# 清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2009 年 6 月 18 日

**A**

**姓名_____________学号 200_____________班级________.**

## 一、填空题（20 分，每空 2 分）

1．若事件 $A$、$B$ 独立，则以下命题不正确的是__________。

(A) $A$ 与 $\overline{B}$ 一定独立　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 一定独立　(C) $AB$ 与 $\overline{AB}$ 一定独立

2．若随机变量 $X$ 的分布函数连续，则__________。

(A) $X$ 一定为离散型　(B) $X$ 一定为连续型　(C) 以上选项都不对

3．如果随机变量 $X$ 的期望存在，$P(X<-2)=0.3$，$P(X>4)=0.4$，则________。

(A) $|EX|=E|X|$　(B) $|EX|>E|X|$　(C) $|EX|<E|X|$　(D) 条件不足无法判断

4． $x_1,x_2,\mathbf{L},x_n\ (n>1)$ 是来自正态总体 $N(m,s^2)$ 的简单随机样本，

$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\mathbf{L}\,x_n}{n}$， $s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}$ 。则下列关系正确的是__________。

(A) $E(s)>s$　(B) $E(s)<s$　(C) $E(s)=s$　(D) 不确定

5．随机变量 $X$ 服从几何分布 $Ge(0.25)$，则 $E(X|X\ge 4)=$____________。

6．二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1/4,1/3)$，设 $U=X-2Y$ 和 $V=X+2Y$，则 $U,V$ ________ (填“独立”或“不独立”)，$E(U^2|V=0)=$______________。

7．设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则随机变量 $Y=\dfrac{|X|}{2}$ 的概率密度函数 $p_Y(y)=$_______________。

8． $x_1,x_2,\mathbf{L},x_{25}$ 是来自正态总体 $N(m,4)$ 的简单随机样本，$\bar{x}$ 是样本均值。对假设检验问题 $H_0: m\ge 3$ VS $H_1: m<3$。若取拒绝域为 $\bar{x}<2.487$，则检验的显著性水平为__________，当 $m=1.91$ 时，该检验犯第二类错误（受伪）的概率＝____________。

## 二、（14 分）盒中共有 5 个乒乓球，都是新球，每场比赛从中任取 1 个使用，比赛后仍放回盒中。

1．求第 3 场比赛用球在前两场比赛都未使用过的概率；

2．如果已知第 3 场比赛用球在前两场比赛都未使用过，求第 3 场比赛前盒中恰有 4 个球尚未使用过的概率。

## 三、（24 分）设 $X$、$Y$ 独立同分布，都服从期望为 1 的指数分布。令 $U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$。

1．求 $(U,V)$ 的联合概率密度函数；

2．求 $U$、$V$ 的期望和相关系数；

3．证明：$U-V$ 和 $V$ 相互独立。

四、（18 分）设 $X_1, X_2, \mathbf{L}, X_{2n}$ 相互独立，且均服从均匀分布 $U(0,1)$，定义随机变量

$$Y_k = \begin{cases} 4, & X_{2k-1}^2 + X_{2k}^2 < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}，\quad k = 1,2,\mathbf{L},n 。$$

1．对于任意给定的正整数 $n$，证明随机变量 $\bar{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \mathbf{L} + Y_n}{n}$ 是期望等于 $p$；

2．试用中心极限定理估计，当 $n = 400$ 时，$\bar{Y}$ 与 $p$ 的绝对误差 $\left|p - \bar{Y}\right|$ 不大于 0.1 的概率（结果用标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示）；

3．利用 Chebyshev 不等式估计，$n$ 取多大时能够保证有 90% 以上的把握使 $\left|p - \bar{Y}\right|$ 不超过 0.1？

五、（12 分）设总体 $X$ 的概率密度函数为 $p(x;m) = \begin{cases} 2(m+1-x), & m \le x \le m+1 \\ 0 \quad, & 其他 \end{cases}$，其中 $m$ 是未知参数，$x_1, x_2, \mathbf{L}, x_n$ 是来自该总体的简单随机样本。

1．求参数 $m$ 的矩估计量 $\hat{m}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{m}_2$；

2．问 $\hat{m}_1$ 和 $\hat{m}_2$ 是否为参数 $m$ 的无偏估计量，如果估计量有偏，则将其修正为无偏估计量。

六、（12 分）设某企业的每日赢利（单位：万元）服从正态分布 $N(m, s^2)$ 。

1．如果方差 $s^2 = 9$，对期望作置信度 95％的双侧对称置信区间估计，欲使置信区间的长度不超过 2，至少应该取容量多大的样本？

2．如果方差未知，随机抽测 9 日，得数据的均值和标准差分别为 40.5 万元和 1.2 万元．依据抽测数据．试以 95％的把握估计最小平均赢利。

**附表**

| | $c_{0.025}^2(n)$ | $c_{0.05}^2(n)$ | $c_{0.95}^2(n)$ | $c_{0.975}^2(n)$ | $t_{0.95}(n)$ | $t_{0.975}(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 8$ | 2.180 | 2.733 | 15.507 | 17.535 | 1.8595 | 2.3060 |
| $n = 9$ | 2.700 | 3.325 | 16.919 | 19.023 | 1.8331 | 2.2622 |

| $x$ | 1.282 | 1.440 | 1.645 | 1.960 | 2.326 |
|---|---|---|---|---|---|
| 标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ | 0.900 | 0.925 | 0.950 | 0.975 | 0.990 |