2011-2012秋 复变函数(B)

1. (p68. T18) $3^i = e^{i\,\mathrm{Ln}3} = e^{i(\ln 3+2k\pi i)} = e^{-2k\pi}(\cos\ln 3 + i\sin\ln 3)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

对数函数 $(1+i)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt2 + i(\frac{\pi}{4}+2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}(\cos\frac{\ln2}{2}+i\sin\frac{\ln2}{2})$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

2. (1) (p42) G1 Cauchy-Riemann条件

(2) (p43. G2)

3. (1) (p162. G5) 无穷远点留数 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]$

(2) (p184. T12(2)) Laurent展开 $I=\oint_{|z|=2}\frac{z^3 e^{\frac1z}}{1+z}dz$ $\begin{cases} z=0 \text{ 本性奇点. (仿p136. G3(2))} \\ z=-1 \text{ 一阶极点.}\end{cases}$

在 $1<|z|<+\infty$ 内解析, $|z|=2$在圆环域内.

$$f(z)=\frac{z^3e^{\frac1z}}{1+z} = \frac{1}{\frac{1}{z^2}}\cdot\frac{e^{\frac1z}}{1+\frac1z} = z^2\left(1-\frac1z+\frac1{z^2}-\frac1{z^3}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac1z+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\frac{1}{3!\cdot z^3}+\cdots\right)$$

$$C_{-1} = 1\cdot\frac1{3!} - 1\cdot\frac1{2!} + 1\cdot1 - 1\cdot1 = -\frac13$$

则 $I=2\pi i\cdot C_{-1} = -\frac{2\pi i}{3}$

4. (i) (p142. T6(1)) (ii) (p142. T6(2)) 幂级数 判敛.

(i) $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^p}$ $(p>0)$ (比值) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 收敛半径$R=1$.

[注]. 具体讨论 $p=1,2$ 时收敛域情况. 如$p=1$时, $z=e^{i\theta}$ 有 $\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n} = \frac12\ln\frac{1}{2(1-\cos\theta)} + i\frac{\pi-\theta}{2}$, $\theta\neq0$.

(ii) $\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{z}{\ln(in)}\right)^n$ 首先, $\ln(in)=\ln n+\frac{\pi}{2}i \Rightarrow$ 模. $|\ln in| = \sqrt{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2}$.

(根值) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\ln(in)}\right|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}} = 0$ (不严谨说 收敛半径$R=\infty$ 且可达到 则$R=\infty$.)

5. (p143. T12(1)(4)) Taylor展开 $\Rightarrow$ 收敛半径.

i) $\frac{z-1}{z+1}$, $z_0=1$. $\frac{z-1}{z+1} = \frac{z-1}{z-1+2} = (z-1)\cdot\left(1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\cdots\right)$ $R=2$.

$$=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{2^2}-\frac{(z-1)^4}{2^3}+\cdots$$

ii) $\frac{1}{4-3z}$, $z_0=1+i$. $\frac{1}{4-3z} = \frac{1}{1-3i-3(z-1-i)} = \frac{\frac{1}{1-3i}}{1-\frac{z-1-i}{\frac{1-3i}{3}}} = \frac{1}{1-3i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1-i}{\frac{1-3i}{3}}\right)^n$

收敛半径 $R=\left|\frac{1-3i}{3}\right| = \frac{\sqrt{10}}{3}$

6. (p132. G1) Laurent级数.

7. i) (p184. T13(2)) 留数 $\Rightarrow$ 实积分

$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta$, $(a>b>0)$. $z=e^{i\theta}$. $\Rightarrow$ 复积分(留数). $\begin{cases}\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \\ \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}\end{cases}$

$dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$ $I=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\quad}$ 其中 $0<k=\frac{b}{a}<1$

$$I=\frac{1}{a}\oint_{|z|=1}\frac{\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2\cdot\frac{dz}{iz}}{1+k\cdot\frac{z^2+1}{2z}}=\frac{1}{a}\oint_{|z|=1}\frac{i(z^2-1)^2\,dz}{2z^2(2z+k(z^2+1))}$$

一级极点 $z_{1,2}=-\frac{1}{k}\pm\sqrt{\frac{1}{k^2}-1}$ ~~$\in\{|z|<1\}$~~

二级极点 $z_3=0.\in\{|z|<1\}$.

~~利用……留数~~ $I=2\pi i\frac{i}{2a}\{Res[f(z),z_1]+\cancel{Res[f(z),z_2]}+Res[f(z),z_3]\}$

~~又 $Res[f(z),z_1]+Res[f(z),z_2]+Res[f(z),z_3]+Res[f(z),\infty]=0$.~~

~~故 $I=\frac{1}{a}2\pi i\,Res[f(z),\infty]$~~

$z_1=-\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{1}{k^2}-1}\in(-1,0)$

$z_2=-\frac{1}{k}-\sqrt{\frac{1}{k^2}-1}<-1$.

$Res[f(z),z_1]=$ ~~$\frac{(z_1^2-1)^2}{z_1^2(2z_1+k(z_1^2+1))}$~~

$$f(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z+kz^2+k)}=\frac{(z^2-1)^2}{kz^2(z-z_1)(z-z_2)}$$

$z^2+\frac{2}{k}z+1=0$

$\begin{cases}z_2+z_3=-\frac{2}{k}\\ z_2z_3=1\end{cases}$

$z_2=-\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{1}{k^2}-1}$

$z_2^2-1=-\frac{2}{k}z_2-2$

$1+kz_2=\sqrt{1-k^2}$

$$=\frac{(z^2-1)^2}{kz^2\,z_1\cdot z_2}\frac{1}{(1-\frac{z}{z_1})(1-\frac{z}{z_2})}=\frac{(z^2-1)^2}{kz^2z_1z_2}\cdot\left(1+\frac{z}{z_1}+\left(\frac{z}{z_1}\right)^2+\cdots\right)\left(1+\left(\frac{z}{z_2}\right)+\left(\frac{z}{z_2}\right)^2+\cdots\right)$$

$$C_{-1}=\frac{1}{k\cdot z_1z_2}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)=\frac{1}{k\cdot 1}\cdot\frac{-\frac{2}{k}}{1}=-\frac{2}{k^2}.$$

$$\frac{(z_2^2-1)^2}{z_2^2\cdot(2+2kz_2)}=\frac{\left(-\frac{2}{k}z_2-2\right)^2}{2z_2^2(1+kz_2)}=2\cdot\frac{\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{z_2}\right)^2}{1+kz_2}=2\cdot\frac{\left(z_2+\frac{1}{k}\right)^2}{1+kz_2}=\frac{2\sqrt{1-k^2}}{k^2}.$$

则 $$I=\frac{2\pi i\cdot i}{2a}\left(-\frac{2}{k^2}+\frac{2\sqrt{1-k^2}}{k^2}\right)=\frac{2\pi}{a}\frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)}{\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right).$$

ii) (p166. G2)

8. (p206. G5) 月牙形 → 上半平面

9. (p204. G3) 上半平面 → 单位圆

10. Cauchy积分公式 ⇒ Liouville定理 ⇒ 代数学基本定理.

i) (Cauchy不等式) 证明: $C_R:\{z\,|\,|z-a|\le R\}\Rightarrow |f^{(n)}(a)|\le\frac{n!\,M}{R^n}$, $n=1,2,\cdots$

由Cauchy积分公式 令 $z_0=a$, 有 $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$

$$|f^{(n)}(z_0)|=\frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{C_R}\frac{|f(z)||dz|}{|z^{n+1}|}\le\frac{n!}{2\pi}\cdot\oint_{C_R}\frac{M}{R^{n+1}}$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M\cdot 2\pi}{R^{n+1}}=\frac{n!\,M}{R^{n+1}}\quad \#.$$

ii) (Liouville定理) 若 $|f(z)|\le M$ (有界) $\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!\,M}{R^n}$, 对任意给定 $n\in N$, 分子是常数.

$0\le|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{M\cdot n!}{R^n}\to 0\ (n\to\infty$时$)$. $\Leftrightarrow f^{(n)}(a)=0$, $\forall n\ge 1$.

由 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析, 则有 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)\cdot z^n}{n!}\equiv f(a)$ 为常数, #.

(11) (代数学基本定理).

复多项式: $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot z^k$, $n\geq 1$, $a_n\neq 0$.

复系数多项式 $\Rightarrow$ $P_n(z)=0$ 至少有一根.

证明: [反证] 设 $P_n(z)\neq 0$, $\forall z\in\mathbb{C}$. 则 $f(z)=\frac{1}{P_n(z)}$ 处处可导,

$$f'(z)=\frac{-P_n'(z)}{P_n^2(z)}$$

[引证] $|P_n(z)|\to+\infty$, $|z|\to+\infty$

又 $P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}\cdot z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$.

$$=|z^n|\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right|$$

$$\geq\frac{|a_n|}{2}|z|^n\to+\infty,\ n\to+\infty\text{时}\quad |a_n|\neq 0$$

则 $f(z)\to 0$, $z\to+\infty$时,

又 f 处处可导 $\Rightarrow$ f 连续有界.

故 $\exists R_0>0$, $|z|\geq R_0$时, $|f(z)|\leq 1$ 而当 $|z|\leq R_0$时

$f(z)$连续 $\Rightarrow$ $|f(z)|\leq M_0$, $|z|\leq R_0$时, (有界)

再由 Liouville定理知, 整函数$f(z)$在 $\mathbb{C}$上有界则必为常数,

与 $f(z)=\frac{1}{P_n(z)}$ 其中 $n\geq 1$, $a_n\neq 0$矛盾. 故原假设不成立,

亦即 $\exists z_0\in\mathbb{C}$, s.t. $P_n(z_0)=0$, 原命题获证. #.