复变函数引论 杨晓京 2008.1 A 卷
共 10 题 每题 10 分

(1)写出 Cauchy-Riemann 条件，并写出 f'(z)，$f^{(n)}(z)$，证明 Laplace 方程

(2)(a)求 cos(3x+i2y)的实、虚部 (b)求(4i)^i 的一般解

(3)(a)求$In = \oint_{|z|=3} \frac{dz}{1+z^n}$，n 为正整数, (b) $Jm = \oint_{|z|=1} \frac{(\sin z - 1)\,dz}{z^m}$，m 为整数

(4)(a)求$Ip = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$, (b) $Ja = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(2x)\,dx}{x^2+a^2}$

(5)写出关于幂级数的 Abel 定理，收敛半径 R 的定义。并证明：
若$\sum a_n r^n$收敛，而$\sum |a_n| r^n$发散，证明$\sum a_n r^n$的收敛半径为 r

(6)a,b,c,d 均为实数，且 ad-bc>0，证明$w = \frac{az+b}{cz+d}$是将上半复平面映到上半复平面，且实轴正向映到实轴正向。

(7)求映射：{z| a<Re(z)<b, a<b} 映到 单位圆

(8)求映射：|z-1|<r 映到 |w-i|<R, 并且 w(0)=i

(9)求把 1, ∞, 0 映到 0, -1, 1 的映射$w = \frac{az+b}{z+d}$

(10)写出单位圆映射到单位圆的方程，并证明

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2} = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$