2012 级微积分（2）期中考题（A）答案

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. 0 2. 是 3. $\sin 1 - 2\cos 1$ 4. 3 5. $(-1,1)$

6. $e^{x^2 y}(2xydx + x^2 dy)$ 7. $2f_1(2x, x^2) + 2xf_2(2x, x^2)$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$

9. $-\dfrac{2}{e+1}$ 10. $1-[(x-1)+y]+[(x-1)^2+2(x-1)y+y^2]+o((x-1)^2+y^2)$

11. $x+y+z=3$ 12. $(-2,4,0)$ 13. $(-3,3,-1)$

14. $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\int_1^{\infty} t^x e^{-yt} \ln t dt$， 15. $\dfrac{3\sin t^3 - 2\sin 2t^2}{t}$

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点连续性，偏导的存在性以及可微性。

解：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sin(\Delta x^2\Delta y)}{\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^3}$$

当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时极限不存在， $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。

2. 设 $\varphi \in C^{(2)}(\mathbb{R})$，函数 $z=z(x,y)$ 由 $x+y-z=\varphi(x+y+z)$ 给出，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-\varphi'(x+y+z)}{1+\varphi'(x+y+z)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4\varphi''(x+y+z)}{\left(1+\varphi'(x+y+z)\right)^3}$$ ……………………………………6 分

3. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-y$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值和最小值。

解：
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y-1=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y-x-1=0$$

驻点为 $(1,1)$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 外，舍去。……………………………………………3 分

条件极值问题 $\begin{cases}\max(\min)x^2-xy+y^2-x-y\\ x^2+y^2=1\end{cases}$，

$$L=x^2-xy+y^2-x-y+\lambda(x^2+y^2-1)$$ ………………………2 分

驻点为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(0,-1)$，$(-1,0)$。 ………………………2 分

因为 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-y$ 在闭单位圆盘 $x^2+y^2\le 1$ 上连续，有最大值、最小值。

……………………………………………2 分

计算得 $f(0,-1)=f(-1,0)=2$ 为最大值，$f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$ 为最小值。…………1 分

4. 设 $b>a>0, c$ 为任意实数，计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos cxdx$。

解：因为 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-ux}du,$ 所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos cxdx=\int_0^{+\infty}\int_a^b(e^{-ux}\cos cxdu)dx$$ ………………………………3 分

因为广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ux}\cos cxdx$ 关于 $u\in[a,b]$ 一致收敛, ………………………………2 分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos cxdx=\int_a^b du\int_0^{+\infty}e^{-ux}\cos cxdx$$ ………………………3 分

$$=\int_a^b\frac{u}{u^2+c^2}du=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}$$ …………………2 分

上述两个积分之所以能交换,是因为广义积分$\int_0^{+\infty} e^{-ux}\cos cx dx$关于$u\in[a,b]$一致收敛.

三．证明题

1.（6 分）设$\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$，且$\left|f(x,y)-\varphi(y)\right|\le\psi(x)$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$，证明

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$。

证明：因为$\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$，

所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y:\left|x-x_0\right|<\delta,\left|y-y_0\right|<\delta,\left|\varphi(y)-a\right|<\varepsilon,\left|\psi(x)\right|<\varepsilon$

$\left|f(x,y)-a\right|\le\left|f(x,y)-\varphi(y)\right|+\left|\varphi(y)-a\right|\le\psi(x)+\left|\varphi(y)-a\right|$ ……………4 分

故$\forall\varepsilon>0$，取δ如上，$\forall x,y:\left|x-x_0\right|<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}},\left|y-y_0\right|<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}},\left|f(x,y)-a\right|<\varepsilon$。

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$ ……………………2 分

2.（9 分）设二元函数$f(x,y)$在全平面$\mathbb{R}^2$上二次连续可微并，$f(x,y)>0,(x,y)\in\mathbb{R}^2$，

且满足：$f''_{xy}(x,y)f(x,y)\equiv f'_x(x,y)f'_y(x,y)$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$。

证明：（I）$\left(\dfrac{f_x}{f}\right)_y\equiv 0$；

（II）$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y),(x,y)\in\mathbb{R}^2$，其中$\varphi,\psi$为$\mathbb{R}$上二次连续可微的一元函数。

证明：（I）由假设条件可知$\left(\dfrac{f_x}{f}\right)_y=\dfrac{f_{xy}f-f_xf_y}{f^2}\equiv 0$。 ……………………3 分

于是函数$\dfrac{f_x}{f}$与变量y无关。即$\dfrac{f_x}{f}=\xi(x)$。由于$f(x,y)$是C^2函数，故$\xi(x)$是C^1函数。

而式$\dfrac{f_x}{f}=\xi(x)$又可写作$(\ln f)_x=\xi(x)$。这又表明函数$\ln f(x,y)=\int\xi(x)dx+\eta(y)$，其中函数$\eta(y)$是$C^2$函数的

（因为$\eta(y)=\ln f(x,y)-\int\xi(x)dx$）。于是$f(x,y)=g(x)h(y)$，其中$g(x)=e^{\int\xi(x)dx}$，$h(y)=e^{\eta(y)}$。易见它们都是$C^2$的。证毕。 ……………………6 分