林元烈《概率论与数理统计》考试A卷（回忆）

考试时间：2006年6月20日，120分钟

一、（基础题）

1、P(A)=0.48，P(B)=0.40，P(A|B)=0.50，求$P(A\cup B)$，$P(B\mid\overline{A})$。

2、以下三个命题是否等价，说明理由。

（1）、事件A与事件B相互独立。

（2）、I_A生成的σ域$\sigma(I_A)=\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$与$\sigma(I_B)$独立。

（3）、I_A与I_B相互独立。

3、求E（$I_A|I_B, I_C$），并证明

$$E(I_A|I_B)=E(E(I_A|I_B, I_C)|I_B)$$

二、1、

$\{X_i, 1\le i\le n\}$独立同分布$N(\mu, \sigma^2)$，Y与其独立且$Y\sim Po(\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})$

a、求S的最大似然估计。

b、求证X以概率收敛到μ。

c、X与S^2是否独立，请写出证明概要。

求X的概率密度函数$f_x(x)$

2、（想不起来了）

3、$\{Y_k, k\ge 1\}$独立同分布，$P(Y_K=1)=p, P(Y_K=0)=r, P(Y_K=-1)=q,$

$p+r+q=1$，$Xn=\sum_{k=1}^{n}Y_k$，$N_1=\sum_{k=1}^{n}I_{(Y_k=1)}$，$N_2=\sum_{k=1}^{n}I_{(Y_k=0)}$，$N_3=\sum_{k=1}^{n}I_{(Y_k=3)}$

a、求（N_1, N_2, N_3）的分布，求P（$N_1+N_2=m$）

b、求$E(X_3\mid X_1)$的分布率，$E(X_2\mid X_1\ge 0)$

C、求X_{100}与X_{400}的相关系数

三、某批零件强度 $X \sim N(48,2^2)$（批量无穷大），若 $X \geq 46.32$，则此零件合格，否则为次品，制定检验方案：第一次任取 3 个，若全部合格则接受，若至少有两个次品，则拒绝，若恰有两个合格则在抽一次，也是三个，重复上述不走直至作出决定。

a、求零件不合格的概率 p（给定了几个 Φ 值）

b、求接受该批产品的概率和作出决定所需抽出样品个数的均值。

c、求 $E(X|X \geq 46.32)$

四、1、$\{X_i, i \geq 1\}$ 独立同分布 $N(\mu, \sigma^2)$，$\{Y_i, i \geq 1\}$ 独立同分布 $B(1,p)$，$N \sim Po(\lambda)$，

且它们相互之间以独立。$X = \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot I_{\{Y_k = 1\}}$

a、求X的条件概率密度函数 $f_{x|N=n}(x)$。

b、求 EX

2、$\{X_i, n \geq i \geq 1\}$ 独立同分布 $Ex(\lambda)$，$\{X_{(i)}, n \geq i \geq 1\}$ 为其顺序统计量

a、求 $X_{(i)}$ 的概率分布函数

b、$X_{(1)}$ 与 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ 是否独立，证明你的结论。

五、（poisson 过程问题 18 分）设一信号接收器证同时接受三类相互独立且参数为 λ 的泊松信号流 $\{N_i(t), t \geq 0\}$，$N_i(0) = 0$，$S_n^{(i)}$ 表示第 i 类第 n 个信号到达的时刻，i=1，2，3，$n \geq 1$。

a、求 $E(N_1 | S_1^{(2)})$

b、求 $E(S_1^{(1)} | N_1 + N_2 + N_3 = 1)$