2006级一元微积分期末考题（A）答案

一．填空题（每空3分，共15空）（请将答案直接填写在横线上！）

1． $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2e^{t^2}dt=$ $\dfrac{1}{2}$。 解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2e^{t^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

2．设 $f(x)$ 为连续函数，$F(x)=\int_0^{\cos x}f(x-t)dt$，则 $F'(x)=$ $f(x)-(1+\sin x)f(x-\cos x)$

答案：令 $x-t=u$，$F(x)=-\int_x^{x-\cos x}f(u)du$，$F'(x)=f(x)-(1+\sin x)f(x-\cos x)$。

3． $\int_{-1}^{1}\left(\sin x^3+\sqrt{1-x^2}\right)dx=$ $\dfrac{\pi}{2}$。 答案：$\dfrac{\pi}{2}$

奇函数

4． $\int x\ln x\,dx=$ $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$。 答案：$\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$

5． $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+e^x}=$ $\ln 2$。 答案：$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+e^x}=\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}=\ln 2$。

6． $\int\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}dx=$ $\cos\frac{1}{x}+C$。 答案：$\cos\dfrac{1}{x}+C$。

7．当 p 的取值范围为 $(1,2)$ 时，广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p(x-2)^{p-1}}$ 收敛．答案：$1<p<2$

8．设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=2$ 收敛，则 a 的取值范围为 $(1,3]$。 答案：$1<a\le 3$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径为1，收敛域为 $[a-1,a+1)$，$a+1>2\ge a-1$，$1<a\le 3$

9．若广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛，则参数 p 的范围为 $(1,2)$。答案：$1<p<2$

10．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^{n+1}}x^{2n+1}$ 的收敛半径是 $\sqrt{2}$。答案：$\sqrt{2}$

11． $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}$ 是收敛还是发散？条件（填绝对收敛，条件收敛或发散）。答案：条件收敛。

形

12. 函数 e^{x^2+2x} 在 $x_0=-1$ 点的 Taylor 级数展开式为 $\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n!}$ $|x|<+\infty$。

答案：$e^{x^2+2x}=e^{(x+1)^2-1}=\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n!}$ $(|x|<+\infty)$

13. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n!}}{n^{n/2}}$ 是收敛还是发散？ 收 （填上收敛或发散）。 答案：收敛

$$\frac{\frac{\sqrt{n!}}{n^{n/2}}}{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(n+1)^{(n+1)/2}}}=\sqrt{n+1}\frac{n^{n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\to e^{-\frac{1}{2}}$$

14. 方程 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}-2y=1\\ y(0)=0\end{cases}$ 的解为 $y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}$。 答案：通解为 $y(x)=ce^{2x}-\frac{1}{2}$，代入初值 $y(x)=\frac{1}{2}(e^{2x}-1)$。

15. 方程 $\frac{dy}{dx}-y=y^2$ 的通解为______。 答案：$y=\frac{1}{Ce^{-x}-1}$ 以及 $y=0$。

二. 计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 求 $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$。

解：$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d(\sqrt{x})$ 2分

$=2\int_0^1\arcsin\sqrt{x}\,d\left(\arcsin\sqrt{x}\right)=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2\Big|_0^1=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ ....4+2+2 = 8 分

2. 计算上半心形线：$\begin{cases}x=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta\le\pi$，绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积 V。

解：$dx=-a[(1+\cos\theta)\sin\theta+\cos\theta\sin\theta]d\theta$ 2分

所以 $V=\left|\int_0^{\pi}\pi y^2(\theta)dx(\theta)\right|=\pi a^3\left|\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta(1+2\cos\theta)d(\cos\theta)\right|$ ....3+2 = 5 分

$=\pi a^3\int_{-1}^{1}(1+t)^2(1-t^2)(1+2t)dt=\frac{8}{3}\pi a^3$ 3分

注：不加绝对值扣 2 分。

$\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^{n-1}$ $(-2,0)$

3．将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 展开成 $x+1$ 的幂级数，求该幂级数的收敛域，并求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x+1)^n$ 的和函数。

解：$\frac{-1}{x}=\frac{1}{1-(x+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$，$(|x+1|<1)$，

两边求导即得：$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^{n-1}$ ……………………4 分

此幂级数的收敛域为 $(-2,0)$。……………………2 分

进而 $\frac{x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$，再两边求导即得：$\frac{-1}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x+1)^{n-1}$，

故所求和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x+1)^n=(x+1)(\frac{-1}{x^2}-\frac{2}{x^3})=-\frac{(x+1)(x+2)}{x^3}$ ……4 分

4．计算下面定解问题的解 $y=y(x)$：

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}=2y(y-a)(2y-a), & 0<x<+\infty, \\ y(0)=1,\ y'(0)=\sqrt{2}(1-a), \end{cases}$$

其中 $a>1$。

解：令 $\frac{dy}{dx}=p(y)$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$，

方程化为 $\frac{dp}{dy}p=2y(y-a)(2y-a)=4y^3-6ay^2+2a^2y$，……………2 分

分离变量积分得到 $\frac{p^2}{2}=y^4-2ay^3+a^2y^2+C=y^2(y-a)^2+C$，……………2 分

注意到 $p(1)=\sqrt{2}(1-a)$，得到 $C=0$，所以 $p(y)=\sqrt{2}y(y-a)$；……………1 分

再积分 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{2}y(y-a)$，得到

$$\sqrt{2}x=\int\frac{dy}{y(y-a)}=\frac{1}{a}(\ln|\frac{y-a}{y}|+C)，$$ ……………………4 分

利用 $y(0)=1$ 得 $C=-\ln(a-1)$，……………………1 分

进一步整理得到 $y(x)=\frac{a}{1+(a-1)e^{\sqrt{2}ax}}$。

三. 证明题

1.（8分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调增，求证

$$\int_a^b xf(x)\,dx \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)\,dx$$

证明：证法一：记 $F(b)=\int_a^b xf(x)\,dx$，$G(b)=\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)\,dx$，则

$$F(a)=G(a)$$ ……………………………………2分

$$F'(b)=bf(b),\quad G'(b)=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx+\frac{a+b}{2}f(b)$$ ……………2分

因为 $f(x)$ 单调增，$F'(b)=bf(b)\ge G'(b)=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx+\frac{a+b}{2}f(b)$， …………2分

故

$$\int_a^b xf(x)\,dx \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)\,dx$$ ……………………………2分

证法二：$\int_a^b xf(x)\,dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$$ ……………2分

$$=f(\xi_1)\frac{a-b}{2}+f(\xi_2)\frac{b-a}{2},$$ ………………………………………4分

其中 $\xi_1\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\xi_2\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. 因为 $f(x)$ 单调增，$f(\xi_1)\le f(\xi_2)$，故

$$\int_a^b xf(x)\,dx \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)\,dx$$ ……………………………2分

2.（7分）设 $f\in C^1[0,+\infty)$ 且 $\int_0^{+\infty}\left(|f(x)|+|f'(x)|\right)dx$ 收敛，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明：由已知 $\int_0^{+\infty}f'(x)dx$ 绝对收敛，从而收敛，所以

$$\lim_{A\to+\infty}f(A)=f(0)+\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f'(x)dx=f(0)+\int_0^{+\infty}f'(x)dx \text{ 存在.}$$ ………3分

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$，不妨令 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a>0$，则由极限保序性

$\exists M>0$，使得 $x\geq M$ 之后 $f(x)\geq a/2$，从而 $\forall K>M$

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|dx\geq\int_M^K|f(x)|dx\geq\frac{a}{2}(K-M)$$

而 $K>M$ 的任意性与 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛矛盾。这说明只有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。……4分

高等微积分 B 期末试题（2008 年 1 月 11 日）（A）

姓名__________班号__________学号__________

1．填空题（**直接填在横线上**）（4 分/小题）

1)．设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 条件收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_{2k}=$ __∞__。

2)．广义积分 $\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x(\ln\ln x)^r}$ 在 $p>1$ 或 $(p=1$ 且 $q>1)$ 或 $(p=q=1$ 且 $r>1)$ 时收敛，其它情形发散。

3)．设 $A_n=\{x\mid x\in\mathbb{Z}^+, 且 x<n, 且 x 与 n 互素\}$，$\varphi(n)$ 是 A_n 中元素个数，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\varphi(n)}=$ __1__。

4)．叙述函数黎曼可积的 $\varepsilon-\delta$ 定义。函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积是指：

$\exists I\in\mathbb{R}\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ 对于 $[a,b]$ 的任意划分 $T=\{x_k\}_{k=0}^{n}\ \forall\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$

$(\lambda_T<\delta\Rightarrow|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I|<\varepsilon)$.

2．选择题（**直接填在括号内**）(3 分/小题)

1)．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 的敛散情况是[B]。

A. 绝对收敛；　　B. 条件收敛；

C. 收敛但不能判定是绝对收敛还是条件收敛；D. 不能判断是否收敛。

2)．已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别是 $R_1>0, R_2>0$，则下列关于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 R 的叙述中正确的是[D]。

A. $R<\min(R_1,R_2)$；　　B. $R=\min(R_1,R_2)$；

C. $R>\min(R_1,R_2)$；　　D. A，B，C 都不一定成立。

3)．下列陈述中，正确的是 [C]。

A．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

B．若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 黎曼可积，则函数 $\int_a^x f(t)dt$ 在区间 $[a,b]$ 可导；

C．正项级数收敛的充要条件是：以某种方式加括号后所得级数收敛；

D．若广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则广义积分 $\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛。

4)．设 $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x\le 0,\\ x^2-1, & 0<x\le\pi,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的以 2π 为周期的 Fourier 级数在点 $x=\pi$ 处收敛于[B]

(A) π^2-1；　(B) $\frac{1+\pi^2}{2}$；　(C) 1；　(D) $\frac{1}{2}$．

3．判断题：指出下列陈述是否正确，并简述理由(若正确，给出简要证明；若错误，举出反例)（5 分/小题，其中判断 2 分，简述 3 分，简述理由不需要证明的细节，主要看学生对于知识的理解是否正确到位。切中要点就可以给 3 分，相关但有明显概念或逻辑上的混乱，或语言表达混乱 1-2 分，一无是处或毫无意义的陈述 0 分）。

1)．若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$，$[b,c]$ 都一致连续，则在区间 $[a,c]$ 一致连续。

正确。

证法 1 因为在区间 $[a,b]$，$[b,c]$ 连续，所以在区间 $[a,c]$ 连续，所以在区间 $[a,c]$ 一致连续。

证法 2 $\forall\varepsilon>0$，因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 一致连续，所以

$$\exists\delta_1>0\ \forall x,t\in[a,b]\ (|x-t|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-f(t)|<\varepsilon/2).$$

因为 $f(x)$ 在区间 $[b,c]$ 一致连续，所以

$$\exists\delta_2>0\ \forall x,t\in[b,c]\ (|x-t|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-f(t)|<\varepsilon/2).$$

令 $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$. $\forall x,t\in[a,c]$，当 $|x-t|<\delta$ 时，

① $x,t\in[a,b]$，因为 $|x-t|<\delta\le\delta_1$，所以 $|f(x)-f(t)|<\varepsilon/2<\varepsilon$.

② $x,t\in[b,c]$，因为 $|x-t|<\delta\le\delta_2$，所以 $|f(x)-f(t)|<\varepsilon/2<\varepsilon$.

③ $x\in[a,b]$，$t\in[b,c]$，因为 $|x-b|\le|x-t|<\delta\le\delta_1$，$|f(x)-f(b)|<\varepsilon/2$；

$$|t-b|\le|x-t|<\delta\le\delta_2,\ |f(t)-f(b)|<\varepsilon/2,$$

从而有 $|f(x)-f(t)|<\varepsilon$.

④ $t\in[a,b]$，$x\in[b,c]$ 时与③同理可证。

2). 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $[a,b]$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在区间 $[a,b]$ 也收敛。

错。例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 在 $[-1,0]$ 收敛，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n+1}$ 在 $x=-1$ 发散。

3). 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\forall n$ 有 $v_n > 0$ 且 $\frac{v_{n+1}}{v_n} \le \frac{u_{n+1}}{u_n}$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。

正确。因为对于任意 $n>1$ 有 $\frac{v_n}{v_{n-1}} \cdots \frac{v_2}{v_1} \le \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdots \frac{u_2}{u_1}$，从而 $v_n \le \frac{v_1}{u_1} u_n$。

4). 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限多个间断点。

错。例如黎曼函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{p} & 若 x=\frac{q}{p}(既约分数); \\ 0 & 若 x \notin \end{cases}$ 在区间 $[0,1]$ 可积，但有无穷多个间断点，有理点都是间断点。

4（10 分）. 用定义验证极限：$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$。

证明 $\forall \varepsilon > 0$，要 $|\frac{\ln n}{n} - 0| < \varepsilon$，只要 $\ln n < n\varepsilon$，只要 $e^{\ln n} < e^{n\varepsilon}$，即只要 $n < \left(e^{\varepsilon}\right)^n$。

--（3 分）

当 $n>2$ 时，只要 $n < 1 + n(e^{\varepsilon}-1) + \frac{n(n-1)}{2}(e^{\varepsilon}-1)^2$，只要 $n < \frac{n(n-1)}{2}(e^{\varepsilon}-1)^2$，只要 $n-1 > \frac{2}{(e^{\varepsilon}-1)^2}$。------------------------------（7 分）

所以 $\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(2, [\frac{2}{(e^{\varepsilon}-1)^2}]) \forall n > N\, |\frac{\ln n}{n} - 0| < \varepsilon$，所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$。

--（10 分）

5（12 分）. 将函数 $f(x)=\sin ax$ 在 $[0,\pi]$ 展开为余弦级数。

解 1）当 $a \notin$ 时。

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(a+n)x + \sin(a-n)x) dx$$

--（2 分）

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(a+n)x}{a+n} - \frac{\cos(a-n)x}{a-n}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(a+n)\pi}{a+n} + \frac{1-\cos(a-n)\pi}{a-n}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n \cos a\pi}{a+n} + \frac{1-(-1)^n \cos a\pi}{a-n}\right) = \frac{2a}{\pi}\frac{1-(-1)^n \cos a\pi}{a^2-n^2}.$$

--（6 分）

$$f(x) = \frac{1-\cos a\pi}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi}\frac{1-(-1)^n \cos a\pi}{a^2-n^2}\cos nx.$$

--（7 分）

2）当 $a \in$ 时，$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(a+n)x + \sin(a-n)x) dx$.

--（8 分）

因为当 k 为奇数时，$\int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2}{k}$；当 k 为偶数时，$\int_0^{\pi} \sin kx dx = 0$，所以

当 a 为奇数时，$a_{2n-1} = 0$，$a_{2n} = \frac{2}{a+2n} + \frac{2}{a-2n} = \frac{4a}{a^2-4n^2}$。

$$f(x) = \frac{2}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a}{a^2-4n^2}\cos 2nx.$$

--（10 分）

当 a 为偶数时，$a_{2n} = 0$，$a_{2n-1} = \frac{2}{a+2n-1} + \frac{2}{a-2n+1} = \frac{4a}{a^2-(2n-1)^2}$。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a}{a^2-(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

--（12 分）

6（12 分）. 证明零点存在定理：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$。

证明 不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$. 取 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

若 $f(c_1)=0$，得证。否则，若 $f(c_1)<0$，取 $a_2 = c_1, b_2 = b_1; c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.

若 $f(c_1)>0$，取 $a_2 = a_1, b_2 = c_1; c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.

……

依此进行下去。或者在某一步得证，或者得到区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足

$\forall n\ f(a_n)<0, f(b_n)>0$.

--（6 分）

由区间套定理知，$\exists! \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，$\xi = \lim a_n = \lim b_n$.

--（9 分）

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\le 0;\ f(\xi)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)\ge 0.$$

从而有 $f(\xi)=0$.

--（12 分）

7（12 分）．求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 的和。

解 法 1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\ x\in(-\infty,+\infty);$

--（4 分）

从而有 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=e^{-x},\ x\in(-\infty,+\infty).$

--（8 分）

相减：$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}-\frac{(-x)^n}{n!}\right)=e^x-e^{-x},\ x\in(-\infty,+\infty).$

即 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!}=e^x-e^{-x}$，即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^n}{(2n+1)!}=e^x-e^{-x}$，

即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$

--（12 分）

法 2）记 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=S(x).$

逐项求导得：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=S'(x).$

--（4 分）

从而有 $S'(x)+S(x)=e^x.$

--（8 分）

使用一阶线性非齐次常微分方程的解的公式

$$S(x)=e^{-\int dx}\left(\int e^x e^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right).$$

因为 $S(0)=0$，所以 $C=-\frac{1}{2}$.

$$S(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

--（12 分）

8（二选一）（6 分，方法正确或基本正确者 5-6 分，方法错误者 0-1 分，方法错误但步骤中包含有创见的想法的 2-4 分，解答是否逻辑清楚和简洁流畅作为给分浮动的标准）.

1）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛.

证明 $\exists\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{4}\ \forall N\in\square\ \exists n=N+1>N\ \exists m=2(N+1)>N\ \exists x=\frac{\pi}{4(N+1)}\in(-\infty,+\infty)$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right|=\left|\frac{\sin\frac{N+2}{4(N+1)}\pi}{N+2}+\frac{\sin\frac{N+3}{4(N+1)}\pi}{N+3}+\cdots+\frac{\sin\frac{2(N+1)}{4(N+1)}\pi}{2(N+1)}\right|$$

$$=\frac{\sin\frac{N+2}{4(N+1)}\pi}{N+2}+\frac{\sin\frac{N+3}{4(N+1)}\pi}{N+3}+\cdots+\frac{\sin\frac{2(N+1)}{4(N+1)}\pi}{2(N+1)}$$

$$\ge\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{N+2}+\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{N+3}+\cdots+\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2(N+1)}$$

$$\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+\cdots+\frac{1}{2(N+1)}\right)$$

$$\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2(N+1)}+\frac{1}{2(N+1)}+\cdots+\frac{1}{2(N+1)}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{N+1}{2(N+1)}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

由关于一致收敛的 Cauchy 收敛准则知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不一致收敛.

（也可以用 Fourier 级数的 Dirichlet 定理来证明）

2）设 $\forall n\ u_n>0, v_n>0$，$a_n=\frac{u_nv_n}{u_{n+1}}-v_{n+1}$，试证明，若 $\lim_{n\to\infty}a_n=A>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

证明 $a_n=\frac{u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}}{u_{n+1}}$，$u_{n+1}=\frac{u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}}{a_n}$.

因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=A>0$，所以 $\exists N\in\square\ \forall n>N\ |a_n-A|<\frac{A}{2}$，$\forall n>N\ a_n>\frac{A}{2}$.

因为 $\forall n\ u_n>$，$\forall n>N a_n>\frac{A}{2}>0$，所以 $\forall n>N\ u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}>0$.

所以 $\forall n > N \quad u_{n+1} < \dfrac{u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}}{\dfrac{A}{2}}$.

所以 $\forall n > N \quad S_n = S_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_n$

$$< S_{N+1} + \frac{u_{N+1} v_{N+1} - u_{N+2} v_{N+2}}{\frac{A}{2}} + \cdots + \frac{u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}}{\frac{A}{2}}$$

$$\le S_{N+1} + \frac{2u_{N+1} v_{N+1}}{A}.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

一元微积分期末考试试题试卷A参考解答　　2009年1月9日

一. 填空题（共15个空，每个空3分）

1. 定积分 $\int_0^{100}(x-[x])dx = 50$, 其中 $[x]$ 表示取整函数.

注: 如果能看出函数 $x-[x]$ 是周期的, 且周期为1, 那么这个空就非常容易填了.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$

注: 上述极限实际上是函数 $\frac{1}{1+x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 和的极限.

3. 不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$ ______________.

解法一: $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{d(x-1/2)}{\sqrt{1/4-(x-1/2)^2}} = \arcsin(2x-1)+c.$

解法二: $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = 2\arcsin\sqrt{x}+c.$

4. 定积分 $\int_{1/e}^{e}(\ln x)^2dx = e-5/e$

5. 若广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)dx}{x^p(1+x)^{p-1}}$ 收敛，则参数 p 的范围是 $1<p<2$.

6. 设 $p>0$，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{2n-1}}{n^p}$ 的收敛域为 $[0,2]$.

7. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1$ 的通解为 $(x-y)^2=-2x+c$.

8. 已知函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 则 $\int f\left(\frac{x}{a}\right)dx = \frac{a^2}{x}\sin\frac{x}{a}+c.$

9. 不定积分 $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx =$ ______________.

答: 作变换 $t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$, 可得不定积分为 $(1+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+c.$

另一种形式: $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+c.$

10. 设 $a \neq 0$, 则 $\int \frac{dx}{x(a+x^n)} = $ ________________.

答: 作变换 $t = x^n$, 可得不定积分为 $\frac{1}{na} \ln \left| \frac{x^n}{a+x^n} \right| + c$.

11. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可导，则 $\lim_{a \to 0} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^{a} (f(t+a) - f(t-a))dt = f'(0)$

12. 求和 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(1+n)}{n!} = $ ________________.

答: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(1+n)}{n!} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1}n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = 2e^2 + e^2 = 3e^2$.

13. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t-x)dt$，则 $F'(x) = $ ________________.

答: 令 $t-x = u$，则 $F(x) = \int_{-x}^{\sin x - x} f(u)du$, $F'(x) = (\cos x - 1)f(\sin x - x) + f(-x)$.

14. 函数 e^{x^2+2x} 在 $x_0 = -1$ 点的幂级数展开式 ________________.

答: $e^{x^2+2x} = e^{(x+1)^2-1} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n!}$, $|x| < +\infty$.

15. 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为 ________________.

答: 令 $p = y'$. 则 $xp' + 3p = 0$. 解得 $p = c/x^3$. 从而 $y = c_1/x^2 + c_2$.

二. 计算题（共5道题，每道题8分）

1. 求解二阶常微分方程的初值问题 $y'' - y' = e^{2x}$，$y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = 1$.

解: 令 $z = y'$. 则 $z' - z = e^{2x}$. 进一步有 $(ze^{-x})' = e^x$. 于是解得 $z(x)e^{-x} = e^x + c_1$. 因 $y'(0) = 1$, 得 $c_1 = 0$. 故 $y' = e^{2x}$. 从而 $y = e^{2x}/2 + c_2$. 因 $y(0) = 1/2$, 得 $c_2 = 0$. 故 $y = e^{2x}/2$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $xf'(x) = f(x) + x^2$. 又设曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 0, x = 1, y = 0$ 所围的图形 S 的面积为 2. 求 $f(x)$ 的表达式以及图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解: If $x \neq 0$, then $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 1$, that is

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1.$$

we get

$$f(x) = x^2 + Cx, \quad x \in [0,1].$$

由于曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 0, x = 1, y = 0$ 所围的图形 S 的面积为 2，故

$$\int_0^1 |x^2 + Cx| dx = 2.$$

当 $C \geq 0$ 时，$f(x) > 0$. 由此我们解得 $C = \frac{10}{3}$. Then

$$f(x) = x^2 + \frac{10x}{3}.$$

图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积是

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \Big(\frac{1}{5} + \frac{5}{3} + \frac{100}{27}\Big)\pi.$$

当 $-1 < C < 0$ 时， 我们有

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^{|C|} x(|C| - x) dx + \int_{|C|}^1 x(x - |C|) dx = 2.$$

由此得到

$$2|C|^3 - 3|C| - 10 = 0.$$

容易看出，函数 $g(t) = 2t^3 - 3t - 10 = 0$ 在 [-1,1] 在 $t = \pm 1/\sqrt{2}$ 处取得极值，且 $g(1/\sqrt{2}) = -10 - \sqrt{2}$、$g(-1/\sqrt{2}) = -10 + \sqrt{2} < 0$, $g(1) = -11 < 0$, $g(-1) = -9 < 0$. 因此 $t \in [-1,1]$ 时， 函数 $g(t) < 0$。因此当 $-1 < C < 0$ 时，不合乎要求。

当 $C \leq -1$ 时， 我们有

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 x(|C| - x) dx = 2.$$

由此得到 $C = -\frac{14}{3}$. 此时图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积是

$$V = \pi \int_0^1 \Big(x^2 - \frac{14x}{3}\Big)^2 dx = \Big(\frac{1}{5} - \frac{7}{3} + \frac{196}{27}\Big)\pi.$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内满足 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$, 且当 $x \in [0, \pi)$ 时，$f(x) = x$. 计算 $\int_\pi^{3\pi} f(x) dx$.

解:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx &= \int_{\pi}^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]dx \\
&= \int_{\pi}^{3\pi} f(x-\pi)dx \\
(Let\ t = x-\pi) &= \int_{0}^{2\pi} f(t)dt = \int_{0}^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt \\
&= \int_{0}^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]dt \\
&= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_{\pi}^{2\pi} f(t-\pi)dt \\
(let\ x = t-\pi) &= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \pi^2 - 2.
\end{aligned}$$

4. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和。

解: 记 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$, 则 $S(x)=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n-1}-\frac{x^n}{n+1}\right)$. 由于

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} = -x\ln(1-x), \quad |x|<1,$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)-1-\frac{x}{2}, \quad |x|<1,$$

因此

$$2S(x) = -x\ln(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)+1+\frac{x}{2} = (1/x-x)\ln(1-x)+1+\frac{x}{2}.$$

故所求级数的和为

$$S(1/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

5. 设平面区域 D 由 $y=0, y=a, x=0, x=\sqrt{a^2+y^2}$ 围成 $(a>0)$. 求 D 绕 y 轴生成的旋转体的体积 V, 以及旋转体的表面积 S (表面积 = 侧面积+上下底面积).

解: $V=\pi\int_0^a x^2dy=\pi\int_0^a(a^2+y^2)dy$

$=\pi(a^2y+\frac{y^3}{3})\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi a^3$

$S=2\pi\int_0^a x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}dy+\pi(2a^2+a^2)$ (侧面积+上下底面积)

$$= 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2 + 2y^2} dy + 3\pi a^2$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{3} + 3 \right) \pi a^2$$

三. 证明题（共两道题）

1. （7分）已知方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的根, 记作 a_n, $n = 1, 2, \cdots$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛。

证明: 记 $f(x) = x^n + nx - 1$. 则易见 $f(\frac{1}{n+1}) < 0$, $f(\frac{1}{n}) > 0$。 故有

$$\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{1}{n}.$$

因此 $a_n \downarrow 0$， 即级数是 Leibniz 型的, 故收敛。由上述关于 a_n 估计可知级数条件收敛。证毕。

注： 方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的根是显而易见的， 因为 $f'(x) = nx^{n-1} + n > 0$, 且 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = n > 0$.

2. （8分）设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 满足 $\int_a^x g(t)dt \le \int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a, b)$, 且 $\int_a^b g(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. 证明 $\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$.

证明: 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, $G(x) = \int_a^x F(t)dt$. 由题设, $G(x) \ge 0$ for all $x \in [a, b]$, $G(x) \ge 0$ $G'(x) = F(x)$. 从而

$$\begin{aligned}
\int_a^b xF(x)dx &= \int_a^b x dG(x) \\
&= xG(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)dx \\
&= bG(b) - aG(a) - \int_a^b G(x)dx = -\int_a^b G(x)dx.
\end{aligned}$$

由于 $G(x) \ge 0, x \in [a, b]$ 所以

$$\int_a^b xF(x)dx = -\int_a^b G(x)dx \le 0.$$

从而 $\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$. 证毕