清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：**复变函数引论（A 卷）**（闭卷考试）　　考试时间：2007 年 6 月 25 日晚上 7:00-9:00

系别 ________ 班级 ______ 学号 __________ 姓名 __________ 考试教室 ______/一教

试卷说明：1、试题分选择题、填空题、分析与计算题、证明题 四大部分，满分 80 分。
2、**选择题、填空题答在试卷上，其余题目都要答在专用答题纸上，且注明题号。**

一、选择题（每小题只有一个正确答案。把每题正确答案对应的字母填入每个 **题前方括号**内；**填错位置或者直接打 $\surd$ 或 $\times$ 视为无效**。每小题 3 分，共 15 分）

[　　] 1、下列扩充平面集合中不是单连通区域的是：
A. $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$,　B.$\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \le 1\}$,　C. $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 0\}$,　D. $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$.

[　　] 2、在其内 $\tan(z^2+1)$ 可以展开成 Laurent 级数的圆环域是：
A. $0 < |z| < \frac{\pi}{4}$,　B. $\frac{\pi}{4} < |z| < \frac{\pi}{2}$,　C. $\frac{\pi}{2} < |z| < +\infty$,　D. 以上都不可以。

[　　] 3、$u(x,y) = x^2 - y^2$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上有共轭调和函数：
A. xy,　B. $-xy$,　C. $2xy$,　D. $2x^2y^2$.

[　　] 4、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 r $(r > 0)$, 那么幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|Re(c_n)| + |Im(c_n)|)z^n$$ 的收敛半径 R 满足:

A. $r < R$,　B. $r > R$,　C. $r = R$,　D. 以上都有可能成立。

[　　] 5、$z = \infty$ 是 $z^2(1 - \cos\frac{1}{z})$ 的
A. 可去奇点，　B. 本性奇点，　C. 一级极点，　D. 以上都不是。

二、填空题（5 小题 6 个空，每个空 3 分，共 18 分）

1、$\oint_C Im(z)dz =$ __________ (其中 C 为正向圆周：$|z| = 1$)。

2、$e^{\frac{1}{z-1}}$ 在 $z = 0$ 的 Taylor 级数的收敛半径是 ________, 其中含 z^2 项的系数是 ________。

3、设 C 为正向圆周:$|z| = 3$, 则积分 $\oint_C \frac{\sin(\pi z)}{z(z-1)^2}dz =$ __________________。

4、级数 $\sum_{n=-\infty}^{9} \frac{2^n+(-3)^n}{n^4+e^{2n}}(z-1)^{n-5}$ 的收敛圆环域为 __________________。

5、设 $n \in \mathbb{N}$ 为正整数，C 为正向圆周:$|z| = 2$, 则积分 $\oint_C \frac{dz}{z(z^n-1)} =$ __________。

三、分析与计算题（4 题，共 34 分，注意：每题要有完整的分析与计算过程，**只写答案没有过程不给分**）

1、(6 分) 假定 $A(\neq 0)$ 是一个复常数，设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}\backslash\{A\}$ 上的解析函数，且 $z=A$ 是 $f(z)$ 的极点，试求出幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}z^n$$

所决定的和函数 $F(z)$，并确定此幂级数的收敛半径 R。

2、(12 分，每小题各 6 分) 计算实积分

$$(1).\qquad I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta},\quad (2).\qquad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)dx}{x^2-4x+8}.$$

3、(8 分) 找出函数

$$f(z)=z\sin\frac{z}{z-1}$$

在扩充复平面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有奇点并进行分类（**须说明理由，如果是极点，必须指出其级数**），并且算出 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数。

4、(8 分) 设 $f(z)$ 是圆盘 $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2\}$ 上的非常数解析函数，试求使得以下两式成立的一组常数 a,b,c 和 d，其中 b,d 是正整数。

$$(1).\qquad \left(\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)^6=a\oint_{|\zeta|=1}\frac{(f(\zeta))^b}{\zeta-z}d\zeta,\qquad \forall z\in\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}.$$

$$(2).\qquad \frac{d^6}{dz^6}\left(\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)=c\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^d}d\zeta,\ \forall z\in\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}.$$

四、证明题（2 题，共 13 分）

1、(8 分) 假设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并且 $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数，求证：$f(z)$ 在区域 D 上是一个常数函数。

2、(5 分) 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，且满足 $|f(z)|\leq|z|^2$. 证明：$f(z)=Kz^2$，这里 K 是某个满足 $|K|\leq 1$ 的复常数。