这份卷子是杨大爷的题库题中的一部分，务必认真做。

1、(a)设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$处处解析，写出$f(z)$的 Cauchy-Riemann 条件，并用$u,v$的$n$阶偏导给出$f^{(n)}(z)$的表达式；

(b)设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$处处解析，证明$u(x,y)$满足 Laplace 方程。

2、(a)写出$\cos(3x+2y\mathrm{i})$的实部、虚部；(b)求$(4\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$的一般值。

3、求以下复积分：

(a) $I=\oint_{|z|=3}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^n}$　　(b) $J=\oint_{|z|=1}\frac{\cos 2z-1}{z^m}\mathrm{d}z$

4、求以下实积分：

(a) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2p\cos x+p^2}$其中$-1<p<1$；

(b) $J=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin 2x\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$

5、(a)叙述 Abel 定理以及收敛半径的定义；

(b)证明：若$\sum_{k=0}^{+\infty}a_k r^k$收敛，$\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|r^k$发散，则原级数收敛半径为$r$。

6、求将$|z-1|<r$映射成$|w-\mathrm{i}|<R$的分式线性映射的一般形式，其中$r>1,R>0$。

7、求将$a<\mathrm{Re}(z)<b$映射成$|w|<1$的映射，其中$a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$

8、若$a,b,c,d\in\mathbb{R}$，且$ad-bc>0$，证明分式线性映射$w=\frac{az+b}{cz+d}$将上半平面正向映射成上半平面，即把实轴正向映射成实轴。

9、求将$z_1=0,z_2=1,z_3=\infty$映射成$w_1=1,w_2=\mathrm{i},w_3=-1$的分式线性映射，要求最终表达式的形式为$w=\frac{az+b}{z+d}$。

10、求将$|z|<1$映射成$|w|<1$的分式线性映射的一般表达式，并证明

$$\frac{|\mathrm{d}w|}{1-|w|^2}=\frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

下面是一些学长的回忆：

2、Liouville 定理的证明

7、写出从$|z-z_0|<2$到$|\omega-\omega_0|<1$的分式线性映射

8、写出由$|z-a|<a$和$|z-b|>b$围成的区域到单位圆盘$|\omega|<1$的映射（a>b>0）

10、将$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$在指定区域$|z|<1$和$|z-1|<1$展开成洛朗级数

1:解方程:e^z=1+i

2:求:(-8i)^(1/3),用 a+bi 表示

4:求 f(z)=(z+e^(zi))/z^3 的留数,奇点类型,并求在半径为 r 的半圆 Cr 上 ∮f(z)dz

5:也是关于留数的,最后有个求定积分(积分范围 0-无穷)∫(x-sinx)/x^3

6:求 0<Im(z)<1/2 在 f(z)=1/z 映射下的像

7 书上的原题:p247 第三小题