清华大学本科生考试试题专用纸 ☆A☆卷

考试课程：**复变函数引论**（闭卷，满分 75 分） 考试时间：2010 年 1 月 11 日上午 8:00-10:00

系别 ________ 班号 ______ 学号 ____________ 姓名 ___________ 考试教室 ______/三教

注意：选择题、填空题直接答于试卷，其余题目答在专用答题纸上，且注明题号。

得分[________] **一、选择题**（每小题 3 分，共 21 分。每小题只有一个正确答案，把每小题正确答案对应的字母填入**该小题前 [ ]** 内；**多填、填错位置或者直接打** $\surd$ **或** $\times$ **视为无效。**）

[______] 1、幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}z^{2n}$ 的收敛半径 R 为:

A. $R=e$； B. $R=1/e$； C. $R=\sqrt{e}$； D. $R=1/\sqrt{e}$.

[______] 2、设 $p(z)=z^{2009}+2010z+2011i$, 置 $M=\max\{|p(z)|:|z|\le 1\}$, 则

A. $M<4021$； B. $M=4021$； C. $M=4022$； D. $M>4022$.

[______] 3、设 ∞ 为 $f(z)$ 之可去奇点, 则下列表达式中**未必正确**的是

A. $Res[f(z),\infty]=0$； B. $\lim_{z\to 0} zf(\frac{1}{z})=0$； C. $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{\ln z}=0$； D. $Res[f(\frac{1}{z}),0]=0$.

[______] 4、设 $f(z)$ 为整函数，若 $f(0)=A$ 及 $f'(0)=B$, 则积分 $\int_0^{2\pi}f(4e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta$ 为

A. $\pi(A-2B)$； B. $\pi(A-\frac{B}{2})$； C. $\pi(A-B)$； D. $\pi(A+2B)$.

[______] 5、∞ 是函数 $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+\exp\frac{1}{z-1}$ 的

A. 可去奇点； B. 本性奇点； C. 极点； D. 非孤立奇点。

[______] 6、幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ 在 $|z|<1$ 内和函数为

A. $\ln(1+z)$； B. $-\ln(1-z)$； C. $-\ln(1+z)$； D. $\ln(1-z)$.

[______] 7、设 $f(z)$ 为幂级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^n}{n(n-1)}$ 在闭圆盘 $|z|\le 1$ 上的和函数，限制 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上，下面表述中**错误**的是

A. 积分 $\oint_{|z|=1}f(z)dz$ 存在且等于 0； B. $f(z)$ 不可能处处连续；

C. $f(z)$ 的最大模在 $z=1$ 处取得； D. $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上不可能处处解析。

得分[________] **二、填空题**（5 小题 7 个空，每个空 3 分，共 21 分）

1、设函数 $\frac{f(z)}{z^2}=B(x,y)-iA(x,y)$ 在 $\mathbb{C}$ 中区域 D 上解析，其中为 $A(x,y)$, $B(x,y)$ 均为区域 D 上二元实变函数，则在区域 D 上 $A(x,y)$, $B(x,y)$ 应满足的 Cauchy-Riemann 方程为

______________________________；$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=$ ______________。

2、设 $f(z)=\frac{\exp z}{z^2-1}$，则 $Res[f(z),\infty]=$ ______________。

3、设 $A\in\mathbb{C}$，则极限 $\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{n-A^2-iA}{n}=$ ______________。

4、$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z\exp(1/z)dz}{z-1}=$ ______________，$\oint_{|z|=2}\frac{z\exp(1/z)dz}{z-1}=$ ______________。

5、Laurent 级数 $\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{z^{3n}}{(3|n|)!}$ 的收敛圆环域为 ______________。

三、分析与计算题（3 小题，共 21 分，注意：每题要有必要的分析与计算过程，**只写答案没有过程不给分**）

1、(6 分) 设 m 为任意给定正整数，试计算函数 $f(z)=\ln(1+z^2)$ 的 m 阶导数在 $z=0$ 处的值。

2、(7 分) 设 $f(z)=z\ ch\frac{z}{z-1}$，计算积分

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}f(z)dz,$$

并说明 ∞ 是函数 $f(z)$ 的何种奇点。

3、(8 分) 设整函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处满足微分方程 $f'(z)=zf(z)$ 且 $f(0)=1$，试求出 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开式。**注意：要完整地写出级数中各项系数的显式表达式即通项。**

四、分析证明题（2 小题，共 12 分）

1、(7 分) 设函数 $f(z)$ 在 $z_0\in\mathbb{C}$ 的某个空心邻域 $B^*_\delta(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z-z_0|<\delta\}$ 内解析并且有界 (这里 $\delta>0$)，z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，求证：z_0 必为 $f(z)$ 的可去奇点。

2、(5 分) 设三个函数 $f(z), g(z)$ 和 $h(z)$ 均在 $\mathbb{C}$ 中区域 D 上解析，而且在 D 上有 $f(z)g(z)h(z)\equiv 0$，试证明在 D 上要么 $f(z)\equiv 0$，要么 $g(z)\equiv 0$，要么 $h(z)\equiv 0$.

❀❀❀

温 ☆馨 ☆提 ☆示

1. **请在交卷前仔细检查试卷和专用答题纸上自己的**姓名、学号**以及**考试教室**等信息是否已经完整填写；**

2. **考试结束时，请将本试卷**正面朝外**沿**竖中线**折叠，然后同**稿纸**一道夹在专用答题纸里一并上交。**