清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：复变函数引论（A 卷）（闭卷考试）　　考试时间：2007 年 6 月 24 日上午 8:00-10:0

系别 ________ 班级 ______ 学号 ____________ 姓名 ____________ 考试教室 ______/五教

试卷说明：1、试题分判断是非题、填空题、分析与计算题、证明题四大部分，满分 70 分。
2、**判断题、填空题答在试卷上，其余题目都要答在专用答题纸上，且注明题号。**

一、判断是非题（请在每个 **题前方括号**内打 √ 或 ×，每题 2 分，5 小题共 10 分）

[　　] 1、若 $f(z)$ 以 $z=0$ 为非孤立奇点，则在 $z=0$ 的任意空心领域 $0<|z|<\delta\ (\delta>0)$ 内有 $f(z)$ 的奇点。

[　　] 2、若 $f(z)$ 在单连通区域 D 中连续且沿 D 中任何一条可求长简单闭曲线的积分为 0，那么 $f(z)$ 在 D 中解析。

[　　] 3、如果 ∞ 为 $f(z)$ 的一级极点，那么 $Res[f(z),\infty]\neq 0$.

[　　] 4、$\tan(z^2+1)$ 可以在圆环域 $0<|z|<\frac{1}{2}$ 中展开成 Laurent 级数。

[　　] 5、如果幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在其收敛圆的圆周上一点 $z_0\ (\neq 0)$ 处条件收敛，那么它在收敛圆的圆周上任一点处条件收敛。

二、填空题（5 小题，除第 1 小题每个空 2 分外，其余每个空 3 分，共 18 分）

1、$my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为 $\mathbb{C}$ 上解析函数，则 $l=$ ________________，

$m=$ ________________，$n=$ ________________。

2、$|i^{(1+i)}|=$ ________________________________。

3、设 C 为正向圆周 $|z|=4$，则积分 $\oint_C \frac{\sin(\pi z)}{z(z+1)(z-1)^2}dz=$ ________________。

4、级数 $\sum_{n=-\infty}^{5} \frac{n+(-3)^n}{n^2+e^n}(z-2)^{n-3}$ 的收敛圆环域为 ________________。

5、设 $f(z)=\frac{1}{z}+z^5\sin\frac{1}{z^2}$，则 $Res[f(z),\infty]=$ ________________。

三、分析与计算题（4 题，共 29 分，注意：每题要有完整的分析与计算过程，**只写答案没有过程不给分**）

1、(7 分) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$，计算积分

$$I=\oint_C\left(\frac{5}{z}+\tan z\right)dz.$$

2、(6 分) 计算实积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2x)dx}{x^2-4x+8}.$$

3、(6 分) 求函数

$$f(z)=\frac{z}{(1-z^2)^2}$$

在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 展开式。**注意：要完整地写出级数中各项系数的显式表达式即通项。**

4、(10 分) 找出函数

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{\sin z}+\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^4}$$

在扩充复平面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有奇点并进行分类（**须说明理由，如果是极点，必须指出其级数**），并且算出 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数。

四、**证明题**（2 题，共 13 分）

1、(8 分) 假设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并且 $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数，求证：$f(z)$ 在区域 D 上是一个常数函数。

2、(5 分) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 R $(R>0)$，求证：幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)z^n$$

的收敛半径也为 R，这里 $a_n=Re(c_n)$，$b_n=Im(c_n)$.

考试课程：复变函数引论（A 卷）（闭卷考试）　　考试时间：2007 年 6 月 25 日晚上 7:00-9:00

系别 ______ 班级 ______ 学号 ________ 姓名 ________ 考试教室 ______/一教

试卷说明：1、试题分选择题、填空题、分析与计算题、证明题四大部分，满分 80 分。
2、**选择题、填空题答在试卷上，其余题目都要答在专用答题纸上，且注明题号。**

一、选择题（每小题只有一个正确答案。把每题正确答案对应的字母填入每个**题前方括号**内；**填错位置或者直接打 √ 或 × 视为无效**。每小题 3 分，共 15 分）

[　] 1、下列扩充平面集合中不是单连通区域的是：
A. $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$，B. $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \le 1\}$，C. $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 0\}$，D. $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$.

[　] 2、在其内 [illegible](z^2+1) 可以展开成 Laurent 级数的圆环域是：
A. $0 < |z| <$ [illegible]，B. $\frac{\pi}{4} < |z| < \frac{\pi}{2}$，C. $\frac{\pi}{2} < |z| < +\infty$，D. 以上都不可以。

[　] 3、$u(x,y) = x^2 - y^2$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上有共轭调和函数：
A. xy，B. $-xy$，C. $2xy$，D. $2x^2y^2$.

[　] 4、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 r $(r > 0)$，那么幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|Re(c_n)| + |Im(c_n)|)z^n$$ 的收敛半径 R 满足：

A. $r < R$. B. $r > R$，C. $r = R$，D. 以上都有可能成立。

[　] 5、$z = \infty$ 是 $z^2(1 - \cos\frac{1}{z})$ 的
A. 可去奇点，B. 本性奇点，C. 一级极点，D. 以上都不是。

二、填空题（5 小题 6 个空，每个空 3 分，共 18 分）

1、$\oint_C Im(z)dz =$ ________（其中 C 为正向圆周：$|z| = 1$）。

2、$e^{\frac{1}{z-1}}$ 在 $z = 0$ 的 Taylor 级数的收敛半径是 ______，其中含 z^2 项的系数是 ______。

3、设 C 为正向圆周：$|z| = 3$，则积分 $\oint_C \frac{\sin(\pi z)}{z(z-1)^2}dz =$ ________。

4、级数 $\sum_{n=-\infty}^{9}$ [illegible] $(z-1)^{n-5}$ 的收敛圆环域为 ________。

5、设 $n \in \mathbb{N}$ 为正整数，C 为正向圆周：$|z| = 2$，则积分 $\oint_C \frac{dz}{z(z^n-1)} =$ ________。

三、分析与计算题（4 题，共 34 分，注意：每题要有完整的分析与计算过程，**只写答案没有过程不给分**）

1、(6 分) 假定 $A(\neq 0)$ 是一个复常数，设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}\backslash\{A\}$ 上的解析函数，且 $z=A$ 是 $f(z)$ 的极点，试求出幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}z^n$$

所决定的和函数 $F(z)$，并确定此幂级数的收敛半径 R。

2、(12 分, 每小题各 6 分) 计算实积分

$$(1).\quad I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta},\quad (2).\quad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)dx}{x^2-4x+8}.$$

3、(8 分) 找出函数

$$f(z)=z\sin\frac{z}{z-1}$$

在扩充复平面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有奇点并进行分类（**须说明理由，如果是极点，必须指出其级数**），并且算出 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数。

4、(8 分) 设 $f(z)$ 是圆盘 $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2\}$ 上的非常数解析函数，试求使得以下两式成立的一组常数 a,b,c 和 d，其中 b,d 是正整数。

$$(1).\quad \left(\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)^6=a\oint_{|\zeta|=1}\frac{(f(\zeta))^b}{\zeta-z}d\zeta,\qquad \forall z\in\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}.$$

$$(2).\quad \frac{d^6}{dz^6}\left(\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)=c\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^d}d\zeta,\ \forall z\in\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}.$$

四、证明题（2 题，共 13 分）

1、(8 分) 假设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并且 $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数，求证：$f(z)$ 在区域 D 上是一个常数函数。

2、(5 分) 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，且满足 $|f(z)|\leq|z|^2$. 证明：$f(z)=Kz^2$, 这里 K 是某个满足 $|K|\leq 1$ 的复常数。

《复变函数引论》期末考试部分解答

(2004.1)

3. 计算积分(20分)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{x^5-1}\mathrm{d}x$$

Q的阶 > P阶 +2

$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ $\quad \frac{P}{Q'}$

Res

解:

$R(z)=\frac{z-1}{z^5-1}$在上半平面的极点是$z_k=e^{\frac{2k\pi i}{5}}, k=1,2.$

$\mathrm{Res}[R(z),z_k]=\frac{z_k-1}{5z_k^4}=\frac{1}{5}(z_k^2-z_k).$

积分$=2\pi i\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}[R(z),z_k] = \frac{2\pi i}{5}(z_2^2-z_2+z_1^2-z_1) = \frac{2\pi i}{5}(z_2^2-z_1) = \frac{2\pi i}{5}(e^{\frac{8\pi i}{5}}-e^{\frac{2\pi i}{5}}) = \frac{2\pi i}{5}(e^{\frac{-2\pi i}{5}}-e^{\frac{2\pi i}{5}}) = \frac{4\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}.$

4. 假设$f(z)$在包含简单闭曲线γ的区域内解析,证明

$$\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)\mathrm{d}z$$

是纯虚数.(10分)

证明:

设$f=u+iv$,则$f'=u_x+v_x$,

$\mathrm{Re}(\int_\gamma \bar{f}f'\mathrm{d}z)=\int_\gamma(uu_x+vv_x)\mathrm{d}x+(u_xv-uv_x)\mathrm{d}y=\int_\gamma(uu_x+vv_x)\mathrm{d}x+(v_yv+uu_y)\mathrm{d}y=\int_\gamma \mathrm{d}(\frac{u^2+v^2}{2})=0.$

6. (20分)

(1) 把$\ln\frac{\sin z}{z}$展成z的幂级数,直到z^6;

解:

$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+o(z^6)$

$\ln\frac{\sin z}{z}=\ln[1-(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\frac{z^6}{7!}+o(z^6))=-\sum_1^\infty\frac{1}{n}(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\frac{z^6}{7!}+o(z^6))^n = -\frac{z^2}{6}-\frac{z^4}{180}-\frac{z^6}{2835}+o(z^6).$

(2) 把函数$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$在区域$0<|z-2|<\sqrt{5}$内展成Laurent级数.

解:

$f(z) = \frac{1}{z-2} + i(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i})$.
$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-2+2-i} = \frac{1}{2-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{2-i}} = -\sum_0^\infty \frac{(z-2)^n}{(-2+i)^{n+1}}$,
$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-2+2+i} = \frac{1}{2+i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{2+i}} = -\sum_0^\infty \frac{(z-2)^n}{(-2-i)^{n+1}}$.
所以
$f(z) = \frac{1}{z-2} + i\sum_0^\infty [\frac{1}{(-2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(-2+i)^{n+1}}](z-2)^n]$
$= \frac{1}{z-2} - 2\sum_0^\infty 5^{-\frac{n+1}{2}} \sin[(n+1)\arccos(-\frac{2}{\sqrt{5}})](z-2)^n$.

7. (20分)
(2) 找一个共形映射把区域$\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1, \mathrm{Im}z \geq 0\}$映到单位圆$|w| > 1$外,并把$\infty$映到$\infty$.
解:
作映射$z_1 = i\frac{z+1}{z-1}$把区域$\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1, \mathrm{Im}z \geq 0\}$映到$D_1 = \mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Re}z \geq 0, \mathrm{Im}z = 0\}$, $\infty \mapsto i$;
映射$z_2 = \sqrt{z_1}$把D_1映到上半平面, $i \mapsto \frac{1+i}{\sqrt{2}}$;
映射$w = \frac{z_2 - \frac{1-i}{\sqrt{2}}}{z_2 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}$把上半平面映到单位圆外, $\frac{1+i}{\sqrt{2}} \mapsto \infty$.
$w = \frac{\sqrt{i\frac{z+1}{z-1}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}}}{\sqrt{i\frac{z+1}{z-1}} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}$就是所要的共形映射.

复分析期中测验

考生姓名 =　　　　　　学号 (ID)=　　　　　　所属院系 =

提示：本考试时间 10:40am - 12:10am, 可以参考自带的学习资料，但请勿相互讨论．请将答案书写整齐无歧义。有问题请举手。总分 40+2.

§1 在下列陈述的后面括号中写上 True 或者 False ，以表达你对其正确性的判断。

这部分每个题目值 1 分，总共 16 分.

1. 若函数 f 在一点 $a \in \mathbb{C}$ 连续且可导，则 f 在这一点解析.
   (　　　　　　　　)
2. 有界集合一定是闭集.
   (　　　　　　　　)
3. 单连通的开集是一种区域.
   (　　　　　　　　)
4. 若整数 n 满足
   $$(\frac{1+i}{1-i})^n = 1.$$
   则 $n = 4$.
   (　　　　　　　　)
5. 对任何复数 $z \neq 0$, 有 $(z^2)^{\frac{1}{2}} = z$ 或 $-z$.
   (　　　　　　　　)
6. 对任何复数 $z \neq 0$, 有 $\mathrm{Ln}(e^z) = z$.
   (　　　　　　　　)
7. 若函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ 的每一项 f_n 都在区域 D 内连续，且级数本身在 D 内局部一致收敛，则它的和函数在 D 内连续.
   (　　　　　　　　)
8. 函数 $\operatorname{Ln} z$ 定义在 $D = \mathbb{C} - \{0\}$ 上，是多值函数. 其每个定义在区域 $D_0 \subset D$ 上的单值解析分支的导函数都是 $\frac{1}{z}$，　$z \in D_0$.
   (　　　　　　　　)

9. 设一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径是 R, $0 < R < \infty$. 那么 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在圆 $\{|z| < R\}$ 中一致收敛到一个解析函数.

(　　　　　　　　)

10. 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} \text{ 收敛到Ln}(1+z)\text{的一个解析分支，对任意}z \neq -1.$$

(　　　　　　　　)

11. 设函数 f 在圆 $D = \{|z-a| < r\}$ $(r > 0)$ 内连续，且对任意的 D 中的可求长闭曲线 γ, 有

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

那么 f 在这个圆 D 内可以展成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad \forall z \in D.$$

(　　　　　　　　)

12. 如果 v 是 u 的共轭调和函数，那么 $e^v \sin u$ 是 $-e^v \cos u$ 的共轭调和函数.

(　　　　　　　　)

13. 集合 $D = \mathbb{C} - (-\infty, +\infty)$ 是多连通的区域.

(　　　　　　　　)

14. 设函数 f 在区域 $D = \{1 < |z| < 2\}$ 内解析，那么对任意 D 内的两条具有相同起点和终点的可求长曲线 γ_1, γ_2 有

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(w)dw.$$

(　　　　　　　　)

15. 设函数 f 在 (不一定单连通的) 区域 D 内解析，且在 D 上存在单值解析的原函数 F, 那么

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz + C.$$

其中 $z_0 \in D$ 是固定的一点，沿着任意一条在 D 内连接 z_0 与 z 的可求长连续曲线做上述积分. C 是常数.

(　　　　　　　　)

16. 多值函数 $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ 可以在区域

$$D = \mathbb{C} - [-i, i]$$

上取到单值解析分支.

(　　　　　　　　)

§2 在下列陈述的空白括号中写上正确的词语、数字、或数学表达式.

这部分每个空值 1 分，总共 17 分.

1. 设 γ 是以 1 为圆心， 1.0001 为半径的逆时针方向圆周，那么

$$\int_\gamma \frac{1+z}{z^2} dz = (\qquad\qquad).$$

2. 对多值函数 $\mathrm{Ln}(z^2+1)$, 点 i 与 $-i$, 以及 ∞, 称作这个多值函数的 (　　　　　　　　) .

3. 设一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径是 R, $0<R<\infty$. 那么 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在圆 $\{|z|<R\}$ 内收敛到一个解析函数 f. 请写出 f 在这个圆内的所有原函数的 Taylor 展开式:

(　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

4. 集合 $\mathbb{C}-[0,\infty)$ 的边界点集是 (　　　　　　　　) .

5. 设曲线 γ 是从 i 出发，依次沿着直线连接线经过点 $1+i$, $1-i$, $-1-i$, 到达 $-1+i$ 的分段折线. 那么积分

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = (\qquad\qquad).$$

6. 若将定义在

$$D=\mathbb{C}-[2,+\infty)$$

的函数 $f(z)=\frac{(z-2)^{\frac{1}{2}}}{z^2+5}$ 在 $z=0$ 的一个单值解析分支展开成幂级数，这个幂级数的收敛半径是 (　　　　　　　　) .

7. 请分别写出解析函数 $f(z)=\cos(z^2)$ 的实部和虚部:

$$\mathrm{Re} f = u(x,y) = (\qquad\qquad\qquad\qquad),$$

$$\mathrm{Im} f = v(x,y) = (\qquad\qquad\qquad\qquad).$$

8. 将函数 $f(z)=\frac{e^z}{1+z}$ 在 $z=0$ 处展开 Taylor 级数，写出其前面的 5 项系数

$$f(z) = (\quad) + (\quad)z + (\quad)z^2 + (\quad)z^3 + (\quad)z^4 + \cdots, \qquad \forall |z|<1.$$

9. 写出下列幂级数的收敛半径

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n, \qquad 收敛半径R=(\quad),$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} (\sin\frac{n\pi}{3})^n z^n, \qquad 收敛半径R=(\quad),$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n, \qquad 收敛半径R=(\qquad),$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n}, \qquad 收敛半径R=(\qquad).$$

§3 在每个陈述的所有选项中选择正确的答案，并在括号中填写相应的字母.

这部分每个题目值 1 分，总共 4 分. 注意：每个题目都有可能需要你选择多个答案，但至少有一个正确的答案. 如果你只选择出一部分正确答案，而没有选择出全部正确的答案，只能得 0.5 分. 如果你的选择中有一个或多个错误的答案，就只能很遗憾地得到 0 分.

1. 如果函数 $f=u+iv$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，那么下列断言正确的是 (　　和　　和　　和　　).

   A u^2-v^2 是调和函数.

   B 若 $u=e^{-y}\cos x$ (对 $z=x+iy$), 则 $v=e^{-y}\sin x$.

   C 若 u^2+v^2 有界，则 f 是常数.

   D $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ 是解析函数.

2. 考察下面的积分

$$I=\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)^2}dz,$$

   这里的 γ 是一条不通过点 0 与 -1 的逆时针方向、可求长、简单闭曲线. 那么下面关于该积分求值的结论，正确的是 (　　和　　和　　和　　).

   A 若 0 和 -1 都在 γ 的外部，则 $I=0$.

   B 若 0 和 -1 都在 γ 的内部，则 $I=2\pi i-\frac{4\pi i}{e}$.

   C 若 0 在 γ 的内部， -1 在 γ 的外部，则 $I=2\pi i$.

   D 若 0 在 γ 的内部， -1 在 γ 的外部，则 $I=-\frac{4\pi i}{e}$.

3. 设 D 是区域， γ 是 D 内的可求长、逆时针方向、简单闭曲线. f 是定义在 D 上的复函数. 请问下面的哪个条件可以保证

$$\int_\gamma f(z)dz=0.$$

   你的选择 =(　　或　　或　　或　　).

   A f 在 γ 内部解析.

   B f 在 γ 上，及 γ 的内部的任一点可以局部展成 Taylor 级数.

   C f 在 D 连续，在 γ 的内部处处可导.

   D 在 D 上存在 f 的原函数.

4. 设有函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z).$$

其中每个函数 f_n 都是区域 D 上的解析函数. 能保证这个级数收敛到另一个 D 内的解析函数的条件是下列中的 (　　或　　或　　或　　).

A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 对任何 $z \in D$ 绝对收敛.

B $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内局部 (又称内闭) 一致收敛.

C D 单连通、$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$ 在 D 内一致收敛, 且至少存在一个点 $z_0 \in D$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛.

D 存在另一个收敛的实数级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$, 使得每个 $|f_n(z)| \le M_n, \forall z \in D$.

§4 请针对题目的要求写出足够详细的解答

这部分每个题 1 分, 总共 3 分.

1. 请指出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$$

的收敛半径和在收敛圆内的和函数.

2. 设函数 $f = u^2 + iv$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析 (其中 u, v 是实的二元连续可微函数), 请通过考虑函数

$$g(z) = e^{-f(z)}$$

来证明 u, v 都是常数. (必须说明所引用的定理的名称.)

3. 设在 a 点邻域 U 上有两个解析函数 f 和 g，且 $f(a)=g(a)=0$. 又知道 a 是 f 的 m 级零点、a 是 g 的 n 级零点，且 $m\geq n$, 求证

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

4. (附加题 2 分, 可做可不做)，设 $f(z)$ 是 $((1-z)z^2)^{\frac{1}{3}}$ 的某个单值解析分支, 定义在 $D=\mathbb{C}-[0,1]$ 上. 已知 $f(2)<0$，求 $f(i)=?$

5. 调查：你感觉自己能得到的分数是（　）/(out of 40+2). 你觉得哪里听不懂？你希望怎样提高教学质量？你是否觉得这门课很难？你对开设这门课有什么样的想法？你希望提高难度还是降低难度？你觉得作业布置地太重吗？你对教师和助教有什么要求？你觉得总分数 =30 分作业 +40 分期中 +30 分期末是否公平？

§5 Key

Key to §1

1. F
2. F
3. F
4. F
5. T
6. F
7. T
8. T
9. F
10. F
11. T
12. T
13. F
14. F
15. T
16. T

Key to §2

1. $2\pi i$
2. 支点，或分支点，支割点，或奇点，或极点都可以
3.
$$c+\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$
   其中 c 是常数。
4. $[0, +\infty)$
5. $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{7}{4}\pi i$

6. 2

7.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(e^{2xy}+e^{-2xy})\cos(x^2-y^2) & , \\ -\frac{1}{2}(e^{2xy}-e^{-2xy})\sin(x^2-y^2) & . \end{cases}$$

8. 1, 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$

9. 1, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, 0, ∞

Key to §3

1. A.C.D

2. A.B.C

3. B.C.D

4. B.C.D

Key to §4

1. $R=1$, 收敛到 $\frac{1}{(1+z)^2}$

2. 先说明 $|g(z)|\le 1$, 然后用 Liouville 定理。

3. 用 m 级零点的等价刻画。

4. $2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{19}{12}\pi i}$

5.