高等微积分 B 期末试题（2005 年 1 月 9 日）及答案

1．填空题（直接填在横线上）(4 分/小题)

1). 广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln^p(1+x)}{(1+x)^q}dx$在 $\underline{q>1且p>-1}$ 时收敛，在其它情形发散。

2). 叙述一致连续的定义：若$\underline{\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,t\in I\ (|x-t|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(t)|<\varepsilon)}$

，则称函数$f(x)$在区间I一致连续。

3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=\underline{\qquad 0\qquad}$。

4）$\operatorname{sgn}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx-1)=\underline{\qquad 1\qquad}$。（注：$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & 当x<0;\\ 0, & 当x=0;\\ 1, & 当x>0.\end{cases}$）

2．选择题（直接填在括号内）(3 分/小题)

1). 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，且$\forall n\quad u_n\neq0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$的敛散情况是[A]

A. 绝对收敛；B. 条件收敛；C. 可能绝对收敛也可能条件收敛；D. 可能收敛也可能发散。

2). 若级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径分别为$R_1$和$R_2$，且$R_1<R_2$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$的收敛半径为[A]

A. R_1； B. R_2； C. R_1+R_2； D. R_2-R_1.

3). 下列陈述中，与“数列$\{x_n\}$不收敛于a”等价的是[D]

A. $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\quad |x_n-a|\geq\varepsilon$； B. $\forall\varepsilon>0$有无穷多个n使得$|x_n-a|\geq\varepsilon$；

C. $\exists\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\quad |x_n-a|\geq\varepsilon$； D. $\exists\varepsilon>0$有无穷多个n使得$|x_n-a|\geq\varepsilon$.

4). 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$可积，则函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在区间$[a,b]$满足[C]

A. 有连续的导函数； B. 可导，但导函数不一定连续；

C. 连续，但不一定处处可导； D. 不一定连续。

3．判断题：指出下列陈述是否正确，并简述理由(若正确，给出简要证明；若错误，举出反例)（5 分/小题）。 评分：结论 **3** 分，理由 **2** 分

1). 若 $\forall \varepsilon > 0 \forall p \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N$ 都有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

错误。例如 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$，$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} < \frac{p}{n}$，所以

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall p\ \exists N = \left[\frac{p}{n}\right] + 1\ \forall n > N\ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$ 但数列 $\{x_n\}$ 发散。

2). 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，则函数 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 也可积。

正确。因为在任何一个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上，函数 $|f(x)|$ 的振幅都小于或等于函数 $f(x)$ 在此子区间上的振幅。

3). 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$.

错误。例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，但 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1.$

4). 函数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$ 在区间 $[-a, +a]$ 上一致收敛。

正确。因为 $\forall x \in [-a, +a]$, $\left|\ln(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n})\right| \le \ln(1 + \frac{a^2}{n\ln^2 n})$，而正数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{a^2}{n\ln^2 n})$ 收敛。

4（12 分）. 评分：每问 **6** 分（答案 **4** 分，证明 **2** 分）。

1）已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 都收敛，能否断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛？若能，证明之；若不能，举出反例。

能。因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 都收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$。因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ 存在。因为 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$ 存在且 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$，所以 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

2）已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 都收敛？若能，证明之；若不

能，举出反例。

不能。例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n}=-\infty$，发散。

5（12 分）. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及其和函数。

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}}=1$，所以收敛半径 $R=1$. 2

在端点上，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n(n+1)}$ 收敛,..1

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 收敛，..1

所以收敛域为 $[-1,+1]$。

记 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=S(x)$，则原式 $=\begin{cases}\frac{1}{x}S(x) & 当x\neq 0;\\ 0 & 当x=0\end{cases}$.............此处1分

当 $x\in(-1,+1)$ 时，$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $S'(0)=0$。$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$。

$$S'(x)=\int_0^x S''(t)dt=-\ln(1-x),$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x -\ln(1-t)dt=(1-x)\ln(1-x)+x。$$

原式 $=\begin{cases}\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1 & 当x\neq 0;\\ 0 & 当x=0.\end{cases}$ 6

由连续性，原式 $=\begin{cases}-2\ln 2+1 & 当x=-1;\\ 1 & 当x=1.\end{cases}$ 1

6（10 分）. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，在区间 $[-\pi,+\pi]$ 可积，a_n $(n=0,1,\cdots)$，b_n $(n=1,2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数，求函数 $f(x+c)$（c 是常数）的 Fourier 系数。

解 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nxdx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nxdx$。................................1

记函数 $f(x+c)$ 的 **Fourier** 系数为 $\tilde{a}_n,\tilde{b}_n$，则

$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x+c)\cos nxdx$，$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x+c)\sin nxdx$ 3

变量置换：$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+c}^{+\pi+c}f(t)\cos n(t-c)dt$。因为 $f(t),\cos n(t-c)$ 都以 2π 为周期，

所以 $\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\cos n(t-c)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)(\cos nt\cos nc+\sin nt\sin nc)dt$

$=a_n\cos nc+b_n\sin nc.$ 3

同理 $b_n=b_n\cos nc-a_n\sin nc.$ 3

7（10 分）. 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}+1}{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdots|x-a_n|}dx$ 的敛散性，其中 m 是自然数。

解 $\int_{a_n+1}^{+\infty}\frac{x^{2m}+1}{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdots|x-a_n|}dx$ 当 $n-2m>1$ 时收敛，当 $n-2m\le 1$ 时发散。..3

若 $a_n\ge 0$，$[a_n,a_n+1]\subset[0,+\infty)$，广义积分 $\int_{a_n}^{a_n+1}\frac{x^{2m}+1}{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdots|x-a_n|}dx$ 发散，

从而广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}+1}{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdots|x-a_n|}dx$ 发散。.................3

若 $a_n<0$，则函数 $\frac{x^{2m}+1}{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdots|x-a_n|}$ 没有奇点，

$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}+1}{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdots|x-a_n|}dx$ 收敛

当且仅当

$\int_{a_n+1}^{+\infty}\frac{x^{2m}+1}{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdots|x-a_n|}dx$ 收敛。..................................3

总之，当 $a_n<0$ 且 $n-2m>1$ 时广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}+1}{|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdots|x-a_n|}dx$ 收敛，其他情形发散。...1

8（8 分）.（二选一）

1）设 θ 不是 π 的整数倍，证明数列 $\{\sin(n\theta)\}$ 发散。

证明 因为 $\theta\ne k\pi$，所以 $\sin\theta\ne 0$，$\cos\theta\ne 1$.

假设数列 $\{\sin n\theta\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\theta=A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)\theta=A$.

展开：$\lim_{n\to\infty}(\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta)=A$. 所以数列$\{\cos n\theta\}$也收敛。

记$\lim_{n\to\infty}\cos n\theta=B$，则$A\cos\theta+B\sin\theta=A$，即$A(1-\cos\theta)=B\sin\theta.\cdots(1)$

再将$\cos(n+1)\theta$展开：$\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta=B$. 两边取极限：

$B\cos\theta-A\sin\theta=B$，即 $-A\sin\theta=B(1-\cos\theta).\cdots(2)$

$(1)\times\sin\theta+(2)\times(1-\cos\theta):0=B(\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2)=2B(1-\cos\theta)$.

从而有 $B=0$. 代入（1），$A(1-\cos\theta)=0$，$A=0$.

在恒等式$\sin^2 n\theta+\cos^2 n\theta=1$ 两边取极限：$A^2+B^2=1, 0=1$，矛盾！

2）设$\forall n\ a_n>0$，$b_1=1$，$b_{n+1}=b_n+\dfrac{a_n}{b_n}$（n=1，2，…），证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是数列$\{b_n\}$收敛。

证明 由递推公式易知，$b_{n+1}>b_n>\cdots>b_1=1$，$\dfrac{a_n}{b_n}=b_{n+1}-b_n$。..............................1

1）设数列$\{b_n\}$收敛，则$\lim_{n\to\infty}b_n\ge1$。因为$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{a_n}{b_n}}=\lim_{n\to\infty}b_n\ge1$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$同敛散。故我们只要证明$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛。

$\dfrac{a_n}{b_n}=b_{n+1}-b_n$，所以前$n$项和$S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{b_k}=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1$。因为$\lim_{n\to\infty}b_n$存在，所以$\lim_{n\to\infty}b_{n+1}$存在，所以$\lim_{n\to\infty}S_n$存在，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。..........5

2）设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。因为$b_n\ge1$，所以$\dfrac{a_n}{b_n}\le a_n$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛。因为$b_{n+1}=b_n+\dfrac{a_n}{b_n}$，

从而$b_{n+1}-b_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，$b_n-1=\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{a_k}{b_k}=S_{n-1}$(前n−1项和, $n>1$)，所以$b_n=S_{n-1}+1$，

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}S_n+1$存在，数列$\{b_n\}$收敛。..4