复变函数引论 杨晓京 2015.1.20

(回忆版)

1. 写出$f(z)$用积分表示的n阶导数公式

   (1) $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$，求证$f^{(n)}(0)\le\frac{n!M(r)}{r^n}$。

   (2) 证明若$f(z)$有界，即$\exists M>0,\forall z\in\mathbb{C},|f(z)|\le M$，则$f(z)$是常数（Liouville定理）。

2. 求最大值$\max_{|z|\le R}|\alpha z^n+\beta|$，并给出z的取值范围，其中$R>0,\alpha\in\mathbb{C},\alpha\ne0,\beta\in\mathbb{C},n\in\mathbb{Z}_+$。

3. (1)求i^{3i}的主值和一般值。(2)求$\cos\ 3(x+yi)$的实部和虚部，$x,y\in\mathbb{R}$。

4. (1)若级数$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n5^n$收敛，而$\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|\,5^n=+\infty$，请根据Abel定理和收敛半径定义证明级数$\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$的收敛半径$R=5$。

   (2)举例并说明理由。级数$\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$在收敛圆周上①处处收敛②处处发散③有些点收敛有些点发散

5. 计算$I_{a,b}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},a>0,b>0$。

6. 计算$\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos 3z^4}{z^m}dz,m\in\mathbb{Z}_+$。

7. $\omega(z)$把区域$0<\arg z<\alpha,0<|z|<4$共形地且互为单值地映射成单位圆盘$|\omega|<1$，其中$0<\alpha<\pi$，求出实现该映射的任一个函数。

8. $\omega(z)$把区域$D=\{z:|z-a|>a,|z-b|<b\}$共形地且互为单值地映射成单位圆盘$|\omega|<1$，其中$0<a<b$，求出实现该映射的任一个函数。

9. 两题中任选一题

   (A)$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}},n\in\mathbb{Z}_+$

   (B)$J_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n},n\in\mathbb{Z}_+$

10. 写出将$|z|<1$映射成$|\omega|<1$的分式线性映射的一般表达式, 并证明$\frac{|d\omega|}{1-|\omega|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$。