

常微分方程练习题

§ 1 一阶常微分方程

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y - xy' = 2(y^2 + y')$;

(2) $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$;

(3) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$;

(4) $xy' - y = x \tan \frac{y}{x}$;

(5) $y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2$;

(6) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$;

(7) $(x \cos^2 y - 1)dx + (3y^2 - x^2 \sin y \cos y)dy = 0$;

(8) $xdx + ydy + 4y^3(x^2 + y^2)dy = 0$;

(9) $(x - xy)dx + (y + x^2)dy = 0$;

(10) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

(11) $x^2 y' - y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

(12) $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$;

(13) $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$;

(14) $xydx + (y^4 - x^2)dy = 0$;

(15) $\frac{1}{\sqrt{y}} y' + \frac{4x}{x^2 - 1} \sqrt{y} = x$;

(16) $xy' - y[\ln(xy) - 1] = 0$;

(17) $xyy' - y^2 + 2x^3 \cos x = 0$;

$$(18) \sqrt{1+x^2} y' \sin 2y = 2x \sin^2 y + e^{2\sqrt{1+x^2}};$$

$$(19) (x^2 y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0;$$

$$(20) xy' = (x^2 + y)^2 + y.$$

2. 求下列微分方程的特解:

$$(1) y \ln x dx = x \ln y dy, \quad y|_{x=1} = 1;$$

$$(2) y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}, \quad y|_{x=1} = \frac{\pi}{6};$$

$$(3) xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0, \quad y|_{x=1} = 1;$$

$$(4) \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2} = 0, \quad y|_{x=0} = 1;$$

$$(5) xdy - ydx - (1-x^2)dx = 0, \quad y|_{x=1} = 0;$$

$$(6) y' \cos x + y \sin x = \cos^2 x, \quad y|_{x=0} = 1;$$

$$(7) (x - \sin y)dy + \tan y dx = 0, \quad y|_{x=1} = \frac{\pi}{6};$$

$$(8) xy' \ln x \sin y + \cos y(1 - x \cos y) = 0, \quad y|_{x=1} = \pi.$$

3. 试确定具有连续导数的一元函数 φ , 它满足 $\varphi(0) = -2$, 使得

$$[\sin 2x - \varphi(x) \tan x]y dx + \varphi(x)dy = 0$$

是全微分方程, 并求此全微分方程的通解。

4. 试确定在 $(0, +\infty)$ 具有连续导数的一元函数 φ , 它满足

$$\int_1^x \left(\varphi^2(t) \ln t - \frac{\varphi(t)}{t} \right) dt = \varphi(x) + 1.$$

5. 有一曲线 $y = f(x)$ ($f(x) > 0$), 它通过 $(1, 1)$ 点, 且该曲线在 $[1, x]$ 上所形成的

曲边梯形的面积等于 $\frac{2x}{y} - 2$, 其中 $y = f(x)$. 求 $f(x)$.

6. 设 $u(x, y)$ 具有二阶连续导数, 且不恒等于 0. 证明 $u(x, y) = f(x)g(y)$ 的充要

条件为 $u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$.

7. 某湖泊的水量为 V ，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$ ，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$ ，流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$ 。已知1999年底湖中 A 的含量为 $5m_0$ ，超过国家标准。为了治理污染，从2000年起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$ 。问至多需经过多少年，湖泊中的污染物 A 的含量会降至 m_0 以内（假定湖水中 A 的浓度是均匀的）？
8. 一摩托艇以 10km/h 的速度在静水上运动，全速时停止发动机。过了 20s 后，摩托艇的速度减至 6km/h ，试确定发动机停止2分钟后，摩托艇的速度。假定水的阻力与摩托艇的运动速度成正比。

§2 二阶线性微分方程

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y'' + 2y' - 8y = 0$;

(2) $y'' + 4y' + 6y = 0$;

(3) $y^{(4)} - y = 0$;

(4) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$;

(5) $y'' + y' = 2x^2 + 1$;

(6) $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$;

(7) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$;

(8) $y'' + y = x + \cos x$;

(9) $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x$;

(10) $y'' + y = \sin x \sin 2x$;

(11) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$;

(12) $x^2 y'' - xy' + 2y = x \ln x$;

(13) $(2x-1)^2 y'' + 4(2x-1)y' - 8y = 4x - 3$ 。

2. 求下列微分方程的特解:

(1) $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 3$;

(2) $y'' - y = 4xe^x$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$;

(3) $y'' + y = 2xe^x + 4\sin x$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$;

(4) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$ 。

3. 已知 $y = e^x$ 是方程 $(1+x)y'' - y' - xy = 0$ 的一个解, 求这个方程的通解。

4. 用常数变易法求方程 $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$ 的通解。

5. 设 $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ (C_1, C_2 是任意常数) 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 求该方程。

6. 设一元函数 f 具有二阶连续导数, 且 $f(0) = f'(0) = 1$ 。试确定 f , 使得在全平面上曲线积分

$$\int_L [5e^{2x} - f(x)]ydx + [f'(x) - \sin y]dy$$

与路径无关, 并求 $\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} [5e^{2x} - f(x)]ydx + [f'(x) - \sin y]dy$ 。

7. 设一元函数 f 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x}z$,

求 f 。

8. 某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地瞬间, 飞机尾部张开减速伞以增大阻力, 使飞机减速停下。现有一质量为 9000 kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700 km/h。经测试, 减速伞打开后, 飞机所受阻力与飞机的速度成正比 (比例系数 $k = 6.0 \times 10^6$)。问从着陆点算起, 飞机滑行的最大距离是多少?

9. 一长为 20m 且质量均匀的链条悬挂在钉子上, 开始挂上时有一端为 8m。问不计钉子对链条的摩擦力时, 链条自然滑下所需的时间?

§ 3 可降阶的微分方程

1. 求解下列微分方程:

(1) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$;

(2) $y'' = y' + x$;

(3) $y'' + y' + y'^3 = 0$;

(4) $y'' = 2x\sqrt{1 + y'^2}$;

(5) $y'' = y'^3 + y'$;

(6) $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$;

(7) $yy'' - y'^2 = y^2 y'$;

(8) $xyy'' + xy'^2 = 3yy'$ 。

2. 求解下列微分方程的特解:

(1) $y'y'' + x = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$;

(2) $y'' + y'^2 = 1$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$;

(3) $3y''^2 - y'y''' = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = 1$ 。

3. 设有一两端固定的均匀且柔软的绳索, 它仅受重力的作用而下垂, 问该绳索在平衡状态时是怎样的一条曲线。