

《复变函数引论》期末考试  
(2004.1)

1. 求值(15分)

$1^{-i}, \quad \operatorname{Re}\{\ln(z-1)\}, \quad z^z \quad (\text{其中 } z = re^{i\theta})$

2. 讨论函数

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \sin(\arg z), & z \neq 0 \end{cases}$$

的连续性.(5分)

3. 计算积分(20分)

$$\int_{|z|=1} |z-1| |dz|, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^5-1} dx$$

4. 假设 $f(z)$ 在包含简单闭曲线 $\gamma$ 的区域内解析,证明

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

是纯虚数.(10分)

5. 找出所有形如 $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ 的调和函数,并求它的共轭调和函数及相应的解析函数.(10分)

6. (20分)

(1) 把 $\ln \frac{\sin z}{z}$ 展成 $z$ 的幂级数,直到 $z^6$ ;

(2) 把函数 $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在区域 $0 < |z-2| < \sqrt{5}$ 内展成Laurent级数.

7. (20分)

(1) 试求: 把单位圆映为自身,把 $\frac{1}{2}$ 映到0的分式线性变换的一般形式;

(2) 找一个共形映射把区域 $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ 映到单位圆 $|w| > 1$ 外,并把 $\infty$ 映到 $\infty$ .