考试课程：**复变函数引论**（**A** 卷） 考试时间：2007 年元月 18 日上午 8:00-10:00

系别 ____________ 班级 ____________ 学号 ______________ 姓名 ____________

试卷说明：

1、试题分判断是非题、填空题、分析与计算题、证明题四大部分，满分 80 分。

2、**判断是非题、填空题直接答在试题纸上，其余所有题目都要答在专用答题纸上，并且注明题号。**

一、判断是非题（8 题，请在每个 **题前的括号**内打 $\surd$ 或 $\times$，每题 2 分，共 16 分）

( ) 1、设 $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$ 且 $z_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$，若 $f(z)$ 在 z_n $(\forall n \in \mathbb{N})$ 处不可导，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不解析。

( ) 2、设 $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$ 且 $z_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$，若 $f(z)$ 在 z_n $(\forall n \in \mathbb{N})$ 处解析，且 $f(z)$ 在 $z=0$ 点连续可导，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处解析。

( ) 3、z_0 $(\in \mathbb{C})$ 为 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 处不可导。

( ) 4、$z_0=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $Res[f(z), z_0] = 0$.

( ) 5、z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 极限 $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在且为有限值，则 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

( ) 6、$\tan\frac{1}{z}$ 可以在圆环域 $0<|z|<R\,(0<R<+\infty)$ 中展开成 Laurent 级数。

( ) 7、级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在其收敛圆的圆周上一点 $z_0\,(\neq 0)$ 处绝对收敛，则它在收敛圆周所围成的闭区域中任一点处绝对收敛。

( ) 8、$f(z)$ 在单连通区域 D 中沿任何一条可求长简单闭曲线的积分为 0，则 $f(z)$ 在 D 中解析。

二、填空题（5 题，每个空 3 分，共 18 分）

1、设 $z_0=0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点，且 $f(z)=f(-z)$ 对 $\forall z\neq 0$ 成立，假定 C 为圆周 $|z|=1$，方向为正向，则 $\oint_C f(z)dz =$ ______________。

2、$|(1+i)^i| =$ ____。

3、设 C 为圆周 $|z|=3$, 方向为正向，则积分 $I_1=\oint_C \frac{\cos z}{z^7}dz =$ ______________。

4、级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n e^{2n}}{n^3+9^n}(z-2)^{n-3}$ 的收敛圆环域为 ______________________________。

5、设 $f(z)=\frac{1}{z}-z^3\cos\frac{1}{z^2}$, 则 $Res[f(z),0] =$ ____________, $Res[f(z),\infty] =$ ____________。

三、分析与计算题（4 题，共 31 分）

1、(5 分) 设 $f(z)$ 在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上解析，而且 $f(z)=f(2z)$ 对 $\forall\, z\in\mathbb{C}$ 成立，试求出 $f'(z)$。

2、(6 分) 计算实积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{x^2-4x+8}.$$

3、(8 分) 求

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\sin\zeta}{\zeta^2-z^2}d\zeta,\ |z|\neq 1,$$

在 $z_0=0$ 处的 Taylor 展开式，并指出收敛区域 (这里积分沿圆周 $|\zeta|=1$ 的正向)。

注意：要完整地写出级数中各项系数的显式表达式即通项。

4、(12 分) 找出函数

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{\sin z}+\frac{\tan z}{z(z-2)^2}$$

在扩充复平面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的所有奇点并进行分类（如果是极点，必须指出其级数），并且算出 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数。

四、证明题（2 题，共 15 分）

1、(10 分) 假设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并且它的实部与虚部在 D 上满足恒等式

$$au+bv\equiv c,\ \text{这里}\,a,\,b,\,c\ \text{为不全为 0 的实常数},$$

求证：$f(z)$ 在区域 D 上是一个常数函数。

2、(5 分) 设当 $|z|>0$ 时 $f(z)$ 解析，且满足 $|f(z)|\leq|z|^{-1/2}$. 证明：$f(z)\equiv 0$ $(\forall\, z\neq 0)$.