清华大学 2009 年秋季学期《复变函数引论》期末考试参考答案（A 卷）

出题人：刘思齐

注：A 卷与 B 卷的题目相同，只是顺序不同。

一、 概念题 (20 分)

1. 请写出单连通区域的定义；(5 分)

   解答一: 设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的连通开集，若 D 中任意简单闭曲线的内部都是 D 的子集，则 D 称为单连通区域。 □

   解答二: 设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的连通开集，若 D 中任意简单闭曲线都可在 D 中连续地缩为一点，则 D 称为单连通区域。 □

2. 请写出 Cauchy-Goursat 基本定理的内容；(5 分)

   解答: 设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的单连通区域， γ 是 D 中可求长闭曲线，$f : D \to \mathbb{C}$ 是 D 上的解析函数，则

   $$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

   □

3. 请写出解析函数 n 阶导数的 Cauchy 积分公式；(5 分)

   解答: 设 D 是 $\mathbb{C}$ 上的区域， $z_0 \in D$， $f : D \to \mathbb{C}$ 是 D 上的解析函数，则

   $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\,\pi\,i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,\ n \in \mathbb{N}$$

   γ 是 D 中可求长正向简单闭曲线，且满足 $z_0 \in \mathrm{int}(\gamma) \subset D$。 □

4. 请写出极点及其阶的定义。(5 分)

   解答一: 设 $z_0 \in \mathbb{C}$ 是解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点， $f(z)$ 在 z_0 附近的 *Laurent* 展开为

   $$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n.$$

若存在正整数 m，使得 $c_{-m} \neq 0$，且对任意 $n < -m$，有 $c_n = 0$，则称 z_0 为 $f(z)$ 的极点，正整数 m 称为 $f(z)$ 在 z_0 处的阶。 □

解答二：设 $z_0 \in \mathbb{C}$ 是解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点，若存在正整数 m，及 z_0 附近的解析函数 $h(z)$，满足

$$f(z) = (z - z_0)^{-m}\, h(z), \quad h(z_0) \neq 0,$$

则称 z_0 为 $f(z)$ 的极点，正整数 m 称为 $f(z)$ 在 z_0 处的阶。 □

二、 填空题（只需写出答案，不必写过程）(50 分)

1. 计算下列复数的值（多值的要写出全部值）。(10 分)

(1) $\dfrac{2+i}{2-i} = \underline{\quad \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\,i \quad}$； (2) $(1+i)^5 = \underline{\quad -4-4\,i \quad}$；

(3) $\mathrm{Ln}(3+4\,i) = \underline{\quad \log 5 + i\left(\arctan\dfrac{4}{3} + 2\,k\,\pi\right),\ k \in \mathbb{Z} \quad}$；

2. 计算下列积分，其中 C 为正向圆周 $|z| = 2$。(10 分)

(1) $\int_C \dfrac{z^2}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz = \underline{\quad \pi\,i \quad}$；

解答：函数 $f(z) = \frac{z^2}{1+z} e^{\frac{1}{z}}$ 在区域 $D = \{|z| > 2\}$ 上解析，所求积分实际上就是 $f(z)$ 在 D 上 *Laurent* 展开式中 z^{-1} 的系数乘以 $2\pi\,i$。在区域 D 上，我们有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2}{1+z} e^{\frac{1}{z}} = z\,\frac{1}{1+\frac{1}{z}} e^{\frac{1}{z}} \\ &= z\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2\,z^2} + \cdots\right) \\ &= z + \frac{1}{2\,z} + \cdots, \end{aligned}$$

所以所求积分为 $\pi\,i$。 □

(2) $\int_C \dfrac{\sin z}{(z-1)^5} dz = \underline{\quad \dfrac{\sin 1}{12}\,\pi\,i \quad}$；

解答：利用 $\sin z$ 的 4 阶导数的 *Cauchy* 积分公式可得：

$$\int_C \frac{\sin z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\,\pi\,i}{4!} \sin^{(4)}(1) = \frac{\sin 1}{12}\,\pi\,i.$$

□

(3) $\int_C \dfrac{2+z}{z^n\,(1-z)^3}dz =$ __________ ($n\in\mathbb{Z}$)。

解答: 设函数 $f(z) = \frac{z(2+z)}{(1-z)^3}$ 在区域 $D = \{|z| > 2\}$ 上的 *Laurent* 展开为

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, z^n,$$

则所求积分等于 $2\pi\, i\, c_n$。通过直接的计算可得:

$$f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(3k-1)}{2}\frac{1}{z^k}, \quad z\in D,$$

于是

$$\int_C \frac{2+z}{z^n\,(1-z)^3}dz = \begin{cases} 0, & n\geq 0; \\ -n(3n+1)\,\pi\, i, & n<0. \end{cases}$$

□

3. 写出下列函数在指定区域中的级数展开式。(10 分)

(1) $\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$ ($|z|<1$);

解答:

$$\frac{1}{(1+z^2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}z^{2n},\ |z|<1.$$

□

(2) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$ ($|z|>4$);

解答:

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)} = 1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(6\cdot 4^n - 2\cdot 3^n\right)z^{-n-1},\ |z|>4.$$

□

(3) $\tan z$ $(\frac{1}{2}\pi < |z| < \frac{3}{2}\pi)$ （从 z^{-3} 项写到 z^3 项）。

解答：根据 *Laurent* 展开定理

$$\tan z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n,\ \frac{1}{2}\pi < |z| < \frac{3}{2}\pi,$$

其中系数 c_n 为

$$c_n = \frac{1}{2\,\pi\, i}\int_C \frac{\tan z}{z^{n+1}}\, dz,$$

积分道路 C 可取为正向圆周 $|z| = \pi$。根据留数定理，

$$c_n = \mathrm{Res}(\frac{\tan z}{z^{n+1}}, \frac{\pi}{2}) + \mathrm{Res}(\frac{\tan z}{z^{n+1}}, -\frac{\pi}{2}) + \mathrm{Res}(\frac{\tan z}{z^{n+1}}, 0).$$

利用对数留数的公式不难算出

$$\mathrm{Res}(\frac{\tan z}{z^{n+1}}, \frac{\pi}{2}) = -\frac{2^{n+1}}{\pi^{n+1}},\ \mathrm{Res}(\frac{\tan z}{z^{n+1}}, -\frac{\pi}{2}) = (-1)^n\frac{2^{n+1}}{\pi^{n+1}},$$

而留数 $b_n = \mathrm{Res}(\frac{\tan z}{z^{n+1}}, 0)$ 即为 $\tan z$ 在 $|z| < \frac{\pi}{2}$ 上的 *Taylor* 展开的系数，所以可以通过长除法得到:

$$b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = \frac{1}{3},\ b_4 = 0, b_5 = \frac{2}{15}, \ldots$$

最后不难算出最终结果:

$$\begin{aligned}\tan z = &-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{2^{2n-1}} z^{-2n-1} + \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) z \\ &+ \left(\frac{1}{3} - \frac{32}{\pi^4}\right) z^3 + \left(\frac{2}{15} - \frac{128}{\pi^6}\right) z^5 + \cdots\end{aligned}$$

□

4. 设 $f(z) = \dfrac{1+z+e^z}{z^5}$，计算下列留数。(10 分)

(1) $\mathrm{Res}(\dfrac{f(z)}{z}, 0) =$ $\underline{\quad\dfrac{1}{120}\quad}$；

(2) $\mathrm{Res}(\dfrac{f(z)}{z}, \infty) =$ $\underline{\quad -\dfrac{1}{120}\quad}$；

(3) $\mathrm{Res}(-\frac{f(-z^{-1})}{z},\infty) = \underline{\quad \frac{1}{120} \quad}$。

5. 计算下列定积分。(10 分)

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{1-2\,p\,\cos\theta+p^2}d\theta = \underline{\quad \pi\frac{1+p^2}{1-p^2} \quad}$ $(0<p<1)$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \underline{\quad \pi\, e^{-1} \quad}$；　(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx = \underline{\quad \pi\, e^{-2} \quad}$。

三、 计算题（请写出完整的计算过程）(30 分)

1. 设 n 为正整数，计算下面的积分 (15 分)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2\,n}}dx.$$

解答一：当 n 是奇数时，积分显然为零，所以我们下面假设 n 是偶数。解析函数 $f(z)=\frac{z^n}{1+z^{2\,n}}$ 在上半平面的所有奇点为

$$z_k = e^{\frac{2k+1}{2n}\,\pi\, i},\ k=0,1,\ldots,n-1,$$

所以，根据有理函数积分的留数公式，有

$$I = 2\,\pi\, i\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Res}(f(z),z_k).$$

因为所有 z_k 都是一阶极点，所以不难算出留数：

$$\mathrm{Res}(f(z),z_k) = \left.\frac{z^n}{2\,nz^{2\,n-1}}\right|_{z=z_k} = \frac{(-1)^k\, z_k}{2\,n\,i}.$$

于是，所求积分为

$$\begin{aligned} I =& 2\,\pi\, i\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Res}(f(z),z_k) \\ =&\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{\frac{\pi\, i}{2n}}\left(e^{\frac{\pi\, i}{n}}\right)^k \\ =&\frac{\pi}{n}\, e^{\frac{\pi\, i}{2n}}\,\frac{1-\left(-e^{\frac{\pi\, i}{n}}\right)^n}{1+e^{\frac{\pi\, i}{n}}} \\ =&\frac{\pi}{n\,\cos\frac{\pi}{2\,n}} \end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了 n 是偶数的条件。 □

解答二：当 n 是奇数时，积分显然为零，所以我们下面假设 n 是偶数。设 D 是如下扇形区域:

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{n}\}, \quad R > 1.$$

解析函数 $f(z) = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ 在 D 内有一个一阶极点 $z = e^{\frac{\pi i}{2n}}$，根据留数定理（图略）

$$\left(\int_0^R + \int_{C_R} + \int_{R e^{\frac{\pi i}{n}}}^0\right) f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), e^{\frac{\pi i}{2n}}).$$

当 R 充分大时，我们有:

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)\, dz\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{R^n e^{i n\theta}}{1+R^{2n} e^{2 i n \theta}} R e^{i\theta} i\, d\theta\right| \\ &\le \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{R^{n+1}}{R^{2n}-1}\, d\theta \le \frac{C}{R^{n-1}},\end{aligned}$$

其中 C 是某一正实数。注意 $n-1 \ge 1$，所以我们有:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0.$$

另一方面，不难知道

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(z)\, dz &= \frac{1}{2} I, \\ \lim_{R\to\infty} \int_{R e^{\frac{\pi i}{n}}}^0 f(z)\, dz &= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2} I, \\ 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), e^{\frac{\pi i}{2n}}) &= \frac{\pi}{n} e^{\frac{\pi i}{2n}}.\end{aligned}$$

于是可求出积分 I:

$$I = \frac{\pi}{n} e^{\frac{\pi i}{2n}} \frac{2}{1+e^{\frac{\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n \cos\frac{\pi}{2n}}.$$

□

注记：设 p, q 是两个正实数，且满足 $p > q$，考虑如下积分

$$J(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p}\, dx.$$

通过换元 $x^p = t$ 可知

$$J(p,q) = \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{t^{q/p-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{p\,\sin\frac{q}{p}\,\pi}.$$

利用上式亦不难得出本题所求的 I。 ◊

2. 设 $a, b > 0$，计算下面的积分 (15 分)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(a\,x) - \cos(b\,x)}{x^2} dx.$$

解答一: 考虑函数 $f(z) = \frac{e^{i\,a\,z} - e^{i\,b\,z}}{z^2}$ 在教材中图 *5.3* 所示道路上的积分。因为 $f(z)$ 在道路所围区域中没有奇点，所以根据 *Cauchy-Goursat* 基本定理，有

$$\left(\int_{-R}^{-r} + \int_{C_r} + \int_r^R + \int_{C_R}\right) f(z)\,dz = 0.$$

当 R 充分大时，

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{e^{i\,a\,R\,e^{i\,\theta}} - e^{i\,b\,R\,e^{i\,\theta}}}{R^2 e^{2\,i\,\theta}}\,R\,e^{i\theta}\,i\,d\theta\right| \\ &\le \int_0^\pi \frac{e^{-a\,R\,\sin\theta} + e^{-b\,R\,\sin\theta}}{R}\,d\theta \le \frac{2\,\pi}{R},\end{aligned}$$

所以我们有:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

另一方面，注意 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，所以在 $z = 0$ 附近， $f(z)$ 可以写成如下形式:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + g(z),$$

其中 $g(z)$ 是 $z = 0$ 附近的解析函数，

$$c_{-1} = \mathrm{Res}(f(z), 0) = i(a - b).$$

设 $G(z)$ 是 $g(z)$ 在 $z = 0$ 附近的一个原函数，则当 r 充分小时，

$$\begin{aligned}\int_{C_r} f(z)\,dz &= \int_{C_r}\left(\frac{c_{-1}}{z} + g(z)\right)\,dz \\ &= -\pi\,i\,c_{-1} + G(r) - G(-r),\end{aligned}$$

所以我们有:

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,dz = \pi\,(a-b).$$

最后，所求积分即为

$$I = \lim_{R\to\infty,\ r\to 0}\left(\int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R}\right) f(z)\,dz = \pi\,(b-a).$$

$\square$

注记: 本题所求积分其实是课上讲过的如下积分的变形

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \pi,$$

事实上,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(a\,x)-\cos(b\,x)}{x^2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(b\,x)}{x^2}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(a\,x)}{x^2}dx \\
&= b\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt - a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 s}{s^2}\,ds \\
&= (b-a)\,\pi.
\end{aligned}$$

注意，在上面的分解中，分子上的 1 是必不可少的，如果做下面这种分解:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(a\,x)}{x^2}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(b\,x)}{x^2}dx,$$

右边的两个积分全都是发散的，所以没有意义。 $\Diamond$

解答二: 设 p 是一个正实数，我们先来考虑如下积分:

$$I(p,a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(a\,x)}{x^2+p^2}dx,$$

利用第三类可以利用留数计算的定积分的公式，不难算出:

$$\begin{aligned}
I(p,a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,a\,x}}{x^2+p^2}dx \\
&= 2\,\pi\,i\,\mathrm{Res}(\frac{e^{i\,a\,x}}{x^2+p^2}, p\,i) = \frac{\pi}{p}e^{-a\,p}.
\end{aligned}$$

于是，所求积分即为

$$I=\lim_{p\to 0}\left(I(p,a)-I(p,b)\right)=\lim_{p\to 0}\pi\,\frac{e^{-a\,p}-e^{-b\,p}}{p}=\pi\,(b-a).$$

$\square$

注记：这种解答利用的是所谓含参积分技术。这种技术也是计算各种积分的有力工具，其威力丝毫不逊色于复变函数方法。

以本题为例，若设

$$I(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(a\,x)-\cos(b\,x)}{x^2}dx,$$

那么不难证明：

$$\frac{\partial}{\partial a}I(a,b)=-\pi,\ \frac{\partial}{\partial b}I(a,b)=\pi,$$

所以 $I(a,b)$ 只能是如下形式：

$$I(a,b)=\pi\,(b-a)+c,$$

其中 c 是待定常数。又因为 $I(a,a)=0$，所以 $c=0$。

再比如，通过引入参数 t，可以把原积分改写为如下的累次积分：

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x}\int_a^b\sin t\,x\,dt,$$

交换积分次序可得：

$$\begin{aligned}I&=\int_a^b dt\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t\,x}{x}dx\\&=\int_a^b\pi\,dt=\pi\,(b-a).\end{aligned}$$

灵活运用含参积分和复变函数这两种技术可以帮助我们简洁、有效地计算出各种重要的积分。据说，*Richard Feynman* 就是因为把含参积分学得很好，能够算出量子场论中遇到的各种难算的积分，所以才得了 *Nobel* 奖。 $\diamondsuit$