

方法精讲-数量 2

(笔记)

主讲教师：唐宋

授课时间：2020.04.08



粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量 2（笔记）

学习任务：

1. 课程内容：工程问题、行程问题

2. 授课时长：3 小时

3. 对应讲义：167 页~171 页

4. 重点内容：

（1）掌握工程问题的三种考法与对应解题步骤，以及常用的赋值方法

（2）掌握行程问题的基础公式与等距离平均速度公式，以及火车过桥问题

（3）掌握直线和环形上的相遇、追及的计算公式，用图示来理解复杂的运动过程

（4）掌握多次相遇的结论、流水行船的公式，并了解行程公式的比例性质

第四节 工程问题

【知识点】工程问题：

1. 三量关系：总量=效率*时间。

（1）总量：工作到底做多少，例如：上课 180 分钟、做多少道题，都是工作量。

（2）效率：单位时间内做的工作量，其中单位时间要看题干条件，有时为一天的效率、有时为 1 小时的效率、有时为 1 分钟的效率。

（3）时间：总量/效率，例如：唐宋老师需要搬砖 1000 块，每小时搬砖 200 块，则 5 小时搬完。

（4）已知其中的两个量，一定可以求出第三个量。绝大多数的工程问题(90%)都是问时间，此时只要找到总量和效率， $\text{效率}=\text{总量}/\text{时间}$ 。

2. 考查题型：一共分为四种题型，前三种为主要的题型，第四种为特殊的考法。

（1）给完工时间型：工程问题的基础，比较常见，难度不高，比较简单。

①赋总量（完工时间的公倍数）。

②算效率： $\text{效率}=\text{总量}/\text{时间}$ 。

③根据工作过程列方程或式子。

④引例. 要折叠一批纸飞机, 若甲单独折叠要半个小时完成, 乙单独折叠需要 45 分钟完成。若两人一起折, 需要多少分钟完成?

A. 10

B. 15

C. 16

D. 18

【解析】引例. 题干没有告诉纸飞机的总量, 一般 90%的工程问题不会告诉工程总量, 此时可以赋值(假设一个工作量)。题干没有纸飞机的总量, 题干也没有问纸飞机的总量, 说明和纸飞机的总量和答案没有关系, 如果和答案有关系, 但是题目没给, 此时该题就无法做出来, 是一道错题。(1) 为了好算, 尽量假设总量为完工时间的公倍数, 半个小时为 30 分钟, 30 和 45 的公倍数为 90, 假设总量为 90 个; (2) 根据总量计算效率, $P_{甲}=90/30=3$ 个/分钟, $P_{乙}=90/45=2$ 个/分钟; (3) 根据工作过程列式子, $90 \text{ 个} / [(3+2) \text{ 个/分钟}] = 18 \text{ 分钟}$, 对应 D 项。

【选 D】

(2) 给效率比例型。

(3) 给具体单位型。

(4) 同时开始同时结束。

【例 1】(2020 江苏) 一项工程由甲、乙工程队单独完成, 分别需 50 天和 80 天。若甲、乙工程队合作 20 天后, 剩余工程量由乙、丙工程队合作需 12 天完成, 则丙工程队单独完成此项工程所需的时间是:

A. 40 天

B. 45 天

C. 50 天

D. 60 天

【解析】例 1. 有三个工程队, 第一步先判定题型, 已知该工程由甲、乙工程队单独完成, 分别需 50 天和 80 天, 为给完工时间型的工程问题。(1) 赋值工程总量为 50 和 80 的公倍数 400(赋值为 800 也可以); (2) 算效率, $P_{甲}=400/50=8$, $P_{乙}=400/80=5$, $P_{丙}$ 未知, 设 $P_{丙}=x$; (3) 根据工作过程列式求解, “若甲、乙工程队合作 20 天后, 剩余工程量由乙、丙工程队合作需 12 天完成”, 工程分两步完成, $(8+5) \times 20 \text{ 天} + (5+x) \times 12 \text{ 天} = 400$, 可得 $x = (400 - 260) / 12 = 80 / 12 = 20/3$, 则 $P_{丙}=20/3$, 问丙工程队单独完成此项工程所需的时间, 所求 $= 400 \div$

$20/3=400*3/20=20*3=60$ ，对应 D 项。【选 D】

【注意】很多同学做该题的时候都会怀疑自己做错了，因为最后求出 $P_{丙}=20/3$ ，是一个分数。一般做工程问题，得到的效率都是整数，但是该题题干没有告诉丙完成工作的时间，赋值总量为 400 的时候，只利用了甲、乙的完工时间，所以甲、乙的效率一定为整数，而丙的效率是列方程计算得到的，所以 $P_{丙}$ 有可能是整数，也有可能是小数。只要确保计算过程没有出错， $P_{丙}$ 算出来是小数也是正确的。

【例 2】（2019 河北）甲、乙两队单独完成某项工程分别需要 10 天、17 天。甲队与乙队按天轮流做这项工程，甲队先做，最后是哪队第几天完工？

- A. 甲队第 11 天
- B. 甲队第 13 天
- C. 乙队第 12 天
- D. 乙队第 14 天

【解析】例 2. 该题比较特殊，国考和联考都考过轮流的问题，但是近五年每怎么考，该题（2019 年河北）考到了轮流。（1）已知“甲、乙两队单独完成某项工程分别需要 10 天、17 天”，10 和 17 之间没有公约数，所以设工程总量为 $10*17=170$ ；（2）算效率， $P_{甲}=17$ ， $P_{乙}=10$ ；（3）难点在于工作过程比较特殊，已知“甲队与乙队按天轮流做这项工程”，第一天只有甲做，第二天只有乙做，一个循环中，第一天甲干，第二天乙干，看有几个循环， $170/(17+10)=170/27=6\cdots\cdots 8$ 。这里的 6 为循环的个数，余数 8 和被除数是一个概念，总量为 170 份工作，则剩下 8 份工作。前面 6 个循环均为甲乙、甲乙……，剩下的 8 份开启第 7 个循环，每个循环开始甲开始做，所以最后的 8 份工作由甲做完，排除 C、D 项；每个循环用时 2 天，所求= $2*6$ 天+甲做的天数= 12 天+1 天= 13 天，所以最后甲队第 13 天完工，对应 B 项。【选 B】

【注意】

1. 千万不要写为 $170/27=6\frac{8}{27}$ 个循环，循环是不均匀的，不是每一分每一秒都是甲、乙平摊的。 $\frac{8}{27}$ 意为平均分成 27 份，取了其中的 8 份。这样做题是不对的，相当于把循环看成了均匀的概念，一个循环中，可能前面快一点后面慢一点，或

3. 此时可以设甲的效率为 4，乙的效率为 3。还不熟悉的时候，可以一步一步分析，题目做多了以后，量一定，时间和效率成反比，直接写 $P_{甲}: P_{乙}=4: 3$ 。

(3) 特殊型：某农场有 36 台收割机，或者 36 名工人。有若干名工人/机器，其中“若干”为具体的数量。每个工人/每台机器的效率没有区别（实际情况是有区别的，但是题目中默然效率是一样的）。一般为了方便，一个人的效率为 1，36 个人的效率为 36；每台机器的效率为 1，36 台机器的效率为 36。

(4) 考查最多的为间接型。直接型就是按照比例关系直接设效率；间接型一般是总量相当，时间和效率反过来；特殊型一般设每个人/每台机器效率为 1。

【例 3】（2018 四川）甲工程队与乙工程队的效率之比为 4: 5，一项工程由甲工程队先单独做 6 天，再由乙工程队单独做 8 天，最后由甲、乙两个工程队合作 4 天刚好完成，如果这项工程由甲工程队或乙工程队单独完成，则甲工程队所需天数比乙工程队所需天数多多少天？

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6

【解析】例 3. 直接给效率比，为直接型，（1）根据“甲工程队与乙工程队的效率之比为 4: 5”，设 $P_{甲}=4$ ， $P_{乙}=5$ ；（2）总量= 4×6 天 + 5×8 天 + $(4+5) \times 4$ 天 = 100；（3）甲单独做的时间为 $100/P_{甲}$ ，乙单独做的时间为 $100/P_{乙}$ ，所求 = $100/P_{甲} - 100/P_{乙} = 100/4 - 100/5 = 25 - 20 = 5$ ，对应 C 项。**【选 C】**

【例 4】（2019 黑龙江边境）某地计划修筑一条道路。如果该道路交由甲施工队先单独施工 6 天，乙施工队再单独施工 15 天即可完工；如果交由乙施工队先单独施工 6 天，那么甲施工队还需要单独施工 24 天才能修筑完成。如果这条道路交由甲施工队单独施工，道路修筑完成需要：

- A. 30 天
- B. 32 天
- C. 36 天
- D. 40 天

【解析】例 4. 该题和 2020 年国考题非常相似。给了两次完工的过程，给了三个“如果”，前两个“如果”为条件，可以从前两个“如果”找关系，题干给的均为天数，但不是完工时间，所以不是给用完工时间型工程问题。从效率上考

据工作过程列式求解，根据题意可得：前 7 天正常工作+5 天无法施工+后 8 天加班=20 天工期， $7 \text{ 天} \times 50 \text{ 人} \times 10 \text{ 小时} + 0 + 8 \text{ 天} \times (50+15) \text{ 人} \times ? = 50 \times 20 \times 10$ ，化简式子，不要计算，尽量采用约分的方法， $8 \times 65 \times ? = 50 \times 10 \times 13$ ， $? = 100/8 = 12.5$ ，对应 A 项。

方法二：出现“按时完成”，8 天加班的工作量相当于干两个部分的量：8 天正常干的量；前面 5 天无法施工剩余的量，需要干正常的 $8+5=13$ 天的量， $8 \text{ 天} \times 65 \text{ 人} \times () = 13 \text{ 天} \times 50 \text{ 人} \times 10 \text{ 小时}$ ， $() = 12.5$ ，对应 A 项。【选 A】

【注意】

1. 例如：放寒假，本来可以正常写完作业，但是在写作业的过程中遇到了春节，有 5 天的时间无法写作业，最后 8 天的时候拼命赶作业，如果按期把作业交上去，每天需要写多少作业，最后 8 天要写的作业：正常 8 天要写的作业+5 天没写的作业=13 天的作业。

2. 该题也是 2018 年国考的题目，辽宁省考只不过是改了一下数字，做题思路和国考题是一模一样的。

【知识点】给具体单位型：例如：搬 1000 块砖，此时已知工作量，但是例 1~例 5 没有出现过具体的工作量（具体单位），前面用赋值的方法把工作量假设出来，然后做题。出现总工作量或者 200 块砖/小时，出现具体工作量或者具体效率，此时可以设未知数列方程。为什么还要设未知数，因为题干不可能把所有的数值均告诉我们，例如：已知甲每小时比乙多搬砖 200 块，甲、乙的效率未知，但是已知甲、乙效率的差，此时设乙为 x ，甲为 $200+x$ 。或者一直甲效率和乙效率的和为 200，则设一个为 x ，另一个为 $200-x$ 。

1. 设未知数（设小不设大或设中间量）。

2. 找等量关系列方程。等量关系只有一种：量=效率*时间。

【例 6】（2020 江苏）某装配式建筑企业接到一个生产 1033 套楼板的订单。甲班组生产 5 天后，乙班组再生产 4 天，刚好完成任务。若甲班组比乙班组每天多生产 23 套，则甲班组生产楼板的套数是：

A. 625 套

B. 645 套

C. 535 套

D. 515 套

【解析】例 6. 不属于典型的工程问题。出现总量和具体时间，但是甲、乙的具体效率未知，“甲班组比乙班组每天多生产 23 套”，已知甲、乙效率的差值。设乙的效率为 x ，则甲的效率为 $x+23$ ，这是每天的效率，根据题意可得， $5*(x+23)+4x=1033$ ， $x=918/9=102$ ，万一 A 项为 102，此时不要着急选 A 项，问甲班组生产楼板的套数，所求= $5*(x+23)=5*125=625$ ，对应 A 项。【选 A】

【注意】给具体单位的工程问题，不讲方法，只要按照普通方程法来做也能做出来。工程问题的主要考法为例 1~例 5，属于有学习价值的题型。

【知识点】同时开始同时结束：

1. 典型情况：三个人做两项工作，要求同时开工同时结束。例如：第一项工作甲负责，第二项安排乙来负责，丙一会帮甲干，一会帮乙干，要求两项工作同时开工同时结束。

2. 核心思路：所有的人全程没有休息，工作时间=两项工作的工作量之和/三个人的效率之和。简单记忆：工作时间=工作量之和/效率之和。例如：A 项工作为 100 块砖，B 项工作为 200 块砖，安排甲、乙、丙三人去做，甲每分钟干 3 块，乙每分钟干 4 块，丙每分钟干 5 块，甲负责干 A 项工作，乙负责干 B 项工作，丙是负责帮忙的，整个过程中，中途不休息，三人的 t 一样， $P_{甲}*t+P_{乙}*t+P_{丙}*t=A$ 量+B 量， $3t+4t+5t=100+200=300$ ， $t=300/(3+4+5)=25$ 分钟。

【例 7】（2019 青海法检）甲、乙、丙三人完成同一幅拼图的时间分别需要 1 小时、1.2 小时、1.5 小时。现在这幅拼图需要甲、乙完成，两人同时开始，丙刚开始帮助甲拼拼图，后来又帮助乙拼，最后两个拼图同时完成。问：丙分别帮助甲、乙多长时间？

A. 0.1 小时、0.3 小时

B. 0.3 小时、0.5 小时

C. 0.5 小时、0.6 小时

D. 0.6 小时、0.2 小时

【解析】例 7. 丙一会帮甲一会帮乙，三个人两个工作，同时开始同时结束。

要确定总量和效率之和，已知三个时间，没有总量和效率，（1）赋值工作总量：1 小时、1.2 小时、1.5 小时的公倍数 6，1.2 和 1.5 同时扩大 10 倍变为 12 和 15，10、12、15 的公倍数为 60，则 1、1.2、1.5 的公倍数为 6，赋值一幅拼图的量为 6；（2）算效率： $P_{甲}=6/1=6$ ， $P_{乙}=5$ ， $P_{丙}=4$ ；（3）根据工作过程列方程：工作时间 $= (6 \times 2 \text{ 幅}) / (6+5+4) = 0.8$ ，选项中的数字加在一起应该为 0.8，即为丙帮甲、乙的总时间，可以排除 A、C 项。

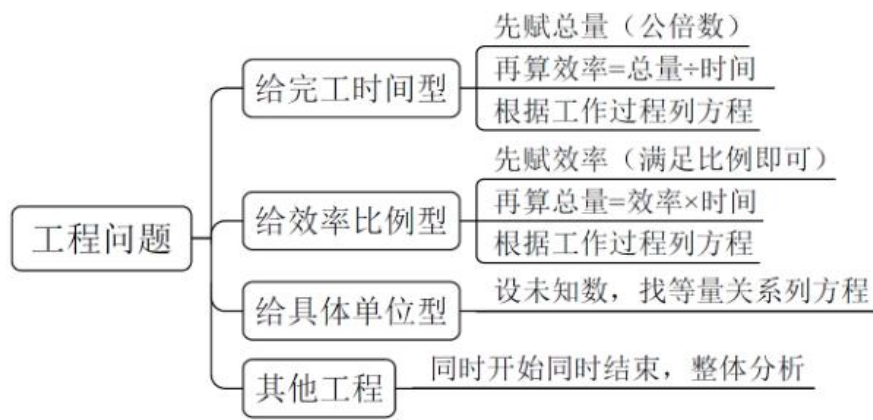
方法一：剩下 B、D 项，代入一项，代入 B 项：丙帮甲 0.3 小时，则甲自己干了 0.8 小时，此时干完了第一幅拼图，验证一下， $0.3 \times 4 + 0.8 \times 6 = 6$ ，刚好为一幅图的量，正确，选择 B 项。

方法二：排除了 A、C 项以后，帮忙的人一定会多帮谁少帮谁，甲的效率高，乙的效率低，甲、乙都拼一幅图，所以丙多帮干的慢的乙，少帮干的快的甲，帮乙的时间多，帮甲的时间少，选项中右边应该大于左边的数据，排除 D 项，选择 B 项。

方法三：猜题技巧。考场上万一看出“同时开始同时结束”，三个人去完成工作，属于特定的题型，有猜题的小技巧。可以看选项，如果四个选项的耗时不一样，发现四个选项相加分别为 0.4 小时、0.8 小时、1.1 小时、0.8 小时，大多数情况下会排除不相同的 A、C 项；再看帮哪边帮的多，帮忙肯定有多帮少帮，肯定不会平均帮，A 项：右边大于左边；B 项：右边大于左边；C 项：右边大于左边；D 项：左边大于右边，此时排除少的 D 项，选择 B 项。

方法四：通用方法（万能做法）。两步走，（1）时间 $= (2 \times 6) / (6+5+4) = 0.8h$ ；（2）当做填空题来做，只分析 1 幅图，总时间为 0.8，已知其中一幅图丙的时间，另一幅直接减。例如分析甲图，总量为 6，甲一直在干，丙帮了一会，乙没有干，甲一直干为 0.8 小时，工作量为 $0.8 \times P_{甲}$ ；乙的工作量为 $P_{丙} \times t_{丙帮甲}$ ， $6 = P_{甲} \times 0.8h + P_{丙} \times t_{丙帮甲}$ ， $6 = 6 \times 0.8h + 4 \times t_{丙帮甲}$ ，则 $t_{丙帮甲} = 0.3h$ ，则 $t_{丙帮乙} = 0.8h - 0.3h = 0.5h$ ，对应 B 项。【选 B】

【注意】方法四中，也可以先求出丙帮乙的时间，再求出丙帮甲的时间，思路是一样的。



【注意】工程问题：前两种是工程问题的主流考法。

1. 给完工时间型：给多个完成工作的时间。

- (1) 先赋总量（公倍数）。
- (2) 再算效率=总量/时间。
- (3) 根据工作过程列方程。

2. 给效率比例型：可能是直接给效率关系，或者间接给效率关系。

- (1) 先赋效率（满足比例即可）。
- (2) 再算总量=效率*时间。
- (3) 根据工作过程列方程。

3. 给具体单位型：设未知数，找等量关系列方程。

4. 其他工程：同时开始同时结束，整体分析。不是看细节，而是先分析整体的工作量、效率和，得到整体的时间。

第五节 行程问题

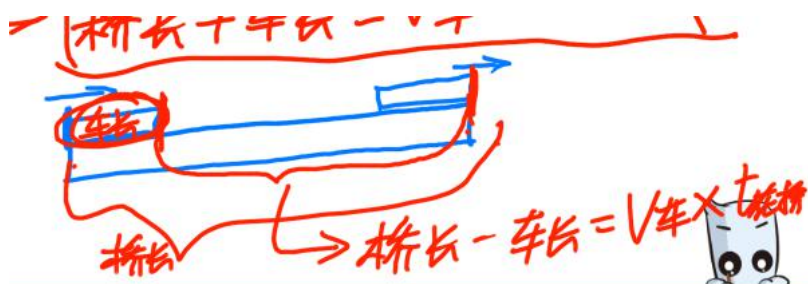
【知识点】行程问题：

1. 三量关系：路程=速度*时间。

2. 考查题型：

- (1) 基础行程：基本公式考查：路程=速度*时间（ $S=vt$ ）。
- (2) 相对行程，非常重要，比如相遇、追及、船在水中运动，多次相遇追及（两个主体存在相对运动）。
- (3) 比例行程，从正比、反比的角度考虑。

上。



【知识点】基础行程：

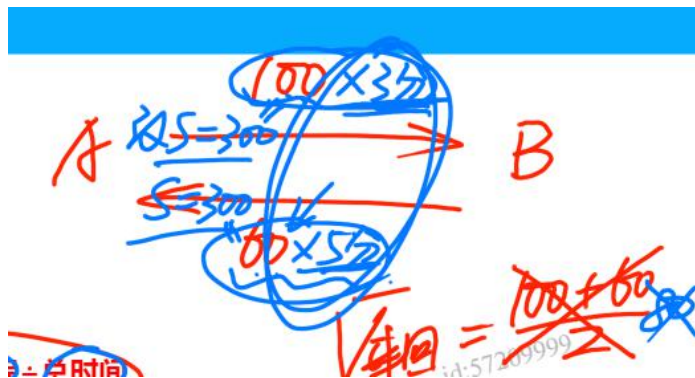
1. 基本公式考查：路程=速度*时间。

2. 平均速度=总路程/总时间。

(1) 比如 A→B，去的速度是 100，回来速度是 60，则来回的平均速度不是 $(100+60)/2=80$ 。考试遇到，可以把 80 当作是一个错误答案排除。

(2) 比如来会的路程都是 300，去的时间是 3 分钟，回来的时间是 5 分钟，整个 8 分钟的运动中，只有 3 分钟（不到一半的时间）是 100 的速度，超过一半的时间是 60 为速度，只有来和回都是 4 分钟的时候，才能用相加除以 2 计算平均值，因此答案更靠近 60。

(3) 平均速度 = $(300+300)/(3+5) = 75$ 米/分钟。



3. 等距离平均速度公式： $\bar{v} = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2)$ 。

(1) $\bar{v} = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2)$ ，可以记作：2 积/和。比如上述例子，可以直接用 $2*60*100 / (60+100) = 75$ 。推导： $(S_{去} + S_{回}) \div (S/v_1 + S/v_2)$ ，化简可得 $\bar{v} = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2)$ 。

(2) 注意：只有 S 相同才能用，如果去和回的路程不同则不能用，比如去是走直线去，回是走曲线回，则不能套用此公式。

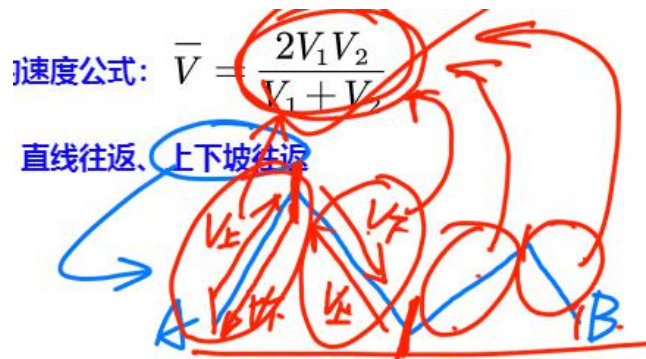
(3) 常适用于：直线往返、上下坡往返。上下坡往返，是指 A→B，有上坡、

有下坡，需要“翻山越岭”，这种情况下的往返，可以直接用公式。如果是去上坡，回来变成下坡，依旧是直线距离，则属于直线往返。



①去的速度为 $v_{\text{上}}$ ，返回速度为 $v_{\text{下}}$ ，每一段都是来回各走一遍，每一段可以用平均速度的公式计算。比如每段路程的平均速度都是 75，则全程的平均速度就是 75。

②不论上下坡几次，都可以套用此公式。每段的坡距离不一定相同。



【例 2】（2018 事业单位联考）运输工人将装满原材料的推车从库房推往厂房，并将空车推回库房。推车装满原材料和空车时，工人推车行走的速度分别为 72 米/分和 120 米/分，不计装卸材料的时间，累计 8 小时正好可以推车 30 个来回。问库房到厂房的距离为多少米？

- A. 480
B. 540
C. 720
D. 900

【解析】例 2。“运输工人将装满原材料的推车从库房推往厂房，并将空车推回库房”，是往返运动，去和回的路程相同。两地之间路程不变。“累计 8 小时正好可以推车 30 个来回”，“来回”说明走了 60 个距离（1 个来回是 2 个距离）。每个来回的平均速度不变，可以求出全程的平均速度=每次来回的平均速度= $\frac{2 \times 72 \times 120}{72 + 120} = 90$ 。每个来回平均速度是 90，30 个来回，根据 $S = v \times t$ ， $60S_{\text{单程}} = 8 \text{ 小时} \times 90 \text{ 米/分} = 480 \text{ 分钟} \times 90 \text{ 米/分钟}$ ， $S_{\text{单程}} = 480 \times 90 / 60 = 720 \text{ 米}$ 。【选 C】

【注意】

1. 本题可以用正常的方法计算，也可以套用等距离平均速度的公式，都是可以做的。

2. 本题没有设置干扰选项，如果选项有 1400，用路程/30，得到 1440，可能会掉坑。

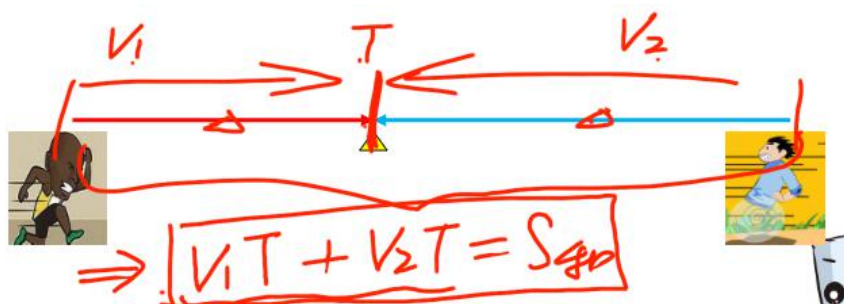
3. 平均速度每次都是小于但很接近 $(v_1+v_2)/2$ ，比如平均数是 80，实际是 75。或者本题，平均数是 96，但实际是 90。如果发现选项首位不同，差距明显，可以根据平均值是 96，得到 768 米，可以选小一点，但是比较接近的 C 项。但前提是选项差距比较大，如果选项都是 700 多，则不能这样猜。

【知识点】相对行程：

1. 直线相遇：两人方向相对，同时相向而行。

2. 公式： $S_{\text{和}} = v_{\text{和}} * t_{\text{遇}}$ 。 $S_{\text{和}}$ ：就是两人走的路程之和。

3. 两人在直线两点出发，左边速度为 v_1 ，右边速度为 v_2 ，经过相同的时间 t 到达相遇点，可以得到 $v_1 t + v_2 t = S_{\text{和}} \rightarrow (v_1 + v_2) t = S_{\text{和}} \rightarrow v_{\text{和}} t_{\text{遇}} = S_{\text{和}}$ 。



4. 注意：这种题型考虑的是路程，不是物理概念中的“位移”。

【例 3】（2019 新疆兵团）甲、乙两车分别以 30 公里/小时和 40 公里/小时的速度同时匀速从 A 地开往 B 地，丙车以 50 公里/小时的速度匀速从 B 地开往 A 地。A、B 两地距离 120 公里。问丙车遇到乙车后多久会遇到甲车？

- A. 8 分钟
- B. 10 分钟
- C. 12 分钟
- D. 15 分钟

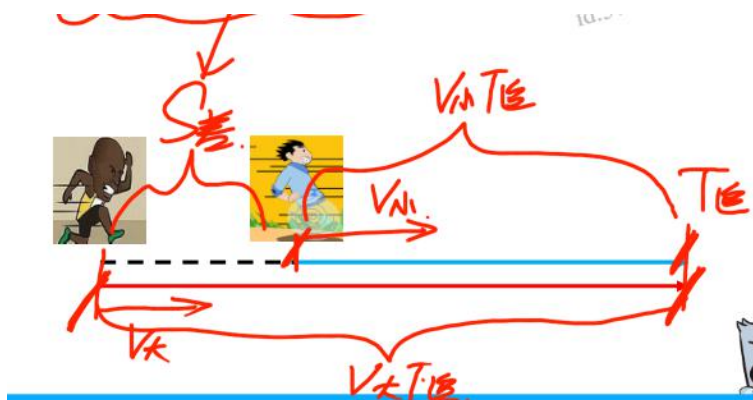
【解析】例 3. 甲、乙两车从 A 地出发开往 B 地，丙车从 B 地开往 A 地，过

程中甲和丙、乙和丙都会相遇。问“丙车遇到乙车后多久会遇到甲车”。“丙车遇到乙车后多久会遇到甲车”，第一次是乙丙相遇，第二次是甲丙相遇，相当于问两次相遇差的时间是多少。可以套用速度和公式， $t_{乙丙相遇} = S_{AB} / (v_{乙} + v_{丙}) = 120/90 = 4/3$ 小时 = 80 分钟。 $t_{甲丙相遇} = S_{AB} / (v_{甲} + v_{丙}) = 120/80 = 3/2$ 小时 = 90 分钟，差值 = 90 - 80 = 10 分钟。【选 B】

【知识点】直线追及：同时同向而行。

1. 公式： $S_{差} = v_{差} * t_{追}$ 。 $S_{差}$ ：追及刚开始时两人相差的距离。

2. 同一个方向，才能是追及。开始起点，两人要有一个距离差，如果在一起出发，就不能说“追及”。因此开始要有距离（虚线表示）。后面的人速度一定比前面的人速度大，才能追上，因此前面人速度为 $v_{小}$ ，后面人速度为 $v_{大}$ ，蓝色路程为 $v_{小} t_{追}$ ，红色路程为 $v_{大} t_{追}$ ，红色路程比蓝色路程多出部分就是开始两人的路程差，故 $S_{差} = v_{大} t_{追} - v_{小} t_{追} \rightarrow S_{差} = v_{差} * t_{追}$ 。



3. 考试如果计算追及时间，只要找两人开始的路程差和两人的速度差。

【例 4】（2018 深圳）清晨，爷爷、爸爸和小磊在同一条笔直跑道上朝同一方向匀速晨跑，某一时刻，爷爷在前，爸爸在中，小磊在后，且三人之间的间距正好相等。跑了 12 分钟后小磊追上了爸爸，又跑了 6 分钟后小磊追上了爷爷，则再过多少分钟，爸爸可追上爷爷？

- A. 12
- B. 15
- C. 18
- D. 36

【解析】例 4. 没有给出间距是多少，只是说“三人之间的间距正好相等”。描述了三个追及过程，画图辅助理解。爷爷在前，爸爸在中间，小磊在后面，没

有说距离是多少，可以假设一个距离（比较好理解，类似工程问题，都是时间，没有具体工作量，赋值工作量），赋值相等的间距为追及时间的公倍数——36。

“跑了 12 分钟后小磊追上了爸爸”， $36 = (v_{小} - v_{父}) \times 12 \rightarrow v_{小} - v_{父} = 3$ ；“又跑了 6 分钟后小磊追上了爷爷”，小磊追爷爷，开始的间距为 $2 \times 36 = 72$ ，追及时间是先追了 12 分钟，又追了 6 分钟，共追 18 分钟，故 $72 = (v_{小} - v_{爷}) \times (12 + 6) \rightarrow v_{小} - v_{爷} = 4$ 。以小磊为参照，父亲比小磊速度小 3，爷爷比小磊速度小 4，则 $v_{父} - v_{爷} = 1$ 。爸爸追爷爷， $t_{追} = 36 / (v_{父} - v_{爷}) = 36 / 1 = 36$ 分钟。但是不能选 D 项，问的是“则再过多少分钟”，36 分钟是从最开始到追上的时间，所求 $= 36 - 18 = 18$ 分钟。【选 C】

速晨跑，某一时刻，爷爷在前，爸爸在中，小磊在后，且三人之间的间距相等。跑了 12 分钟后小磊追上了爸爸，又跑了 6 分钟后小磊追上了爷爷，则多少分钟，爸爸可追上爷爷？

2
5
8
6

赋值 $S_{间} = 36$

$$36 = (v_{小} - v_{父}) \times 12 \text{分}$$

$$72 = (v_{小} - v_{爷}) \times (12 + 6) \text{分}$$

$$t_{追} = \frac{36}{v_{父} - v_{爷}}$$

【注意】

1. 赋值多少不影响计算，赋值其他也可以做。
2. 第一个追及过程， $S_{间}$ 是 12 的倍数，第二个追及过程， $S_{间}$ 是 18 的倍数，路程既是 12 的倍数，又是 18 的倍数，故本题赋值间距为 36。

再过多少分钟，爸爸可追上爷爷？

A. 12
B. 15
C. 18
D. 36

$$\textcircled{1} S_{间} = 12 \text{分} \times (v_{小} - v_{父})$$

$$\textcircled{2} 2S_{间} = 18 \text{分} \times (v_{小} - v_{爷})$$

$$\textcircled{3} S_{间} = ? \text{分} \times (v_{父} - v_{爷})$$

3. 本题有的同学担心，跑了 12 分钟之后，三人的位置关系会不会改变，如

果有这种想法，题目 10 分钟可能做不完。行程问题，最关键的是“回到起点”考虑。因此行程问题的思维，是考虑“追及刚开始时两人相差的距离”。

4. 出现“再过多少分钟”的描述，很大概率会有陷阱，可以利用陷阱以坑治坑。许多同学会忘记减掉 18 分钟，因此可以观察选项是否有差 18 分钟的，D 项 $-18=C$ 项，则 D 项是从开始到追及的时间，C 项是再过的时间，故 C 项为所求。考试能做要以做题为主，不能做再蒙。

【知识点】 环形问题：大部分都是同点出发，不同点是少数。

1. 环形相遇（同点反向出发）。

(1) 公式： $S_{\text{和}} = v_{\text{和}} * t_{\text{遇}}$ 。

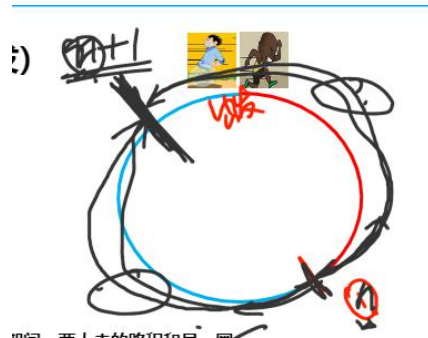
(2) 相遇 1 次， $S_{\text{和}} = 1$ 圈；相遇 N 次， $S_{\text{和}} = N$ 圈。

① 比如第一次相遇，左边走 $v_1 t$ ，右边走 $v_2 t$ ，合起来是全程，即 $v_1 t + v_2 t = 1$ 圈 $\rightarrow v_{\text{和}} t = 1$ 圈。



② 如果是相遇 n 次，路程和为 n 圈。

(3) 本质：每一次相遇到下一次相遇期间，两人走的路程和是一圈。第一次相遇，记作①；之后两人继续走，第二次相遇，记作②；第一次相遇到第二次相遇过程中，两人的路程又构成一个封闭的圆。因此每次相遇，到下一次相遇，两人的路程和都是 1 圈。



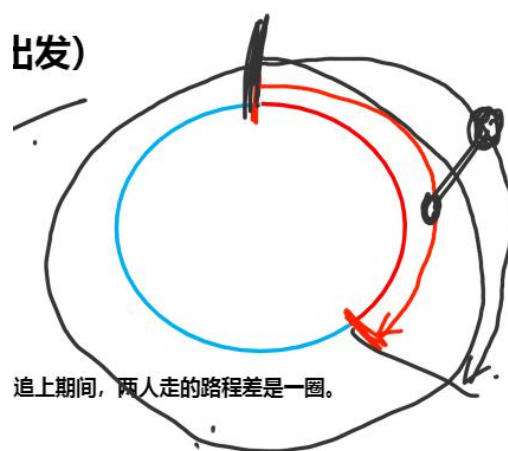
(4) 数学中的环形，不一定是圆形，只要是首尾相连（圆形、椭圆形、长方形等），就是环形，封闭图形就是环形。

2. 环形追及（同点同向出发）。

(1) 公式： $S_{\text{差}} = v_{\text{差}} * t_{\text{追}}$ 。

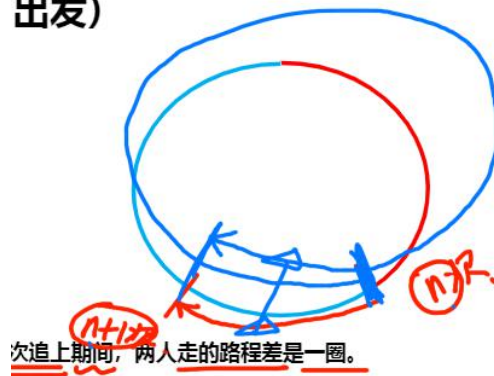
(2) 追上 1 次， $S_{\text{差}} = 1$ 圈；追上 N 次， $S_{\text{差}} = N$ 圈。

① 比如中学的体育课，A 在前面跑，B 要从背后追上 A，是因为 B 先跑完一圈，B 后面跑的路程和 A 跑的路程相等，追上一次，路程差为 1 圈。比如第一个人跑 200 米，第二个人要跑 1 圈+200 米才能追上。



② 追上 n 次，路程差为 n 圈。本质：每一次追上到下一次追上期间，两人走的路程差是一圈。比如第 n 次追上到第 n+1 次追上，快的人跑一整圈+△表示的距离，慢的人只跑了△的距离。

出发)



(3) 注意：公式中，追及是 $S_{\text{差}} = v_{\text{差}} t$ ，相遇是 $S_{\text{和}} = v_{\text{和}} t$ 。 $S_{\text{和}}$ 、 $S_{\text{差}}$ 都是 1 圈。

【例 5】(2019 青海法检) 某环形跑道，两人由同一起点同时出发，异向而行，每隔 10 分钟相遇一次；如果两人由同一起点同时出发，同向而行，每隔 25 分钟相遇一次。已知环形跑道的长度是 1800 米，那么两人的速度分别是多少？

- A. 126 米/分，54 米/分
- B. 138 米/分，42 米/分
- C. 110 米/分，70 米/分
- D. 100 米/分，80 米/分

【解析】例 5. 异向而行，指的是两个人方向不同，即相遇问题，10 分钟 * $v_{\text{和}} = 1 \text{ 圈} = 1800 \text{ 米}$ ，解得： $v_{\text{和}} = 180$ ，同向而行，无论是直线还是环形，都是追及问题，虽然文字的表述是“相遇”，但是广义的“相遇”分为面对面相遇，还有从背后相遇，即追及，所以我们不能从文字上判断是相遇还是追及，要从方向上判断，只要是反向，一定是相遇，只要是同向，一定是追及。25 分钟 * $v_{\text{差}} = 1 \text{ 圈} = 1800 \text{ 米}$ ，解得： $v_{\text{差}} = 72$ ，求两人的速度分别是多少，四个选项相加都是 180，无法排除选项，只有 A 项满足 $v_{\text{差}} = 72$ 。【选 A】

【注意】异向、相向、反向，都是相遇问题。

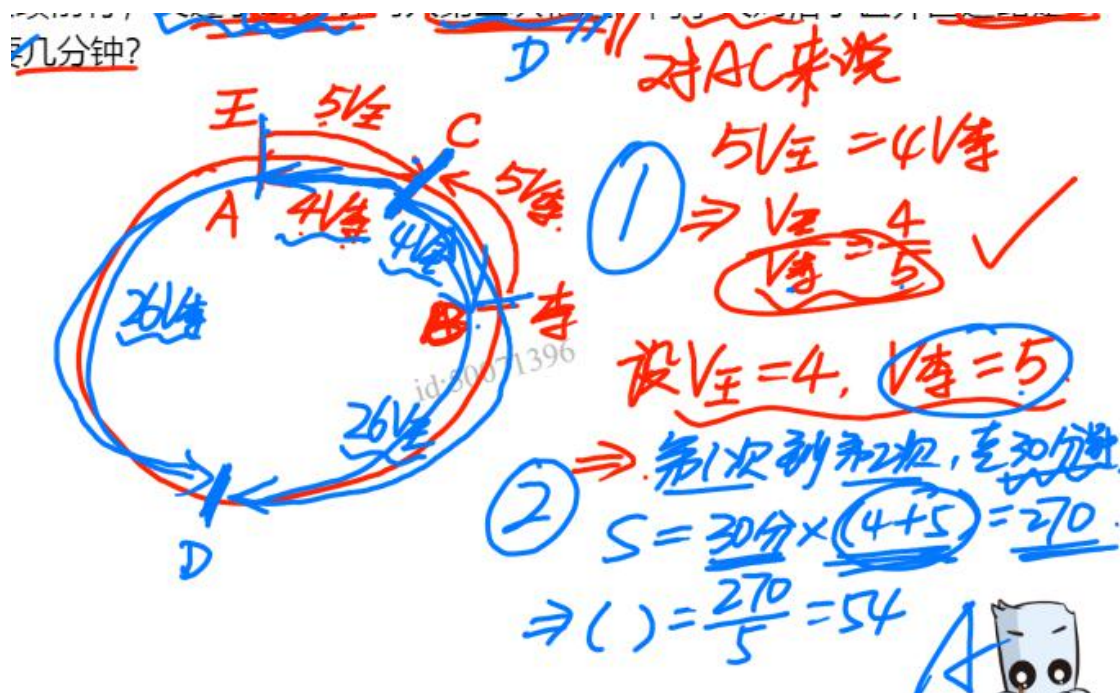
【例 6】(2019 浙江) 王大妈与李大妈两人分别从小区外围环形道路上 A、B 两点出发相向而行。走了 5 分钟两人第一次相遇，接着走了 4 分钟后，李大妈经过 A 点继续前行，又过了 26 分钟两人第二次相遇。问李大妈沿小区外围道路走一圈需要几分钟？

- A. 54
- B. 59

C. 60

D. 63

【解析】例 6. 本题比较特殊，一般环形问题同点出发，是比较模型化的题，只需要套用公式，不需要画图，但是本题是从 A、B 两点出发的，即不同点出发，不能直接套用公式，这种考法近两年在国考和浙江都出现过。画图分析，王大妈从 A 点出发，李大妈从 B 点出发，5 分钟后两人第一次在 C 点相遇，接着走了 4 分钟后，李大妈经过 A 点继续前行，此时可以发现，AC 这段路，王大妈花了 5 分钟，李大妈走了 4 分钟，同一段路，两人都走过，可以得到： $5V_{\text{王}}=4V_{\text{李}}$ ， $V_{\text{王}}/V_{\text{李}}=4/5$ 。要求李大妈绕一圈需要多久，本题给出的都是时间，没有给出速度，类似工程问题进行赋值，可以赋值 $V_{\text{王}}=4$ ， $V_{\text{李}}=5$ ，根据“又过了 26 分钟两人第二次相遇”，从第一次相遇到第二次相遇经过了 $4+26=30$ 分钟， $S=30*(4+5)=270$ ， $t_{\text{李}}=270/5=54$ ，对应 A 项。【选 A】



【注意】

1. 相向而行，就是面对面走。
2. 王大妈 5 分钟从 A 点走到第一次相遇 C 点，李大妈 4 分钟从 C 点走到 A 点。
3. 从第一次相遇到第二次相遇，两人花了 $4+26=30$ 分钟，共走 1 个全程。

【知识点】多次迎面相遇（两端出发）：

1. 从两端出发：

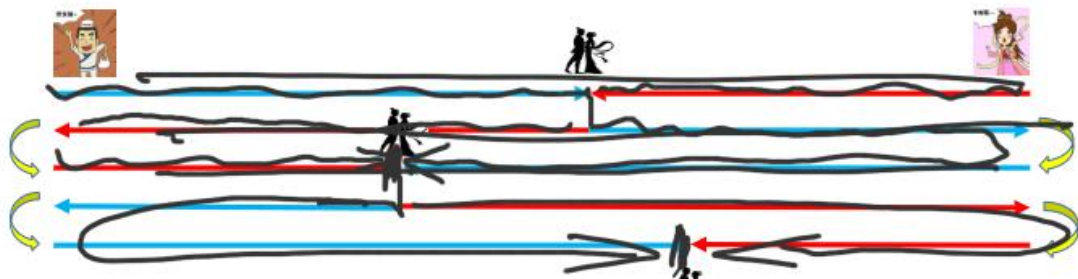
（1）第 1 次相遇，共走 1 个 S。

（2）第 2 次相遇，共走 3 个 S。

（3）第 3 次相遇，共走 5 个 S。

2. 第 n 次相遇，共走 $S_{\text{和}} = (2n-1)S = V_{\text{和}} * t_{\text{遇}}$ 。

3. 例：牛郎和织女从两端出发，第一次相遇共走了 1S；相遇的时候没认出来，两人继续走，到达对方出发点的时候往回走，第二次相遇共走了 3S；第二次相遇还是错过了，继续往前走，第三次相遇共走了 5S。



4. 考试的时候可能问第二次、第三次相遇用了多久，代入公式即可。

【例 7】（2019 江西法检）甲、乙两公司相距 2000m，某日上午 8：30 小明从甲公司出发到乙公司，小华同时从乙公司出发到甲公司。两人到达对方公司后分别用 8 分钟时间办事，然后原路返回。假设小明的速度为 4km/h，小华的速度为 5km/h，则两人第二次相遇的时间是几点？

- | | |
|---------|---------|
| A. 9：18 | B. 9：22 |
| C. 9：24 | D. 9：28 |

【解析】例 7. 两人从两端出发，问第二次相遇的时间，即两端出发 n 次相遇问题， $n=2$ ，代入公式： $(2n-1)S = V_{\text{和}} * t_{\text{遇}}$ ， $(2*2-1)*2\text{km} = (4+5) * t_{\text{遇}}$ ，解得： $t_{\text{遇}} = 2/3$ 小时 = 40 分钟，有些同学直接用 8：30+40 分钟=9：10，发现没有答案，需要注意条件“两人到达对方公司后分别用 8 分钟时间办事”，只需要加一个 8 分钟，则第二次相遇的时间为 8：30+48 分钟=9：18，对应 A 项。【选 A】

【注意】甲在办事的时候乙也在办事，所以只需要加一个 8 分钟。假如小明带了 10 个人，小华带了 100 个人，计算时间的时候不可能小明这边加 10 个 8

分钟，小华这边加 100 个 8 分钟。联想到类似错误的例子，比如中学时，有的同学集体活动中浪费了 5 分钟，老师会说你浪费了 60 个同学的 5 分钟，总共 300 分钟，但其实是所有人同时浪费了 5 分钟。

【知识点】流水行船：流水行船问题，在考试中考的不多，是低频考点，并且难度比较低，

1. $V_{顺} = V_{船} + V_{水}$ 。

2. $V_{逆} = V_{船} - V_{水}$ 。

3. 静水速度=船速、漂流速度=水速。

【例 8】（2019 河南司法所）有一条自西向东流向的河流，甲、乙两艘轮船分别从河流的上游和下游两点开始相对航行，在相遇于某地时，甲船航行的路程为乙船的 2 倍。已知乙船的速度为甲船的 2 倍，水流速度为 1 千米/分，则甲船的航行速度为：

A. 4 千米/分

B. 3 千米/分

C. 2 千米/分

D. 1 千米/分

【解析】例 8. 出现分别，就是有顺序的，“在相遇于某地时，甲船航行的路程为乙船的 2 倍”，看似有矛盾，是因为这里的速度描述的是船自身的速度，航行的时候要考虑水速。设甲船自身的速度为 x ，乙船自身的速度为 $2x$ ，甲是顺水， $V_{甲顺} = x + 1$ ，乙是逆水， $V_{乙逆} = 2x - 1$ ，从出发到相遇，时间是一样的，列式： $(x + 1) * t = 2 * (2x - 1) * t$ ，解得： $x = 1$ ，求的是甲船的速度，对应 D 项。【选 D】

【注意】本题不严谨，有歧义，有些同学理解为甲船实际航行的速度，会选了 C 项。

【知识点】比例行程：

1. 三量关系：路程 $S =$ 速度 $V *$ 时间 T 。

2. S 一定， V 、 T 成反比。比如例 6，在联考中也出现过类似的题，从 A 点到 B 点用了 90 分钟，从 B 点到 A 点用了 100 分钟，则速度比为 10：9。

3. V 一定, S 、 T 成正比。

4. T 一定, S 、 V 成正比。

【例 9】(2019 甘肃) 甲从邮局出发去图书馆, 乙从图书馆出发去邮局。两人 12 点同时出发, 相向而行。12 点 40 分两人相遇并继续以原速度前行。13 点 12 分甲到达图书馆后立刻返回邮局。假定两人速度不变, 甲返回邮局时, 乙已到邮局多长时间了?

A. 40 分钟

B. 50 分钟

C. 54 分钟

D. 64 分钟

【解析】例 9. 相向而行就是相遇问题, 甲从邮局出发, 乙从图书馆出发, 12 点出发, 12 点 40 分相遇, 两人都走了 40 分钟, 13 点 12 分和 12 点 40 分相差 32 分钟, 即甲从相遇点到图书馆用了 32 分钟, 本题与例 6 类似, 可以得出等量关系: $V_{\text{甲}}/V_{\text{乙}}=40/32=5/4$, 条件给出的都是时间, 没有具体的速度和路程, 可以赋值 $V_{\text{甲}}=5$, $V_{\text{乙}}=4$, 则 $S=40*(5+4)=360$ 。问甲返回邮局时, 乙已到邮局多长时间, 甲走了一个来回, 即两个全程, 用了 $360*2/5=144$ 分钟, 乙回邮局只需要一个全程, 用了 $360/4=90$ 分钟, 则乙等了 $144-90=54$ 分钟, 对应 C 项。【选 C】



【注意】本题和例 6 属于比例行程的经典考法, 给一堆时间, 没有具体的路程和速度, 往往用赋值法。

【例 10】(2017 山东) 小王和小刘两人分别从甲镇和乙镇同时出发, 匀速相向而行, 1 小时后他们在甲镇和乙镇之间的丙镇相遇, 相遇后两人继续前进, 小刘在小王到达乙镇之后 27 分钟到达甲镇, 那么小王和小刘的速度之比为:

A. 5: 4

B. 6: 5

C. 3: 2

D. 4: 3

【解析】例 10. 小刘在小王到达乙镇之后 27 分钟到达甲镇，即小刘到达甲的时间，与小王到达乙的时间差 27 分钟，小王和小刘用了 60 分钟相遇，本题只给出 2 个条件，需要考虑代入验证。设小王的速度为 a ，小刘的速度为 b ，则 $S=60*(a+b)$ ，根据“小刘在小王到达乙镇之后 27 分钟到达甲镇”，列式： $S/a-S/b=27$ ， $|[60(a+b)/a]-[60(a+b)/b]|=27$ ，通分计算很复杂，一个方程两个未知数，代入选项验证，代入 A 项： $|540/5-540/4|=27$ ，符合题意。【选 A】

【注意】行程问题：

1. 普通行程：

(1) 路程=速度*时间 ($S=V*t$)。

(2) 火车过桥：路程=车长+桥长。

(3) 平均速度：

①总路程/总时间。

②等距离平均速度= $(2*V_1*V_2)/(V_1+V_2)$ 。

2. 相对行程：

(1) 相遇追及：不管是环形还是直线，公式右半部分是没有任何区别，区别在于左边，直线上是两点之间的距离或者追及的距离，环形上就是几圈。

①相遇（反向）： $S_{和}=V_{和}*t$ 。

②追及（同向）： $S_{差}=V_{差}*t$ 。

(2) 多次运动：

①线形两端出发第 n 次相遇： $(2n-1)*S=V_{和}*t$ ；线形同端出发第 n 次相遇： $2n*S=V_{和}*t$ （假设甲、乙从 A 点出发，甲走的快，甲先到达 B 点后返回，然后与乙相遇，此时两人的路程和是 2 个全程，第二次相遇两人的路程和是 4 个全程）。



②环形第 n 次相遇： $n \text{ 圈}=V_{和}*t$ 。

③环形第 n 次追及： $n \text{ 圈}=V_{差}*t$ 。

(3) 顺水、逆水:

①顺水: $S = (V_{\text{船}} + V_{\text{水}}) * t_{\text{顺}}$ 。

②逆水: $S = (V_{\text{船}} - V_{\text{水}}) * t_{\text{逆}}$ 。

3. 比例行程:

(1) S 一定, V 、 t 成反比。

(2) V 一定, S 、 t 成正比。

(3) t 一定, S 、 V 成正比。

【注意】

1. 种一棵树最好的时间是十年前, 其次是现在。

2. 预习范围:

(1) 第六节: 经济利润。

(2) 第七节: 最值问题。

3. 预习要求:

(1) 原则上要做完每个章节至少 50% 的题目。

(2) 实在不会做的话, 对每节前几题要有充分的思考, 熟悉题型和题意。

【答案汇总】 工程问题: 1-5: DBCCA; 6-7: AB

行程问题: 1-5: BCBAC; 6-10: AADCA

遇见不一样的自己

Be your better self