ترکیب

صالح زارع زاده

محتوا

۱ شمارش ترکیبات تایی-k

تعداد ترکیبات k از مجموعه S مشخص شده از عناصر غالباً در متون ترکیبی ابتدایی توسط C (n,k) یا با یک تنوع مانند C_k^n، ${}_nC_k$، ${}^nC_k$، $C_{n,k}$ یا حتی C_n^k (فرم دوم در متون فرانسوی ، رومانیایی ، روسی ، چینی و لهستانی استاندارد بود (نیاز به استناد)). با این وجود ، در همان زمینه های ریاضی ، همان تعداد رخ می دهد ، جایی که به آن اشاره شده است $\binom{n}{k}$ (معمولا خوانده میشود انتخاب n k)؛ به ویژه در فرمول binom به عنوان ضریب اتفاق می افتد ، از این رو نام آن را ضریب دو جمله ای می گذارد. می توان تعریف کرد $\binom{n}{k}$ برای همه اعداد طبیعی k به یکباره توسط رابطه:

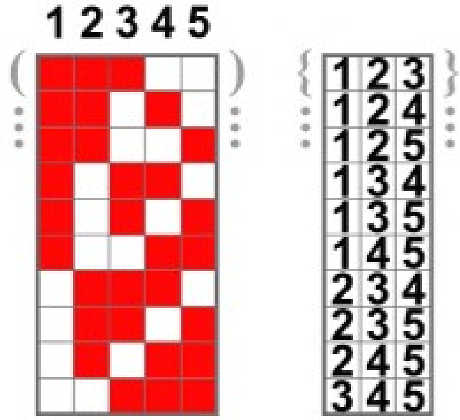
$$(1+X)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} X^k$$

که از آن روشن است که

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

برای دیدن اینکه این ضرایب ترکیب K را از S در نظر می گیرند ، ابتدا می توانید مجموعه ای از متغیرهای مجزا X_s را برچسب گذاری شده توسط عناصر S S در نظر بگیرید و محصول را بر روی همه عناصر S گسترش دهید:

$$\prod_{s\in S} (1+X_s);$$



شکل ۱: زیرمجموعه های ۳ عضوی از مجموعه ۵ تایی

این دارد2^nاصطلاحات مجزا مربوط به تمام زیر مجموعه های S ، هر زیر مجموعه محصول از متغیرهای مربوطه را ارائه می دهدX_s. اکنون تنظیم همهX_sبرابر با متغیر بدون علامت X ، به طوری که محصول می شود $(1+X)^n$، اصطلاح هر ترکیبی k از S می شود X^k، به طوری که ضریب آن قدرت در نتیجه برابر با تعداد چنین ترکیبات K باشد.
ضرایب دوتایی به صراحت از طرق مختلف قابل محاسبه است. برای به دست آوردن همه آنها برای موارد اضافی $(1+X)^n$، می توان از رابطه (بازگشت) علاوه بر موارد اساسی که قبلاً ارائه شده است استفاده کرد

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

برای $0 < k < n$، که از زیر دنبال می شود$(1+X)^n = (1+X)^{n-1}(1+X)$؛ این منجر به ساخت مثلث پاسکال می شود. برای تعیین ضریب دوتایی فردی ، استفاده از فرمول عملی تر است

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}$$

شمارنده تعداد k-permutations های n ، یعنی توالی های k عناصر مجزا S را نشان می دهد ، در حالی که مخرج تعداد این گونه k-permutations را می دهد که در صورت نادیده گرفتن ترتیب ، -k ترکیب مشابهی را ارائه می دهند.
هنگامی که k از n / ۲ تجاوز می کند ، فرمول فوق حاوی عواملی است که برای اعداد و مخرج مشترک هستند و لغو کردن آنها به این رابطه می دهد.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

برای$n \leq k \leq 0$این یک تقارن را بیان می کند که از فرمول دوجمله ای مشهود است ، و همچنین با گرفتن مکمل چنین ترکیبی ، می تواند از نظر ترکیبات k نیز قابل درک باشد.$(n-k)$ـ ترکیب. سرانجام یک فرمول وجود دارد که این تقارن را مستقیماً به نمایش می گذارد و این ویژگی را دارد که به راحتی می توان به خاطر آورد:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

که در آن! نشان دهنده فاکتوریل .n از فرمول قبلی با ضرب مخرج و شمارنده با n) ــ (k به دست می آید! بنابراین مطمئناً به عنوان روشی برای محاسبه آن فرمول فرومایه است.

فرمول آخر را می توان بطور مستقیم و با در نظر گرفتن !n جایگشت همه عناصر .S هر یک از این ترکیبات ها با انتخاب عناصر كيك اول خود ، به ترکیب k می بخشند. انتخاب های تکراری زیادی وجود دارد: هر ترکیب ترکیبی از عناصر k اول در بین یکدیگر ، و عناصر نهایی n) ــ (k در بین یکدیگر ترکیب مشابهی را تولید می کنند. این تقسیم بندی را در فرمول توضیح می دهد.

از فرمول بالا روابط بین اعداد مجاور در مثلث پاسکال را در هر سه جهت دنبال کنید:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k} & \text{if} k > 0 \\ \binom{n-1}{k}\frac{n}{n-k} & \text{if} k < n \\ \binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k} & \text{if} n, k > 0 \end{cases}$$

همراه با موارد اساسی$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$، اینها امکان محاسبه پی در پی همه تعداد ترکیبات از همان مجموعه (یک ردیف در مثلث پاسکال) ، ترکیبی-k از مجموعه هایی با اندازه های در حال رشد و ترکیبات با یک مکمل از اندازه ثابت n ــ k را می دهد.

۱.۱ نمونه ای از شمارش ترکیبات

به عنوان یک مثال خاص ، می توان تعداد دست های پنج کارت را از یک عرشه استاندارد پنجاه و دو کارت محاسبه کرد:

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2,598,960$$

۲.۱ شمارش ترکیبات تایی-k

می توان همه ترکیبات k مجموعه ای از S عناصر n را به ترتیب ثابت شمارش کرد ، که باعث

ایجاد حیات از فاصله زمانی از$\binom{n}{k}$ عدد صحیح با مجموعه ای از آن ترکیب .K با فرض اینکه S خود سفارش داده شده است ، به عنوان مثال $S = \{12 \cdots n\}$

، دو امکان طبیعی برای سفارش ترکیب k وجود دارد: با مقایسه اولین عناصر کوچک آنها (مانند تصاویر بالا) یا با مقایسه بزرگترین عناصر آنها ابتدا. گزینه دوم این مزیت را دارد که اضافه کردن یک عنصر بزرگتر جدید به S باعث تغییر قسمت اولیه شمارش نمی شود بلکه فقط ترکیب های جدید K را از مجموعه بزرگتر بعد از موارد قبلی اضافه کنید. با تکرار این روند ، شمارش می تواند به طور نامحدود با ترکیب K از مجموعه های همیشه بزرگتر گسترش یابد. اگر علاوه بر این ، فواصل اعداد صحیح برای شروع از ۰ گرفته شود ، می توان ترکیب k را در یک مکان معین i در شمارش به راحتی از i محاسبه کرد ، و حیات بدست آمده به عنوان سیستم عدد ترکیبی شناخته می شود. همچنین در ریاضیات محاسباتی به عنوان "rank" / "rank" و "unranking" شناخته می شود.

روشهای زیادی برای شمارش ترکیبات k وجود دارد. یک راه این است که از همه شماره های باینری کمتر از بازدید بازدید کنید 2^nآن دسته از اعداد را که دارای بیت k غیر صفر است انتخاب کنید ، اگرچه این حتی برای n مثلا (بسیار کوچک) بسیار ناکارآمد است.$n = 20$ نیاز به بازدید حدود یک میلیون عدد دارد در حالی که حداکثر تعداد مجاز ترکیب k در حدود ۱۸۶ هزار برای k = ۱۰ است). موقعیت های این ۱ بیت در چنین عددی ، ترکیبی-k خاص از مجموعه است$\{1, , n\}$. روش ساده و سریعتر ، ردیابی تعداد شاخص های k عناصر انتخاب شده ، با شروع است$\{0, \cdots, k-1\}$(مبتنی بر صفر) یا $\{1, \cdots, k\}$ (تک پایه ای) به عنوان اولین ترکیب ترکیبی مجاز و سپس بارها و بارها با افزایش آخرین عدد شاخص در صورتی که پایین تر از باشد ، به ترکیب -k مجاز بعدی منتقل می شود. $n-1$(مبتنی بر صفر) یا n (یک پایه) یا آخرین عدد شاخص x که کمتر از عدد شاخص زیر است منهای یک است درصورتی که چنین شاخصی وجود داشته باشد و مجدداً تعداد شاخص ها را بعد از x به تنظیم مجدد کنید.$\{x+1, x+2, \}$.

۲ تعداد ترکیبات با تکرار

۱.۲ مثال برای شمردن تعداد زیرمجموعه ها

شماره سطر.	مجموعه ۳ تایی	جواب	میله ها و ستاره ها
۱	۱،۱،۱	[۳،۰،۰،۰]	$\star\star\star\vert\vert\vert$
۲	۱،۱،۲	[۲،۱،۰،۰]	$\star\star\vert\star\vert\vert$
۳	۱،۱،۳	[۲،۰،۱،۰]	$\star\star\vert\vert\star\vert$
۴	۱،۱،۴	[۲،۰،۰،۱]	$\star\star\vert\vert\vert\star$
۵	۱،۲،۲	[۱،۲،۰،۰]	$\star\vert\star\star\vert\vert$
۶	۱،۲،۳	[۱،۱،۱،۰]	$\star\vert\star\vert\star\vert$
۷	۱،۲،۴	[۱،۱،۰،۱]	$\star\vert\star\vert\vert\star$
۸	۱،۳،۳	[۱،۰،۲،۰]	$\star\vert\vert\star\star\vert$
۹	۱،۳،۴	[۱،۰،۱،۱]	$\star\vert\vert\star\vert\star$
۱۰	۱،۴،۴	[۱،۰،۰،۲]	$\star\vert\vert\vert\star\star$
۱۱	۲،۲،۲	[۰،۳،۰،۰]	$\vert\star\star\star\vert\vert$
۱۲	۲،۲،۳	[۰،۲،۱،۰]	$\vert\star\star\vert\star\vert$
۱۳	۲،۲،۴	[۰،۲،۰،۱]	$\vert\star\star\vert\vert\star$
۱۴	۲،۳،۳	[۰،۱،۲،۰]	$\vert\star\vert\star\star\vert$
۱۵	۲،۳،۴	[۰،۱،۱،۱]	$\vert\star\vert\star\vert\star$
۱۶	۲،۴،۴	[۰،۱،۰،۲]	$\vert\star\vert\vert\star\star$
۱۷	۳،۳،۳	[۰،۰،۳،۰]	$\vert\vert\star\star\star\vert$
۱۸	۳،۳،۴	[۰،۰،۲،۱]	$\vert\vert\star\star\vert\star$
۱۹	۳،۴،۴	[۰،۰،۱،۲]	$\vert\vert\star\vert\star\star$
۲۰	۴،۴،۴	[۰،۰،۰،۳]	$\vert\vert\vert\star\star\star$

مراجع

[1] Benjamin, Arthur T.; Quinn, Jennifer J. (2003), Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, The Dolciani Mathematical Expositions 27, The Mathematical Association of America, ISBN 978-0-88385-333-7

[2] Brualdi, Richard A. (2010), Introductory Combinatorics (5th ed.), Pearson Prentice Hall, ISBN 978-0-13-602040-0

[3] Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, John Wiley& Sons, INC, 1999.

[4] Mazur, David R. (2010), Combinatorics: A Guided Tour, Mathematical Association of America, ISBN 978-0-88385-762-5

[5] Ryser, Herbert John (1963), Combinatorial Mathematics, The Carus Mathematical Monographs 14, Mathematical Association of America

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Combination♯Number_of_k-combinations