清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：**复变函数引论（A 卷）**（闭卷考试）　　考试时间：2008 年 1 月 17 上午 8:00-10:00

系别 ________ 班号 ______ 学号 ___________ 姓名 __________ 考试教室 ______/　教

试卷说明：1、试题分选择题、填空题、分析与计算题、证明题 四大部分，满分 75 分。
2、**选择题、填空题答在试卷上，其余题目都要答在专用答题纸上，且注明题号。**

得分[　　　] **一、选择题**（每小题只有一个正确答案。把每题正确答案对应的字母填入每个**题前方括号**内；**填错位置或者直接打 $\surd$ 或 $\times$ 视为无效**。每小题 3 分，共 15 分）

[　　] 1、函数 $\frac{\tan(\pi z/2)}{z^2+2i}$ 在 $|z|<2$ 内的奇点个数为：
A. 1,　　B. 2,　　C. 3,　　D. 4.

[　　] 2、设 $B\subset\mathbb{C}$ 是单连通区域，则函数 $f(z)$ 沿 B 内任一闭路 C 的积分 $\oint_C f(z)dz=0$ 是 $f(z)$ 在 B 内解析的：
A. 充分条件,　B. 必要条件,　C. 充要条件,　D. 既非充分也非必要条件。

[　　] 3、设 c 为任意实常数，则由 $u(x,y)=x^2-y^2\,(z=x+iy)$ 确定的解析函数 $f(z)=u+iv$ 是：
A. z^2+ic,　　B. z^2+c,　　C. iz^2+c,　　D. iz^2+ic.

[　　] 4、函数 $f(z)=x\sqrt{|y|}\ (z=x+iy)$ 在复平面上
A. 处处可导,　　B. 处处不可导,　　C. 仅在 $z=0$ 处可导,　　D. 仅在 $z=0$ 处解析。

[　　] 5、$z=\infty$ 是函数 $f(z)=thz+\frac{1}{z^2}-z^2$ 的
A. 本性奇点,　　B. 非孤立奇点,　　C. 可去奇点,　　D. 二级极点。

得分[　　　] **二、填空题**（5 小题 6 个空，每个空 3 分，共 18 分）

1、$\oint_C \bar{z}dz=$ ____________________ (其中 C 为正向椭圆：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$)。

2、设 C 为正向圆周:$|z|=3$，则积分 $\oint_C \frac{\cos(\pi z/2)}{z(z-1)^2}dz=$ ____________________。

3、幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}z^n$ 的收敛半径 $=$ ____________________。

4、幂级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)z^n$ 在 $|z|<1$ 内的和函数为 ____________________。

5、Laurent 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}4^{(-|n|+2)}(z-1)^n$ 的收敛圆环域为 ____________________。

6、设 $n\in\mathbb{N}$ 为正整数，C 为正向圆周:$|z|=2$, 则积分 $\oint_C \frac{z^n+1}{(z-1)(z^n-1)}dz=$ ________________。

三、分析与计算题（4 题，共 31 分, 注意：每题要有完整的分析与计算过程，**只写答案没有过程不给分**）

1、(6 分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的系数满足条件

$$c_0 = c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}\,(n \geq 2),$$

试求出幂级数的收敛半径 R。

2、(10 分, 每小题各 5 分) 设 $a > 1$, 计算实积分

$$(1). \qquad I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a - \cos\theta}, \quad (2). \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(ax)dx}{x^2 + a^2}.$$

3、(8 分) 找出函数

$$f(z) = z\cos\frac{z}{z-1}$$

在扩充复平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的所有奇点并进行分类（**须说明理由，如果是极点，必须指出其级数**)，并且算出 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数。

4、(7 分) 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < 2$ 上解析并假设 $f(0)$ 和 $f'(0)$ 的值已知，试求出下面的值 S:

$$S = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta.$$

四、证明题（2 题，共 11 分）

1、(6 分) 假设函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 $\mathbb{C} - \{0\}$ 内解析，并且满足

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}}.$$

求证：$f(z) \equiv 0 \ (\forall\, z \neq 0)$。

2、(5 分) 设 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续，并且满足 $f(z) \neq 0\,(\forall\, z \in \overline{D})$。证明：如果在 D 的边界 ∂D 上 $|f(z)| \equiv M > 0$，则 $f(z) \equiv Me^{i\theta}$, 这里 $\theta \in \mathbb{R}$ 是某个实常数。