清华大学本科生考试试题专用纸

考生课程 = 复分析

试卷类型 =A

考生姓名 = 学号 (ID)= 所属院系 =

提示：本考试时间 2010 年一月 19 日， 2:30pm – 4:30pm, 地点在一教 205. 请隔开位置就坐，将书包、手机放在指定的地方。严禁夹带学习资料、相互讨论。若有任何作弊行为，一律按照规定严肃处理。请将答案书写整齐无歧义。有问题请举手。完成试卷后请仔细检查核对自己的名字、学号和院系在每张卷子上是否都写清楚了，有没有遗漏题目。若确信可以提交答卷，请示意并将卷子放在课桌上，本人自行离开即可。本次考试总分 = 30+4.

§1 在下列陈述的后面括号中写上 True 或者 False, 以表达你对其正确性的判断。

这部分每个题目值 1 分，总共 4 分.

1. 若函数 f 在区域 D 中除去一个无限点集

$$S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

外解析，且每个 a_i 都是 f 的孤立奇点且是极点. 那么对任何 D 中的不经过这些 S 中的点、逆时针方向的简单闭曲线 γ, 包含在 γ 内部的 S 的点的个数只能有有限个.

( )

2. 若 $z = a$ 是解析函数 f 的孤立奇点，且 $|f|$ 在 a 的某个空心邻域 V 内有界，那么 a 一定是可去奇点.

( )

3. 设有解析函数 f 在某个以 a 为中心的环域

$$T = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ r < |z - a| < R\}$$

内有 Laurent 展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n.$$

那么这个双边级数可以逐项积分得到 f 的原函数

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n+1} c_n (z-a)^{n+1}, \qquad \forall z \in T.$$

(　　　　　　　　)

4. 设 $f(z)$ 在去心圆域

$$T=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ 0<|z|<R\}$$

中解析，没有零点，且以 $z=0$ 为不可去的孤立奇点．那么 f 沿着半径为 $r(\ 0<r<R)$ 的圆周逆时针旋转一周，取值的辐角变化

$$\Delta_{|z|=r}\arg f(z)=\frac{1}{i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

一定是 2π 的负整数倍数.

(　　　　　　　　)

§2　在下列陈述的空白括号中写上正确的词语、数字、或数学表达式。

这部分每个空值 1 分，总共 12 分.

1. 如果 $z=a$ 是 f 的 m 级零点 $(m\geqslant 2)$, 那么它一定同时是 $\frac{1}{f'}$ 的 (　　　　　　　　) 级 (　　　　　　　　) 点.

2. 设整数 $n\geqslant 1$, $a_0\neq 0$. 多项式函数 $p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 以 ∞ 为 (　　　　　　　　) 级 (　　　　　　　　) 点．相应的，有理函数 $\frac{1}{p(z)}$ 以 ∞ 为 (　　　　　　　　) 级零点 (视 ∞ 为可去奇点).

3. 设实二元函数 u 在 $\overline{D}=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-a|\leqslant R\}$ 上连续，内部调和．而且在边界上 u 取值是

$$u(a+Re^{i\theta})=\sin\frac{1}{2}\theta,\qquad \text{其中}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

那么可以断定

$$u(a)=\ (\qquad\qquad\qquad)\ .$$

而且 u 在 $\overline{D}$ 上能取到的最大值的那个点是 $z=$ (　　　　　　　　) .

4. 设函数

$$f(z)=\frac{e^{z^2}}{z(z+1)^3},$$

那么

$$\mathrm{Res}(f;0)=\ (\qquad\qquad\qquad)\ .$$

$$\mathrm{Res}(f;-1)=\ (\qquad\qquad\qquad)\ .$$

$$\mathrm{Res}(f;\infty)=\ (\qquad\qquad\qquad)\ .$$

$$\int_{|z|=2}f(z)dz=\ (\qquad\qquad\qquad)\ .$$

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}}f(z)dz=\ (\qquad\qquad\qquad)\ .$$

§3 在每个陈述的所有选项中选择正确的答案，并在括号中填写相应的字母.

这部分每个题目值 2 分，总共 10 分. 注意：每个题目都有可能需要你选择多个答案，但至少有一个正确的答案。如果你只选择出一部分正确答案，而没有选择出全部正确的答案，只能得 1 分. 如果你的选择中有一个或多个错误的答案，就只能很遗憾地得到 0 分.

1. 下面关于奇点的叙述，正确的是 (　　和　　和　　和　　).

   A 若 f 以 ∞ 为可去奇点，那么极限 $\lim_{z\to\infty} f(z)$ 一定存在.

   B 解析函数 f 的奇点一定是孤立的.

   C 若函数 f 在孤立奇点 $z=a$ 处的留数 $\mathrm{Res}(f,a)=0$, 那么 a 一定是可去奇点.

   D 若 f 以 $z=a$ 为本性奇点，则 $\frac{1}{f}$ 也以 $z=a$ 为本性奇点.

2. 设 D 是区域， D 的边界 ∂D 非空. 又设 u 是 $\overline{D}$ 上的连续二元实函数，在 D 内调和. 下面陈述中，正确的有 (　　和　　和　　和　　).

   A 如果 u 不是常数，在某一点 $a\in\overline{D}$ 取到最小值，即 $u(a)\leqslant u(z)$, 对任意的 $z\in\overline{D}$, 那么 a 一定在 D 的边界 ∂D 上.

   B 如果某个圆周
   $$C=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-a|=r\}$$
   $(a\in D,\ r>0)$ 及其内部全部包含在 $\overline{D}$ 中，而且 u 限制在 C 上取常数值，那么 u 在 D 中也是常值函数.

   C 如果 u 在 D 的边界 ∂D 上取值恒为正数，那么 u 在 D 上取值也一定是正数.

   D u 可以无限次可求偏导数，且任意阶偏导数
   $$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\partial y^q}u$$
   也都是调和函数.

3. 已知 D 是单连通区域，它包含在一个更大的单连通区域 Ω 中. 下面说法正确的有 (　　和　　和　　和　　).

   A 任何两条连续曲线：
   $$\gamma_i:\ [0,1]\ \to\ \Omega,\qquad i=1,2.$$
   如果它们具有相同的的起点和终点：
   $$\gamma_1(0)=\gamma_2(0),\quad \gamma_1(1)=\gamma_2(1),$$
   那么 γ_1 与 γ_2 定端同伦.

   B 若 $(f;D)$ 构成解析元素，另外有一个解析元素 $(g;E)$, $E\subset\Omega$, 使得 $(f;D)$ 与 $(g;E)$ 互为间接解析开拓. 那么 g 被 f 唯一确定.

   C 任给在区域 D 内调和的实二元函数 u_0, 一定能找到在 Ω 内的调和函数 u, 使得 u 限制在 D 上与 u_0 相等.

D 若函数 f 在 Ω 上解析，在 D 中存在无限多个零点，那么 f 只能在 Ω 上处处取常数 0 值.

4. 设解析函数 f 在去心圆域

$$T = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 0 < |z-a| < R\}$$

内解析，以 $z = a$ 为孤立奇点. 那么下面关于留数 $\mathrm{Res}(f, a)$ 的叙述，正确的有 (　　和　　和　　和　　).

A $\mathrm{Res}(f, a)$ 等于 f 在 a 点 Laurent 展式的 $(z-a)^{-1}$ 项的系数.

B 对充分小的正数 r, 成立

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

C 由留数定理,

$$\mathrm{Res}(f, a) = -\mathrm{Res}(f, \infty).$$

D $\mathrm{Res}(f', a) = 0$.

5. 设多项式函数 $p(z) = 4z^5 - z^4 + 3z^2 - 1$, 那么 $p(z)$ 在开圆 $D = \left\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < \frac{1}{2}\right\}$ 内零点的个数 (记重数) 是 (　　　　　　　　) .

A 5 个

B 2 个

C 0 个

D 4 个

§4　请针对题目的要求写出足够详细的解答

这部分每个题 2 分，总共 4 分．另外有附加题 4 分.

1. 将函数

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$$

在环域

$$T_1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 1 < |z| < 2\}$$

和

$$T_2 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ 2 < |z|\}$$

内，分别展开成 Laurent 级数 (提示：首先分解 f 成两个简单分式的和).

2. 考察函数

$$f(z)=\frac{\cos z-1}{z^2(z^3-1)}.$$

求出

1) f 以哪些点为零点，哪些点为奇点？对于零点，说明是几级零点．对奇点，说明具体的分类名称．如果有极点，说明是几级极点．（注意，考虑奇点时应包括 ∞）

2) 又设 γ 是以 0 为圆心， $R=10$ 为半径的逆时针方向圆周．求 f 的取值沿着 γ 一周的辐角变化是多少？

3. (附加题 2 分，可做可不做). 设 γ 是逆时针方向的简单闭曲线， D 是 γ 内部所围的区域，非常数的函数 f 在 $\overline{D}$ 上连续， D 内解析，且 f 在 D 内没有任何零点. 求证，对任意的 $a \in D$, 至少存在一个 $b \in \partial D = \mathrm{Img}\gamma$, 使得

$$|f(b)| \leqslant |f(a)|.$$

4. (附加题 2 分，可做可不做) 请使用留数的方法求出广义积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = ?$$

§5 Key

Key to §1

1. F
2. T
3. F
4. F

Key to §2

1. $m-1$, 极
2. n, 极点， n
3. $\frac{2}{\pi}$, $a-R$
4. 1, $-2e$, $2e-1$, $2(1-2e)\pi i$, $2\pi i$

Key to §3

1. A
2. A, B, D
3. A
4. A,D
5. C

Key to §4

1. 表达方式比较多，略
2. $0=$ 可去奇点， $2k\pi$ (整数 $k \neq 0$) 是 2 级零点， $\infty=$ 本性奇点， $1, \omega, \omega^2$ 是一级极点 (ω 是 $z^3=1$ 的非平凡解). 2π
3. 用 Rouche 定理或者极大模原理
4. $\frac{\pi}{2e}$