复变函数试题（B卷）　杨晓京

January 5th, 2011

共10题，每题10分

(1) (a) 求$\cos(3x+2yi)$的实部、虚部。(b) 求$(4i)^i$的一般解。

(2) 写出关于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的Abel定理以及收敛半径的定义，并证明：如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$收敛，而$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$发散，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的收敛半径为$r$，这里$r$是某个正实数。

(3) (a)对解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，写出其满足的Cauchy-Riemann公式，并用u,v的偏导数写出导数$f'(z), f^{(n)}(z)$。
(b)若函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$处处解析，证明其满足Laplace方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

(4) 求实积分：
(a)$I_p=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$ $(-1<p<1)$；(b)$J_a=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(2x)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ $(a>0)$。

(5) 求以下积分：
(a)$I_n=\oint_{|z|=3}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$；(b)$J_m=\oint_{|z|=1}\frac{\cos(2z)-1}{z^m}\mathrm{d}z$ $(m\in\mathbb{Z})$。

(6) 设a,b,c,d均为实数，且$ad-bc>0$。证明分式线性映射$w(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$将上半复平面$\Im z>0$映射到上半复平面$\Im w>0$，且实轴正向映射到实轴正向。

(7) 求分式线性映射$w(z)$分别将$z_k=0,1,\infty$映射到$w_k=1,i,-1$，并将其简化为$w=(az+b)/(z+d)$的形式。

(8) 求一般的分式线性映射将圆$|z-1|<r$映射为圆$|w-i|<R$，且$w(0)=i$，其中$r,R\in\mathbb{R}, r>1, R>0$。

(9) 求一个映射将区域$D_2=\{z: a<\Re z<b\}$映射到单位圆$|w|<1$，其中$a,b\in\mathbb{R}, 0<a<b$。

(10) 写出单位圆$|z|<1$映射到单位圆$|w|<1$的一般方程，并利用此方程证明以下不变式：

$$\frac{|\mathrm{d}w|}{1-|w|^2}=\frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

不解释……跟前两年的题几乎没有任何差别（好几题连数字都一样！）……