方法精讲-数量 4

（笔记）

主讲教师：唐宋

授课时间：2020.04.10

方法精讲-数量 4（笔记）

学习任务：

1.课程内容：容斥原理、排列组合与概率

2.授课时长：3 小时

3.对应讲义：178 页～184 页

4.重点内容：

（1）掌握两集合公式，三集合的三种公式——标准型、非标准型、常识型

（2）掌握图示法在容斥原理中的运用，理解容斥原理结合最值的考法

（3）掌握常用的排列组合公式，理解分类讨论与分步计算的区别，正难反易则从反面求解

（4）掌握两种经典方法（捆绑法、插空法）的适用范围和操作步骤

（5）掌握概率问题的两种题型——给情况求概率、给概率求概率

第八节　容斥原理

【知识点】容斥原理：

1.在中学中，容斥原理属于集合的概念。

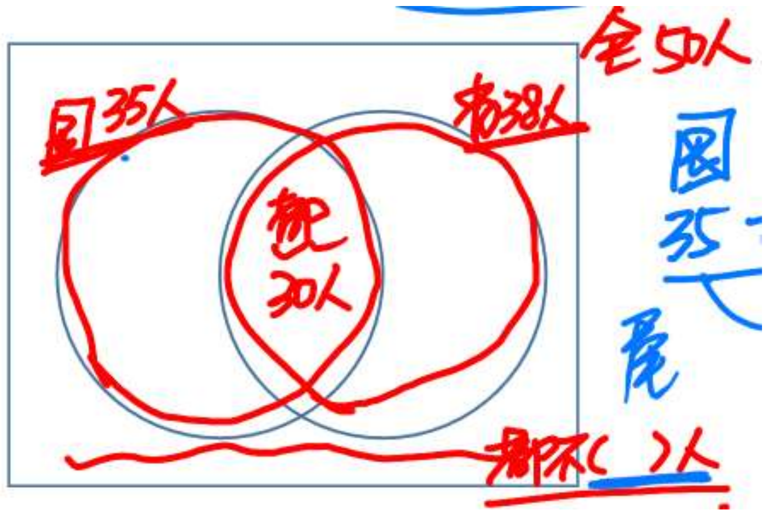
（1）集合：把具有同一属性的所有元素放在同一圆圈中。

（2）两种有交叉有融合，属于两集合容斥原理问题；三种有交叉有融合，属于三集合容斥原理问题。

2.两集合容斥公式：A+B-A∩B=总数-都不。

3.如下图所示：例如，全班有 50 人，35 人参加国考，38 人参加省考，30 人既参加省考又参加国考。还有一部分人两种考试都不参加，属于圆圈外的范围，为“都不”，问“都不”有多少人。两种有交叉有融合，属于两集合容斥原理。参加国考的人数为 A，参加省考的人数为 B，参加国考人数+参加省考人数=35+38=73＞总人数 50 人，因为其中有一部分人（30 人）被重复计算，30 人被算了 2 次，要减去重复计算的人数，35+38-30。A∪B=A+B-A∩B=35+38-30，“并集”的概念大家了解即可，因为公考不考，这里是为了和中学的知识点产生联系。35+38-30=50-（　），一般来说，选项尾数不同，利用尾数法，尾数 3=尾数 0-

（　）的尾数，则（　）的尾数为 7。



4. 考试中把“补集”理解为“都不”。就是哪个集合都不属于，这样描述比较接地气。只理解交集（∩）的概念即可。

【例 1】（2019 江苏）市电视台向 150 位观众调查前一天晚上甲、乙两个频道的收视情况，其中 108 人看过甲频道，36 人看过乙频道，23 人既看过甲频道又看过乙频道，则受调查观众中在前一天晚上两个频道均未看过的人数是：

A. 17　　　　B. 22

C. 29　　　　D. 38

【解析】例 1.“23 人既看过甲频道又看过乙频道”，两种情况有交叉部分，为两集合容斥原理，“均未”就是都没看过，其中 A 为甲，B 为乙，都不为（　），甲+乙-甲∩乙（都）=全-都不，代入数据，108+36-23=150-（　）。选项尾数不同，可以计算尾数，尾数 8+尾数 6=尾数 4，尾数 4-尾数 3=尾数 1，尾数 1=尾数 0-（　）的尾数，则（　）的尾数为 9，对应 C 项。【选 C】

【注意】类似于该题，直接套公式的题目，做 1 道题和做 10 道题没有区别，只不过做的次数越多，公式就越熟悉。

【例 2】（2019 辽宁）某大型相亲类综艺节目举办线下联谊活动，在签到时每人可以抽取一张礼物卡，凡是抽中有标签号的礼物卡均有玫瑰花赠送，抽到“谢谢参与”的则赠送一盒面巾纸。带有标签号的礼物卡共 100 张，标签号为 1～100，

按礼物卡标签号发放奖品的规则如下：

（1）标签号为 2 的倍数，领 2 枝玫瑰；

（2）标签号为 3 的倍数，领 3 枝玫瑰；

（3）标签号既是 2 的倍数，又是 3 的倍数可重复领奖；

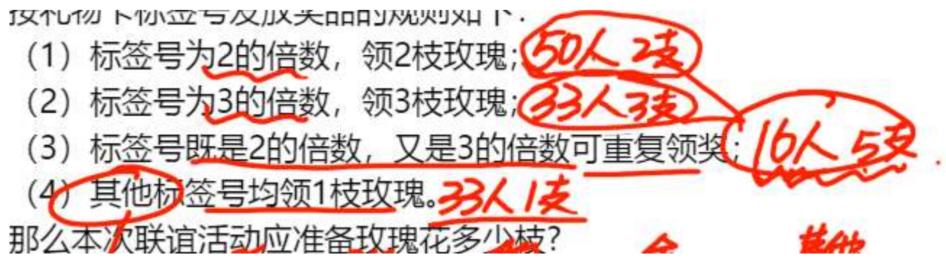
（4）其他标签号均领 1 枝玫瑰。那么本次联谊活动应准备玫瑰花多少枝？

A. 215　　　　B. 232

C. 312　　　　D. 416

【解析】例 2. 该题属于创新的题目，考场上可以直接放弃。该题只是思维量较大，计算难度不高。“面巾纸”是故意绕我们的，本题和“面巾纸”没有关系。（3）中标签号既是 2 的倍数又是 3 的倍数，即为 6 的倍数，此时可以重复领奖，可以领取 2+3=5 支；（4）中其他标签号，既不是 2 的倍数又不是 3 的倍数，此时可以领取 1 支。2 的倍数看为 A，3 的倍数看为 B，既是 2 的倍数又是 3 的倍数看为 A∩B，既不是 2 的倍数又不是 3 的倍数（其他标签号）看为“都不”，总情况为 100 张。问本次联谊活动应准备玫瑰花多少枝，先把四种情况的人数求出，A=100/2=50 人，100/3=33……1，则 B=33 人，100/6=16……4，则 A∩B=16 人，50+33-16=100-其他，其他=33 人，33 人领取 1 支。最后计算总支数，有两种算法：

方法一：有 50 人拿 2 支，有 33 人拿 3 支，有 33 人拿 1 支，总支数=50 人*2 支+33 人*3 支+33 人*1 支=232，对应 B 项。


（1）标签号为2的倍数，领2枝玫瑰；50人2支
（2）标签号为3的倍数，领3枝玫瑰；33人3支
（3）标签号既是2的倍数，又是3的倍数可重复领奖；16人5支
（4）其他标签号均领1枝玫瑰。33人1支
那么本次联谊活动应准备玫瑰花多少枝？

方法二：计算只满足 2 的倍数的，只满足 3 的倍数的，最后再计算只满足 6 的倍数的，从 50 人中扣掉重复领花的人数，从 33 人中扣掉重复领花的人数，（50 人-16 人）*只 2 支+（33 人-16 人）*只 3 支+16*5 支+33*1 支，把人数分为了四个类型，最后答案为 B 项。【选 B】

【注意】

1.方法一的算法是最快的，但是有个点不好理解，为什么不用计算 16*5，因为 16 人为（1）中 50 人的一部分，也为（2）中 33 人的一部分，前面已经计算过了。如果再算一次，相当于把每人算了两遍，“5 人*2 支+33 人*3 支”已经包含了 16 人中每人的 5 支。例如：有 50 人，2 的倍数举手，唐宋老师举手，拿了 2 支；3 的倍数举手，唐宋老师举手，拿了 3 支；如果再说 6 的倍数举手，此时唐宋老师不能再举手，如果再举手，就会再发 5 支，此时就拿了 10 支，这样不正确。

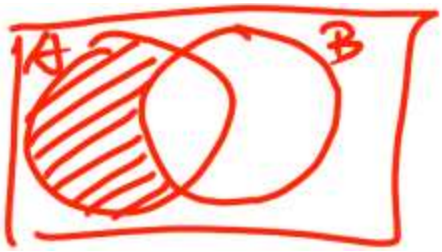
2.方法二比较难算。老师建议大家优先用方法一理解。

3.考试中做该类题目的可能性比较小，题目太长。

【知识点】画图法：

1.若条件或问题不便于代入公式计算，则考虑画图。

2.例如：只参加 A；参加 A、B 但不参加 C；或者缺少代公式必要的数据。如图所示：左边的圆圈为 A，阴影部分为只 A，但是阴影部分在公式中是不存在的，公式中的 A 为“圆圈”代表的区域，出现和公式表述不同的，就用画图法。



3.先画圈，再代数；从里到外，注意去重。例如：A∩B=5 人，A 的人数为 12 人，先把 5 人标在中间，再把 12 人标在外面，7 人标在里面。不要把 12 人和 5 人标在一起，因为 12 人包含 5 人。

【例 3】（2019 甘肃）甲、乙两个单位分别有 60 和 42 名职工，共同成立 A、B 两个业余活动小组，所有职工每人至少参加 1 个。乙单位职工中仅参加 A 组的人数是只参加一个小组人数的 60%，乙单位职工中参加 B 组的人数与参加 A 组的人数之比为 3：4，参加 B 组的人中，甲单位职工占 5/8。问有多少人仅参加 A 组？

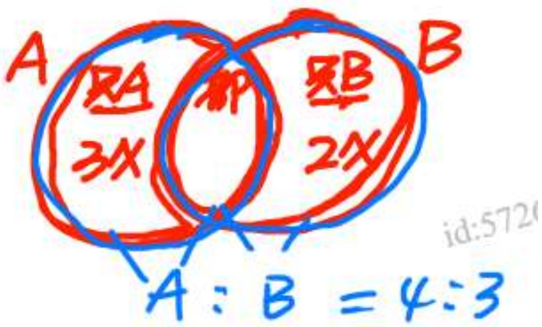
A. 35　　　　B. 42

C. 46　　　　D. 56

【解析】例 3. 该题是在近 5 年全国的容斥原理问题中，老师见到的难度之王，该题极为罕见。有两个单位、有两个小组分别给了很多条件。问有多少人仅参加 A 组，甲单位只参加 A 组的人数和乙单位只参加 A 组的人数之和即为所求。给了三个条件：（1）乙单位职工中仅参加 A 组的人数是只参加一个小组人数的 60%；（2）乙单位职工中参加 B 组的人数与参加 A 组的人数之比为 3：4；（3）参加 B 组的人中，甲单位职工占 5/8。最大的条件为总人数，先不看。

观察（1）（2）（3），两句和乙有关，只有一句和甲有关，从乙来考虑，乙单位总人数为 42 人，所有职工每人至少参加 1 个，说明没有都不参加的人数，画图不用画最外面的方框。“乙单位职工中仅参加 A 组的人数是只参加一个小组人数的 60%”，只参加一个小组的为左边的“只 A”和右边的“只 B”，只 A：只 B=60：40=3：2。设乙单位只参加 A 组的为 3x，则乙单位只参加 B 组的为 2x。

“乙单位职工中参加 B 组的人数与参加 A 组的人数之比为 3：4”，乙单位参加 A 组的人数：乙单位参加 B 组的人数=4：3，乙单位参加 A 组的人数为左边的圆圈，乙单位参加 B 组的人数为右边的圆圈，即图中的两个蓝色圆圈比值为 4：3。



（3x+中间的数）:（2x+中间的数）=4：3，则中间的数字为 x。乙单位的人数包含三个部分：只参加 A 组的人数、只参加 B 组的人数、两个组都参加的人数。可得 42=3x+2x+x，求得 x=7。乙单位中只参加 A 组的人数为 3x=21 人。

“参加 B 组的人中，甲单位职工占 5/8”，第一种情况：甲单位中参加 B 组的人数/B 组的总人数=5/8；第二种情况：甲单位中参加 B 组的人数/甲单位总人数=5/8，该题为第一种情况，是比重的倒装句，是后者占前者。甲单位中参加 B 组的人数/B 组的总人数=5/8，B 单位的总人数未知，要想 B 组中，甲单位的人数为 5/8，说明乙单位参加 B 组的人数占 3/8，乙单位中参加 B 组的人数为 x+2x，可得（2x+x）/B 组的总人数=3/8，可得 B 组的总人数为 56 人，甲单位中参加 B 组的人数为 56*5/8=35 人，甲单位只参加 A 组的人数=甲单位的人数-甲单位参加 B 组的人数=60-35=25 人，乙单位中只参加 A 组的人数为 21 人，所求=25+21=46 人，对应 C 项。【选 C】

【注意】

1.根据（3x+中间的数）:（2x+中间的数）=4：3，可得中间的数字为 x。如果不确定中间的数字为 x，可以设中间的数字为 y，最后解出来中间的数字只能为 x。

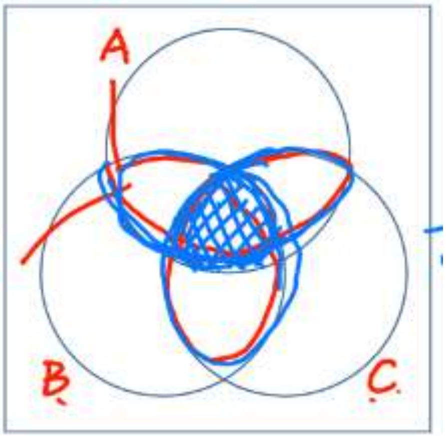
2.该题可以作为五六年级小学奥林匹克决赛的题目，看起来没有复杂的计算，但是思维量和步骤很多，需在短时间内把很多关系飞快的理清楚，然后快速计算出来，其计算量是平时 3～5 道题目的计算量。

3.该题算是容斥原理中最难的题目，没有之一，放在方法精讲中来讲不太合适，难度过高。

【知识点】三集合：为考试中最主流的考法，公式有三种，公式越多越好做题。三集合公式很长，考试一般考查纯代入，考查难度偏低。

1.三集合标准型公式：A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C=总-都不。

2.推导：三集合分别为A、B、C，三者之间两两都有交叉关系，考试中从来没考查过四集合和五集合。A+B+C，可以快速覆盖所有点，发现A∩B被A和B各计算了一遍，需要去掉重复的一遍，同理A∩C和B∩C都被计算了两遍，此时都需要减去多余的一遍，为A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C；三集合最大的特殊点就是中间的蓝色网状部分，为A∩B∩C，A、B、C的每个部分都含有A∩B∩C，A∩B、A∩C、B∩C中都含有A∩B∩C，加了三遍又减了三遍，此时需要补上一次，称之为补漏，过程为“各加、去重、补漏”，A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C=总-都不，此时每个点都包含在公式中。



【例4】（2019安徽事业单位）一公司招聘员工，按规定每人至多可投考两个职位，结果共42人报名，甲、乙、丙三个职位报名人数分别是22人、16人、25人，其中同时报甲、乙职位的人数为8人，同时报甲、丙职位的人数为6人。那么同时报乙、丙职位的人数为：

A.7人　　　　B.8人

C.5人　　　　D.6人

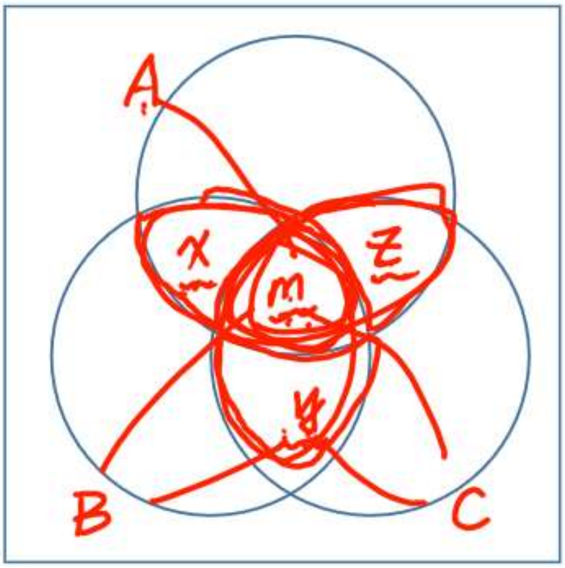
【解析】例4.根据“按规定每人至多可投考两个职位”，可知没有报三种的人数，报甲、乙为A∩B，报甲、丙为A∩C，报乙、丙为B∩C，公式：A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C=总-都不，题干中没有说甲、乙、丙都不报名的，且题干说共有42人报名，可得“都不”=0，代入数据，22+16+25-8-6-（　）+0=42-0，

可以计算尾数，16 和-6 直接抵消。尾数均为大-小，如果出现小-大，可以借位，尾数 9-（ ）的尾数=尾数 2，则（ ）的尾数为 7，对应 A 项。如果答案有 2 个一样的尾数，则还要计算一下。【选 A】

【知识点】三集合非标准型：是热门考点，为重中之重。公考第一次考查这个公式时，完全用高中的知识储备来做。非标准是因为推导方式比较特殊。

1. 公式：A+B+C-满足两项-满足三项*2=总数-都不。

2. 推导：如下图所示，满足的两项为 x、y、z 区域，x 为 A、B 相交，y 为 B、C 相交，z 为 A、C 相交，其中 m 为 A∩B∩C。A+B+C 中，x 被 A 算了一遍，被 B 算了一遍，算了两遍，只重复了一遍。同理，y 被 B、C 各算了一遍，z 被 A、C 各算了一遍，均需要减掉一遍。中间 m 被算了三遍，需要减去多余的两遍，A+B+C-x-y-z-2m=全-都不，x+y+z 为满足两项（刚好满足两项）的人数，满足三项的就是中间的 m，替换成文字，A+B+C-满足两项-满足三项*2=总数-都不。



3. 什么时候用标准型公式，什么时候用非标准型公式，如果把“满足两项的”用一个数字表示，用非标准公式；如果出现“既 A 又 B”、“既 B 又 C”、“既 B 又 C”，用标准型公式。

【例 5】（2019 河北）某班参加学科竞赛人数为 40 人，其中参加数学竞赛的有 22 人，参加物理竞赛的有 27 人，参加化学竞赛的有 25 人，只参加两科竞赛的有 24 人，参加三科竞赛的有多少人？

A. 2　　　　　　B. 3

C. 5　　　　　　D. 7

【解析】例 5.“只参加两科竞赛的有 24 人”,“满足两项”为刚好满足两项。用非标公式。A+B+C-满足两项-满足三项*2=总数-都不，代入数据，发现找不到“都不”，说明都不=0，22+27+25-24-（　）*2=40-0，49+1-2*（　）=40，可得（　）=5，对应 C 项。【选 C】

【例 6】（2017 重庆选调）一项农村家庭的调查显示，电冰箱拥有率为 49%，电视机拥有率为 85%，洗衣机拥有率为 44%，至少有两种电器的占 63%，三种电器齐全的占 25%，则一种电器都没有的比例为：

A. 10%　　　　　　B. 15%

C. 20%　　　　　　D. 25%

【解析】例 6. 没给具体的数量，给的为百分比，全部都是比例，求的也是比例，赋值法。赋值总的调查人数为 100 人（因为题目给的是百分比，如果给的是千分比，就赋值调查人数为 1000）。三种情况，出现“至少两种”，可以用非标公式。题干给了至少满足两项，公式中为只满足两项的人数，刚好满足两项的人数为 63-25=38 人。此时代入公式，A+B+C-满足两项-满足三项*2=总数-都不，49+85+44-38-25*2=100-（　），A、C 项和 B、D 项尾数都相同，不能用尾数法。正常计算，（　）=100-90=10，10/100=10%，对应 A 项。【选 A】

【注意】该题有个做题的特殊小技巧，问的是一种都没有的，有电冰箱的为 49 人，有电视机的为 85 人，有洗衣机的为 44 人，只要有电视机，就不属于一种都没有的，则这 85 人都不是答案中问的人数，答案＜100-85=15 人，对应 A 项。严格来讲应该为≤15，但是≤的可能性较小，此时排除不了 B 项，B 项太巧了，为答案的可能性太低。该种方法有一定的局限性，如果把数字改一下，例如把 85 改为 65，此时≤35，范围较大，不好选择答案，此时无法做题，大家还是要掌握通用的方法。

【知识点】

1.三集合非标准型公式：A+B+C-满足两项-满足三项*2=总数-都不。

2.至少有两种电器=有两种电器+有三种电器。

【例 7】（2016 江苏）某单位举办设有 A、B、C 三个项目的趣味运动会，每位员工三个项目都可以报名参加。经统计，共有 72 名员工报名，其中参加 A、B、C 三个项目的人数分别为 26、32、38，三个项目都参加的有 4 人，则仅参加一个项目的员工人数是：

A.48　　　　B.40

C.52　　　　D.44

【解析】例 7.题目给出的条件是“三个项目都可以报名参加”，并不是每个人都要报名参加三项，问参加一个项目的员工人数是多少，不管是标准公式还是非标准公式，都没有“只”字，有些同学觉得需要画图，但是可以用常识公式，比如 100 人中，有 10 人参加了一项比赛，有 20 人参加了两项比赛，有若干人参加了三项比赛，有 50 人都不参加，三者之间不重叠，则有 100-10-20-50=20 人参加三项比赛。根据常识公式：满足一项+满足两项+满足三项=全-都不，全=72，大家都报名，则都不=0，满足三项=4，只要求出满足两项的人数，再代入常识公式就可以求出满足一项的人数。用非标准公式求出满足两项的人数，代入数据：26+32+38-（　）-4*2=72-0，解得（　）=16，即满足两项的人数=16，代入常识公式：满足一项=72-16-4-0=52，对应 C 项。【选 C】

【注意】

1.常识公式：满足一项+满足两项+满足三项=全-都不。

2.理解常识公式中的不重叠：比如参加运动会，不可能存在既参加两个项目，又参加三个项目的情况。

【例 8】（2017 四川三支一扶）某公司对人力资源总监、财务总监和市场总监三个岗位实行公开竞聘，竞聘人可以同时竞聘多个岗位。统计竞聘人提交的结果，有 21 人竞聘人力资源总监，15 人竞聘财务总监，12 人竞聘市场总监，若竞聘至少一个岗位的共有 30 人，则三个岗位都竞聘的人数最多有多少人？

A.8　　　　　　　　　　B.9

C.10　　　　　　　　　D.11

【解析】例 8.三集合问题，并且结合最值，三集合问题一般都是公式，问最多，是由于出现两个未知数，比如 x 和 y，公式化简后一般会得出 x+y 或者 x-y 的关系，然后分析大小关系，如果怕分析错，可以代入选项分析。本题只有 4 个数据，不能用标准公式，而要用非标准公式，假设满足两项的为 x，满足三项的为 y，至少满足一项=全-都不=30，代入数据：21+15+12-x-y*2=30，整理得到：x+2y=18。

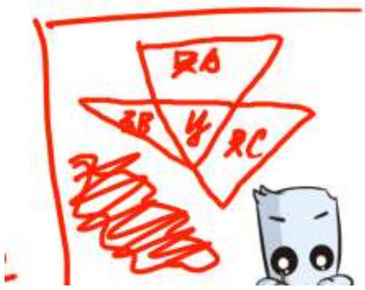
方法一：要让 y 尽可能大，此消彼长，总和一定，则要让 x 尽量小，x 最小为 0，此时 y 最大为 9，对应 B 项。

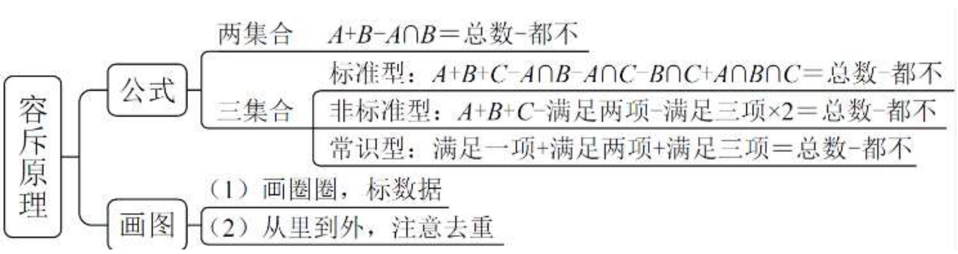
方法二：代入，要求最大，从大到小代入，代入 C、D 项时会使得 x 为负数，不符合要求，代入 B 项时满足要求。【选 B】

【注意】

1.至少闯一个红灯的情况，就等于全部情况减去都不闯红灯的情况。

2.存在满足三项，但没有满足两项的集合，比如下图所示，集合的形状没有规定一定是圆，集合是没有形状的，可以是任意形状，不需要纠结 x、y 的取值，比如现实中，30 人只投了一个岗位，还有 9 人投了三个岗位，没有人投两个岗位，这种情况是存在的。但本题如果加上条件“有一些人报了两个岗位”，此时 x 不能为 0，则答案只能是 A 项。





【注意】容斥原理：

1.公式：

（1）两集合：A+B-A∩B=总数-都不。

（2）三集合：

①标准型：A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C=总数-都不。

②非标准型：A+B+C-满足两项-满足三项*2=总数-都不。

③常识型：满足一项+满足两项+满足三项=总数-都不。

2.画图：

（1）画圈圈，标数据。

（2）从里到外，注意去重。

第九节　排列组合与概率

一、排列组合公式

【知识点】分类和分步：

1.分类相加：要么……要么……。比如老师从北京去上海，可以坐飞机或者高铁，飞机有 3 趟，高铁有 5 趟，要么坐飞机，要么坐高铁，是二选一，只需要选择一类就能完成这件事，所以总共有 3+5=8 种选择。

2.分步相乘：既……又……。比如老师从北京去广州，在上海中转，北京到上海有 8 种选择，上海到广州有 5 种选择，总共有 8*5=40 种选择，先到上海，再到广州，分步骤，所以用乘法。

【例 1】(2019 河南司法所)某市从市儿童公园到市科技馆有 6 种不同路线，从市科技馆到市少年宫有 5 种不同路线，从市儿童公园到市少年宫有 4 种不同路线，则从市儿童公园到市少年宫的路线共有：

A.24 种　　B.36 种

C.34 种　　D.38 种

【解析】例 1.可以画图帮助分析，分两种情况：（1）在科技馆中转：先去科技馆，再去少年宫，存在先后，用乘法，有 6*5=30 条路线；（2）直接到少年宫：有 4 条路线。要么中转过去，要么直达过去，“要么……要么……”用加法，

则总共有 30+4=34 条路线，对应 C 项。【选 C】

【知识点】排列与组合：

1. 排列：

（1）与顺序有关，从 n 个元素中有序的选择 m 个元素。

（2）A（n，m）=从 n 开始往下乘 m 个数。

①从 10 个同学中选择 3 人有顺序的去做事情，为 A（10，3）=10*9*8。

②从 10 个人中有序的选 3 人，第一步是从 10 人中选 1 人，有 10 种选法；第二步是从 9 人中选 1 人，有 9 种选法；第三步是从 8 人中选 1 人，有 8 种选法，分步骤进行，用乘法。

2. 组合：

（1）与顺序无关。

（2）C（n，m）=分子 A（n，m）/分母 A（m，m）=从 n 开始往下乘 m 个数/从 m 开始往下乘 m 个数，答案是情况数，一定是整数。

①从 10 人中选 3 人去扫地，为 C（10，3）=A（10，3）/A（3，3）=（10*9*8）/（3*2*1）。

②组合是先在有顺序的基础上，再消除顺序，假设选出甲、乙、丙三人，三个人内部有顺序，除以三个人的内部顺序，就得到无序的情况。

3. 判定标准：从已选的主体中任意挑出两个，调换顺序：

（1）有差别，与顺序有关（A）。

（2）无差别，与顺序无关（C）。

4. 例：

（1）从七个葫芦娃中，任选两个去救爷爷。

答：选出大娃、二娃，和选出二娃、大娃，都是去救爷爷，没有区别，与顺序无关，为 C（7，2）。

（2）从七个葫芦娃中，任选两个去救爷爷（第一个去探路，第二个去打架）。

答：大娃去探路、二娃去打架，和大娃去打架、二娃去探路，调换顺序之后有区别，为 A（7,2）。

【注意】

1. 计算不是排列组合的重点，列式才是重点。

2. 在考试中，一般选出人去干一样的事情，是没有顺序的；一般选出人去干不一样的事情，是有顺序的。

3. 排列组合问题用 A 还是 C 需要自己揣摩，可以自己举例子理解，没有死记硬背的方法。

【例 2】（2018 年广州）某部门开展年终评选工作，需从 11 名员工中评选出一名优秀员工和两名积极员工，且优秀员工与积极员工不能为同一人，则可能会出现的评选结果共有多少种？

A. 495　　　　B. 990

C. 1210　　　　D. 1980

【解析】例 2. 问有多少种情况/结果的，是排列组合问题。先选出优秀员工，从 11 人中选 1 人，无所谓用 A 还是 C，C（11,1）=A（11,1）=11；再选积极员工，从剩下的 10 人中选 2 人，选出的 2 人是干同样的事情，为 C（10,2）=（10*9）/（2*1）=45，出现“先……后……”，用乘法，总情况数为 11*45，尾数为 5，对应 A 项。【选 A】

【注意】也可以从 11 人中先选出 3 人，为 C（11,3），再从 3 人中选出 1 人为优秀员工，为 C（3,1），总情况数为 C（11,3）*C（3,1）。

【例 3】（2020 上海）小王等 6 名学生参与了某展览会志愿者活动。他们被安排到两个不同的会场服务。如果要求每个会场都至少有 2 名志愿者，则对小王等人共有多少种不同的安排方式？

A. 20　　　　B. 30

C. 50　　　　　　　　　　　　D. 360

【解析】例 3. 需要注意会场是不同的，假设为 A、B 会场，情况分为：（1）A 会场分配 2 人、B 会场分配 4 人：从 6 人中选 2 人去 A 会场，为 C（6,2），总共 6 个人，选了 2 人去 A 会场，剩下的 4 人直接去 B 会场，不需要再排列了；（2）A、B 会场都分配 3 人：从 6 人中选 3 人去 A 会场，为 C（6,3）；（3）A 会场分配 4 人、B 会场分配 2 人：从 6 人中选 4 人去 A 会场，为 C（6,4）。三者之间是“要么……要么……”的关系，分类相加，C（6,2）+C（6,3）+C（6,4）=15+20+15=50，对应 C 项。【选 C】

【注意】在计算 C（n,m），当 m 比较大时，可以转化为：C（n,m）=C（n,n-m），比如从 10 人中选 9 个人扫地，就等同于选 1 个人不扫地，即 C(10,9)=C(10,1)。

【例 4】（2019 深圳）某自驾游车队由 6 辆车组成，车队的行车顺序有如下要求：甲车不能排在第一位，乙车必须排在最后一位，丙车必须排在前两位，且任一车辆均不得超车或并行。该车队的行车顺序共有多少种可能？

A. 36　　　　　　　　　　　　B. 42

C. 48　　　　　　　　　　　　D. 54

【解析】例 4. 本题给出三个条件，甲车不能排在第一位，则甲可以在第二位、第三位、第四位、第五位、第六位；乙车必须排在最后一位，则乙车不需要进行排序了；丙车必须排在前两位，即第一位或者第二位。甲可以在第二位、第三位、第四位、第五位，丙可以在第一位、第二位，丙比较好分析，选择从丙入手。

（1）假设丙排在第一位，甲可以排在第二位、第三位、第四位、第五位，剩余的 3 人任意排序，甲从 4 个位置选 1 个，为 C（4,1），n 个人任意排序，为 A（n,n），不需要剔除任何情况，则剩余的 3 人为 A（3,3），总共有 C（4,1）*A（3,3）=24 种情况。

（2）假设丙排在第二位，甲可以在第三位、第四位、第五位，甲从 3 个位置选 1 个，为 C（3,1），剩余的 3 人任意排序，为 A（3,3），总共有 C（3,1）*A（3,3）=18 种情况。

两种情况是“要么……要么……”的关系，所以相加，为 24+18=42 种情况，对应 B 项。【选 B】

【注意】

1.对于丙排在第一位的情况，甲和另外 3 人可以进行全排列，为 A（4,4），结果与 C（4,1）*A（3,3）相同，但是对于丙排在第二位的情况，有些同学也会觉得是甲和另外 3 人可以进行全排列，这样就不对了，所以分析的时候建议一步一步来，这样保证不出错。

2.考试的时候，对于行测的五大模块，没有规定做题顺序，可以五大模块任意排列，为 A（5,5）。

【例 5】（2017 吉林甲）罐中有 12 颗围棋子，其中 8 颗白子，4 颗黑子。从中任取 3 颗棋子。则至少有一颗黑子的情况有：

A.98 种　　B.164 种

C.132 种　　D.102 种

【解析】例 5.出现“至少有一颗黑子”，典型的反面求解的题目，正面情况是三种（1 颗黑子、2 颗黑子、3 颗黑子），正面情况比较复杂，考虑反面情况，反面情况是 0 颗黑子。正面情况数=总情况数-反面情况数。总情况：12 颗棋子中任选 3 颗，总情况数=C（12,3）；反面情况：选到 0 颗黑子，即 3 颗都是白子，从 8 颗中选 3 颗，反面情况数=C(8,3)。正面情况数=C(12,3)-C(8,3)=(12*11*10）/（3*2*1）-（8*7*6）/（3*2*1）=2*11*10-8*7，算尾数，尾数 0-尾数 6=尾数 4，对应 B 项。【选 B】

【注意】

1.任取三颗，选出是黑白白或者白白黑，都是一样的，所以是无序的。

2.记住常用阶乘：A（3,3）=3！=6，A（4,4）=4！=24，A（5,5）=5！=120。

3.本题正面情况也可做出来，分为三种情况分别计算情况数，最后加和。

4.考试中不用考虑 0 的情况，取 0 颗相当于没有取，这件事情没有发生，是不存在的。取到 0 颗黑子就是取出 3 颗白子。

二、经典题型

【知识点】考试中最多的两种题型：

1.捆绑法：相邻。

（1）引例：甲乙丙丁戊己 6 个老师站成一排照相，要求甲乙丙 3 人必须相邻，有（ ）种不同的站法？

答：要求甲乙丙必须相邻，先把甲乙丙 3 人捆在一起，注意内部有无顺序，捆起来照相，甲在左、乙在左照相出来是不一样的，所以有顺序，为 A（3,3）=6；把甲乙丙看成一个“大胖子”和丁、戊、己排序，相当于 4 个元素排序，为 A（4,4）=24，分步相乘，6*24=144。站成一排照相是有顺序的，站在中间和站在左边是不一样的，站队、照相都是有顺序的。

（2）方法：

①先捆：把必须相邻的元素捆绑起来，注意内部有无顺序。

②再排：将捆绑后的看成一个元素，进行后续排列。

（3）n 人排队=A（n,n），全排列。

2.插空法：不相邻。

（1）引例：甲乙丙丁戊己 6 个老师站成一排照相，要求甲乙丙 3 人必须不相邻，有（ ）种不同的站法？

答：（1）先排可以相邻的丁戊己，3 人站成一排，为 A（3,3）=6 种；（2）3 人排列形成了 4 个空位，再将不相邻的甲、乙、丙插入到 4 个空位中，即从 4 个空位中选 3 个空位插入甲、乙、丙（每个空位只插一个人）。两种思路：第一种，4 个空中选 3 个空，C（4,3），再把三个人放进去，需要排序，为 A（3,3），即 C（4,3）*A（3,3）=24；第二种，也可以直接写成“A（4,3）”，即从 4 个空中选 3 个空马上把甲乙丙三人放进去，谁在左谁在右不一样，有顺序，为 A（4,3）=24。先排再插，分步相乘，总情况=6*24=144。

（2）方法：

①先排：先安排可以相邻的元素，形成若干个空位。

②再插：将不相邻的元素插入到空位中。

【例 1】（2019 四川下）某场科技论坛有 5G、人工智能、区块链、大数据和云计算 5 个主题，每个主题有 2 位发言嘉宾。如果要求每个主题的嘉宾发言次序必须相邻，问共有多少种不同的发言次序？

A. 120　　B. 240

C. 1200　　D. 3840

【解析】例 1. 要求每个主题的嘉宾发言次序必须相邻，出现“相邻”，用捆绑法。（1）先捆，把 5G 的 2 人捆一起为 A（2,2），人工智能的 2 人捆一起为 A（2,2），区块链的 2 人捆一起为 A（2,2），大数据的 2 人捆一起为 A（2,2），云计算的 2 人捆一起为 A（2,2），每个主题都要捆，既要捆第一个又要捆第二个又要捆第三个又要捆第四个又要捆第五个，即 A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）*A（2,2）=A（2,2）^{5}=2^5=32；（2）再排，五个主题捆完之后看成五个“大胖子”，五个“大胖子”排序为 A（5,5）=120，先捆再排，用乘法，即 32*120＞3000，对应 D 项。【选 D】

【例 2】（2019 湖北选调）因电路改造，电力公司计划未来十天对某小区选择三天停电，要求不能连续两天停电，则共有多少种停电方案？

A. 35　　B. 56

C. 84　　D. 120

【解析】例 2.“要求不能连续两天停电”，即停电的两天不相邻，先排可以相邻的天数，再插入不能相邻的。（1）先选 7 天不停电，不停电的用“○”表示，不需要排序，并不是真的在 10 天中选出了 7 天，与日期无关，而是先画出“○”放在这里，最后要把停电的放进去，放进去之后按顺序排过去就自动形成了天数；（2）再将停电的插进空中，停电的用“×”表示，7 天形成 8 个空，从 8 个空中选 3 个空放“×”，为 C（8,3）=（8*7*6）/（3*2*1）=56，对应 B 项。【选 B】

【注意】

1. 为什么是 C（8,3）：假如爸爸说 3 号、5 号、7 号停电，妈妈说 7 号、5

号、3 号停电，说的是一回事，都是这三天，现实生活中只能从前往后过，所以没有顺序。

2.广东的一道题目：20 个路灯选 10 个路灯停掉，停掉的不能连续，问多少种情况。

答：把 10 个灯放在这里，让它们亮着；10 个灯形成 11 个空，从 11 个空中选 10 个放入黑灯，C（11,10）=C（11,1）=11 种。

【例 3】（2020 国考）扶贫干部某日需要走访村内 6 个贫困户甲、乙、丙、丁、戊和己。已知甲和乙的走访次序要相邻，丙要在丁之前走访，戊要在丙之前走访，己只能在第一个或最后一个走访。问走访顺序有多少种不同的安排方式？

A. 24　　B. 16

C. 48　　D. 32

【解析】例 3.6 个人中有 3 人中形成了固定顺序，“丙要在丁之前走访，戊要在丙之前”，没有说要相邻，之间是可以有其他人的，只是相对顺序是戊、丙、丁。己只能在第一个或最后一个，有固定顺序，最后考虑己。先考虑甲乙，“甲和乙的走访次序要相邻”，甲乙要相邻，用捆绑法，为 A（2,2）；再考虑戊、丙、丁，只能是戊、丙、丁的顺序，只有 1 种顺序；将捆在一起的甲乙看成一个“大胖子”插入戊、丙、丁之中，戊、丙、丁形成 4 个空，从 4 个空中选 1 个，为 C（4,1）；最后考虑己，在第一个和最后一个两个位置中二选一，为 C（2,1）。分步相乘，即 A（2,2）*C（4,1）*C（2,1）=2*4*2=16，对应 B 项。【选 B】

【注意】如果有些省份的题目出的比较好，国考会“抄”这道题，这道题与 2019 年四川的题目一样，只有一句话不同，四川的题目是“己只能在最后一个”，其他条件都一模一样。如果大家对数量有一定追求，又怕自己的思维不是很好，建议大家采用题海战术，可能会遇到类似的题目。

【例 4】（2019 青海）正值毕业季，306 宿舍有 A、B、C、D 四位男同学，他们准备找班主任宋老师合影，若要求宋老师坐正中间，A、B 两位同学不能挨着坐，那么总共有多少种坐法？

A.8 种　　　　　　　　　　　　B.12 种

C.16 种　　　　　　　　　　　　D.24 种

【解析】例 4.方法一："要求宋老师坐正中间"，即不用排宋老师。宋老师在中间，左右两边分别有两个座位，A、B 两人不挨着，即让 A、B 两人一左一右坐，先安排谁在左、再安排谁在右，两个人排顺序为 A（2,2），排到左边的人在左边两个位子中选一个为 C（2,1），排到右边的人在右边两个位子中选一个为 C（2,1），即 A（2,2）*C（2,1）*C（2,1）=8；此时左边剩一个座位、右边剩一个座位，C、D 两人选 2 个座位，为 A（2,2）=2。先考虑 A、B，再考虑 C、D，分步相乘，即 8*2=16，对应 C 项。

方法二：特殊思维，如果只要求两个人不相邻，反面是这两个人相邻，可以用"总情况数-AB 相邻的情况数"。总情况是 4 个人选 4 个座位，为 A（4,4）=24；AB 相邻的情况：先将 A、B 捆绑为 A（2,2），再选左边还是右边，为 C（2,1）=2，C、D 是不确定的，C、D 需要在剩下 2 个座位中选，为 A（2,2），即 AB 相邻的情况数=2*A（2,2）*A（2,2），即所求=A（4,4）-2*A（2,2）*A（2,2）=24-8=16，对应 C 项。【选 C】

【注意】A、B 不能挨着即不能相邻，本题直接用插空法容易做错。如果没有宋老师，先排 C、D，再把 A、B 插空进去是没有问题的。但是宋老师是在中间的，宋老师就可以看成一个空，在插空时会额外多一些空，按常规思路不好操作。

三、概率问题

【知识点】概率：任何一道排列组合的题目换一种问法就能变成概率题，如例 4 转化为问"A、B 两位同学不能挨着坐的概率"，先算出总情况为 24，再算满足要求的情况数为 16，P=16/24。

1.给情况求概率：概率=满足要求的情况数/总的情况数。

2.给概率求概率：

（1）分类：$P=P_1+P_2+\cdots\cdots+P_n$。例：不下雨的概率＝晴天概率+阴天概率，要么是晴天、要么是阴天，“要么……要么……”是分类，用加法。

（2）分步：$P=P_1*P_2*\cdots\cdots*P_n$。例：连续两次闯红灯的概率＝闯第一个的概率*闯第二个的概率。既闯第一个红灯，又闯第二个红灯，“既……又……”用乘法。

【例 1】（2019 联考）某公交站台附近区域停放 A 型共享单车 4 辆，B 型共享单车 5 辆，C 型共享单车 6 辆。一公交车到站后，下车的乘客随机选择其中 13 辆单车骑走。问 B 型和 C 型单车全部被骑走的概率在以下哪个范围内？

A. 在 10%以下　　　　B. 在 10%～15%之间

C. 在 15%～20%之间　　　　D. 超过 20%

【解析】例 1. P=满足情况数/总情况数，一共 4+5+6=15 辆车。总情况：从 15 辆中选 13 辆骑走，先选 A_1 再选 B_1、先选 B_1 再选 A_1 都是把这 2 辆车骑走，没有顺序，即总情况数=C（15,13）；满足情况：B、C 型都骑走，B 型 5 辆选 5 辆为 C（5,5）=1，C 型 6 辆选 6 辆为 C（6,6）=1，已经骑走 5+6=11 辆，还需要从 A 型中选择 2 辆骑走，为 C（4,2），P=C（4,2）/C（15,13）=6/C（15,2）=6/105＜10%，对应 A 项。【选 A】

【注意】

1. C（n,n）=1。

2. C（15,13）=C（15,2）=15*14/2=105。

【例 2】（2019 吉林甲）抽奖箱子里剩下 8 张奖券，其中 5 张有奖，3 张无奖，小王有两次抽奖机会，他不放回地依次抽取两张奖券，则这两张奖券中一张有奖一张无奖的概率是：

A. 15/56　　　　B. 25/64

C. 15/32　　　　D. 15/28

【解析】例 2. 方法一：“不放回”，即摸出一张后第二次就少了一张，第一次摸出后，就剩下 7 张奖券。P=满足要求的情况数/总情况数，总情况：是从 8

张中依次抽 2 张，依次抽取是有序的，总情况数=A（8,2）=56，分母是 56，约分之后分母也应该是 56 的约数，64、32 不是 56 的约数，可以排除 B、C 项；满足情况（一张有奖、一张无奖）：分母是有顺序的，C（5,1）*C（3,1）是第一次先从 5 张有奖的中选一张，第二次再从 3 张无奖的中选一张；题中只说一张有奖、一张无奖，也可以反过来选，第一次先从 3 张无奖的中选一张，第二次再从 5 张有奖的中选一张，为 C（3,1）*C（5,1）。即满足情况数=C（5,1）*C（3,1）+C（3,1）*C（5,1）=15+15，P=（15+15）/56=15/28，对应 D 项。

方法二：特殊思维，如果问题不涉及顺序（不涉及谁先谁后、第一张第二张），则不放回地依次抽两张=同时抽两张。或者理解为先抽 1 张，等 0.0001 秒后再抽出 1 张，也是不放回的依次抽两张，但是在现实看来这两张和同时抽的没有区别，即[C（5,1）*C（3,1）]/C（8,2）=15/28，对应 D 项。【选 D】

【注意】如 50 人中抽？，选项的分母分别是 50、7、9、3，7、9、3 都不是 50 的约数，可以直接排除。

【拓展 1】（2018 国考）某单位的会议室有 5 排共 40 个座位，每排座位数相同。小张和小李随机入座，则他们坐在同一排的概率：

A. 不高于 15%　　B. 高于 15%但低于 20%

C. 正好为 20%　　D. 高于 20%

【解析】拓展 1. 方法一：P=满足要求情况数/总情况数，总情况：40 个座位中选 2 个，左上角是张小龙、右下角是唐宋和左上角是唐宋、右下角是张小龙是不一样的，有顺序，总情况数=A（40,2）；满足情况（两人要同排）：一排有 40/5=8 个座位，要求小张、小李同排，并没有说在哪一排，要先从 5 排中选出 1 排，为 C（5,1），再从一排的 8 个座位中选 2 个，为 A（8,2），满足情况数=C（5,1）*A（8,2），P=C（5,1）*A（8,2）/A（40,2）=（5*8*7）/（40*39）=7/39≈17.5%，对应 B 项。

方法二：重点，条件中没有给概率，强行看成给概率求概率做，$P_{第一步}$*$P_{第二步}$；第一步：先让小张、小李中的一个人随便坐，必然事件，$P_{第一步}$=100%；第二步：让另一个去找第一个人，P=第一个人那一排剩下的 7 个座位中选一个/剩下

的 39 个座位中选一个=C（7,1）/C（39,1）=7/39。【选 B】

【注意】两个人要凑一起的概率题，先让一个人随便挑，再让第二个人去找他。

【拓展 2】（2018 联考）某单位工会组织桥牌比赛，共有 8 人报名，随机组成 4 队，每队 2 人。那么，小王和小李恰好被分在同一队的概率是：

A. 1/7　　B. 1/14

C. 1/21　　D. 1/28

【解析】拓展 2. 跟屁虫问题，第一步：先让一个人随便找一个队伍，必然事件，$P_{第一步}$=100%；第二步：第二个人要和第一个人同队，$P_{第二步}$=第一个人的那一队剩 1 个位置/7 个位置中选 1 个=C（1,1）/C（7,1）=1/7，对应 A 项。【选 A】

【拓展 3】（2019 联考）某学校举行迎新篝火晚会，100 名新生随机围坐在篝火四周，其中，小张与小李是同桌，他俩坐在一起的概率为：

A. 2/97　　B. 2/98

C. 2/99　　D. 2/100

【解析】拓展 3. 先让一个人随便坐，$P_{第一步}$=100%；第二个人去找第一个人，$P_{第二步}$=有 2 个位置与第一个人同桌/剩下的 99 个位置中选 1 个=C(2,1)/99=2/99，对应 C 项。【选 C】

【注意】第二个人要与第一个人同桌，可以坐第一个人的左边或右边，有 2 个位置。

【例 3】（2019 四川下）某知识竞赛共 50 道单项选择题，小李和小王从中各自随机选择 48 道题作答。问他们未选的两道题相同的概率是：

A. 1/25*1/49　　B. （1/25*1/49）^{2}

C. 1/50*1/49　　D. （1/50*1/49）^{2}

【解析】例 3. 四川题目比国、联考的题目难一些。第一步：先让一个人从

50 道题中选 2 道题不做，这个事情必然发生，P $_{第一步}$=100%；第二步：让另一个人选，第一个人和第二个人做的都是完整的 50 道题，P $_{第二步}$=与第一个人选择不做的 2 道题目完全相同/从 50 题中选 48 题做=1/C（50,2）=1/（25*49），对应 A 项。【选 A】

【注意】

1.从 50 题中选 48 题做=从 50 题中选 2 题不做，为 C（50,2）。

2.第二个人与第一个人选择不做的 2 道题目完全相同的情况只有 1 种。假如第一个人选择 3 题、4 题不做，要完全相同，第二个人也要 3 题、4 题不做。

3.拓展：知识竞赛共 50 道单项选择题，小李和小王从中各自随机选择 49 道题作答。问他们未选的 1 道题相同的概率是多少？

答：第一个人随便选，P $_{第一步}$=100%；如第一个人第 50 题不做，要求未选的 1 道题相同，则第二个人也要第 50 题不做，所以与第一个人选择不做的题目相同只有 1 种情况，P $_{第二步}$=与第一个人选择不做的题目相同/50 题中有 1 题不做=1/C（50,1）=1/50，P $_{第一步}$*P $_{第二步}$=1/50。

【例 4】（2020 江苏）小张下班回家乘地铁 18：45 之前到家的概率为 0.8，乘公交为 0.7。已知小张下班回家要么乘地铁，要么乘公交，且选择乘地铁的概率为 0.6，则他下班回家 18：45 之前到家的概率是：

A.0.73　　　　B.0.74

C.0.75　　　　D.0.76

【解析】例 4.“乘公交为 0.7”即乘公交 18：45 之前到家的概率为 0.7；下班回家要么乘地铁、要么乘公交，乘地铁的概率为 0.6，则乘公交的概率为 1-0.6=0.4。如图，列表分析，回家有两条路：乘地铁或乘公交。选择地铁，18：45 之前到家的概率为 0.8*0.6=0.48；选择公交，18：45 之前到家的概率为：0.7*0.4=0.28，要么乘地铁，要么乘公交，用加法，即 0.48+0.28=0.76。【选 D】

坐　　18:45之前到达

地 0.6　　0.8

坐

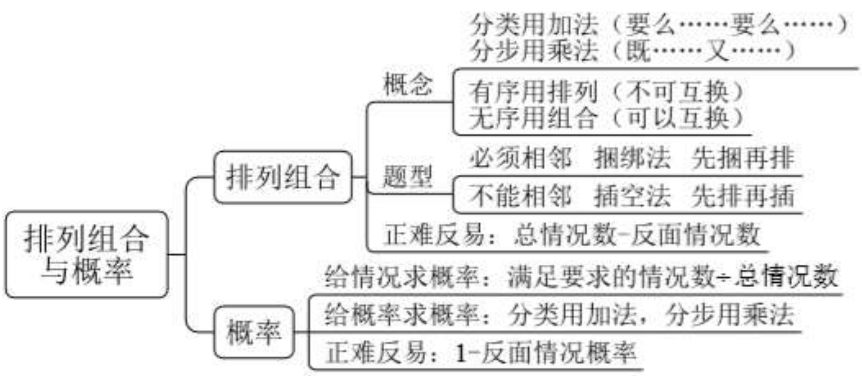
公 0.4　　0.7

【例 5】（2020 上海）天气预报预测未来 2 天的天气情况如下：第一天晴天 50%、下雨 20%、下雪 30%；第二天晴天 80%、下雨 10%、下雪 10%。则未来两天天气状况不同的概率为：

A. 45%　　　　B. 50%

C. 55%　　　　D. 60%

【解析】例 5. 要求未来两天天气状况不同，正面考虑，第一天是晴天、第二天是下雨或下雪，第一天是下雨、第二天是下雪或晴天，第一天下雪、第二天是晴天或下雨，正面情况数较多，比较麻烦。从反面考虑，未来两天天气状况不同的概率=1-未来两天天气状况相同的概率=1-（$P_{第一天晴天}$*$P_{第二天晴天}$+$P_{第一天下雨}$*$P_{第二天下雨}$+$P_{第一天下雪}$*$P_{第二天下雪}$）=1-（50%*80%+20%*10%+30%*10%）=1-（40%+2%+3%）=55%，对应 C 项。【选 C】



【注意】排列组合与概率：

1. 排列组合：

（1）概念：

①分类用加法（要么……要么……）。

②分步用乘法（既……又……）。

③有序用排列（不可互换）。举例理解用排列还是组合。

④无序用组合（可以互换）。

（2）题型：放的两个题型是重要题型，还有环形排列、错位排列、重复剔除、插板法等，都考的较少，会添加到学霸养成课中。

①必须相邻：捆绑法，先捆再排。

②不能相邻：插空法，先排再插。

（3）正难反易：总情况数-反面情况数。

2.概率：

（1）给情况求概率：满足要求的情况数/总情况数。

（2）给概率求概率：分类用加法，分步用乘法。

（3）正难反易：1-反面情况概率。

【注意】

1.拓展的3道题课后要好好理解一下。

2.昨天课程最后说了数量如何复习，可以回放听一下。数学运算是很多同学坚持不下去的模块，考场上拉开距离的不是数学的难题，而是数学的简单题和中等题，简单的卷子才能拉开差距，排列组合、行程本身就是难题，不要被吓到。战场上，剩者为王，剩者才能当胜者。

【答案汇总】第八节容斥原理：1-5：CBCAC；6-8：ACB

第九节排列组合与概率：排列组合公式：1-5：CACBB；经典题型：1-4：DBBC；概率问题：1-5：ADADC

遇见不一样的自己

Be your better self