清华大学 2006 年春概率论与数理统计期中考试试题

1 填空与问答题(40 分)

1. 写出概率空间及随机变量的严格定义 (尽量详细).

2. 全概率公式指____________________________________

3. 贝叶斯公式指____________________________________

4. 两个事件 A 与 B 独立指________________________________

5. 写出随机向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的分布函数及其边缘分布函数的定义.

6. 写出 (X, Y) 的条件分布律 (离散) 及条件分布函数和条件分布密度函数的定义 (连续).

7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立是指 ______________________________

8. 写出 $B(n,p)$(伯努利分布) 及 $\pi(\lambda)$(poisson 分布) 的定义及其相应的期望与方差.

9. 写出均匀分布 $U_{[a,b]}$ 及指数分布 $Ex(\theta)$ 的定义及相应的期望与方差.

10. 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. 则
$E[X|Y = y] =$ ______________, $D[X|Y = y] =$______________

2 计算题(40 分)

1. 设 $X \sim U_{[0,2\pi]}$. 令 $Y = \sin X + \cos X$.

计算 (1)Y 的分布函数.(2)EY^2.

2. 令 $A=\{(x,y)|2x^2+y^2\le 1\}$. 设 $(X,Y)\sim U_A$.

计算 $E(XY+X^2+Y^2)$.

3. 设 (X,Y) 具有概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

计算 (1)$COV(X,Y)$, ρ_{XY}, $D(2X+Y)$. (2)X 与 Y 是否独立?

4. 甲袋中有 $a-1$ 只白球和 1 只黑球, 乙袋中有 a 只白球, 每次从甲, 乙两袋中分别取出一只球并交换放 入另一袋中, 这样经过了 n 次, 问黑球出现在甲袋中的概率是多少, 并讨论 $n\to+\infty$ 的情况.

3 证明题(20 分)

1. 设 $(X,Y)\sim N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 令 $f(x)=E[Y|X=x]$.

证明 $E[f(X)sign(X)]=\rho E[|Y|]$.

这里

$$sign(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

为符号函数.

2. 设 (X,Y) 具有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

证明 X 与 Y 不相关, 但 X 与 Y 不互相独立.