清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　（**A卷**）　2012年6月17日

系别：____________ 班号：____________ 学号：____________ 姓名：____________

一、填空题（30分）

1. 设两个相互独立的事件A和B都不发生的概率是$1/9$，A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等，则$P(A)=$________。

2. 随机的选一个点将一个区间分成两部分。则长区间至少为短区间的3倍的概率为________。

3. 设随机变量X与Y相互独立，且均服从区间[0,3]上的均匀分布，则
$P(\min\{X,Y\}<1)$=________。

4. 若$X\sim N(1,4)$，$P(X<x)=\Phi(1)$，则x=________。

5. 设随机变量X的概率密度函数为：

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a, & 0\le x\le 1;\\ a\,e^{-2(x-1)}, & x>1,\end{cases}$$

则a=________，EX=________，$Var(X)$=________。

6. 设随机向量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，定义随机变量：

$$Z=g(X,Y)=\begin{cases}1, & a<X\le b\text{ 且 }c<Y\le d;\\ 0, & \text{其它情况。}\end{cases}$$

则EZ=________________________________。

7. 设总体X在区间[0,θ]上服从均匀分布，其中$\theta>0$未知。从总体中抽取样本x_1，x_2，x_3，x_4，则下列统计量中不是θ的无偏估计的是________。

(A) $\hat\theta=(x_1+x_2+x_3+x_4)/2$　(B) $\hat\theta=2x_1+x_2-x_3$
(C) $\hat\theta=x_1+x_2+x_3-x_4$　(D) $\hat\theta=\max\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$

8. 设$x_1,x_2,\ldots,x_n$是来自正态总体$N(\mu,\ \sigma^2)$的样本，其中$\mu,\ \sigma$未知。若μ的95%置信区间为[1, 3]；且假设检验问题

$$H_0:\ \mu=2\quad \text{vs}\quad H_1:\ \mu\neq 2$$

的显著性水平为α的拒绝域为$\{|\bar x-2|\ge 1.3\}$，则α ____ 0.05 （填>或<）。

二、(10分）茶杯成套出售，每套五只，假设各套无次品和含一只次品的概率分别为4/5和1/5。一顾客在购买时，售货员随意取出一套，而顾客随机地查看其中的一只，若非次品，则买下该套，否则退回。试求：

1. 顾客买下该套的概率；
2. 在顾客买下的一套中确实无次品的概率。

三、（20分）设X和Y具有联合密度函数

$$p(x,y) = \begin{cases} 21x^2y^3 & 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

1. 求边际密度函数$p_X(x)$和$p_Y(y)$，并判断X与Y的独立性；
2. 条件密度函数$p_{Y|X}(y|x)$；
3. 当求在给定$X = x$下Y的条件数学期望$E(Y|X = x)$。

四、（15分）设随机向量(X, Y)服从二维正态分布，且$X \sim N(3, 4)$, $Y \sim N(2, 1)$，X与Y的相关系数为$\rho = 1/4$。

1. 求$Z = X + Y$的概率密度；
2. 若$W = X - cY$与Z独立，求常数c；
3. 若条件期望$f(z) = E(X^2 + a\,X\,Y + b\,Y^2 \mid Z = z)$不依赖于$z$，求常数$a$, b以及$f(z)$的值。

五、（15分）设总体X服从参数为λ的指数分布，$x_1, x_2, ..., x_n$为来自X的样本，

1. 求$1/\lambda$的最大似然估计；
2. 验证最大似然估计与$n\min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$均为$1/\lambda$的无偏估计；
3. 比较最大似然估计与$n\min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$的有效性。

六、（10分）某厂生产一种标准长度35mm的螺钉，实际生产的产品长度服从正态分布$N(\mu, 9)$。做假设检验$H_0 : \mu = 35$，$H_1 : \mu \neq 35$。拒绝域为$W = \{|\bar{x} - 35| > 1\}$。

1. 当样本容量n=36时，求犯第一类错误的概率；
2. 当样本容量n=36，μ=36时，求犯第二类错误的概率。

（注：所求概率可用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示。）