2007 年秋季《复变函数引论 ——10420252 》期末试题参考答案

A 卷

一、选择题 1. [D], 2. [B], 3. [A], 4. [C], 5. [B].

二、填空题 1. $12\pi i$, 2. $(2-\pi)\pi i$, 3. $\frac{1}{e}$, 4. $\frac{2z^2}{(1-z)^3}$, 5. $\frac{1}{4}<|z-1|<4$, 6. $2\pi i$.

三、分析与计算题

1. $R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 提示：方法 I. 利用条件得出 $f(z)$ 满足的方程：$f(z)=1+(z+z^2)f(z)$, 从而解出 $f(z)=\frac{1}{1-(z+z^2)}$, 考虑到 0 的最近奇点距离。方法 II. 直接求出系数的通项或者求出比值、根值极限，进而得到收敛半径。

2. (1) $I_1=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, (2) $I_2=\frac{\pi e^{-a^2}}{2}$.

3. 1 为本性奇点，∞ 为一级极点，$Res[f(z),1]=-Res[f(z),\infty]=-(\sin 1+\frac{\cos 1}{2})$, 提示：参考 2009 秋季考试题分析与计算题 2 中函数 $f(z)=z\cosh\frac{z}{z-1}$ 在 1 处的展开方法.

4. 类似于平时作业，$S=\pi(f(0)+\frac{f'(0)}{2})$.

四、证明题

1. 利用 Laurent 展开式，课上有所演示.

2. 课后习题，用两次最大模原理，对 $f(z)$ 和 $\frac{1}{f(z)}$ 分别用。

2009 年秋季《复变函数引论 ——10420252 》期末试题参考答案与提示

A 卷

一、选择题 1. [C], 2. [C], 3. [A], 4. [A], 5. [D], 6. [B], 7. [B].

二、填空题 1. $B_x=-A_y,\ B_y=A_x$, 0, 2. $-\sinh 1$, 3. $-A^2-iA$, 4. $2\pi i(2-e)$, $4\pi i$, 5. $0<|z|<+\infty$.

三、分析与计算题

1. $k \geq 1$ 为整数,

$$f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2k-1, \\ (2k)!\frac{(-1)^{k-1}}{k}, & m = 2k. \end{cases}$$

2. ∞ 为一级极点，对 $f(z)$ 在 $z=1$ 处进行 Laurent 展开，得到

$I = c_{-1} = \frac{\cosh 1}{2} + \sinh 1$, 展开如下 (设 $\zeta = z-1$)：

$$\begin{aligned} z\cosh\frac{z}{z-1} &= [(z-1)+1]\cosh(1+\frac{1}{z-1}) = [\zeta+1][\cosh 1\cosh\frac{1}{\zeta} + \sinh 1\sinh\frac{1}{\zeta}] \\ &= (\zeta+1)[\cosh 1(1+\frac{1}{2!\zeta^2}+\frac{1}{4!\zeta^4}+\cdots) + \sinh 1(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{3!\zeta^3}+\frac{1}{5!\zeta^5}+\cdots)] \end{aligned}$$

3. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!!}$ 或求出 ($k \geq 0$ 为整数)

$$c_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = 2k+1, \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2k}, & n = 2k,\ k \geq 1. \end{cases}$$

提示：方法 I. 利用条件找到 c_n 的递推公式；方法 II. 直接解函数方程，如同常微分方程中做法一样,（有解析函数唯一性作保证）。

四、证明题

1. 利用 Taylor 展开式，课上证明过.

2. 利用零点的孤立性及解析函数唯一性。