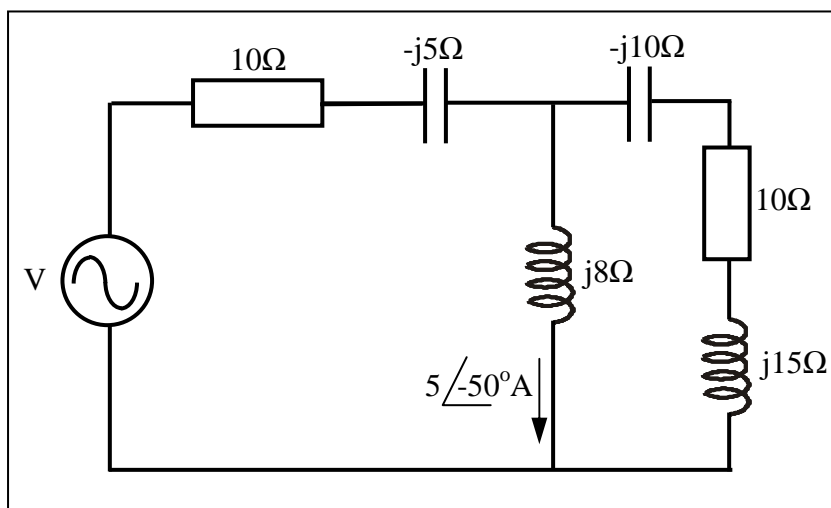


17. No circuito ao lado, determine o valor da tensão da fonte.

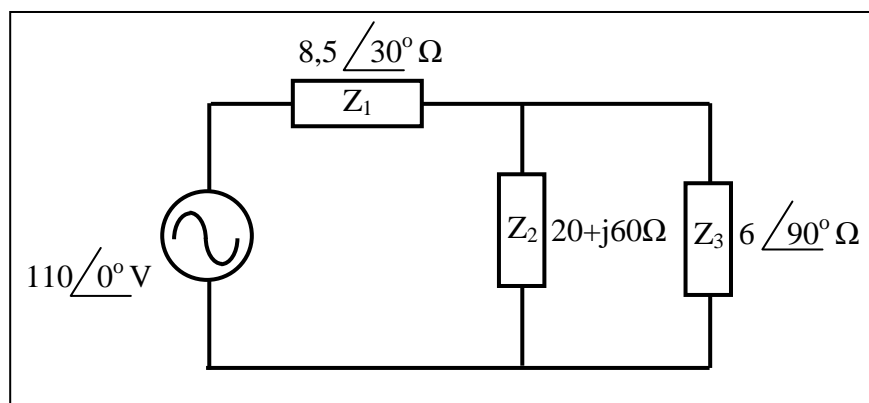
Respostas:



18. No circuito ao lado, determine o valor da tensão da fonte e da corrente total do circuito.



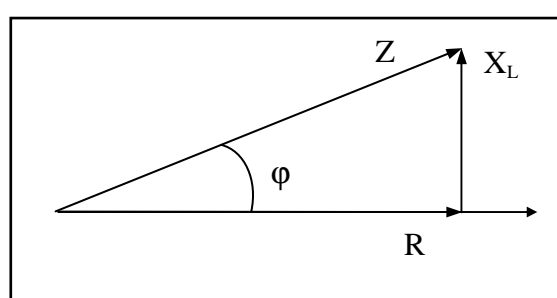
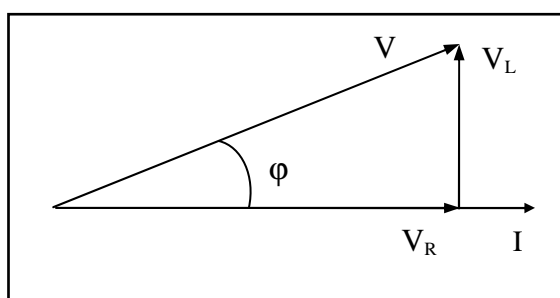
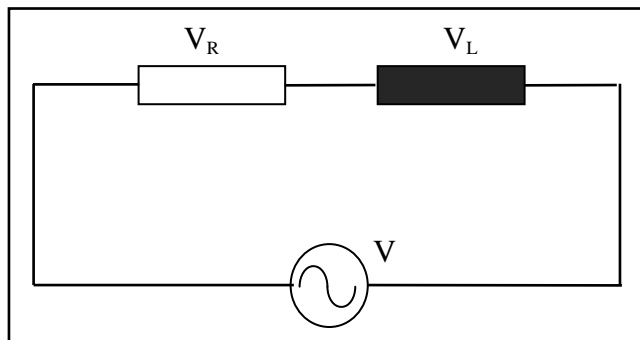
19. No circuito ao lado, determine o valor da tensão sobre cada uma das impedâncias.



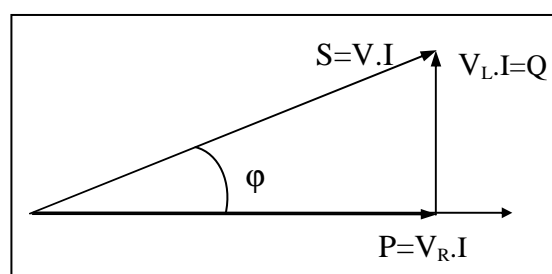
## 6. POTÊNCIA EM CORRENTE ALTERNADA

### 6.1. POTÊNCIA ATIVA, REATIVA E APARENTE

Em estudos anteriores verificou-se como se comporta a potência instantânea e média em alguns casos. A fim de retomar aqueles conhecimentos, será considerado um circuito RLC série de teor indutivo ou mesmo um circuito RL série, conforme mostrado na figura ao lado.



Pode-se multiplicar o gráfico das tensões pela corrente e obtém-se um triângulo semelhante com dimensão de potência como mostra a figura ao lado. O cateto adjacente ao ângulo  $\varphi$  corresponde a parcela da potência de circuito CA que é chamada de **POTÊNCIA ATIVA OU REAL (P)**.



$$P = V_R \cdot I$$

Mas  $V_R = V \cdot \cos \varphi$ , logo tem-se que :

$$P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Esta parcela de potência corresponde à potência média que realmente é consumida, ou seja, transformada irreversivelmente noutra forma de potência, por exemplo, potência térmica, mecânica e luminosa. Esta componente de potência é proporcional à parcela resistiva do circuito e tem como unidade o **Watt (W)**. A potência ativa é indicada por um instrumento de ponteiro chamado **wattímetro** e a energia consumida tem como unidade o Joule ou Watt-segundo ou o Watt-hora e é medida pelo instrumento chamado de medidor de energia ou Watt-horâmetro.

O cateto oposto ao ângulo  $\varphi$  corresponde à parcela de potência chamada de **POTÊNCIA REATIVA (Q)**.

$$Q = V_L \cdot I$$

Mas  $V_L = V \cdot \sin \varphi$ ; logo tem-se:

$$Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi$$

Este valor corresponde à potência instantânea máxima que o gerador fornece ao campo magnético do indutor num quarto de ciclo e recebe de volta no outro quarto de ciclo integralmente. Esta potência não influi na leitura fornecida pelo medidor de energia porque ela entra no circuito e logo é devolvida. Por isto ela é chamada por alguns autores de potência dewattada ou potência em quadratura. O instrumento que mede a potência reativa chama-se **varímetro**.



A fim de diferenciá-la da potência ativa sua unidade não é Watt e sim o **Volt-Ampère reativo (VAR)**. A energia reativa é medida pelo instrumento chamado medidor de energia reativa ou VAR-hora--metro.

Por sua vez, a hipotenusa do triângulo representa o produto da tensão pela corrente no circuito, o que seria aparentemente a potência real do circuito como o é nos circuitos resistivos puro e nos circuitos CC. Por isto, ela é chamada de **POTÊNCIA APARENTE (S)** e sua unidade é o **Volt-Ampère (VA)**. Na verdade, a potência aparente contém uma soma vetorial de potência ativa (real) e reativa sem, no entanto, precisar quanto vale cada uma delas individualmente.

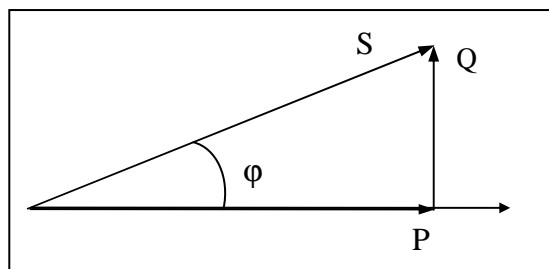
$$S = P_{ap} = V \cdot I$$

Em virtude destas afirmações, têm-se que:

$$P = S \cdot \cos \varphi = P_{ap} \cdot \cos \varphi$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = P_{ap} \cdot \sin \varphi$$

Para o circuito RLC série o diagrama fasorial das potências fica, então, com a forma indicada ao lado.



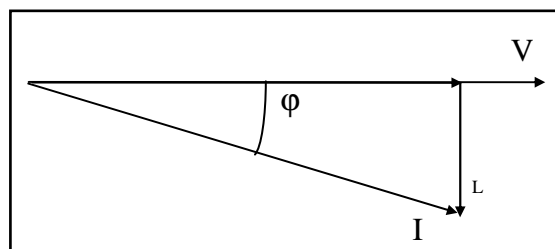
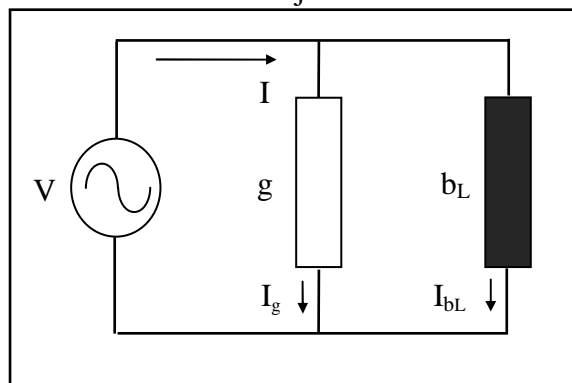
Quando o circuito é RL há troca de energia entre o gerador e o campo magnético do indutor a cada quarto de ciclo. Se o circuito for RC o mesmo acontece entre a fonte e o campo elétrico do capacitor.

Analisando-se as curvas de potência instantâneas num indutor puro e num capacitor puro, tomando-se a corrente como referência, vê-se que, no quarto de ciclo, em que um está absorvendo, o outro está devolvendo energia. Isto faz que o indutor e o capacitor tenham papéis contrários num circuito de corrente alternada.

Se o circuito for RLC há troca de energia entre o gerador, o campo magnético do indutor e o campo elétrico do capacitor. Neste caso a contribuição do gerador será apenas a diferença entre as energias destinadas ao indutor e ao capacitor.

No caso de circuito RLC ressonante, a energia só é trocada entre o campo magnético do indutor e o campo elétrico do capacitor, porque a quantidade de energia fornecida ao capacitor num certo intervalo de tempo é igual à quantidade de energia liberada pelo indutor. Para o gerador, tudo se passa como se a carga fosse resistiva pura, ou seja, toda energia que o gerador fornece é realmente consumida.

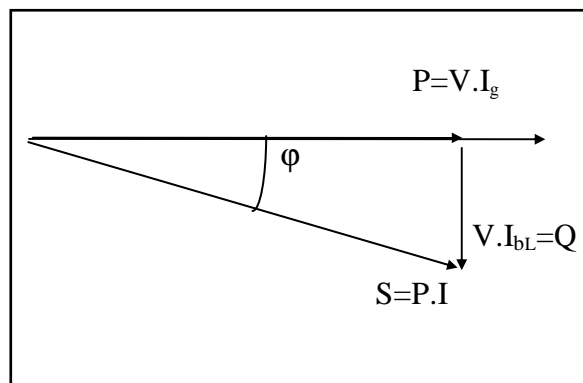
Quando se tratar de um circuito paralelo tem-se um conjunto de componentes de corrente e a tensão é tomada como fasor referência. Estas componentes podem estar em fase ou defasadas da tensão de 90° conforme já foi visto.



Multiplicando o triângulo das correntes pela tensão obtém-se outro triângulo semelhante com dimensão de potência.

A hipotenusa representa o produto da tensão pela corrente sem considerar o seu ângulo de defasagem. Ela representa portanto a potência aparente do circuito.

$$S = P_{ap} = V \cdot I$$



O cateto adjacente a  $\phi$  representa o produto da tensão pela componente ativa da corrente, sendo portanto a potência ativa.

$$P = V \cdot I_g$$

Mas  $I_g = I \cdot \cos \phi$ , portanto:

$$P = S \cdot \cos \phi = P_{ap} \cdot \cos \phi$$

O cateto oposto ao ângulo  $\phi$  representa o produto da tensão pela componente de corrente defasada de  $90^\circ$  da tensão ( em avanço ou atraso ). Como se pode ver esta é a potência reativa.

$Q = V \cdot I_{bL}$ , mas  $I_{bL} = I \cdot \sin \phi$ , portanto:

$$Q = S \cdot \sin \phi = P_{ap} \cdot \sin \phi$$

Nota-se que o triângulo das potências é o mesmo, tanto para o circuito série quanto para o circuito paralelo. Tanto isto é verdade, que pode ser obtido um circuito série equivalente ao circuito paralelo e vice-versa. O fato do triângulo ter ficado invertido (para o mesmo teor de circuito) deve-se ao fato de ter-se partido do triângulo das tensões e do triângulo das correntes para justificar a sua origem.

Na verdade a potência não é um fasor (grandeza fasorial ou vetorial), é sim uma grandeza escalar. Esta representação por vetores, no entanto, é muito útil e não tem contra-indicações ao nível de segundo grau.

## 6.2. FATOR DE POTÊNCIA

Como se pode perceber, não é suficiente multiplicar a tensão pela corrente para obter a potência ativa ou real do circuito, com é feito nos circuitos resistivos puros ou circuitos CC. Nos circuitos CA a potência ativa é obtida pela potência aparente e por um fator que depende das características: o fator de potência.

O fator de potência é o cosseno do ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente. Esta grandeza pode ser obtida pelas características físicas do circuito (resistência, impedância, etc) ou por medição pelo instrumento chamado de indicador de fator de potência ou cossefímetro.

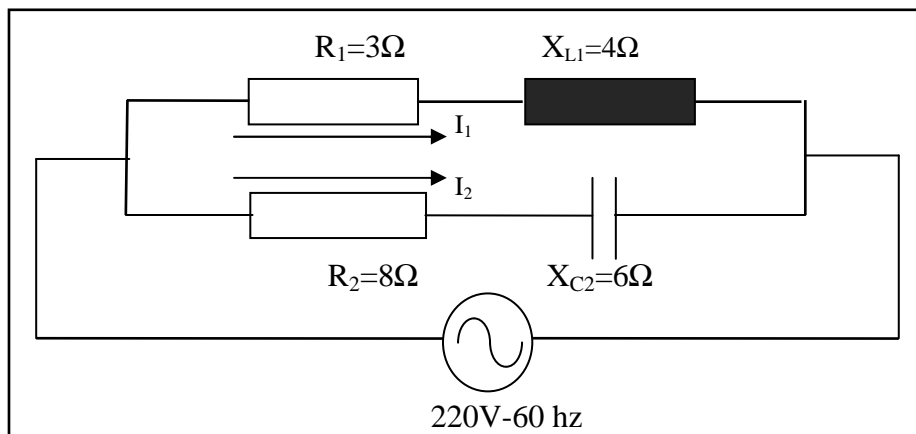
Quando o fator de potência de um circuito for unitário ( $\cos \phi = 1$  ou 100 %) toda a potência aparente absorvida pelo circuito é consumida irreversivelmente.

Quando o fator de potência for menor do que 1 ( $\text{fp} < 100\%$ ), há duas parcelas de energia ou potência: uma parcela representa a potência que realmente é consumida e outra que não é consumida e sim trocada entre o campo magnético dos indutores e o gerador.

Esta energia reativa é necessária para a magnetização dos aparelhos (cargas indutivas em geral), mas será visto a seguir que o seu transporte desde a geração até o consumidor é indesejável, ou seja, esta energia não deve circular em longos trechos da linha de alimentação (transmissão, distribuição e utilização) e isto significa que o consumidor deve ter no caso ideal, fator de potência unitário ou bem próximo da unidade.

Pode-se somar as potências ativas entre si, as reativas entre si (considerando o teor) porém as potências aparentes não podem ser somadas algebricamente porque os seus ângulos de defasagem no caso genérico, são diferentes. Em outras palavras, pode-se somar as potências ativas si e as potências reativas entre si (a indutiva tem sinal trocada em relação à capacitiva). As potências aparentes não podem ser somadas algebricamente a não ser no caso particular em que seus fatores de potência sejam iguais.

**Exemplo:** Para o circuito abaixo, calcular a impedância, fator de potência, corrente, potência aparente, potência ativa, e reativa para cada ramo do circuito e para o circuito inteiro.



$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Omega$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{220}{5} = 44 \text{ A}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ ind}$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{X_{L1}}{Z_1} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ ind}$$

$$S_1 = V \cdot I_1 = 220 \times 44 = 9,68 \text{ kVA}$$

$$P_1 = V \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 = S_1 \cdot \cos \varphi_1 = 9,68 \text{ kVA} \times 0,6 = 5,808 \text{ kW}$$

$$Q_{L1} = V \cdot I_1 \cdot \sin \varphi_1 = S_1 \cdot \sin \varphi_1 = 9,68 \text{ kVA} \times 0,8 = 7,7444 \text{ kVAr}$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \Omega$$

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{220}{10} = 22 \text{ A}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ cap}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{X_{C2}}{Z_2} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ cap}$$

$$S_2 = V \cdot I_2 = 220 \times 22 = 4,84 \text{ kVA}$$

$$P_2 = V \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = S_2 \cdot \cos \varphi_2 = 4,84 \text{ kVA} \times 0,8 = 3,802 \text{ kW}$$

$$Q_{C2} = V \cdot I_2 \cdot \sin \varphi_2 = S_2 \cdot \sin \varphi_2 = 4,84 \text{ kVA} \times 0,6 = 2,904 \text{ kVAr}$$

$$P = P_1 + P_2 = 5808 \text{ W} + 3872 \text{ W} = 9,68 \text{ kW}$$

$$Q = Q_{L1} + Q_{C2} = 7744 \text{ VAr} - 2904 \text{ VAr} = 4,84 \text{ kVAr}_{\text{ind}}$$

$$S_2 = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{9680^2 + 4840^2} = 10,822 \text{ kVA}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{9680}{10822} = 0,89 \text{ ind}$$

\* cálculo do circuito paralelo equivalente ao circuito série estudado

$$g_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{3}{5^2} = 0,12 \text{ S}$$

$$b_{L1} = \frac{X_{L1}}{Z_1^2} = \frac{4}{5^2} = 0,16 \text{ S}$$

$$Y_1 = \sqrt{g_1^2 + b_{L1}^2} = \sqrt{0,12^2 + 0,16^2} = 0,2 \text{ S}$$

$$g_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{8}{10^2} = 0,08 \text{ S}$$

$$b_{C2} = \frac{X_{C2}}{Z_2^2} = \frac{6}{10^2} = 0,06 \text{ S}$$

$$Y_2 = \sqrt{g_2^2 + b_{C2}^2} = \sqrt{0,08^2 + 0,06^2} = 0,1 \text{ S}$$

$$Y_T = \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_{L1} - b_{C2})^2} = \sqrt{(0,12 + 0,08)^2 + (0,16 - 0,06)^2} = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} = 0,2236 \text{ S}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{0,2236} = 4,47 \text{ } \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{220}{4,47} = 49,22 \text{ A}$$

### 6.3. CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA

A energia elétrica é consumida nas mais variadas atividades tais como residenciais, comerciais e industriais. Nestas atividades a energia é consumida, principalmente, para a obtenção de luz, calor e força motriz. Neste momento serão analisadas as características destas cargas quanto aos seus fatores de potência típicos. Na iluminação usam-se lâmpadas a filamento e lâmpadas a gás. As lâmpadas incandescentes funcionam pelo aquecimento do filamento por efeito joule, logo são cargas puramente resistivas e tem fator de potência unitário.

As lâmpadas a gás (fluorescentes, vapor de mercúrio e vapor de sódio) necessitam, para o seu funcionamento, de um reator colocado em série com o tubo de gás. Isto faz que o seu fator de potência seja baixo, em torno de 0,5 indutivo. Exceção é feita às lâmpadas com fator de potência corrigido nas quais este se situa em torno de 0,9 indutivo. Quando o circuito possui teor indutivo usa-se a expressão “fator de potência atrasado”, pois a corrente está atrasada em relação a tensão da fonte e quando o circuito possui teor capacitivo usa-se a expressão “fator de potência adiantado”.

Os aquecedores são, de um modo geral, do tipo resistivo tais como chuveiros, torneiras elétricas, estufas, caldeiras de água quente (boilers), etc. tendo portanto fator de potência unitário.

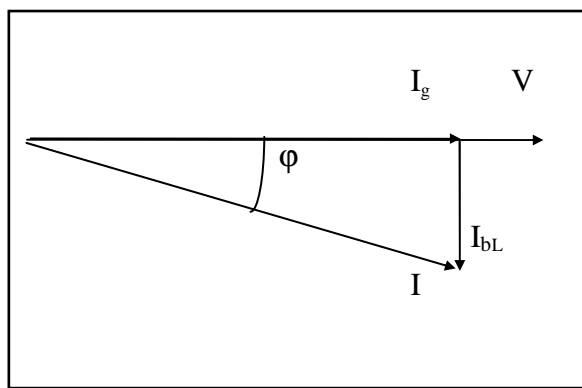
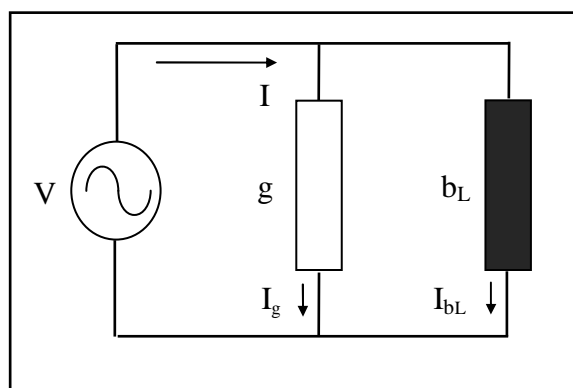
Para a produção de força motriz o motor mais comum é o chamado motor de indução, seja do tipo trifásico ou monofásico. Estes motores têm o fator de potência variável com a carga. À plena carga o fator de potência está em torno de 0,5 a 0,85 indutivo, porém com pouca carga pode cair para 0,5 a 0,6 indutivo.

O baixo fator de potência dá-se devido à absorção significativa de potência reativa, a qual não é detectada pelo medidor de energia ativa, porém representa uma maior potência aparente (maior corrente) a ser transportada desde as centrais, através de linhas de transmissão, transformadores, etc. Esta maior corrente origina perdas de energia por efeito joule e maior queda de tensão por onde ela passa. Por isto, as concessionárias, embasadas em leis, cobram multas ao consumidor industrial cujo fator de potência seja inferior a 0,92 indutivo. Quanto mais baixo for o fator de potência, maior será o preço a ser pago para a mesma energia ativa consumida (kWh consumidos). Isto estimula (quase obriga) a que os consumidores industriais corrijam o seu fator de potência para, no mínimo, 0,92 indutivo.

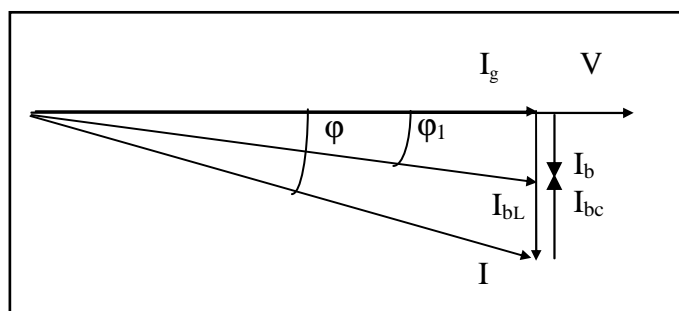
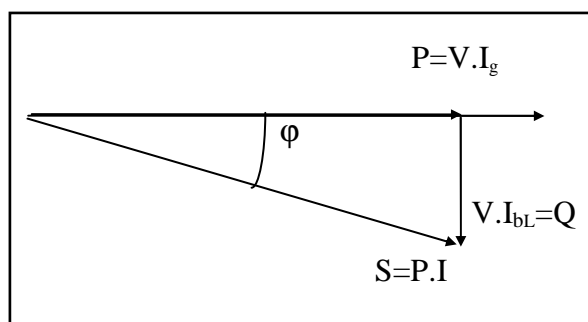
Para aumentar o fator de potência de uma instalação, cujo fator de potência esteja muito indutivo, a solução universal é instalar capacitores em paralelo com as cargas. Não se instala em série porque provoca queda de tensão.

As cargas indutivas (teor resistivo-indutivo) absorvem potência ativa ( $P$ ) e, também, potência reativa indutiva ( $Q_L$ ). Instalando-se capacitores em paralelo com a carga, estes vão absorver somente potência reativa capacitiva ( $Q_C$ ) da rede. Como a potência reativa capacitiva é contrária à potência indutiva, resulta que o gerador deverá fornecer uma potência reativa que será a diferença entre elas, prevalecendo a maior.

A potência ativa não é alterada porque os capacitores usados na correção de potência comportam-se muito próximos de capacitores ideais. No entanto, a potência aparente fica reduzida e, em consequência, a corrente fornecida pela rede fica proporcionalmente menor. Certas pessoas, com razão, chamam os capacitores de correção do fator de potência de “economizadores de corrente”. Imagine-se uma carga com teor indutivo como a da figura abaixo.

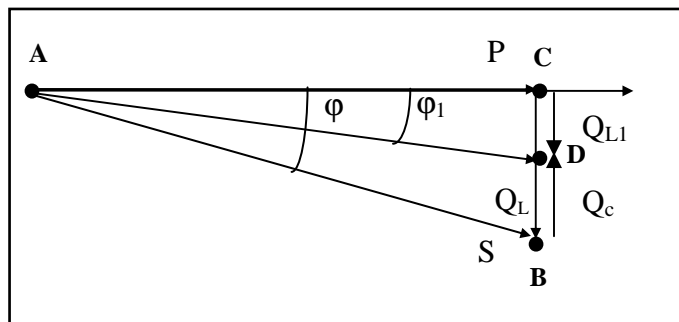


Multiplicando o triângulo das correntes pela tensão, obtém-se outro triângulo semelhante com dimensão de potência, conforme já foi discutido anteriormente. Instalando-se um capacitor em paralelo tem-se uma nova corrente reativa, neste caso, avançada da corrente de  $90^\circ$  ficando portanto a  $180^\circ$  da corrente reativa indutiva da carga, anulando-a parcialmente.



Traçando o diagrama das potências, multiplicando o diagrama das correntes pela tensão  $V$  obtém-se a figura ao lado.

Observando os triângulos ABC e ADC, por trigonometria tem-se a relação entre a potência ativa e as potências reativas antes e depois da instalação do capacitor.



$$Q_L = P \cdot \tan \varphi \quad \text{e} \quad Q_{L1} = P \cdot \tan \varphi_1$$

A potência reativa do capacitor é a diferença entre as potências reativas indutivas antes e depois da instalação do mesmo.

$$Q_C = Q_L - Q_{L1} = P \cdot \tan \varphi - P \cdot \tan \varphi_1 \Rightarrow$$

$$Q_C = P \cdot (\tan \varphi - \tan \varphi_1)$$

Praticamente sempre, é suficiente especificar um capacitor pela sua potência reativa, tensão e frequência. No entanto, em se tratando de capacitor monofásico, pode-se conhecer a sua capacitância.

$$Q_C = V \cdot I_{bc} = V \cdot V \cdot b_c = V^2 \cdot b_c = V^2 \cdot \frac{1}{X_c} = V^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C$$

$$C = \frac{Q_c}{V^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

onde:  $Q_c$  = potência reativa do capacitor (VAr);  
 $V$  = tensão (V)  
 $f$  = frequência (Hz);  
 $C$  = capacitância (F).

**Exemplo:** Uma carga monofásica é alimentada com 500V, 60hz e absorve uma potência ativa de 2000W com fator de potência 0,5 indutivo.

a) Calcule a potência aparente inicial, a corrente inicial e a potência reativa inicial.

b) Desejando-se corrigir o fator de potência para 0,85 indutivo com a colocação de capacitores em paralelo, calcule a potência reativa final, a potência reativa no capacitor, a potência aparente final, a corrente final e o valor da capacitância do conjunto.

$$a) S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{2000 \text{ W}}{0,5} = 4000 \text{ VA} = 4 \text{ KVA} \quad I = \frac{S}{V} = \frac{4000 \text{ W}}{500} = 8 \text{ A}$$

$$\varphi = \arccos 0,5 = 60^\circ \text{ ind}$$

$$Q_L = S \cdot \sin \varphi = 4000 \text{ VA} \times 0,86 = 3464 \text{ VAr}_{\text{ind}}$$

$$b) \varphi_1 = \arccos 0,85 = 31,79^\circ \text{ ind}$$

$$Q_{L1} = P \cdot \tan \varphi_1 = 2000 \text{ W} \times 0,62 = 1240 \text{ VAr}_{\text{ind}}$$

$$Q_C = Q_L - Q_{L1} = 3464 \text{ VAr} - 1240 \text{ VAr} = 2224 \text{ VAr}$$

$$Q_C = P \cdot (\tan \varphi - \tan \varphi_1) = 2000 \text{ W} \cdot (1,732 - 0,62) = 2224 \text{ VAr}_{\text{cap}}$$

$$S_1 = \frac{P}{\cos \varphi_1} = \frac{2000 \text{ W}}{0,85} = 2353 \text{ VA}$$

$$I_1 = \frac{S_1}{V} = \frac{2353 \text{ VA}}{500} = 4,71 \text{ A} \quad \frac{I_1}{I} = \frac{4,71 \text{ A}}{8 \text{ A}} = 0,59 = 59 \%$$

$$X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{500^2 \text{ V}^2}{2224 \text{ VAr}} = 112,41 \Omega$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_C} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 60 \times 112,41} = 23,6 \mu\text{F}$$

Uma opção para correção do fator de potência é aumentar o consumo de potência ativa, mantendo a potência reativa constante. Em termos industriais esta opção não seria justificada nem técnica nem economicamente, porém em determinados circuitos de máquinas elétricas, ela é bastante usada, pois justifica-se tecnicamente. Como se pode ver, o aumento da potência ativa, sem o aumento da potência reativa reduz o ângulo de defasagem e, conseqüentemente, aumenta o fator de potência geral.

O capacitor absorve potência reativa capacitiva a qual tem sentido contrário ao da potência reativa indutiva. Em função disto, em muitas análises, é útil pensar que o capacitor, em vez de consumir potência reativa capacitiva, fornece potência reativa indutiva.

Assim sendo, a localização ideal dos capacitores é o mais próximo possível do consumidor de potência reativa, de forma que esta não necessite circular pelas linhas alimentadoras. É óbvio que os capacitores devem ser colocados depois do centro de medição. No entanto, há fatores técnicos e econômicos que influem na localização dos capacitores dentro de uma planta industrial.

#### 6.4. POTÊNCIA APARENTE COMPLEXA

A potência aparente complexa é constituída de uma parcela real que é a potência ativa e de uma parcela imaginária que é a potência reativa, indutiva ou capacitiva, sendo expressa por:

$$\dot{S} = P \pm jQ$$

onde:  $\dot{S}$  = potência aparente complexa;  
 $P$  = potência ativa;  
 $+jQ$  = potência reativa indutiva;  
 $-jQ$  = potência reativa capacitiva.

Para obter-se a potência aparente complexa deve-se multiplicar o complexo que representa a tensão pelo **conjugado** do complexo que representa a corrente.

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* \quad \text{onde: } \dot{S} = \text{potência aparente complexa}$$

$$\dot{V} = \text{tensão complexa}$$

$$\dot{I}^* = \text{conjugado da corrente complexa.}$$

$$\dot{V} = V \angle \alpha$$

$$\dot{I} = I \angle \beta$$

$$\dot{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = V \angle \alpha \cdot I \angle -\beta$$

$$\dot{S} = V \cdot I \angle \alpha - \beta$$

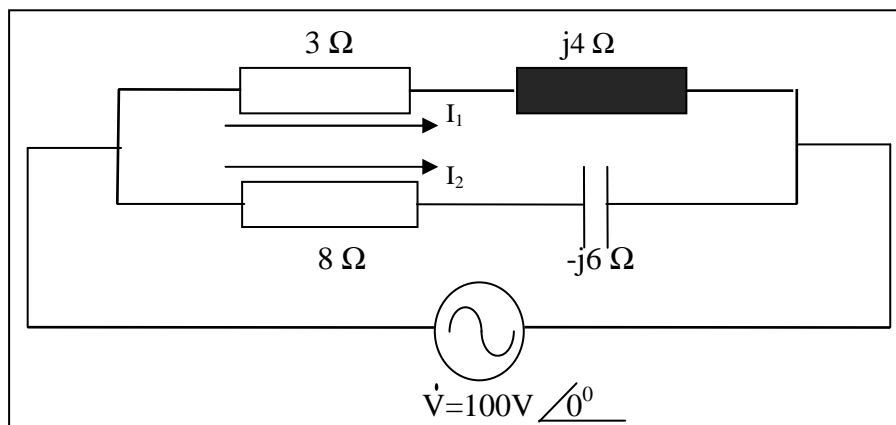
$$\dot{S} = V \cdot I \angle \pm \phi$$

O produto dos módulos é a potência aparente ( $S = V \cdot I$ ). É necessário usar o conjugado da corrente porque o ângulo do produto deve ser o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente que é a diferença entre o ângulo do fasor tensão ( $\alpha$ ) e o ângulo do fasor corrente ( $\beta$ ). Portanto esta diferença de ângulos ( $\alpha - \beta = \phi$ ) indica o ângulo através do qual a tensão "avança" em relação a corrente, ou seja, representa o ângulo do fator de potência. A potência reativa  $Q$  é positiva se o ângulo entre a tensão e a corrente ( $\alpha - \beta = \phi$ ) é positivo ( $\alpha > \beta$ ) o que indica que a tensão está adiantada da corrente, ou seja, o circuito possui teor indutivo. A potência reativa  $Q$  é negativa se o ângulo entre a tensão e a corrente ( $\alpha - \beta = \phi$ ) é negativo ( $\alpha < \beta$ ) o que indica que a tensão está atrasada da corrente, ou seja, o circuito possui teor capacitivo.

Resumindo:  $P + jQ$  = carga absorve potência ativa e absorve potência reativa indutiva.

$P - jQ$  = carga absorve potência ativa e absorve potência reativa capacitiva (ou fornece potência reativa indutiva).

Exemplo: No circuito da página 55, determinar inicialmente a potência aparente complexa do ramo RL e do ramo RC e, a seguir, a potência aparente complexa total fornecida pela fonte.



Solução: \* as correntes já foram anteriormente calculadas, durante o desenvolvimento do método dos números complexos

A potência associada ao ramo RL é:

$$\dot{S}_1 = \dot{V} \cdot \dot{I}_1^* = 100 \angle 0^\circ \cdot 20 \angle 53,13^\circ = 2000 \angle 53,13^\circ = (1200 + j1600) \text{ VA}$$

De onde conclui-se que:  $S_1 = 2000 \text{ VA}$ ;  $P_1 = 1200 \text{ W}$ ;  $Q_1 = 1600 \text{ VAr ind.}$

A potência associada ao ramo RC é:

$$\dot{S}_2 = \dot{V} \cdot \dot{I}_2^* = 100 \angle 0^\circ \cdot 10 \angle -36,87^\circ = 1000 \angle -36,87^\circ = (800 - j600) \text{ VA}$$

Assim:  $S_2 = 1000 \text{ VA}$ ;  $P_2 = 800 \text{ W}$ ;  $Q_2 = 600 \text{ VAr cap.}$

A potência total fornecida pela fonte é o resultado da soma fasorial das potências aparentes dos ramos.

$$\dot{S} = \dot{S}_1 + \dot{S}_2 = (1200 + j1600) + (800 - j600) = (1200 + 800) + j(1600 - 600) = (2000 + j1000) \text{ VA}$$

Portanto:  $P = 2000 \text{ W}$ ;  $Q = 1000 \text{ VAr ind.}$

Fazendo a transformação para a forma polar obtém-se o módulo da potência aparente total e o ângulo do fator de potência:

$$\dot{S} = 2236 \angle 26,6^\circ \text{ VA} \quad ; \quad S = 2236 \text{ VA} \quad ; \quad \text{fp} = \cos 26,6^\circ = 0,89 \text{ ind.}$$

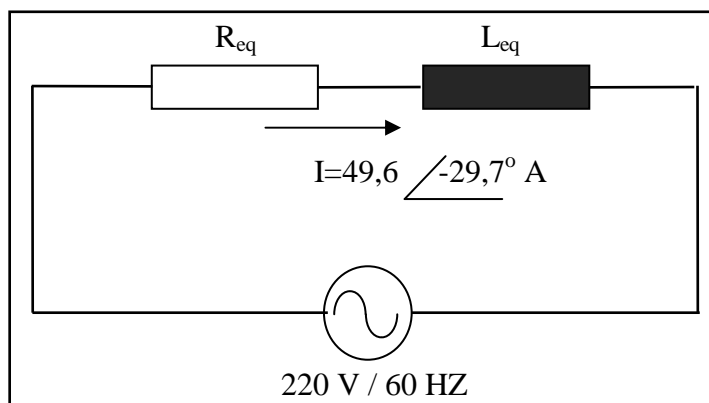


**EXERCÍCIOS**

1. Uma tensão de 120V aplicada a uma determinada carga, produz uma corrente de 30A com fator de potência 0,80 indutivo. Considerando uma frequência de 60Hz, determinar o circuito série equivalente da carga ( $R$  e  $X_L$ ) e expresse a impedância complexa na forma retangular.

2. Determinar a potência aparente complexa, na forma retangular, fornecida a uma carga de  $(3+j4) \Omega$  em uma tensão de 220V.

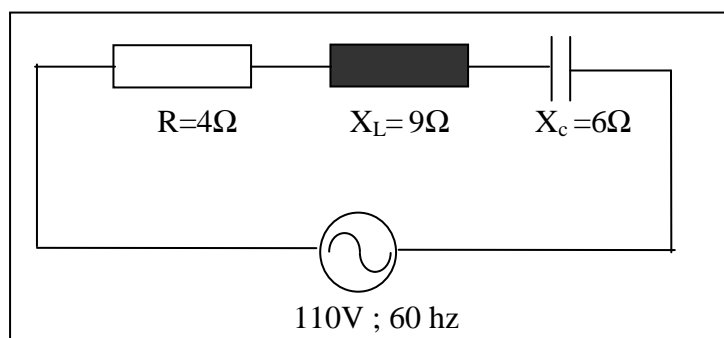
3. O circuito ao lado é equivalente ao conjunto de cargas de um setor industrial, em um dia típico. Deseja-se verificar a necessidade de correção do fator de potência (para 0,92 ind.) e, em caso afirmativo, calcular a capacitância do capacitor a ser ligado na rede para esse fim. Calcule a corrente na rede depois da correção e anote conclusões.



4. Um amperímetro, um voltímetro e um wattímetro são ligados no circuito de um motor de indução e indicam, respectivamente, 10A, 220V e 1900W. Determinar o fator de potência do circuito, a impedância e a resistência elétrica.

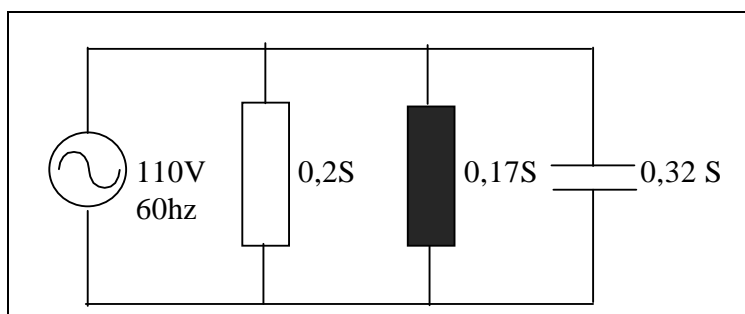
5. Uma impedância de  $(4 - j3) \Omega$  foi ligada a uma fonte de 100 V. Determinar os seguintes elementos do circuito. a)resistência elétrica; b)reatância; c)intensidade da corrente; d)fator de potência; e)potência aparente; f)potência ativa; g)potência reativa

6. Calcule a potência ativa, reativa (indutiva e capacitiva) e aparente e o fator de potência do circuito ao lado.



7. Numa instalação, medindo com um wattímetro, obteve-se 8kW e com um varímetro, 6kVAR<sub>i</sub>. Qual é o fator de potência e a potência aparente?

8. Calcule a potência ativa, reativa (indutiva e capacitiva) e aparente e o fator de potência do circuito abaixo.



9. Calcular o fator de potência e a potência aparente de uma instalação monofásica em que se mediu com um voltímetro, 380V, com um amperímetro, 100A e com um wattímetro 35kW.

10. Um motor elétrico consome uma potência de 5kW em 220V<sub>RMS</sub> com fator de potência igual a 0,6. Calcule o valor do capacitor que aumenta o FP para 0,9 em 60Hz.

11. Uma pequena usina geradora industrial alimenta 10kW de aquecedores (FP=1) e 20kVA de motores elétricos (FP=0,7). Se a rede é de 1kV e 60Hz, determine a capacitância necessária para corrigir o fator de potência para 0,95 e determine o valor correspondente da nova corrente na rede.

12. Uma carga indutiva tem uma potência real de 1kW consumindo uma corrente de 10A<sub>rms</sub> em 60hz com um ângulo de defasagem de 60°. Calcular:

- o valor do capacitor que corrige o FP para 0,85;
- a corrente total fornecida pelo gerador após a correção do FP
- a potência aparente após a correção do FP.

13. O fator de potência de uma carga ligada a uma fonte de 120V – 60hz é elevado de 0,707 (em atraso) para 0,866 (em atraso) ligando-se um capacitor de 53μF em paralelo com a mesma. Qual é o valor da potência real na carga?

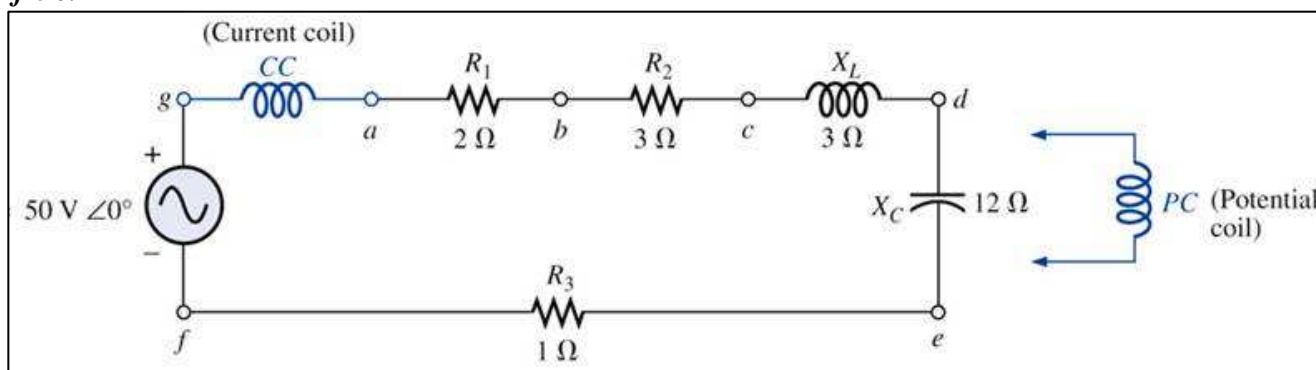
14. Um motor de 4054,35W de potência com FP=0,6 (em atraso) está conectado a uma fonte de 208V e 60hz. Determine o valor do capacitor que deve ser colocado em paralelo com a carga de modo a aumentar o FP para 1 e determine a diferença (em %) na corrente fornecida no circuito compensado e a corrente no circuito não-compensado.

15. Um sistema elétrico está especificado para 5kVA, 120V com um fator de potência atrasado 0,8. Determine a impedância do circuito em coordenadas retangulares e a potência ativa do circuito.

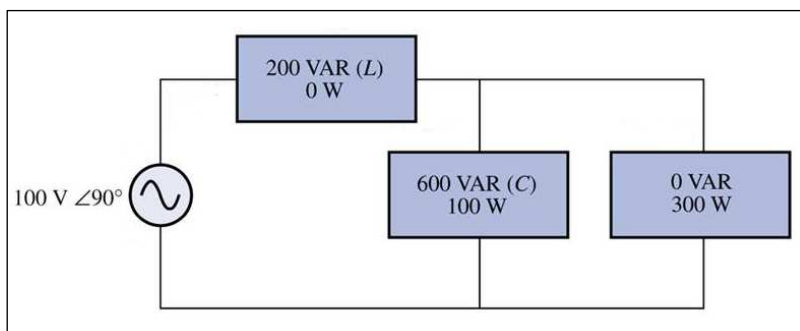
16. A carga de um gerador de 120 V e 60 Hz é de 5 kW (resistiva), 8 kVAR (indutiva) e 2 kVAR (capacitiva). Determine o valor:

- da potência aparente
- do fator de potência das cargas combinadas
- da corrente fornecida pelo gerador
- capacitância necessária para estabelecer um fator de potência unitário
- da corrente fornecida pelo gerador com um fator de potência unitário

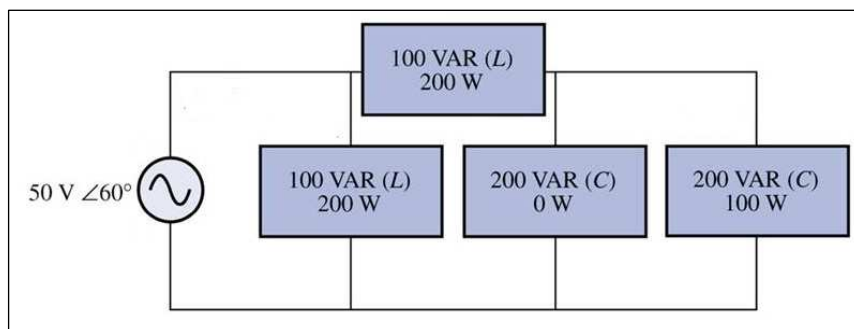
17. Um wattímetro é conectado com a bobina de corrente na posição mostrada no circuito e com a bobina de tensão entre os pontos *f* e *g*. a) Qual a leitura do wattímetro? b) Refaça o exercício, considerando que a bobina de tensão esteja ligada aos pontos *a* e *b*, *a* e *c*, *b* e *c*, *a* e *d*, *c* e *d*, *d* e *e* e *f* e *e*.



18. Para o sistema mostrado ao lado, determine o valor da potência total em watts, volts-ampères reativos, volts-ampères, fator de potência e a corrente total fornecida pela fonte.



19. Para o sistema mostrado ao lado, determine o valor das potências  $P_T$ ,  $Q_T$ , e  $S_T$  e também o valor do fator de potência e da corrente total fornecida pela fonte.



20. A iluminação e os motores de uma pequena fábrica estabelecem uma demanda de potência igual a 10kVA para um fator de potência atrasado 0,7 com uma fonte de 208V e 60Hz. Determine:

- potência ativa;
- potência reativa;
- ângulo  $\phi$  de defasagem;
- da capacitância do capacitor que deve ser colocado em paralelo com a carga para tornar o fator de potência unitário;
- diferença entre as correntes da fonte no sistema não-compensado e o sistema compensado;
- repita os itens anteriores para um fator de potência de 0,9.

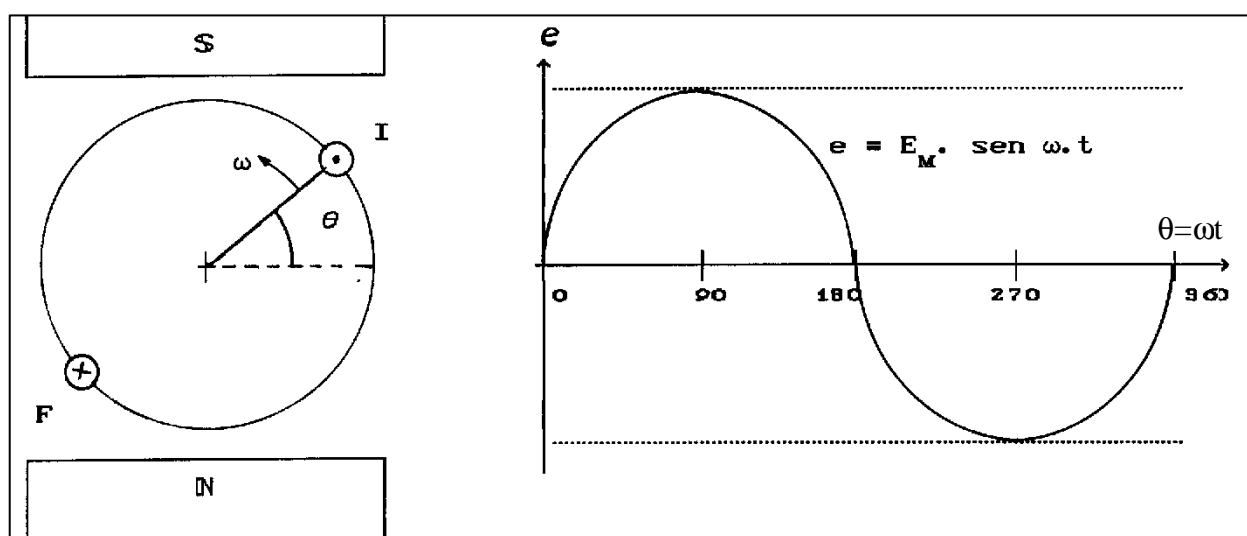
## 7. GERADOR TRIFÁSICO DE CORRENTE ALTERNADA

### 7.1. ALTERNADOR MONOFÁSICO DE INDUZIDO ROTATIVO

Um sistema tem  $n$  fases quando é originado de um gerador que tenha  $n$  circuitos onde se geram  $n$  f.e.m.s. defasadas, de um modo geral, de um  $n$ -avos do ciclo. Um sistema é, portanto, monofásico quando o gerador só tem um circuito para geração de f.e.m.

Conforme já foi visto anteriormente, um gerador de CA monofásico é composto basicamente de uma bobina que gira dentro de um campo magnético fixo. Os terminais da bobina são ligados a dois anéis coletores para que, através de contato deslizante com as escovas, permita a saída da energia gerada para a alimentação da carga.

Supondo que a máquina tenha dois pólos, a cada rotação completa da bobina é gerado um ciclo de f.e.m. (e de corrente), conforme mostra as figuras a seguir.



Usando-se a regra de Fleming da mão esquerda determina-se o sentido da f.e.m. em cada instante de tempo. Será convenção que a **f.e.m. é positiva quando apontar do fim da bobina para o seu início**. O valor da f.e.m. numa bobina rotativa, como já foi visto, é dado por:

$$e = n \cdot 2 \cdot B \cdot l \cdot v \cdot \sin \omega t$$

ou

$$e = n \cdot 2 \cdot B \cdot l \cdot v \cdot \sin \theta$$

### 7.2. ALTERNADOR TRIFÁSICO BIPOLAR DE INDUZIDO ROTATIVO

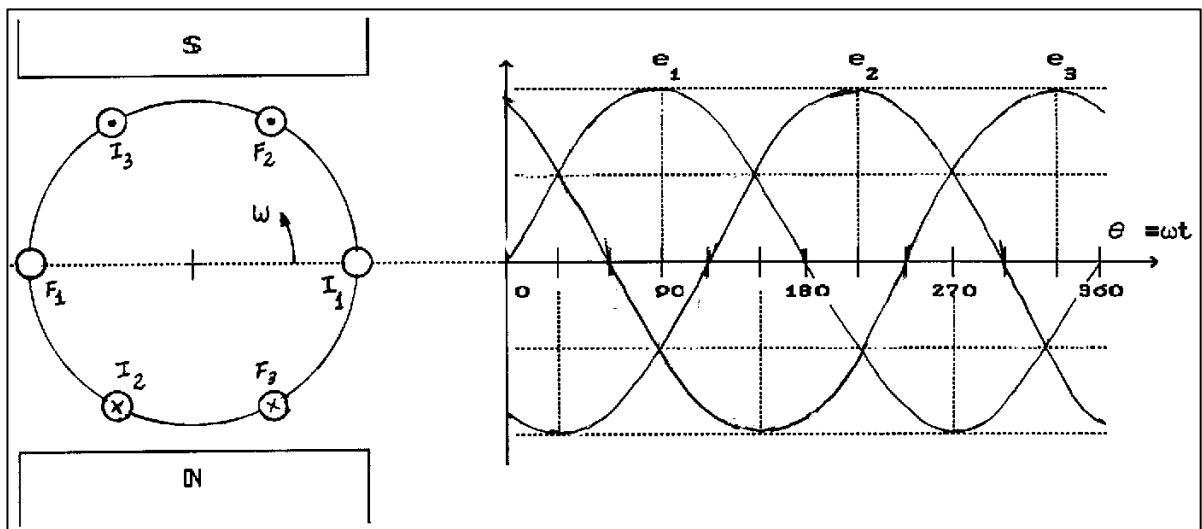
Dentre os sistemas polifásicos o que é universalmente utilizado é o trifásico, se bem que também existem os sistemas bifásicos, hexafásicos e dodecafásicos para aplicações muito específicas. Será dada atenção especificamente ao trifásico.

O gerador elementar monofásico tem apenas uma bobina no induzido onde se induz apenas uma f.e.m.. Se, em vez de uma bobina, forem usadas três bobinas deslocadas (defasadas) fisicamente de  $120^\circ$  elétricos uma da outra, ter-se-á uma distribuição simétrica das bobinas no induzido.

As f.e.m. induzidas dependem do ângulo de corte das linhas de força ( $\omega t = \theta$ ), logo as f.e.m.s. geradas nas três bobinas estarão defasadas no tempo de um ângulo igual ao ângulo de defasagem no espaço entre as bobinas.

Sabe-se que a f.e.m máxima ocorre quando o condutor passa bem defronte o centro do pólo e, usando-se a regra de Fleming da mão esquerda e a convenção de sentido, vê-se que, no caso a seguir, a f.e.m é positiva quando o início passa defronte o pólo sul.

Analisando desta maneira, vê-se que o início da fase 1 é o primeiro a passar sob o pólo sul. Um terço de rotação ( $120^\circ$ ) depois vem o início da fase 2 e finalmente vem o início da fase 3 outro terço de rotação atrasado. Uma regra prática para traçar as curvas das f.e.m.s. é descobrir o momento em que a f.e.m. da fase é máxima e a partir daí, a cada  $90^\circ$ , a f.e.m. vai de máximo a zero e depois de zero a máxima (positivo ou negativo) e assim sucessivamente.



Observando-se as curvas tem-se as seguintes equações:

$$e_1 = E_M \cdot \text{sen } \theta$$

$$e_2 = E_M \cdot \text{sen } (\theta - 120^\circ)$$

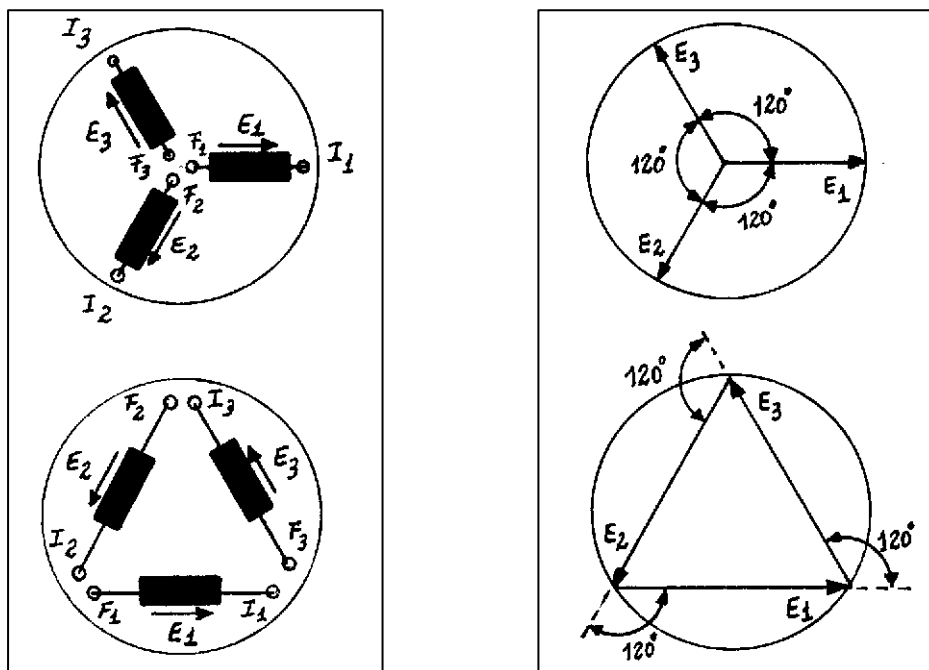
$$e_3 = E_M \cdot \text{sen } (\theta - 240^\circ)$$

Fica então demonstrado que, para se obter uma defasagem de um terço de ciclo entre as f.e.m.s., deve-se ter uma defasagem física entre as bobinas do induzido de um terço de rotação (isto é válido para as máquinas bipolares).

Para grandezas senoidais, quando uma f.e.m é máxima numa fase, as f.e.m.s. nas outras fases têm a metade do valor máximo com o sinal contrário. Novamente são necessários anéis coletores para a retirada da energia das bobinas do induzido. Seu número é função do tipo de conexão que for feito entre as fases.

### 7.3. AGRUPAMENTO DAS FASES EM ESTRÊLA E EM TRIÂNGULO

A figura a seguir mostra as formas mais comuns de representação do sistema trifásico. Apesar das duas representações parecerem ser diferentes, na verdade, mostram exatamente a mesma coisa, ou seja, que a defasagem entre as f.e.m.s. de quaisquer duas fases é sempre  $120^\circ$  elétricos.



### JUSTIFICATIVAS PARA O USO DE SISTEMAS MONOFÁSICOS E TRIFÁSICOS

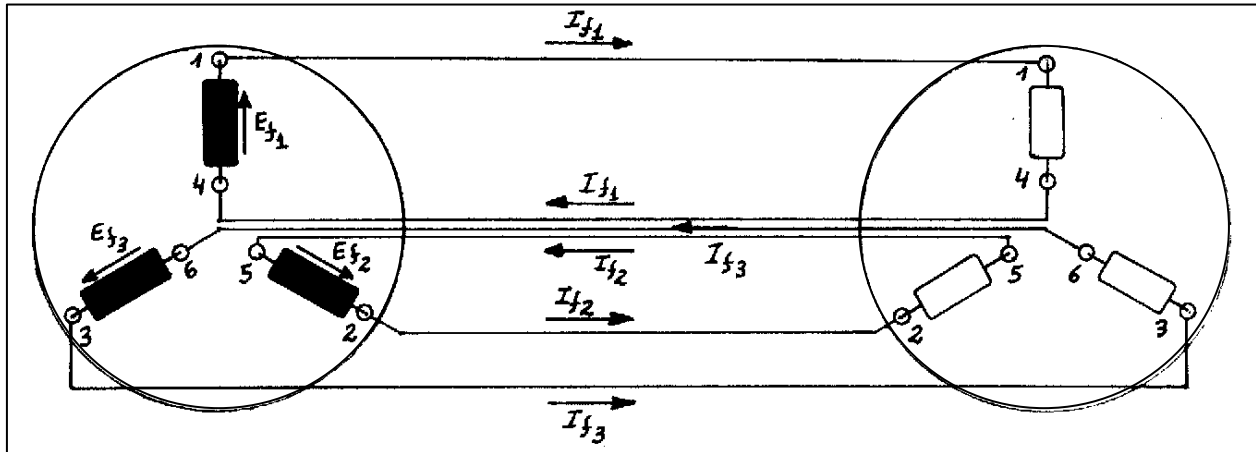
Apesar do sistema monofásico ser mais simples é o sistema trifásico que apresenta mais vantagens na maioria dos casos. Dentre estas vantagens se destacam:

1. As máquinas trifásicas têm, em geral, 48% a mais de potência que uma monofásica de mesmo peso e volume.
2. O motor de indução trifásico pelas características de simplicidade de partida, baixo custo e robustez é uma das melhores opções para a produção de força motriz.
3. A potência total no trifásico não é pulsante como no monofásico.
4. Considerando-se a mesma isolamento dos condutores, gasta-se menos material condutor para transportar a mesma potência se for usado circuito trifásico.

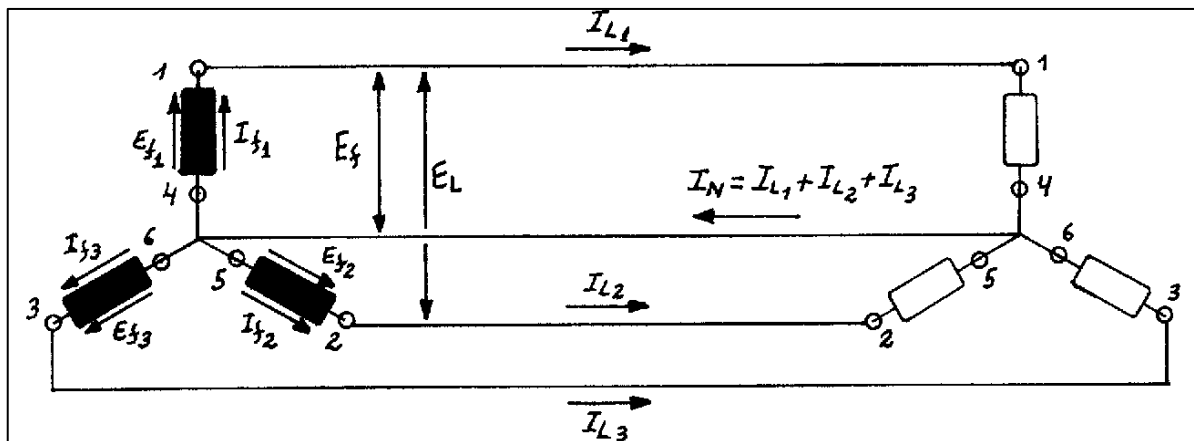
Os sistemas monofásicos, em geral, derivados de uma fase dos sistemas trifásicos, só têm uso para alimentação de pequenas cargas de uso residencial e comercial. Estas cargas geralmente incluem pequenos motores, iluminação, aquecimento, aparelhos eletrônicos, etc.

### 7.3.1. ESTRELA

Nos circuitos trifásicos pode-se utilizar cada uma das fases para alimentar circuitos totalmente independentes conforme mostra a figura. Na verdade, pela quantidade de fios necessários, esta opção não é prática, porém didaticamente, é muito útil.



Percebe-se na figura que, se forem juntados os três fios que correspondem aos fins das três fases, pode-se fazer o retorno da corrente das três fases por um único condutor. O circuito fica então simplificado, tendo 4 fios em vez de 6 fios. Este fio comum às três fases é chamada de **neutro**. Com isto, está formada a conexão **Y** ou **estrela**.



Nas conexões de um circuito trifásico passam a ser importantes os conceitos de grandezas “**de linha**” e “**de fase**”.

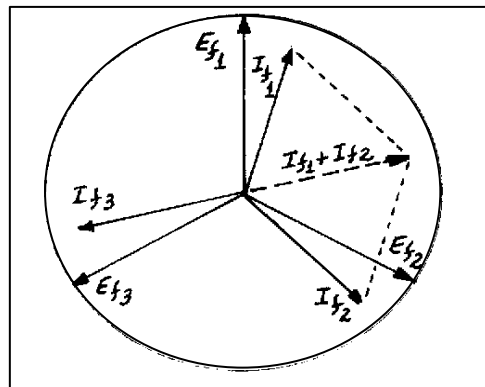
Como se pode ver, as correntes que passam nas fases do gerador são, obrigatoriamente, as mesmas que passam nas linhas respectivas. Esta é a primeira relação para a ligação estrela.

$$I_L = I_F$$

Por outro lado, a corrente no neutro, pela primeira lei de Kirchhoff, é igual à soma das correntes das três fases.

$$I_N = I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} = I_{F1} + I_{F2} + I_{F3}$$

Considerando-se que as cargas instaladas em cada fase sejam iguais em módulo e ângulo obtém-se correntes de mesmo módulo e defasadas de  $120^\circ$ . Conforme mostra a figura ao lado, o somatório destas correntes dá zero, ou seja, a corrente no neutro é nula. Nestes casos de circuito equilibrado, como não há corrente no neutro, este fio é **dispensável**.

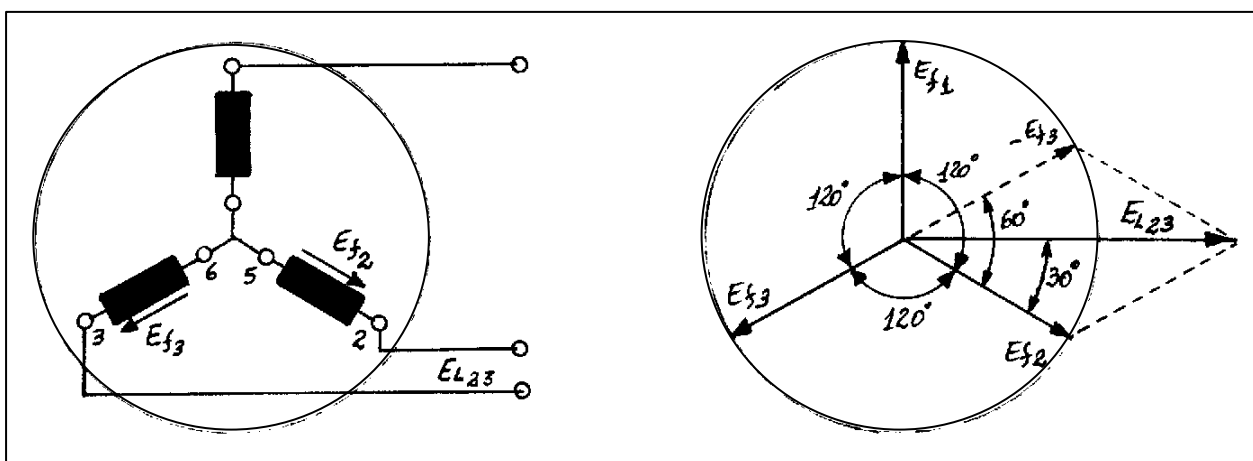


No caso de circuitos trifásicos desequilibrados a corrente no neutro não é nula podendo, num caso extremo, ser igual à corrente de uma das fases. Nestes casos, o uso do neutro é obrigatório. Se o neutro, num circuito trifásico desequilibrado, for interrompido, a corrente no neutro terá que se redistribuir entre as fases, causando um desequilíbrio das tensões de fases, isto é, alguma fase apresenta sobretensão e outra subtensão, o que poderá danificar alguns aparelhos. Neste caso, o neutro apresenta d.d.p. em relação a terra podendo dar choques nas pessoas que tiverem contato com o mesmo.

A distribuição de energia pública se caracteriza como um circuito desequilibrado, pois cada consumidor pode ser monofásico, bifásico e trifásico. Para que a distribuição de corrente seja o mais uniforme possível entre as fases, é feito o seguinte:

- Ligar alternadamente os consumidores monofásicos entre fases.
- Não ligar grandes cargas monofásicas (transformador de solda, motores monofásicos grandes, grandes residências, etc. ).
- Aterrar o neutro em cada medidor para garantir a continuidade do mesmo até o transformador pela terra.

Para achar a tensão entre linhas (tensão de linha) deve-se somar as f.e.m.s. das duas fases, por exemplo,  $E_{f1}$  e  $E_{f2}$  considerando o ângulo de defasagem entre elas. Nota-se, no entanto, que a f.e.m. da fase 3 está sendo tomada invertida em relação à fase 2. Para que fosse tomada positivamente teria que ser ligado o fim de uma fase com o início da outra fase. Deve-se, então somar  $E_{f2}$  com  $E_{f3}$  invertida, ou seja, com  $-E_{f3}$ .



Como se pode ver a f.e.m. entre as fases 2 e 3 ( $E_{L23}$ ) é obtida pela soma das projeções de  $-E_{f3}$  e de  $E_{f2}$  sobre a linha horizontal.

$$E_{L3} = -E_{f3} \cdot \cos 30^\circ + E_{f2} \cdot \cos 30^\circ \quad \text{mas} \quad |E_{f2}| = |E_{f3}| = E_f$$



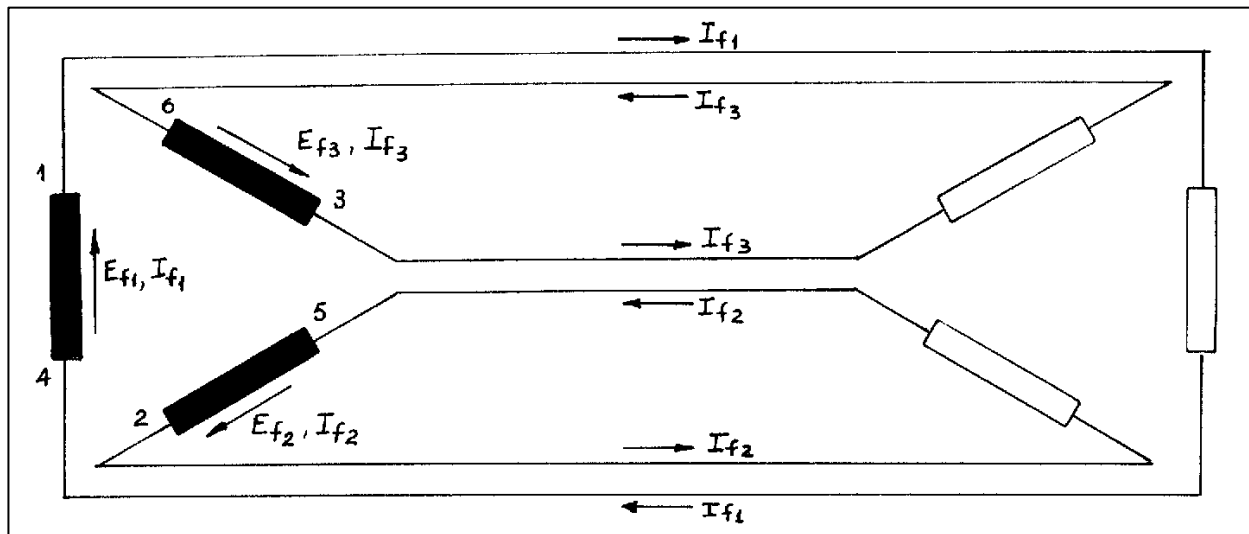
$$E_{L23} = 2 \times E_f \cdot \cos 30^\circ = 2 \times E_f \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = E_f \cdot \sqrt{3}$$

Genericamente tem-se:

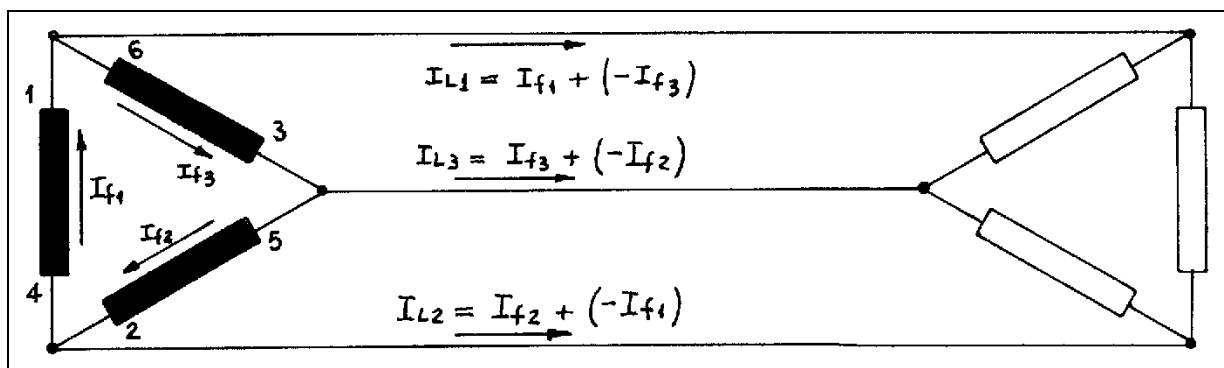
$$E_L = E_f \cdot \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad V_L = V_f \cdot \sqrt{3}$$

### 7.3.2. TRIÂNGULO

Como já foi dito, pode-se usar cada fase independentemente uma da outra para alimentar cargas isoladas. Neste caso, teremos uma nova configuração ao circuito, conforme a figura a seguir.



Esta nova disposição sugere usar apenas 3 fios em vez de 6, conforme a figura a seguir, formando a ligação delta ( $\Delta$ ) ou **triângulo**. Na conexão triângulo liga-se o fim de uma fase com o início da seguinte e assim sucessivamente até fechar o circuito, ou seja, liga-se 4 com 2, 5 com 3 e 6 com 1. Como forma-se uma malha fechada de baixa impedância interna esta ligação só é possível se a soma das três f.e.m.s. resultar zero. Caso contrário haveria fortes correntes de desequilíbrio entre as fases (dentro do triângulo) mesma com a carga desligada do gerador. Estas correntes de circulação interna corresponderiam a uma perda de energia com aquecimento demasiado do gerador.

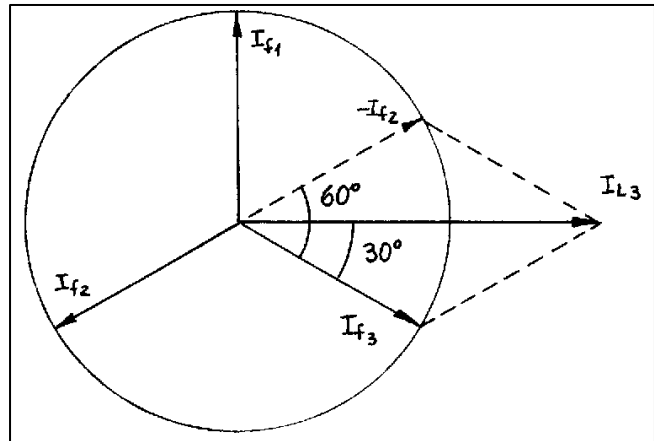


Tem-se que o somatório das tensões dentro do triângulo é:

$$E_{f1} + E_{f2} + E_{f3} = 0$$

A corrente na linha ( $I_L$ ), como se pode ver, é uma composição das correntes de fase, por exemplo, a corrente da linha 3 é obtida pela soma da corrente da fase 3 com o inverso da corrente na fase 2.

Pela semelhança com a dedução já feita, tem-se que a corrente de linha é a soma das projeções das correntes de fase  $-I_{f2}$  e  $I_{f3}$  em relação ao eixo horizontal.



$$I_{L3} = -I_{f2} \cdot \cos 30^\circ + I_{f3} \cdot \cos 30^\circ \quad \text{mas} \quad |I_{f2}| = |I_{f3}| = I_f$$

$$I_{L3} = 2 \times I_f \cdot \cos 30^\circ = 2 \times I_f \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = I_f \cdot \sqrt{3}$$

Genericamente tem-se:

$$I_L = I_f \cdot \sqrt{3}$$

Com relação a f.e.m entre linhas, pode-se afirmar que é igual à f.e.m. da fase existente entre estas linhas como está evidente na figura. Assim a relação fica:

$$E_L = E_F \quad \text{ou} \quad V_L = V_F$$

## 7.4. POTÊNCIA DOS CIRCUITOS TRIFÁSICOS

### 7.4.1. SISTEMA ESTRELA

A potência aparente que o gerador fornece à linha é igual à soma das potências aparentes geradas nas suas fases.

$$S_T = E_{F1} \cdot I_{F1} + E_{F2} \cdot I_{F2} + E_{F3} \cdot I_{F3}$$

Considerando-se apenas geração e carga equilibradas tem-se que os módulos das f.e.m.s. e das correntes são iguais, portanto:

$$S_T = 3 \cdot E_F \cdot I_F \quad \text{ou} \quad S_T = 3 \cdot V_F \cdot I_F$$

Como, na ligação estrela,  $I_L = I_F$  e  $V_L = V_F \cdot \sqrt{3}$  tem-se:

$$S_T = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L$$

$$S_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L$$

### 7.4.2. SISTEMA TRIÂNGULO

A potência aparente que o gerador fornece à linha é igual à soma das potências aparentes geradas nas suas fases.

$$S_T = E_{f1} \cdot I_{f1} + E_{f2} \cdot I_{f2} + E_{f3} \cdot I_{f3}$$

Considerando-se apenas geração e carga equilibradas tem-se que os módulos das f.e.m.s. e das correntes são iguais, portanto:

$$S_T = 3 \cdot E_F \cdot I_F \quad \text{ou} \quad S_T = 3 \cdot V_F \cdot I_F$$

Como, na ligação triângulo,  $V_L = V_F$  e  $I_L = I_F \cdot \sqrt{3}$  tem-se:

$$S_T = 3 \cdot V_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

$$S_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L$$

Permanecem válidas as relações entre as potências ativa, reativa e aparente, como já foi visto nos circuitos monofásicos, tanto para a ligação estrela quanto para a ligação triângulo.

$$P_T = S_T \cdot \cos \phi$$

$$Q_T = S_T \cdot \sin \phi$$

### 7.4.3. COMPARAÇÃO ENTRE A LIGAÇÃO ESTRELA E TRIÂNGULO

Supondo que dois geradores semelhantes tenham o mesmo número de espiras por fase e a mesma seção de fio, conclui-se que eles produzirão as mesmas f.e.m.s. por fase e terão a mesma capacidade de fornecimento de corrente por fase.

De acordo com a ligação ser estrela ou triângulo o que vai se modificar serão a tensão de linha e a corrente de linha. Na ligação estrela ter-se-á mais tensão de linha e menor corrente de linha e na ligação triângulo menor tensão de linha e maior corrente de linha. Com isto, vê-se que a potência aparente do gerador não se altera com o tipo de conexão.

Se considerarmos que a tensão de linha e a corrente de linha devem ser iguais nas duas conexões, serão modificadas a tensão e a corrente de fase conforme a ligação.

O gerador ligado em estrela necessita de menos espiras em cada fase, porém os fios devem ter maior seção transversal enquanto que no triângulo deve-se ter mais espiras por fase e fios com menor seção transversal.

Estas relações aplicam-se também a motores, transformadores e outros aparelhos trifásicos. Resumindo, o projetista, a princípio, pode escolher qualquer uma das conexões para um dado aparelho trifásico desde que use o número correto de espiras e seção de fio adequada.

O fornecimento de energia através de sistemas trifásicos serve para alimentar cargas trifásicas e também cargas monofásicas. As cargas trifásicas propriamente ditas, tais como motores, aquecedores trifásicos, etc., são equilibradas e podem ser agrupadas em estrela ou em triângulo, desde que obedeçam a tensão da linha. Nestes casos, a ligação e o desligamento são simultâneos das três fases. Em se tratando de cargas monofásicas alimentadas por linhas trifásicas tem-se um natural desequilíbrio entre as três fases e sempre requer um comando independente para cada um das cargas.

Neste caso, a ligação correta é a estrela com neutro (a quatro fios) onde as cargas são ligadas entre cada fase e o neutro. Desta forma, pode-se interromper uma das cargas sem interferir nas outras e, além disto, tem-se disponível dois valores de tensão o que é uma vantagem em termos de flexibilidade de utilização. Por estes motivos a distribuição de energia pública é sempre proveniente de uma fonte ligada em estrela com neutro.

### 7.4.4. CORREÇÃO DO FATOR DE POTÊNCIA

A correção do fator de potência para circuitos trifásicos obedece às mesmas regras já vistas para correção monofásica. Calcula-se a potência reativa do capacitor pela equação já conhecida:

$$Q_{CT} = P_T \cdot (\tan \phi_1 - \tan \phi_2)$$

A diferença reside apenas no fato dos capacitores serem agora trifásicos, ligados internamente em estrela ou em triângulo e com apenas três terminais acessíveis. Neste caso a capacitância dos capacitores de cada fase só serão conhecidas se tivermos conhecimento das conexões internas dos mesmos. Sabendo-se a potência reativa capacitiva de cada fase do capacitor trifásico e a tensão por fase ( que depende do tipo de agrupamento ) pode-se chegar na capacitância equivalente dos capacitores de uma fase por:

$$Q_{CF} = V_f^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_F$$

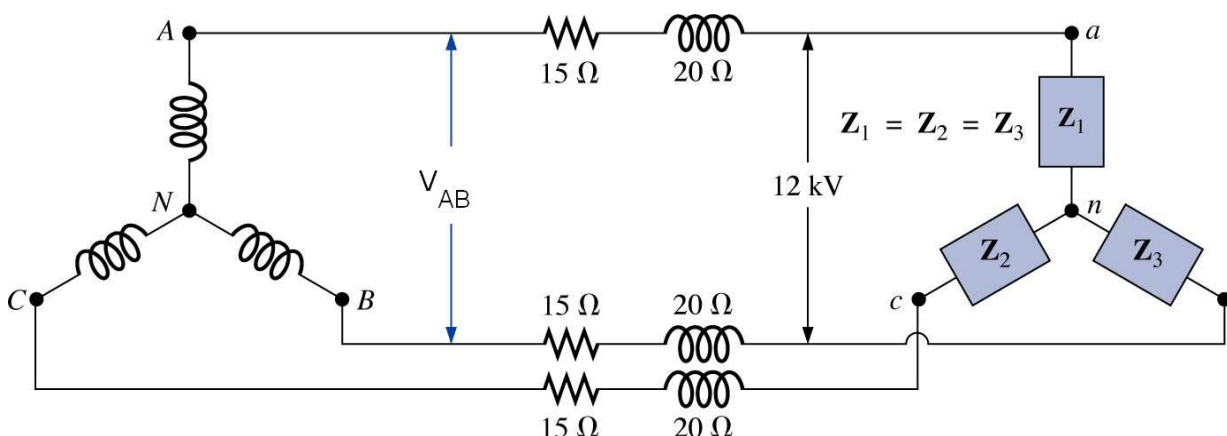
logo

$$C_F = \frac{Q_{CF}}{V_f^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

Para especificar um capacitor para correção de fator de potência geralmente é suficiente fornecer o número de fases, a tensão de linha, potência reativa total e frequência.

Exemplo: As três linhas de transmissão do sistema trifásico de três fios mostrados na figura abaixo possuem uma impedância de  $15 + j20 \, (\Omega)$ . O sistema fornece uma potência total de 160kW em 12kV para uma carga trifásica equilibrada com um fator de potência atrasado igual a 0,86.

- Determine o módulo da tensão  $V_{AB}$  do gerador.
- Encontre o fator de potência da carga total aplicada ao gerador.
- Qual é a eficiência (rendimento) do sistema?



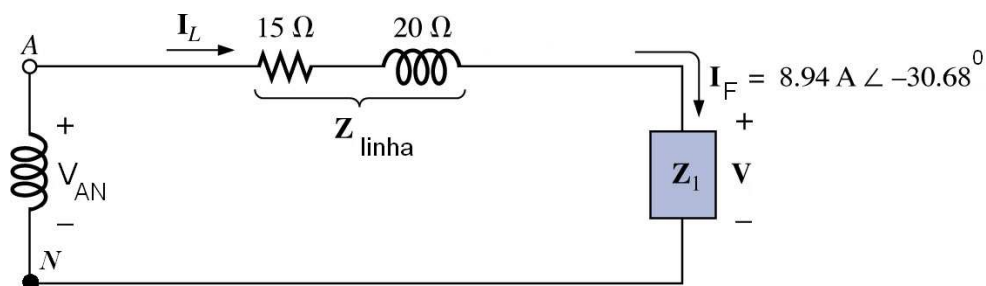
$$V_{AB(carga)} = \frac{12 \text{ kV}}{\sqrt{3}} = 6936,42 \text{ V}$$

$$P_{T(carga)} = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad I_F = \frac{160 \text{ kW}}{3 \times 6936,42 \times 0,86} = 8,94 \text{ A}$$

$$\cos \varphi = 0,86 \Rightarrow \varphi = 30,68^\circ \quad \cos \varphi \text{ atrasado} \Rightarrow I \text{ atrasada}$$

$$V_{AB} = V_{AB} \angle 0^\circ \quad \Rightarrow \quad I_{ab} = 8,94 \text{ A} \angle -30,68^\circ$$

## CIRCUITO EQUIVALENTE PARA UMA DAS FASES



$$Z_{\text{linha}} = 15 + j20 = 25 \angle 53,13^\circ \Omega$$

$$V_{AN} - I_F \cdot Z_{\text{linha}} - V_F = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{AN} = I_F \cdot Z_{\text{linha}} + V_F$$

$$V_{AN} = (8,94 \text{ A} \angle -30,68^\circ) \cdot (25 \angle 53,13^\circ \Omega) + 6936,42 \text{ V} = 206,56 \text{ V} + j85,35 \text{ V} + 6936,42 \text{ V}$$

$$V_{AN} = 7142,98 \text{ V} + j85,35 \text{ V} = 7143,5 \text{ V} \angle 0,68^\circ \Omega$$

$$V_{AB} = \sqrt{3} \cdot V_{AN} = 1,73 \cdot 7143,5 = 12358,26 \text{ V}$$

$$P_T = P_{\text{carga}} + P_{\text{linha}} = 160 \text{ kW} + 3 \cdot I_L^2 \cdot R_{\text{linha}} = 160 \text{ kW} + 3 \cdot 8,94^2 \cdot 25$$

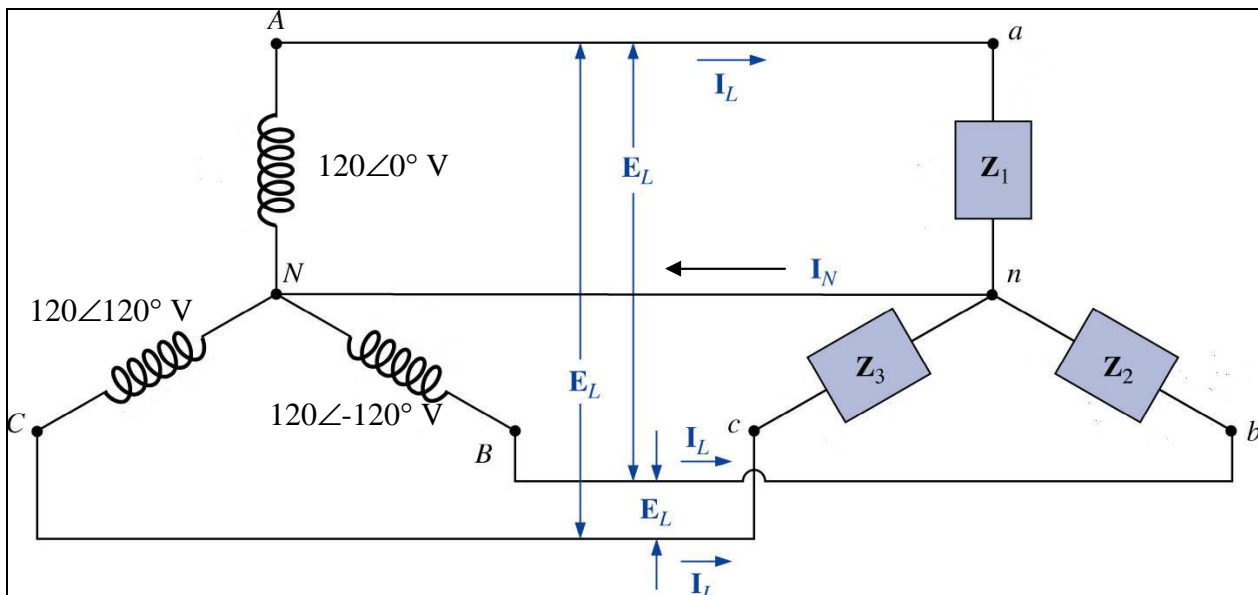
$$P_T = 160 \text{ kW} + 3596,55 \text{ W} = 163596,55 \text{ W}$$

$$P_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi \quad \cos \varphi = \frac{P_T}{\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L} = \frac{163596,55 \text{ W}}{1,73 \cdot 12358,26 \text{ V} \cdot 8,94 \text{ A}} = 0,856$$

$$\eta = \frac{P_{\text{ativa}}}{P_{\text{ativa}} + P_{\text{perdas}}} = \frac{160 \text{ kW}}{160 \text{ kW} + 3596,55 \text{ W}} = 0,978 = 97,8\%$$

EXERCÍCIOS

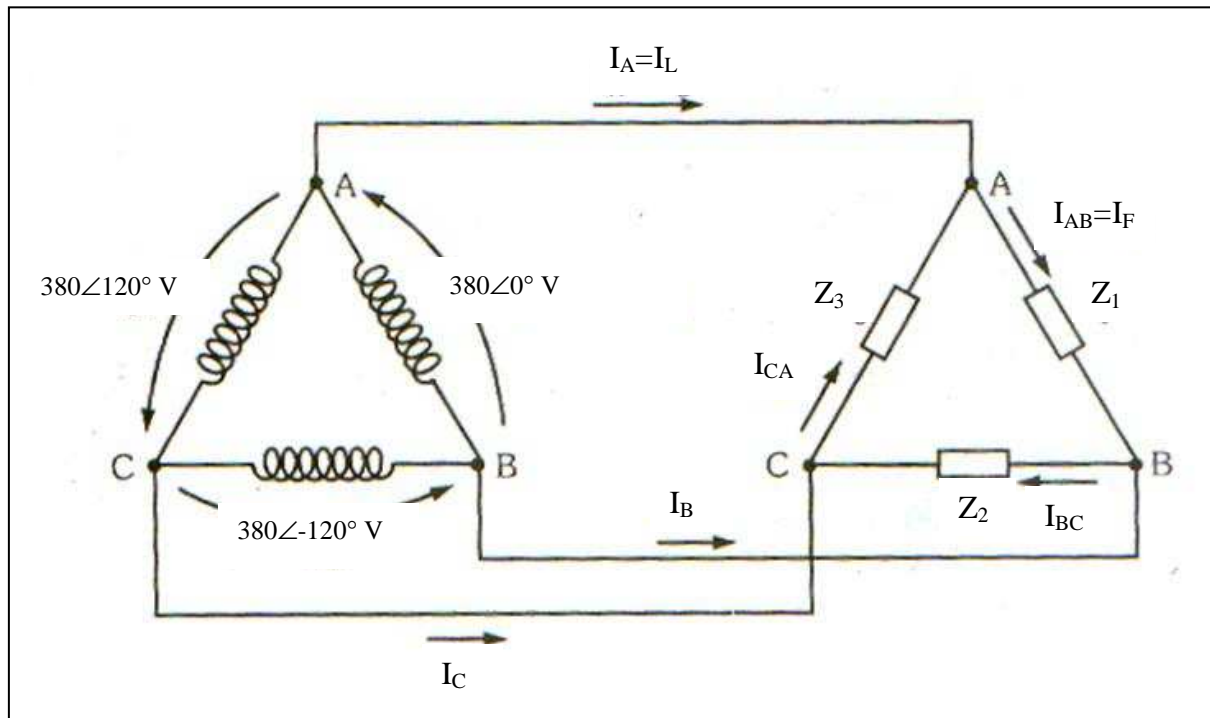
1. Sabendo-se que um gerador trifásico é capaz de fornecer uma corrente de fase de 100A e uma r.e.m. por fase de 220V, pede-se calcular a corrente de linha e a tensão de linha quando o mesmo estiver ligado em estrela e em triângulo
2. Calcular a potência aparente, ativa e reativa que o gerador do exercício acima pode fornecer sob fator de potência 0,8 indutivo considerando as duas ligações possíveis. ( $I_F=100A$  e  $V_F = 220V$ )
3. Suponha um gerador trifásico ligado em estrela, com uma tensão entre fases (tensão de linha) de 440V, uma corrente de 300A por linha e um fator de potência de 0,8. Determine o valor da:
  - a) tensão de fase
  - b) corrente de fase
  - c) potência aparente
  - d) potência ativa
4. Refaça o problema anterior, considerando os mesmos dados fornecidos, apenas com as bobinas do gerador ligadas em triângulo,
5. Um wattímetro ligado a uma carga trifásica constituída só de lâmpadas, indica 13,2kW ( $P_T$ ). A carga é equilibrada e ligada em triângulo com uma tensão de linha de 220V. Sabendo-se que cada lâmpada consome 500mA, determine a corrente de linha, a corrente em cada ramo do agrupamento, o número de lâmpadas de cada um desses ramos e o número total de lâmpadas ligadas.
6. No esquema a seguir temos um gerador trifásico, cujos enrolamentos estão conectados em estrela e a carga também está ligada em estrela, sendo que as impedâncias são resistivas de valor igual a  $10\Omega$ . Determine o valor da corrente (na forma complexa) em cada impedância e também o valor da corrente no neutro.



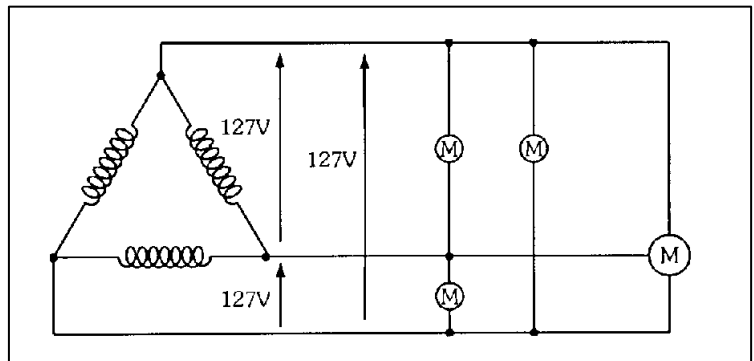
7. Considerando o mesmo circuito anterior, apenas com  $Z_1=10\Omega$ ,  $Z_2=12\Omega$  e  $Z_3=20\Omega$ , determine o valor da corrente no fio neutro.

8. Considerando o mesmo esquema do problema número 6 e admitindo que o módulo da tensão de fase é 220V, determine a tensão de linha, correntes de fase e de linha e potência ativa na carga.

9. No esquema a seguir temos um gerador trifásico, cujos enrolamentos estão conectados em triângulo e a carga também está ligada em triângulo, sendo que as impedâncias são resistivas de valor igual a  $20\Omega$ . Determine, na forma complexa, o valor da corrente em cada impedância da carga e também o valor da corrente de linha.

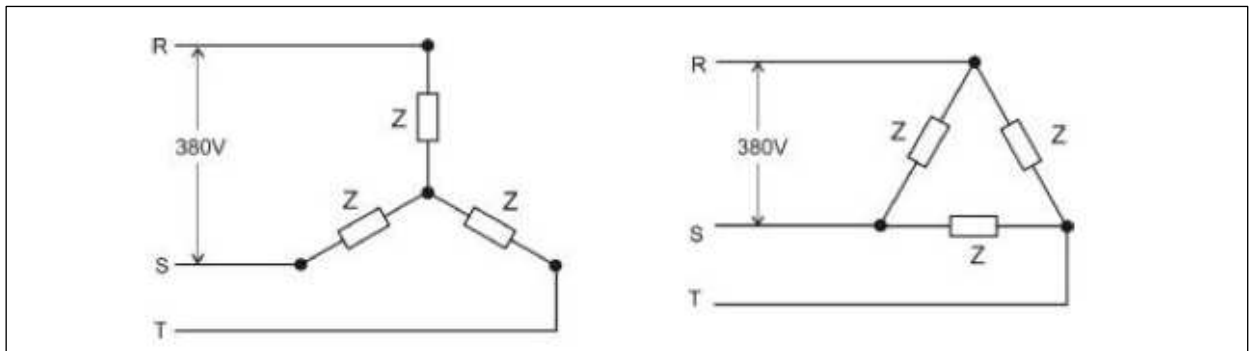


10. O secundário de um transformador ligado em triângulo com tensão de linha de 127V alimenta um motor trifásico de 5kW com  $\text{FP}=0,85$  e mais 3 motores monofásicos de 2kW e  $\text{FP}=0,8$  cada um ligado a uma fase. Determinar a potência ativa, aparente e reativa da instalação, corrente de linha e fator de potência total da instalação.



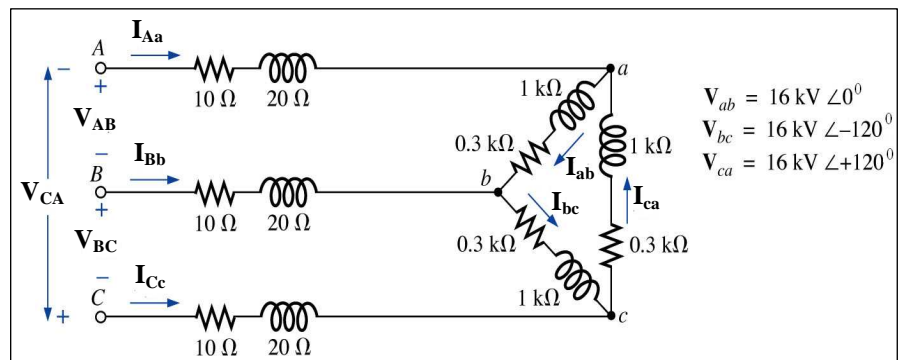
11. Uma carga trifásica equilibrada com impedância igual a  $Z = 8 + j3 \Omega$  por fase é alimentada pelo secundário de um transformador, cujos enrolamentos estão ligados em estrela, sendo que a rede trifásica é de 220V/127V. Sabendo-se que 220V corresponde à tensão entre as fases e que 127V corresponde a tensão entre cada fase e o neutro, determine a potência ativa, reativa e aparente associadas à carga se ela estiver conectada em Y e em  $\Delta$

12. Para cada um dos circuitos que se seguem, determinar a corrente de linha e a impedância  $Z$ . Sabe-se que, em ambos os casos, a carga consome 15,8 kW com  $FP=0,8$  em atraso.



13. Para a carga conectada em triângulo no desenho ao lado, considerando que a sequência de fases do gerador é ABC, determine:

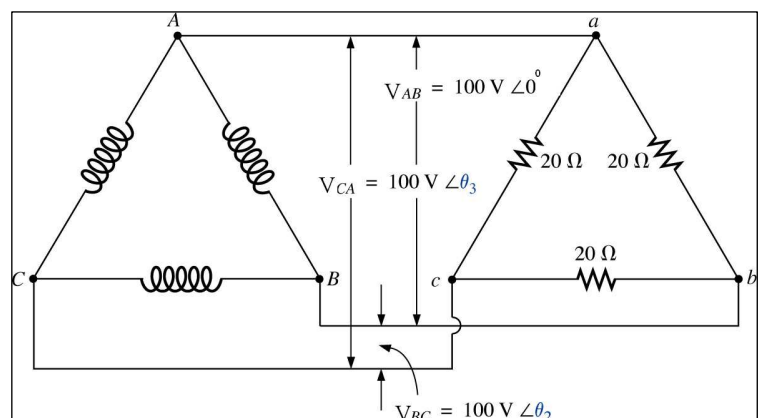
- o módulo e o ângulo de fase das correntes de fase  $I_{ab}$ ,  $I_{bc}$  e  $I_{ca}$
- o módulo e o ângulo de fase das correntes de linha  $I_{Aa}$ ,  $I_{Bb}$  e  $I_{Cc}$ .



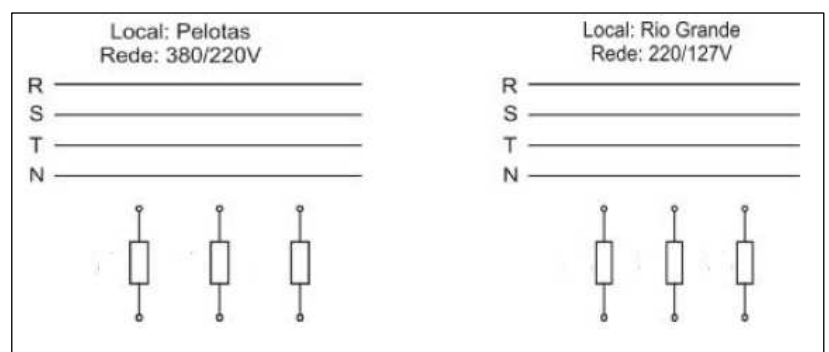
- o módulo e o ângulo de fase das tensões  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$  e  $V_{CA}$ .

14. A sequência de fase do sistema  $\Delta$ - $\Delta$  da figura dada é ABC (na ordem:  $E_{AB}$ ,  $E_{BC}$  e  $E_{CA}$ ). Determine:

- os ângulos  $\theta_2$  e  $\theta_3$
- as tensões de fase da carga na forma polar
- as correntes de fase na forma polar
- o módulo das correntes de linha



15. Muitos motores de indução trifásicos possuem 3 enrolamentos, cada um com uma impedância  $Z$  e podem ser ligados em duas tensões diferentes. Considerando que esses motores são sempre ligados à “tensão de linha” da rede e que a tensão nos enrolamentos deve ser a mesma em qualquer rede, completar, nas figuras abaixo, as ligações necessárias para a operação do motor. (Obs: neste exercício, a tensão em cada enrolamento deve ser de 220 V)

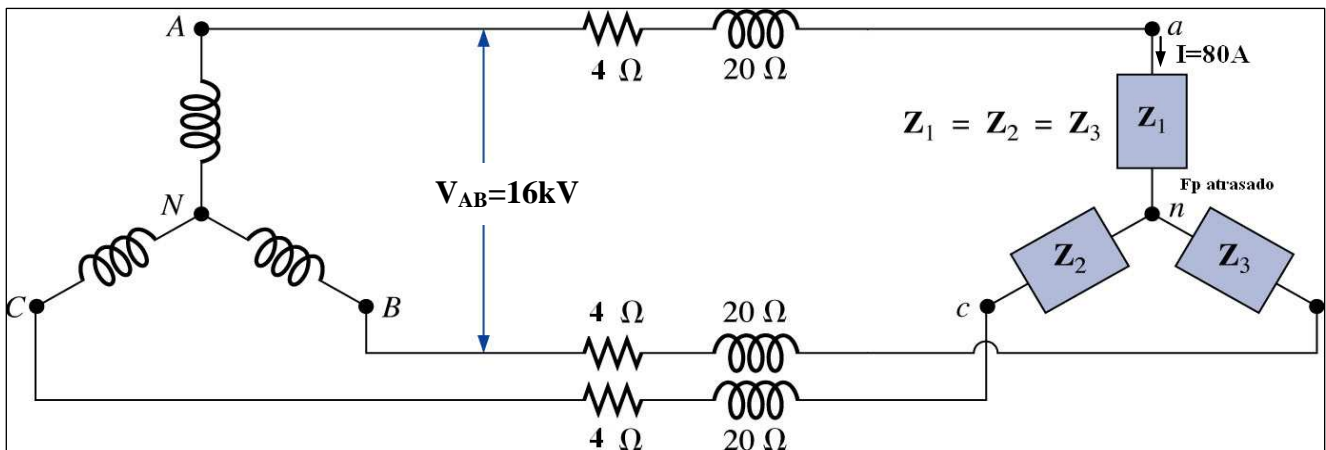




16. Uma carga trifásica equilibrada conectada em Y tem uma tensão de linha 208 V e consome uma potência total de 1,2 kW com um fator de potência adiantado 0,6. Determine a impedância de cada fase em coordenadas retangulares.

17. O sistema Y-Y visto na figura possui uma carga equilibrada e uma impedância de linha  $Z_{\text{linha}} = 4 + j20 \, \Omega$ . Se a tensão de linha do gerador for 16 kV e a potência total for 1200 kW com uma corrente de 80 A, determine:

- o módulo das tensões de fase do gerador
- o módulo das correntes de linha
- a potência total fornecida pela fonte
- o ângulo do fator de potência “vista” pela fonte
- o módulo e o ângulo de fase da corrente  $I_{Aa}$  se  $E_{AN} = E_{AN} \angle 0^\circ$
- o módulo e o ângulo de fase da tensão  $V_{an}$
- a impedância da carga por fase em coordenadas polares
- a diferença entre o fator de potência da carga e o fator de potência de todo o sistema (incluindo  $Z_{\text{linha}}$ )
- a eficiência do sistema  $\Rightarrow \eta = \text{pot. na carga} / (\text{pot. na carga} + \text{pot. perd.})$ .



## RESPOSTAS

**INDUTÂNCIA**

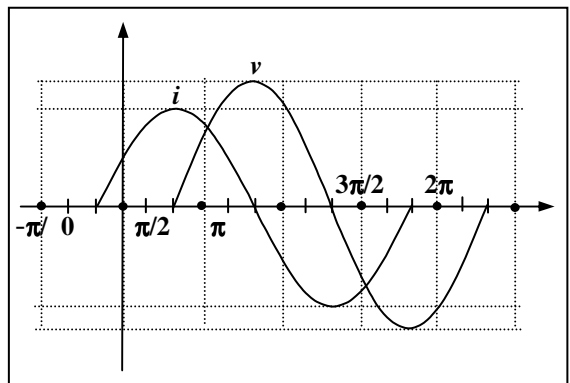
- |                                     |                    |                     |
|-------------------------------------|--------------------|---------------------|
| 1. 500 espiras; 540 $\mu$ Wb; 247mA | 2. 0,785V; 39,45mH | 3. 14mH             |
| 4. 0,16T                            | 5. 111mH           | 6. 5,33H            |
| 7. 20mseg                           | 8. 0,1 $\mu$ Wb    | 9. 23,35mH ; 875esp |
| 10. 1,58 $\mu$ H                    | 11. 3,16mH         | 12. 0; -20mV; 8mV   |

**FUNDAMENTOS DE CA**

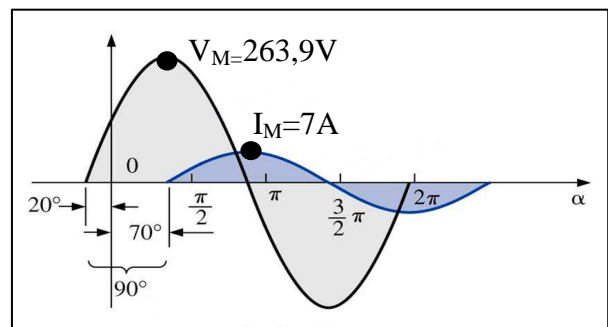
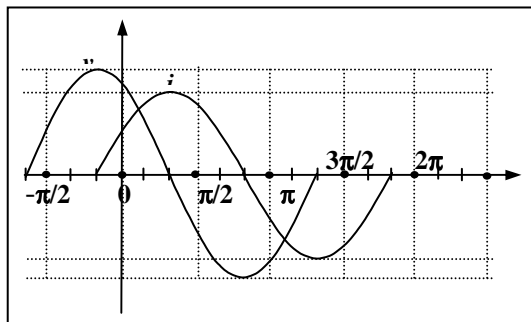
- |  |  |                            |
|--|--|----------------------------|
| 1. 3,83ms; 260hz   | 2. 1,39ms  |                            |
| 3. a: $v=5 \sin 6280t$ (V);  | b: 1ms e 1khz;                                     | c: 0 e 3,53V; d: 1,25W     |
| 4. -26,29A   | 5. 11,75mA   | 6. 20ns                    |
| 7. a: $v, 60^\circ$ e $i$ ;  | b: $v_1, 40^\circ$ e $v_2$ ;                       | c: $i_2, 30^\circ$ e $i_1$ |
| 8. 158,11V   | 9. 5V  |                            |
| 10. 3,214V e 2,939V  | 11. $v = 10 \sin (314 t + 90^\circ)$ ; 20ms; 50hz, |                            |
| 12. 144 $^\circ$   | 13. 200 $\mu$ s; 5khz; 400mV; 141,42mV             |                            |
| 14. 23,578 $^\circ$ e 156,422 $^\circ$ ; 0,411 rad e 2,73 rad; 1,09 ms e 7,24ms  |  |                            |
| 15. 16,67ms e 1ms; 17,68V e 2,12mA; $v = 25 \sin (377 t + 30^\circ)$ e $i = 3 \times 10^{-3} \sin (6280 t - 60^\circ)$ |  |                            |
| 16. -7mV   | 17. 169,68V e 42,42mA                              |                            |
| 18. 40ms e 100 $\mu$ s; 7,07mV e 1,414mA; $v=10\sin(157t-11/18\pi)$ (mV) e $i=2\sin(628 \times 10^3 t + 3/4\pi)$ (mA)  |  |                            |

**CIRCUITOS PUROS**

- |  |            |             |                  |
|--|------------|-------------|------------------|
| 1. 50mA  | 2. 4,24A   | 3. 212V     | 4. 0,84A - 40,7V |
| 5. 3.183.099 $\Omega$ - 2.652.582 $\Omega$ - 159.155 $\Omega$ - 159 $\Omega$               |            |             |                  |
| 7. 2,91A   | 8. 824mA   | 9. 35,3mA   | 10. 3,48A        |
| 11. 0,314 $\Omega$ - 0,3768 $\Omega$ - 6,28 $\Omega$ - 6280 $\Omega$                       |            |             |                  |
| 12. 21,93V   | 13. 1,35 A | 14. 67,4 mA | 15. -273mA       |
| 16. a) 5 $\Omega$ b) 531mH      c) 12,74 $\mu$ F   |            |             |                  |
| 17. $\phi=90^\circ$ , $i$ está adiantada de $90^\circ$ em relação a $v$ , carga capacitiva |            |             |                  |



- |             |          |
|-------------|----------|
| 18. 7,12khz | 19. 377V |
| 20.         | 21.      |



- |   |  |
|---|--|
| 22. 12mA                                    | 23. $v = 800 \sin (500t - 30^\circ)$   |
| 24. a) $v = 100 \sin (\omega t + 90^\circ)$ | b) $v = 8 \sin (\omega t + 150^\circ)$ |
| 25. a) $i = 0,048 \sin (754t + 90^\circ)$   | b) $i = 0,08 \sin (1600t - 80^\circ)$  |

**CIRCUITOS RC E RL SÉRIE**

1.  $\infty$  - 1k $\Omega$  - 1k $\Omega$  - 1k $\Omega$
2. 16,2A - 162V - 195V
3. 4,42A - 88,4V - 117,2V - 66,3V - 39V - 146,8V - 194V - 77V
4. 0
5. 11,62 $\mu$ F
6. 425nF
7.  $V_1=188,6V$ ;  $V_2=200V$
8. 94,9kHz
10. 2A; 63,7mA
11. 57,08 Hz
12. 48 $\Omega$ ; 0,29H
13. 19  $\Omega$  ; 29 mH
14. 200 $\Omega$ ; 155,6 $\Omega$  e 38,9 $^0$
15. 40mH - 220 $\Omega$
16. 5,06A; 50,60V; 25,3V; 19,86V; 79,44V; 10,74 $\Omega$ ; 16,47  $\Omega$ ; 54,34V; 83,34V

**CIRCUITOS RLC SÉRIE**

1. 50V
2. 100 $\Omega$ ; 346 $\Omega$ ; 173 $\Omega$ .
3.  $\infty$  ; 159 $\Omega$  ; 6,2 $\Omega$  ; 6280 $\Omega$  ; 6280000 $\Omega$  ; 1 $\Omega$
4. 1,95A - 97,5V - 73,5V - 51,7V - 122V - 21,8V
5. 159Hz
6. 238 $\mu$ H - 1,88Mhz
7. 6,5 $\mu$ F - 963nF
8. 2,8kHz
9. 3,8 $\Omega$  e 290 $\mu$ F
10. 377 $\Omega$ ; 199 $\Omega$ ; 268 $\Omega$ ; 554mA e 41,7 $^0$
11. 10V; 1k $\Omega$  e 53 $^0$
12.  $i = 36,1 \sin(4000.t + 11,9^0)\text{mA}$  ;  $V_L = 173 \sin(4000.t + 102^0)\text{V}$   
 $V_R = 130 \sin(4000.t + 11,9^0)\text{V}$  ;  $V_C = 225 \sin(4000.t - 78,1^0)\text{V}$  ; 40nF
13. 7,54 $\Omega$ ; 12,06 $\Omega$ ; 12,52 $\Omega$  e 19,25 $\Omega$   
 25,41 $\Omega$ ; 8,66A e 0,98 capacitivo  
 86,6V; 129,9V; 65,3V; 104,4V; 108,4V e 166,7V  
 0,8 indutivo e 0,78 capacitivo

**CIRCUITOS RLC PARALELO**

- 1: 2,52A    2: 1,39A; 1,6A; 24V    3: 0,92A; 0,96A; 1,44A    5: 63pF
- 6: 10mA, 20mA, 50mA, 31,6mA, 3,16mS.    7: 4A; 20V; 5A; 0,1S
- 8: 8,94 $\Omega$ ; 1,79A

**MÉTODO DOS NÚMEROS COMPLEXOS - CIRCUITOS RLC**

1.  $I = 4 \angle -37^0$  (A)
2.  $Z = 48 \angle 53^0$  ( $\Omega$ );  $I = 2,5 \angle 37^0$  (A)
3.  $Z = 4 - j3$  ( $\Omega$ ) =  $5 \angle -37^0$  ( $\Omega$ );  $I = 2 \angle 37^0$  (A)
4.  $Z = 131 \angle -30^0$  ( $\Omega$ );  $I = 0,84 \angle 30^0$  (A)
5.  $Z_2 = 3,51 \angle 44,4^0$  ( $\Omega$ )
6.  $Z = 1,96 + j3,56$  ( $\Omega$ )
7.  $Z = 35,6 \angle 34,8^0$  ( $\Omega$ );  $I_T = 3,09 \angle -34,8^0$  (A);  $I_1 = 2,06 \angle -21,8^0$  (A);  $I_2 = 1,16 \angle -58^0$  (A)  
 $Z = 3,53 \angle -8,2^0$  ( $\Omega$ );  $I_T = 31,1 \angle 98,2^0$  (A);  $I_1 = 22 \angle 53,2^0$  (A);  $I_2 = 22 \angle 143,1^0$  (A)  
 $Z = 16,5 \angle 37,2^0$  ( $\Omega$ );  $I_T = 6,68 \angle -37,2^0$  (A);  $I_1 = 4,17 \angle 52,8^0$  (A);  $I_2 = 7,84 \angle -69,2^0$  (A)
8.  $Z = 6,08 \angle -80,54^0$   $\Omega$ ;  $I_T = 19,74 \angle 80,54^0$  A;  $V_C = 118,44 \angle -9,46^0$  V;  $I_C = 59,22 \angle 80,54^0$  A
9.  $V_C = 18,46 \angle -2,62^0$  V;  $I_T = 1,23 \angle -41,05^0$  A
10.  $Z_T = 3,165 \angle 18,44^0$   $\Omega$ ;  $I_1 = 20 \angle 0^0$  A;  $I_2 = 40 \angle -53,13^0$  A;  $I_3 = 20 \angle 36,87^0$  A;  $I_T = 63,2 \angle 18,44^0$  A
11.  $Z_T = 10,684 \angle 1,5^0$   $\Omega$ ;  $I_2 = 5,5 \angle 38,72^0$  A;  $I_3 = 6,27 \angle -36^0$  A;  $I_T = 9,36 \angle -1,5^0$  A;
12.  $Z_T = 1,2 \angle 90^0$   $\Omega$ ;  $V_L = 60 \angle 0^0$  V     $I_T = 10 \angle -90^0$  A;  $I_1 = 6 \angle -90^0$  A;  $I_2 = 4 \angle -90^0$  A
13.  $Z_T = 3,87 \angle 11,82^0$   $\Omega$ ;  $I_T = 15,504 \angle 41,83^0$  A;  $I_C = 3,985 \angle 82,826^0$  A
14.  $I_T = 0,375 \angle 25,346^0$  A;  $V_C = 70,711 \angle -45^0$  V
15.  $I_T = 1,423 \angle 18,26^0$  A;  $V_L = 26,574 \angle -4,763^0$  V
16.  $Z_T = 22,36 \angle -26,56^0$   $\Omega$ ;  $I_1 = 2,24 \angle 26,5^0$  A;  $I_2 = 2,24 \angle 63,5^0$  A;  $I_3 = 3,17 \angle 71,5^0$  A
17.  $V = 358 \angle -33,6^0$  V    18.  $V = 90,5 \angle -24,5^0$  V;  $I_T = 7,31 \angle -24,2^0$  A;
19.  $V_1 = 76 \angle -22,4^0$  V;  $V_{23} = 49,2 \angle 36^0$  V

**POTÊNCIA EM CA**

1.  $Z = 3,2 + j2,4 \, (\Omega)$
2.  $S = 5808 + j7744 \, (\text{VA})$
3.  $75,6\mu\text{F}; 46,8\angle -23^\circ \text{A}$ .
4.  $\cos \phi = 0,86$  ;  $Z = 22 \, \Omega$ ;  $R = 18,92 \, \Omega$
5.  $R = 4\Omega$ ;  $X = 3 \, \Omega$ ;  $I = 20 \, \text{A}$ ;  $\cos \phi = 0,8$ ;  $S = 2000 \, \text{VA}$ ;  $P = 1600 \, \text{W}$ ;  $Q = 1200 \, \text{VAR}$
6.  $P = 1936 \, \text{W}$ ;  $Q_L = 4356 \, \text{VAR}$ ;  $Q_c = 2904 \, \text{VAR}$ ;  $Q = 1452 \, \text{VAR}$ ;  $S = 2420 \, \text{VA}$ ;  $\text{FP} = 0,8$  i
7.  $\text{FP} = 0,8$  ind;  $S = 10 \, \text{kVA}$
8.  $P = 2420 \text{W}$ ;  $Q_L = 2057 \text{Ar}$ ;  $Q_c = 3872 \text{VAR}$ ;  $Q = 1815 \text{VAR}_c$ ;  $S = 3025 \, \text{VA}$ ;  $\text{FP} = 0,8$  cap
9.  $\text{FP} = 0,921$ ;  $S = 38 \, \text{kVA}$
10.  $C = 230\mu\text{F}$
11.  $C = 16,93\mu\text{F}$ ;  $I = 25,27 \text{A}$
12.  $C = 75\mu\text{F}$ ;  $I = 5,88 \text{A}$ ;  $S = 1176,47 \text{VA}$
13.  $P = 682 \text{W}$
14.  $C = 331,6\mu\text{F}$ ; redução de 40% na corrente
15.  $Z = 2,3 + j1,73 \, \Omega$  ;  $P = 4 \text{kW}$
16.  $S = 7,81 \text{kVA}$ ;  $\text{FP} = 0,64$  atrasado;  $I = 65 \text{A}$ ;  $C = 1105\mu\text{F}$ ,  $I = 41,67 \text{A}$
17.  $P_{fg} = 128,14 \text{W}$ ;  $P_{ab} = 42,7 \text{W}$ ;  $P_{ac} = 106,72 \text{W}$ ;  $P_{bc} = 64,03 \text{W}$ ;  $P_{ad} = 106,72 \text{W}$ ;  $P_{cd} = 0 \text{W}$ ;  $P_{de} = 0 \text{W}$ ;  $P_{fe} = 21,34 \text{W}$
18.  $P = 400 \text{W}$ ;  $Q_C = -400 \text{VAR}$ ;  $S = 565,69 \text{VA}$ ,  $\text{FP} = 0,7071$  adiantado,  $I = 5,66 \angle 135^\circ \text{A}$
19.  $P = 500 \text{W}$ ,  $Q_C = -200 \text{VAR}$ ,  $S = 538,52 \text{VA}$ ,  $\text{FP} = 0,928$  adiantado,  $I = 10,776 \angle 21,875^\circ \text{A}$
20. a)  $P = 7 \text{kW}$ , b)  $Q_L = 7,14 \text{kVAR}$ , c)  $\phi = 45,6^\circ$ , d)  $C = 438 \, \mu\text{F}$ , e)  $\Delta I = 30\%$  f)  $P = 7 \text{kW}$ ,  $Q_L = 3,75 \text{kVAR}$ ,  $\phi = 25,8^\circ$ ,  $C = 234\mu\text{F}$ ,  $\Delta I = 34,7\%$  A

**GERADOR TRIFÁSICO**

1. Estrela:  $100 \text{A}$  e  $381,6 \text{V}$  – Triângulo:  $173,21 \text{A}$  e  $220 \text{V}$
2. Estrela:  $66 \text{kVA}$  ;  $52,8 \text{kW}$  e  $39,6 \text{kVAR}$  – Triângulo:  $66 \text{kVA}$  ;  $52,8 \text{kW}$  e  $39,6 \text{kVAR}$
3.  $254 \text{V}$ ,  $300 \text{A}$ ,  $228,36 \text{kVA}$ ,  $182,69 \text{W}$
4.  $440 \text{V}$ ,  $173 \text{A}$ ,  $228,36 \text{kVA}$ ,  $182,69 \text{W}$
5.  $34,64 \text{A}$ ,  $20 \text{A}$ , 40 lâmpadas, 120 lâmpadas
6.  $I_A = 12 \text{A}$ ;  $I_B = -6 - j10,39 \text{A}$ ;  $I_C = -6 + j10,39 \text{A}$ ;  $I_N = 0 \text{A}$
7.  $I_N = 5,29 \angle -40,90^\circ \text{A}$
8.  $V_L = 381 \text{V}$ ;  $I_L = I_F = 22 \text{A}$ ;  $I_N = 0$ ;  $P = 14,52 \text{kW}$
9.  $I_{AB} = 19 \text{A}$ ;  $I_{BC} = -9,5 - j16,45 \text{A}$ ;  $I_{CA} = -9,5 + j16,45 \text{A}$   
 $I_A = 32,9 \angle -30^\circ \text{A}$ ;  $I_B = 32,9 \angle -150^\circ \text{A}$ ;  $I_C = 32,9 \angle 90^\circ \text{A}$
10.  $P_T = 11 \text{kW}$ ;  $Q_T = 7,6 \text{kVAR}$ ;  $S_T = 13,37 \text{kVA}$ ;  $I_L = 60,78 \text{A}$ ;  $\text{FP}_T = 0,823$
11.  $P = 5,33 \text{kW}$ ;  $Q = 1,93 \text{kVAR}$  ind,  $S = 5,67 \text{kVA}$ ;  $P = 15,98 \text{kW}$ ;  $Q = 5,8 \text{kVAR}$  ind;  $S = 17 \text{kVA}$
12.  $I = 30 \text{A}$ ;  $Z = 5,86 + j4,34 \, \Omega$ ;  $I = 30 \text{A}$ ;  $Z = 10,16 + j7,62 \, \Omega$
13.  $I_{ab} = 15,325 \angle -73,3^\circ \text{A}$ ;  $I_{bc} = 15,325 \angle -193,3^\circ \text{A}$ ;  $I_{ca} = 15,325 \angle 46,7^\circ \text{A}$   
 $I_{Aa} = 26,54 \angle -103,31^\circ \text{A}$ ;  $I_{Bb} = 26,54 \angle -136,68^\circ \text{A}$ ;  $I_{Cc} = 26,54 \angle 16,69^\circ \text{A}$   
 $V_{AB} = 17,014 \angle -0,59^\circ \text{kV}$ ;  $V_{BC} = 17,014 \angle 120,59^\circ \text{kV}$ ;  $V_{CA} = 17,014 \angle 119,41^\circ \text{kV}$
14.  $\theta_1 = -120^\circ$  e  $\theta_2 = +120^\circ$ ;  $V_{ab} = 100 \angle 0^\circ \text{V}$ ;  $V_{bc} = 100 \angle -120^\circ \text{V}$ ;  $V_{ca} = 100 \angle 120^\circ \text{V}$   
 $I_{ab} = 5 \angle 0^\circ \text{A}$ ;  $I_{bc} = 5 \angle -120^\circ \text{A}$ ;  $I_{ca} = 5 \angle 120^\circ \text{A}$   
 $I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = 8,66 \text{A}$
15. PELOTAS: ligação em estrela - RIO GRANDE: ligação em triângulo
16.  $Z = 12,98 + j17,31 \, \Omega$
17.  $V_F = 9,2376 \text{V}$ ;  $I_L = 80 \text{A}$  ;  $P_T = 1276,8 \text{kW}$ ,  $\text{FP} = 0,576$  atrasado;  $I_{AB} = 80 \angle -54,83^\circ \text{A}$ ;  
 $V_{an} = 7773,45 \angle 4,87^\circ \text{V}$ ;  $Z = 62,52 + j74,38 \, \Omega$ ;  $\text{FP}_{\text{total}} = 0,576$  atrasado e  $\text{FP}_{\text{carga}} = 0,643$  atrasado;  
 $\eta = 93,98\%$

## **Bibliografia**

**MARTIGNONI**, Alfonso - Eletrotécnica. Porto Alegre: Globo, 1971.

**VAN VALKENBURG**, Nooger & Neville - Eletricidade Básica. Rio de Janeiro: Editora ao Livro Técnico, 1982.

**RESNICK**, Robert e **HALLIDAY** David- Física 3. Rio de Janeiro: LTC, 1985.

**CAVALCANTI**, P. J. Mendes - Fundamentos de Eletrotécnica para Técnicos em Eletrônica (15ª edição). Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1984.

**CIPELLI**, Marco e **MARKUS** Otávio- Circuitos em Corrente Contínua. São Paulo: Érica, 1999.

**MÁXIMO**, Antônio e **ALVARENGA** Beatriz - Curso de Física 3. São Paulo: Scipione, 1997.

**BOYLESTAD**, Robert L, - Introdução à Análise de Circuitos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

**CHAVES**, Roberto - Manual de Instalações Elétricas. Rio de Janeiro: Tecnoprint, 1981.

**GUERRINI**, Délio Pereira - Eletrotécnica. São Paulo: Érica, 1990.

**GUERRINI**, Délio Pereira - Instalações Elétricas Prediais. São Paulo: Érica, 1990.

**GOZZI**, Giusepe Giovanni Massimo - Circuitos Magnéticos. São Paulo: Érica, 1996.

**ALBUQUERQUE**, Rômulo Oliveira – Circuitos em Corrente Alternada. São Paulo: Érica, 1997.

**CENAFOR**, Programa de Educação Técnica - Ensino Industrial - Habilitação de Eletrotécnica. São Paulo: Cenafor, 1985.