复分析期中测验

考生姓名 =　　　　学号 (ID)=　　　　所属院系 =

提示：本考试时间 10:40am – 12:10am, 可以参考自带的学习资料，但请勿相互讨论。请将答案书写整齐无歧义。有问题请举手。总分 40+2.

§1　在下列陈述的后面括号中写上 True 或者 False，以表达你对其正确性的判断。

这部分每个题目值 1 分，总共 16 分.

1. 若函数 f 在一点 $a \in \mathbb{C}$ 连续且可导，则 f 在这一点解析.
   (　　　　　　　　)
2. 有界集合一定是闭集.
   (　　　　　　　　)
3. 单连通的开集是一种区域.
   (　　　　　　　　)
4. 若整数 n 满足
   $$(\frac{1+i}{1-i})^n = 1.$$
   则 $n = 4$.
   (　　　　　　　　)
5. 对任何复数 $z \neq 0$, 有 $(z^2)^{\frac{1}{2}} = z$ 或 $-z$.
   (　　　　　　　　)
6. 对任何复数 $z \neq 0$, 有 $\mathrm{Ln}(e^z) = z$.
   (　　　　　　　　)
7. 若函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ 的每一项 f_n 都在区域 D 内连续，且级数本身在 D 内局部一致收敛，则它的和函数在 D 内连续.
   (　　　　　　　　)
8. 函数 $\mathrm{Ln}z$ 定义在 $D = \mathbb{C} - \{0\}$ 上，是多值函数．其每个定义在区域 $D_0 \subset D$ 上的单值解析分支的导函数都是 $\frac{1}{z}$，　$z \in D_0$.
   (　　　　　　　　)

9. 设一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径是 R, $0 < R < \infty$. 那么 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在圆 $\{|z| < R\}$ 中一致收敛到一个解析函数.

( )

10. 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} \text{ 收敛到} \mathrm{Ln}(1+z) \text{的一个解析分支，对任意} z \neq -1.$$

( )

11. 设函数 f 在圆 $D = \{|z-a| < r\}$ $(r > 0)$ 内连续，且对任意的 D 中的可求长闭曲线 γ, 有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

那么 f 在这个圆 D 内可以展成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad \forall z \in D.$$

( )

12. 如果 v 是 u 的共轭调和函数，那么 $e^v \sin u$ 是 $-e^v \cos u$ 的共轭调和函数.

( )

13. 集合 $D = \mathbb{C} - (-\infty, +\infty)$ 是多连通的区域.

( )

14. 设函数 f 在区域 $D = \{1 < |z| < 2\}$ 内解析，那么对任意 D 内的两条具有相同起点和终点的可求长曲线 γ_1, γ_2 有

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(w) dw.$$

( )

15. 设函数 f 在 (不一定单连通的) 区域 D 内解析，且在 D 上存在单值解析的原函数 F, 那么

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) dz + C.$$

其中 $z_0 \in D$ 是固定的一点，沿着任意一条在 D 内连接 z_0 与 z 的可求长连续曲线做上述积分. C 是常数.

( )

16. 多值函数 $(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ 可以在区域

$$D = \mathbb{C} - [-i, i]$$

上取到单值解析分支.

( )

§2　在下列陈述的空白括号中写上正确的词语、数字、或数学表达式。

这部分每个空值 1 分，总共 17 分.

1. 设 γ 是以 1 为圆心，1.0001 为半径的逆时针方向圆周，那么

$$\int_\gamma \frac{1+z}{z^2}dz = (\qquad\qquad\qquad).$$

2. 对多值函数 $\mathrm{Ln}(z^2+1)$, 点 i 与 $-i$, 以及 ∞, 称作这个多值函数的 (　　　　　　　　　　) .

3. 设一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径是 R, $0<R<\infty$. 那么 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在圆 $\{|z|<R\}$ 内收敛到一个解析函数 f. 请写出 f 在这个圆内的所有原函数的 Taylor 展开式：

(　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

4. 集合 $\mathbb{C}-[0,\infty)$ 的边界点集是 (　　　　　　　　　　) .

5. 设曲线 γ 是从 i 出发，依次沿着直线连接线经过点 $1+i$, $1-i$, $-1-i$, 到达 $-1+i$ 的分段折线. 那么积分

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = (\qquad\qquad\qquad).$$

6. 若将定义在

$$D = \mathbb{C}-[2,+\infty)$$

的函数 $f(z)=\frac{(z-2)^{\frac{1}{2}}}{z^2+5}$ 在 $z=0$ 的一个单值解析分支展开成幂级数，这个幂级数的收敛半径是 (　　　　　　　　) .

7. 请分别写出解析函数 $f(z)=\cos(z^2)$ 的实部和虚部：

$$\mathrm{Re} f = u(x,y) = (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad),$$

$$\mathrm{Im} f = v(x,y) = (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad).$$

8. 将函数 $f(z)=\frac{e^z}{1+z}$ 在 $z=0$ 处展开 Taylor 级数，写出其前面的 5 项系数

$$f(z) = (\quad) + (\quad)z + (\quad)z^2 + (\quad)z^3 + (\quad)z^4 + \cdots, \qquad \forall\, |z|<1.$$

9. 写出下列幂级数的收敛半径

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n, \qquad \text{收敛半径} R = (\quad),$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sin\frac{n\pi}{3})^n z^n, \qquad \text{收敛半径} R = (\quad),$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n, \qquad \text{收敛半径}R=(\qquad),$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n}, \qquad \text{收敛半径}R=(\qquad).$$

§3 在每个陈述的所有选项中选择正确的答案，并在括号中填写相应的字母.

这部分每个题目值 1 分，总共 4 分．注意：每个题目都有可能需要你选择多个答案，但至少有一个正确的答案。如果你只选择出一部分正确答案，而没有选择出全部正确的答案，只能得 0.5 分．如果你的选择中有一个或多个错误的答案，就只能很遗憾地得到 0 分.

1. 如果函数 $f=u+iv$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，那么下列断言正确的是 (　　和　　和　　和　　).

   A u^2-v^2 是调和函数.

   B 若 $u=e^{-y}\cos x$ (对 $z=x+iy$), 则 $v=e^{-y}\sin x$.

   C 若 u^2+v^2 有界，则 f 是常数.

   D $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ 是解析函数.

2. 考察下面的积分

   $$I=\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)^2}dz,$$

   这里的 γ 是一条不通过点 0 与 -1 的逆时针方向、可求长、简单闭曲线．那么下面关于该积分求值的结论，正确的是 (　　和　　和　　和　　).

   A 若 0 和 -1 都在 γ 的外部，则 $I=0$.

   B 若 0 和 -1 都在 γ 的内部，则 $I=2\pi i-\frac{4\pi i}{e}$.

   C 若 0 在 γ 的内部， -1 在 γ 的外部，则 $I=2\pi i$.

   D 若 0 在 γ 的内部， -1 在 γ 的外部，则 $I=-\frac{4\pi i}{e}$.

3. 设 D 是区域， γ 是 D 内的可求长、逆时针方向、简单闭曲线． f 是定义在 D 上的复函数．请问下面的哪个条件可以保证

   $$\int_\gamma f(z)dz=0.$$

   你的选择 =(　　或　　或　　或　　).

   A f 在 γ 内部解析.

   B f 在 γ 上，及 γ 的内部的任一点可以局部展成 Taylor 级数.

   C f 在 D 连续，在 γ 的内部处处可导.

   D 在 D 上存在 f 的原函数.

4. 设有函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z).$$

其中每个函数 f_n 都是区域 D 上的解析函数. 能保证这个级数收敛到另一个 D 内的解析函数的条件是下列中的 (　　或　　或　　或　　).

A $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 对任何 $z \in D$ 绝对收敛.

B $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内局部 (又称内闭) 一致收敛.

C D 单连通，$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$ 在 D 内一致收敛, 且至少存在一个点 $z_0 \in D$ 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛.

D 存在另一个收敛的实数级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ ，使得每个 $|f_n(z)| \le M_n, \forall z \in D$.

§4　请针对题目的要求写出足够详细的解答

这部分每个题 1 分，总共 3 分.

1. 请指出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$$

的收敛半径和在收敛圆内的和函数.

2. 设函数 $f = u^2 + iv$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析 (其中 u, v 是实的二元连续可微函数), 请通过考虑函数

$$g(z) = e^{-f(z)}$$

来证明 u, v 都是常数.　(必须说明所引用的定理的名称.)

3. 设在 a 点邻域 U 上有两个解析函数 f 和 g ，且 $f(a)=g(a)=0$. 又知道 a 是 f 的 m 级零点， a 是 g 的 n 级零点，且 $m \geq n$, 求证

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

4. (附加题 2 分, 可做可不做) , 设 $f(z)$ 是 $((1-z)z^2)^{\frac{1}{3}}$ 的某个单值解析分支, 定义在 $D=\mathbb{C}-[0,1]$ 上. 已知 $f(2)<0$ ，求 $f(i)=?$

5. 调查：你感觉自己能得到的分数是（　） /(out of 40+2). 你觉得哪里听不懂？你希望怎样提高教学质量？你是否觉得这门课很难？你对开设这门课有什么样的想法？你希望提高难度还是降低难度？你觉得作业布置地太重吗？你对教师和助教有什么要求？你觉得总分数 =30 分作业 +40 分期中 +30 分期末是否公平？

§5 Key

Key to §1

1. F
2. F
3. F
4. F
5. T
6. F
7. T
8. T
9. F
10. F
11. T
12. T
13. F
14. F
15. T
16. T

Key to §2

1. $2\pi i$
2. 支点，或分支点，支割点，或奇点，或极点都可以
3.
$$c+\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$
   其中 c 是常数。
4. $[0,+\infty)$
5. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{7}{4}\pi i$

6. 2

7. $$\begin{cases} \frac{1}{2}(e^{2xy}+e^{-2xy})\cos(x^2-y^2) & , \\ -\frac{1}{2}(e^{2xy}-e^{-2xy})\sin(x^2-y^2) & . \end{cases}$$

8. 1, 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$

9. 1, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, 0, ∞

Key to §3

1. A,C,D
2. A,B,C
3. B,C,D
4. B,C,D

Key to §4

1. $R=1$, 收敛到 $\frac{1}{(1+z)^2}$
2. 先说明 $|g(z)| \le 1$, 然后用 Liouville 定理。
3. 用 m 级零点的等价刻画。
4. $2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{19}{12}\pi i}$
5.