考试课程　线性代数（2）　　2015年7月1日　　（**B** 卷）

系、班____________________ 姓名_______________ 学号_______________

【说明：试卷中的$i$都表示虚数单位根满足$i^2=-1$】

一、填空题（每空4分，共36分，请直接填在试卷的横线上）

1. 设$V$为3维的复线性空间，$V$的线性变换$\sigma$在$V$的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则所有$\sigma$不变的子空间为：_________________________.

2. 设$W=L(\alpha_1,\alpha_2)$为$\mathbb{C}^3$的子空间，其中$\alpha_1=(i,-i,0)^T$, $\alpha_2=(1,0,i)^T$，则$W^{\perp}=$______________________.

3. 设$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&0&1&5\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，则$A$的若当标准形为：____________________.

4. 设$V$为3维的酉空间，$\sigma$为$V$的线性变换，$\sigma^*$为$\sigma$的共轭变换。若$\sigma^*$在$V$的标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为$\begin{bmatrix}1-i&i&-i\\0&2+i&1\\1&0&2i\end{bmatrix}$，则$\sigma$在标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为：

___________________________________.

5. 设$0\neq A\in M_n(\mathbb{C})(n\geq 2)$为幂零矩阵，且满足$A^5+2A^2=0$，则$A$的极小多项式为：_________________________.

6. 设$A=\begin{bmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则埃尔米特二次型$f(x)=x^HAx$的正惯性指数为____________________.

7. 在$\mathbb{Q}[x]$ 中$f(x)=x^7+2x^6+x^5+5x^3+11x^2+7x+1$的标准因式分解为：____________________.

8. 设$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 则$A^n=$ ____________________，其中$n$为正整数.

9. 已知一元多项式$f(x)=x^3-x^2-x-2$ 和$g(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$（$m,n,p$为正整数），则$f(x)$ 与$g(x)$的最大公因式为$(f(x),g(x))=$ ____________________.

二、计算题和证明题（共64分）

10.（20分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求可逆矩阵$P$及若当标准形$J$使得$P^{-1}AP=J$.

11.（16分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b=(1,1,1)^T$.

（1）求$A$的奇异值分解；

（2）求$Ax=b$的最小二乘解.

12. (14分) 设$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 求一酉矩阵$U$使得$U^{-1}AU$为对角阵.

13. （14分）在$V=M_n(\mathbb{C})$中定义内积$(A,B)=tr(A^T\overline{B})$. 设$M\in V$，定义$V$的线性变换

$$T_M: X\mapsto MX,\ X\in V.$$

证明：$T_M$为酉变换当且仅当$M$为酉矩阵.