清华大学本科生考试试题专用纸

（A 卷）　　　　　　　　　　考试课程：微积分（1）　　考试时间：2004 年 1 月 3 日

班号：______________ 学号：______________ 姓名：______________

（请同时在答题纸上填好上面的内容）

一、选择题（共 20 分，直接答在题干后的括号中）

1. 若 $f(2)=0$，$f'(2)=1$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(2\cos t)}{t^2}=$ [B]

　　$A.\ 1$，　　$B.\ -1$，　　$C.\ \dfrac{1}{2}$，　　$D.\ -\dfrac{1}{2}$

2. 设 $f(x)$ 存在二阶导数，$f(x)$ 在点 $x_0=0$ 的二阶泰勒多项式为 $3+x-2x^2$；则函数 $f(1-\cos x)$ 在点 $x_0=0$ 的二阶泰勒多项式为 [C]

　　$A.\ 3+2x$，　　$B.\ 3-2x^2$，　　$C.\ 3+\dfrac{1}{2}x^2$，　　$D.\ -2x-2x^2$

3. 设 $f\in C[0,1]$，$f(x)\ge 0$．$I_1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，$I_2=\dfrac{1}{3}\int_0^1 f(\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$ $I_3=3\int_0^1 f(x^3)\mathrm{d}x$，则[B]

　　$A.\ I_1\le I_2\le I_3$，　　$B.\ I_2\le I_1\le I_3$，　　$C.\ I_3\le I_2\le I_1$，　　$D.\ I_3\le I_1\le I_2$．

4. 设 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int xf(\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=$ [　　]

　　$A.\ \dfrac{1}{2}(x^2-1)+C$，　　$B.\ \dfrac{1}{2}(1-x^2)+C$，

　　$C.\ \dfrac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$，　　$D.\ -\dfrac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C$

5. $f(x)=\int_0^x\left(\int_0^t\dfrac{u^2-1}{1+e^u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 的下凸区间是 [D]

　　$A.\ (-\infty,-1]$，　　$B.\ [1,+\infty)$，　　$C.\ [-1,1]$，　　$D.\ (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$．

二、填空题（共 20 分，直接答在题干后的括号中）

1. 假设曲线 $y=x^3-3x$ 与直线 $y=a$ 有三个交点，则实数 a 的取值范围是（ $(-2,2)$ ）

2. $\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$（ $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$

过(0,0)　　　　$-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$

3. 设函数 $y=y(x)$ 连续，并且满足方程 $y(x)=-x+\int_0^{2x}y(\frac{t}{2})\mathrm{d}t$，则 $y(x)=$（ $\cancel{\frac{1}{2}+Ce^{2x}}$ ）

4. 设 D 是曲线 $y=\cos x(0\le x\le\pi)$，直线 $x=0,x=\pi$ 以及 x 轴围成的区域. 则区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积等于（ $\frac{\pi^2}{2}$ ）.

5. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2\mathrm{e}^{-2x}$ 满足 $y(0)=1$ 的特解是 $y=$（ $\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ ）

三、解答题

1. 计算以下各题(共 20 分)

(1) 求 $\int\arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}x$　　$x\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

(2) 计算 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2-\sin x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$　　$\cancel{4\arcsin\frac{1}{2}-\sqrt{3}}$　$\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

(3) 设 $x=\cos^3 t$，$y=\sin^3 t$. 计算 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.　$\frac{4}{3}\sqrt{2}$

2. (10 分) $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.　$\frac{1}{4e}-\frac{1}{4}$

3. (10 分) 求方程 $(1+x)y''+y'=\ln(x+1)$ $(x>-1)$ 满足 $y(0)=1,y'(0)=-1$ 的解.

4. (10 分) 某水坝的闸门是一个竖直向下的直角三角形板. 该直角三角形闸门的三个顶点为 A,B,C，斜边 BC 的长度等于常数 a（$a>0$）. 用 θ 表示其中一个锐角 $\angle ABC$. 设该闸门完全浸入水中，并且直角边 AB 与水面重合.

$F=\frac{1}{6}a^3\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot\rho g$.

(1) 假设水的密度为 ρ，重力加速度为 g. 试将该闸门受到的水压力表示为 θ 的函数;

(2) 当 θ 等于多大时，三角形闸门受到的压力最大?

四、证明题（共 10 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 存在二阶导数，$f'(x),f''(x)$ 在 $[a,b]$ 有界. 设 $|f'(x_0)|=M_1$

(1) 设 $M_1=\max\{|f'(x)|\}$，求证：$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(\frac{a+b}{2})(b-a)|\le\frac{(b-a)^2}{4}M_1$.

(2) 设 $M_2=\max\{|f''(x)|\}$，求证：$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(\frac{a+b}{2})(b-a)|\le\frac{(b-a)^3}{24}M_2$.

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$　　$|f'(x_0)|=M_1$ 则 $f'(x_0)=\ldots$

$=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$