微积分 A　　(A)　　答案

一.　　**填空题**（每空 3 分，共 15 题）（**请将答案直接填写在横线上!**）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n+2i)}=$ ____________________。

答案：$\ln 3-\ln 2$

2. $\int x^2e^x dx=$ ________________________。

答案：$x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}=$ ____________。

答案：$\frac{1}{3}$

4. $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{2x}\ln(1+\sin t)dt=$ __________________________________。

答案：$2\ln(1+\sin 2x)-2x\ln(1+\sin x^2)$

5. 求曲线 $y=e^x$、$y=-\cos\pi x$、$x=-\frac{1}{2}$、$x=\frac{1}{2}$ 围成的区域面积__________________。

答案：$e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{\pi}$

6. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx=$ ____________________。

答案：$\frac{4}{3}$

7. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=$ __________________________。

答案：$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

8. $\int_1^2\frac{dx}{x+\sqrt{x}}=$ ____________________________。

答案：$2\ln(\sqrt{2}+1)-2\ln 2$

9. 悬链线 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$|x|\le 1$的弧长 $L=$ _________________。

答案：$e \ -e^{-1}$

10. 二阶方程 $x^2y''-xy'-3y=0$ 的通解为____________________。

答案：$y=c_1x^3+c_2/x$

11. 常微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y+2z\\ \dfrac{dz}{dx}=2y+z\end{cases}$ 的通解为_____________________________。

答案：$\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-e^{-x}\\e^{-x}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^{3x}\\e^{3x}\end{pmatrix}$

12. 设 x,x^2 是二阶齐次线线性常微分方程解，则该微分方程为_______________________。

答案：$y''-\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y=0$

13. $y''+6y'+10y=0$ 的通解为_____________________________。

答案：$y=C_1e^{-3x}\cos x+C_2e^{-3x}\sin x$

14. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$ 的通解为_____________________________。

答案：$\sin\dfrac{y}{x}=Cx$

15. 常微分方程 $y'-\dfrac{6}{x}y=-xy^2$ 的通解为______________________。

答案：$\dfrac{1}{y}=\dfrac{C}{x^6}+\dfrac{x^2}{8}$

二. **计算题**（每题 10 分，共 4 题）（**请写出详细计算过程和必要的根据！**）

1. 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

解：原式 $=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x(3+\tan^2 x)}\overset{t=\tan x}{=}\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ 。….（10 分）

2．求曲线$\begin{cases} x = 1+\sqrt{2}\cos t \\ y = -1+\sqrt{2}\sin t \end{cases}$，$\left(\dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{3}{4}\pi\right)$绕$x$轴旋转的旋转体体积及表面积。

解：$V = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \pi(-1+\sqrt{2}\sin t)^2 \sqrt{2}(-\sin t)dt = 2\pi\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ………………….（5 分）

$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} 2\pi(-1+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\pi\left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ………………….（5 分）

3．求微分方程$y'' + 2y' + y = (3x+2)e^{-x}$的通解。

解：齐次方程特征值为$\lambda = -1$（二重），齐次方程通解为$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$。…….（4 分）

设非齐次方程特解为$y_1 = x^2(ax+b)e^{-x}$，则$a = 2, b = 1$。

非齐次方程通解为$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2(2x+1)e^{-x}$。 ……………………….（6 分）

4．求一条曲线Γ：$y = y(x)$，其中$y(x)$在$(-\infty, +\infty)$是连续可微的，使得曲线Γ上的每一点切线与横轴交点的坐标等于切点横坐标的一半。

解：曲线Γ上的任意一点$(x, y(x))$的切线方程为$Y - y(x) = y'(x)(X - x)$，其中(X, Y)为切线上的流动坐标。由假设可知当$Y = 0$时，$X = x/2$，于是我们得到方程

$$-y(x) = y'(x)(x/2 - x),$$

即

$$xy'(x) = 2y(x), \quad \text{…………………………………（5 分）}$$

解这个一阶线性方程，通解为 $y(x) = cx^2$， …………………………………（5 分）

其中c为任意非零常数，因为当$c = 0$时曲线Γ上为x轴，不满足要求。解答完毕。

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

1．（8 分）设$f \in C[0,1]$，利用分部积分证明$\int_0^1 [\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)dt]dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x)dx$。

证明： 先将左端分部积分，得

$$\text{左式} = (x\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)dt)\Big|_0^1 - \int_0^1 xd(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(t)dt)$$

$$= \int_0^1 x(\int_0^{x^2} f(t)dt)'dx - \int_0^1 x(\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt)'dx$$

$$= \int_0^1 xf(x^2)(x^2)'dx - \int_0^1 xf(\sqrt{x})(\sqrt{x})'dx$$

再作积分变量代换：

在第一个积分中令 $x^2 = u$，在第二个积分中令 $\sqrt{x} = v$，于是

$$\text{左式} = \int_0^1 \sqrt{u} f(u)du - \int_0^1 v^2 f(v)dv$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx - \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) f(x)dx = \text{右式。}$$

2.（7 分）设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数，考虑一阶线性常微分方程 $\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$ 解的情况。

（I）举出 $a(x), b(x)$ 的一个例子，使得该方程的解为下列三种情况之一：

（a）没有以 2π 为周期的解；

（b）只有一个以 2π 为周期的解；

（c）任意解都以 2π 为周期。

（II）证明该方程以 2π 为周期的解的个数只能出现上述三种情况之一。

解：（I）$y = e^{\int_0^x a(t)dt}\left[\int_0^x b(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}dt + C\right]$

（a）$a(x) = \cos x + 1, b(x) = \cos x + 1$ 时，

$$y = e^{\int_0^x a(t)dt}\left[\int_0^x b(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}dt + C\right] = Ce^{\sin x + x} - 1$$

均不是以 2π 为周期的函数。

（b）$a(x) = \cos x + 1$ 时，初值 y_0 满足 $\left(1 - e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds}\right)y_0 = e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds}\int_0^{2\pi} b(s)e^{-\int_0^s a(t)dt}ds$

$$y = e^{\int_0^x a(t)dt}\left[\int_0^x b(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}dt + y_0\right]$$

为方程唯一的 2π 为周期的解。

（c）$a(x) = \cos x, b(x) = \cos x$ 时，$y = e^{\int_0^x a(t)dt}\left[\int_0^x b(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}dt + C\right] = Ce^{\sin x} - 1$ 均为以 2π 为周期的解。 ……………………………………………………………………（3 分）

（II）如果（a）（b）均不成立，则方程有两个以上的 2π 周期解，不妨假设 $y_1(x), y_2(x)$ 为方程的两个不同的 2π 周期解，则方程通解为 $y = C(y_1(x) - y_2(x)) + y_1(x)$ 均为 2π 周期解。

……………………………………………………………………（4 分）