No.
Date

一. 基本概念：记号为D. 连通开集.
开集、闭集、闭包、区域、连通性、边界（∂D）
单/多连通，Jordan 曲线.
（$\mathbb{C}$与$\mathbb{R}^2$类似、但有区别）

二. 极限.
设 $f: D \to \mathbb{C}$, 其中 $D \subseteq \mathbb{C}$. 若 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$
使得 $\forall\, 0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon$ 且 $z \in D$ 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$.
则 $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$.
若 $A = \infty$ 改为 $|f(z)| > \varepsilon$.

① 存在性判定：Cauchy 准则.
或. 实/虚部均有极限.

例. $f(z) = f(x+iy) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+|y|}}$，~~极~~ $(z \to 0)$

② 连续函数.（$f(z)$ 在 z_0 连续，$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + \varphi(z)$
其中 $\varphi(z) \to 0$ $(z \to z_0)$）.
③ 可微函数. 类似性质.

三. 解析（全纯）
↳ 在 z_0 邻域内可导. 则在 z_0 解析.

（Cauchy - Riemann 方程）
设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，$\underbrace{u, v}_{\text{视为}\mathbb{R}^2\text{上函数}} \in C^1(\Omega)$.

则 f 在 Ω 解析 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 且 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

（记忆）：$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

No.
Date

四. 级数.

1. 收敛判别.(绝对/条件/发散)
① Cauchy准则 ② 比值 ③ 根式.
④ 比较判别.
更精细的 ⑤ Abel判别 ⑥ Dirichlet判别.(见瑕积分)

2. 幂级数. $\sum a_n x^n$ (Hadamard公式)

收敛半径: $1/R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

注: 在 $|z| = R$ 上收敛性需另外验证.

注2: $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 对 $|a_n| \neq 0$.

性质: ① 在 $|z| < R$ 内解析.

② 设 $f(z) = \sum a_n z^n$, 则

a) $f'(z)$ 收敛半径 R.

b) $f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$.

3. 新函数.

$$e^z \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad R = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}\right]^{-1} = \infty.$$

五. 积分 光滑

设曲线 $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$, 则.

$$\int_\gamma f(z)dz \triangleq \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

1. Goursat 定理. → 在单连域 D 解析, $\bar{D}$ 连续.

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

2. 闭路变形(复合闭路定理)

实际上有一"同伦"(homotopic)的概念,

上机

单连通

3. f在开集Ω解析. 区域 D 满足 $\bar{D}\subseteq\Omega$. 边界 $\partial D=\gamma$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi \quad \forall z\in D.$$

一个不等式. 设 $C_R=\{z \mid |z-z_0|=R\}$,

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\cdot\|f\|_{C_R}}{R^n} \quad 其中\ \|f\|_{C_R} \triangleq \sup_{z\in C_R}|f(z)|$$

4. (Liouville定理) 有界整函数为常数
↑ 在 $\mathbb{C}$ 解析.

5. 级数展开. (条件同3). ~~解析也有定义为该级数. 收敛至f(z). 反例~~ $\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}}, & z\ne 0 \\ 0, & z=0. \end{cases}$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

其中 $a_n = f^{(n)}(z_0)/n! = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$.

$0<r_1<r_2$.

6. f在 $\Omega\supseteq V$ 解析 ($V\triangleq\{z \mid r_1\le|z-z_0|\le r_2\}$).

则 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. $\forall z\in\mathring{V}$ (即 $V\setminus\partial V$)

其中 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$. ($\gamma\subset\mathring{V}$)

注: 负幂项称为主部.

a_{-1} 称在 z_0 处留数, 记为 $Res[f(z), z_0]$.

7. 零点孤立 & 解析开拓.

8. 最大模原理. (扩展: 开映射定理)

No.
Date

三、奇点 / 留数

1. 奇点分类，

注. 对于 ∞，若 $\forall R>0$，$f(x)$ 在 $|z|>R$ 不解析，则 ∞ 非孤立奇点. 其余均要考查 ∞，

2. $\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z\in D} \mathrm{Res}[f(z), z]$. 其中 $\gamma = \partial D$

3. 算留数

4. 本性奇点（Casorati-Weierstrass 定理）.
5. 可去奇点（Riemann 可去奇点定理）

$\downarrow$

$\boxed{\text{例题4.}}$

No.
Date

1. $f(x+iy)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 可微吗？是否满足 CR 方程？

2. 考察在 $|z|=1$ 收敛性.

(1) $\sum nz^n$ (2) $\sum z^n/n^2$ (3) z^n/n.

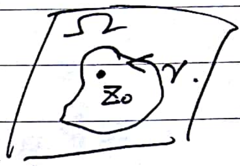
3. 证. (1) $\mathrm{Re} f = \text{const} \Rightarrow f = \text{const}$.

f在Ω解析 (2) $|f| = \text{const} \Rightarrow f = \text{const}$.

4. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 开集, f 在 $\Omega \setminus \{z_0\}$ 解析.

在 z_0 附近有界. 证.

证. $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. 其中 γ 包围 z_0



进而 $\exists\, g(z)$ 在 Ω 解析 且 $g(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$

5. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 开集且包含 $\{|z|=1\}$, $\sum a_n z^n$ 收敛半径为 1.

并且. $f(z) = \sum a_n z^n\ \forall |z|<1$. 且 ~~在~~ $f(z)$ 仅有

一个极点 w 满足 $|w|=1$.

求证. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = w$. (可以认为 w 为一级极点)

*6. f 整函数. 在 z_0 处展开中.

$$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$$

其中至少一项系数 $a_k = 0\ \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

求证: $f(z)$ 必为多项式.

[Hint: $\mathbb{C}$ 不可数]

7. $\sum a_n z^n$ 在 $\{|z| \le R\}$ 解析 $\Rightarrow$ 收敛半径 $> R$.

8. 证明 Liouville 定理, 及 Cauchy 积分公式.

No.

Date

9. $x^n=1$ 的根？