高等微积分 B 期末试题（2007 年 1 月 8 日）(A)

姓名________________ 班号________________ 学号________________

1．填空题（直接填在横线上）(4 分/小题)

1)．设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且当 $x\in(-\pi,+\pi)$ 时 $f(x)=\operatorname{sgn}x$. 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数为 $\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin nx}$。

2)．叙述函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛准则：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛的充要条件是________________________________。

3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}=$ ___0___。

4) 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\prod_{k=1}^{m}(x-k)^{p_k}}$ 在 ___每个 $p_k<1$ 且 $\sum_{k=1}^{m}p_k>1$___ 时收敛，在其它情形发散。

2．选择题（直接填在括号内）(3 分/小题)

1)．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 的敛散情况是[D]

A. 绝对收敛；B. 条件收敛；C. 绝对收敛或条件收敛；D. 可能收敛也可能发散。

2) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $[-R,R]$，其中 $R>0$. 则下列叙述一定正确的是 [D] A

A. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}$.；

B. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 绝对收敛；

C. $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛域为 $[-R,R]$；

D. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域为 $[-R,R]$。

3)．下列陈述中，错误的是[D]

A. 单调增的数列 $\{x_n\}$ 发散的充要条件是 $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$；

B. 有界数列 $\{x_n\}$ 发散的充要条件是存在 $\{x_n\}$ 的两个子列收敛到不同的极限；

C. 正项级数收敛的充要条件是：以某种方式加括号后所得级数收敛；

D. 若广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则广义积分 $\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛。

4). 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q};\\ -1, & x\notin\mathbb{Q},\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\in(0,1];\\ 2, & x=0.\end{cases}$，下列叙述正确的是[A]

A. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积； B. $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上都不可积；
C. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积； D. $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上都可积。

3. 判断题：指出下列陈述是否正确，并简述理由(若正确，给出简要证明；若错误，举出反例)（5分/小题）。

1). 若广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

错，例如 $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$

2). 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 绝对收敛，则在区间 I 一致收敛。

错，例如 $u_1(x)=x$, $u_2(x)=x^2-x$, $\cdots,u_n(x)=x^n-x^{n-1}$. 在（0，1）绝对收敛，但不一致收敛。

3). 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 收敛。

对，因为 $\left|\dfrac{u_n}{n}\right|\le\dfrac{1}{2}\left(u_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

4). 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续。

对。当 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ 存在时，$f(x)$ 一致连续当且仅当 $g(x)$ 一致连续。

4（8分）. 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证：因为 $n>1$ 时，$\left((\sqrt[n]{n}-1)+1\right)^n=n$, 所以 $\dfrac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2\le n$, $\sqrt[n]{n}-1\le\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. **4 分**

$\forall\varepsilon>0$, 要 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$, 只要 $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$, 只要 $n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1$. **2 分**

即 $\forall\varepsilon>0\,\exists N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]+1\,\forall n>N\,|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$. **2 分**

5（10分）. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{9^n}$ 的和。

解：记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$, 则原式$=\dfrac{1}{9}S(\dfrac{1}{3})$. **4 分**

逐项积分：$\int_0^x S(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\dfrac{x}{1-x^2}$, $S(x)=\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)'_x=\dfrac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=\dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$, **4 分**

原式$=\dfrac{1}{9}S(\dfrac{1}{3})=\dfrac{5}{32}$. **2 分**

6（8分）. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，$f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le\pi,\\ 1, & \pi<x\le 2\pi.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数。

解：$a_0=1$， **1 分**

$a_n=0$、 **2 分**

$b_n=\dfrac{(-1)^n-1}{n\pi}$， **3 分**

$f(x)\sim\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{n\pi}\sin nx.$ **2 分**

7（10分）. 证明定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则在 $[a,b]$ 有界。

8（10分）. 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 是否一致收敛？证明你的论断。

解：不一致收敛。 **2 分**

部分和函数 $S_n(x)=1-\dfrac{1}{nx+1}$， **3 分**

和函数 $S(x)=\begin{cases}1, & x\ne 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **3 分**

因为通项是连续函数，和函数在 $x=0$ 不连续，所以级数不一致收敛。 **2 分**

9（二选一，6分）.

1）证明不等式 $\dfrac{5\pi}{2}<\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx<2\pi e^{\frac{1}{4}}.$

证明：$e^{\sin x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n!}$

$$\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\,dx$$

? 逐项

$$=2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot 2\pi$$

$$\ge 2\pi+\frac{1}{(2\cdot1)!}\frac{(2\cdot1-1)!!}{(2\cdot1)!!}\cdot 2\pi\,.$$

所以 $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx>\frac{5\pi}{2}.$

$$\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx=2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot 2\pi$$

$$=2\pi+2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{(2n)!!(2n-1)!!}{\left((2n)!!\right)^2}$$

$$=2\pi+2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2 4^n}$$

$$\le 2\pi+2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!4^n}=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!4^n}=2\pi e^{\frac{1}{4}}.$$

2）设 $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+1}=a_{n-1}+a_n$ $(n=2,3,\cdots)$. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径。

解：法 1）记 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$. 则 $\forall n$ $b_{n+1}=\frac{1}{b_n}+1$.

当 $n>1$ $b_{2(n+1)}-b_{2n}=\frac{1}{b_{2n+1}}-\frac{1}{b_{2n-1}}, b_{2n+1}-b_{2n-1}=\frac{1}{b_{2n}}-\frac{1}{b_{2n-2}}$.

因为 $b_1=1, b_2=2, b_3=\frac{3}{2}, b_4=\frac{5}{3}$，所以 $b_1<b_3, b_2>b_4$.

所以数列 $\{b_{2n}\}$ 单调减，$\{b_{2n-1}\}$ 单调增。且 $b_{2n}>1, b_{2n+1}=1+\frac{1}{b_{2n}}<2$.

所以数列 $\{b_{2n}\}$，$\{b_{2n-1}\}$ 都收敛。

记 $\lim\limits_{n\to\infty}b_{2n}=A, \lim\limits_{n\to\infty}b_{2n-1}=B$，则 $A=\frac{1}{B}+1, B=\frac{1}{A}+1$.

从而有 $A=B=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

法 2）数列 $\{a_n\}$ 是菲波那契数列，$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

$$\text{所以}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.