清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：**复变函数引论（A 卷）**（闭卷考试） 考试时间：2007 年 6 月 24 日上午 8:00-10:00

系别 ________ 班级 ______ 学号 __________ 姓名 __________ 考试教室 ______/五教

试卷说明：1、试题分判断是非题、填空题、分析与计算题、证明题 四大部分，满分 70 分。
2、**判断题、填空题答在试卷上，其余题目都要答在专用答题纸上，且注明题号。**

一、判断是非题（请在每个 **题前方括号**内打 $\surd$ 或 $\times$，每题 2 分，5 小题共 10 分）

[ ] 1、若 $f(z)$ 以 $z=0$ 为非孤立奇点，则在 $z=0$ 的任意空心领域 $0<|z|<\delta\ (\delta>0)$ 内有 $f(z)$ 的奇点。

[ ] 2、若 $f(z)$ 在双连通区域 D 中连续且沿 D 中任何一条可求长简单闭曲线的积分为 0，那么 $f(z)$ 在 D 中解析。

[ ] 3、如果 ∞ 为 $f(z)$ 的一级极点，那么 $Res[f(z),\infty]\neq 0$.

[ ] 4、$\tan(z^2+1)$ 可以在圆环域 $0<|z|<\frac{1}{2}$ 中展开成 Laurent 级数。

[ ] 5、如果幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在其收敛圆的圆周上一点 $z_0\,(\neq 0)$ 处条件收敛，那么它在收敛圆的圆周上任一点处条件收敛。

二、填空题（5 小题，除第 1 小题每个空 2 分外，其余每个空 3 分，共 18 分）

1、$my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为 $\mathbb{C}$ 上解析函数，则 $l=$ ______________,

$m=$ ______________，$n=$ ______________。

2、$|i^{(1+i)}|=$ ____。

3、设 C 为正向圆周 $|z|=4$，则积分 $\oint_C \frac{\sin(\pi z)}{z(z+1)(z-1)^2}dz=$ ______________。

4、级数 $\sum_{n=-\infty}^{5} \frac{n+(-3)^n}{n^4+e^n}(z-2)^{n-3}$ 的收敛圆环域为 ________________。

5、设 $f(z)=\frac{1}{z}-z^5\sin\frac{1}{z^2}$，则 $Res[f(z),\infty]=$ ______________。

三、分析与计算题（4 题，共 29 分, 注意：每题要有完整的分析与计算过程，**只写答案没有过程不给分**）

1、(7 分) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$，计算积分

$$I=\oint_C \left(\frac{5}{z}+\tan z\right)dz.$$

2、(6 分) 计算实积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2x)dx}{x^2-4x+8}.$$

3、(6 分) 求函数

$$f(z)=\frac{z}{(1-z^2)^2}$$

在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 展开式。**注意：要完整地写出级数中各项系数的显式表达式即通项。**

4、(10 分) 找出函数

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{\sin z}+\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^4}$$

在扩充复平面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有奇点并进行分类（**须说明理由，如果是极点，必须指出其级数**），并且算出 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数。

四、证明题（2 题，共 13 分）

1、(8 分) 假设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并且 $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数，求证：$f(z)$ 在区域 D 上是一个常数函数。

2、(5 分) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R $(R>0)$, 求证：幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)z^n$$

的收敛半径也为 R, 这里 $a_n=Re(c_n)$, $b_n=Im(c_n)$.