考试课程：概率论与数理统计　（**A卷**）　　2012年6月17日

一、填空题（30分）

1. 设两个相互独立的事件A和B都不发生的概率是1/9，A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等，则$P(A) =\underline{2/3}$。

2. 随机的选一个点将一个区间分成两部分。则长区间至少为短区间的3倍的概率为$\underline{1/2}$。

3. 设随机变量X与Y相互独立，且均服从区间[0,3]上的均匀分布，则 $P(\min\{X, Y\} < 1)$=$\underline{5/9}$。

4. 若$X \sim N(1, 4)$，$P(X < x) = \Phi(1)$，则x=$\underline{3}$。

5. 设随机变量X的概率密度函数为：

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ a, & 0 \le x \le 1; \\ a\, e^{-2(x-1)}, & x > 1, \end{cases}$$

则a=$\underline{2/3}$，$E(X)$=$\underline{5/6}$，$Var(X)$=$\underline{13/36}$。

6. 设随机向量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$，定义随机变量：

$$Z = g(X, Y) = \begin{cases} 1, & a < X \le b \text{ 且 } c < Y \le d; \\ 0, & \text{其它情况。} \end{cases}$$

则$E(Z) = \underline{F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)}$。

7. 设总体X在区间[0,θ]上服从均匀分布，其中$\theta > 0$未知。从总体中抽取样本x_1，x_2，x_3，x_4，则下列统计量中不是θ的无偏估计的是$\underline{\text{D}}$。

(A) $\hat{\theta} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2$　(B) $\hat{\theta} = 2x_1 + x_2 - x_3$

(C) $\hat{\theta} = x_1 + x_2 + x_3 - x_4$　(D) $\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

8. 设$x_1, x_2, \ldots, x_n$是来自正态总体$N(\mu,\ \sigma^2)$的样本，其中$\mu,\ \sigma$未知。若μ的95%置信区间为[1, 3]；且假设检验问题

$$H_0:\ \mu = 2 \quad \text{vs} \quad H_1:\ \mu \neq 2$$

的显著性水平为α的拒绝域为$\{|\bar{x} - 2| \ge 1.3\}$，则$\alpha \underline{\le}$0.05 （填>或<）。

二、(10分）茶杯成套出售，每套五只，假设各套无次品和含一只次品的概率分别为4/5和1/5。一顾客在购买时，售货员随意取出一套，而顾客随机地查看其中的一只，若非次品，则买下该套，否则退回。试求：

1. 顾客买下该套的概率；

2. 在顾客买下的一套中确实无次品的概率。

解：设A为顾客买下该套的事件，B为售货员取出一套无次品茶杯的事件，则

1. 由全概率公式得：

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) = 4/5 + 1/5 \times 4/5 = 24/25.$$

2. 由Bayes公式得：

$$P(B|A) = P(B)P(A|B)/P(A) = 4/5 \div 24/25 = 5/6.$$

三、（20分）设X和Y具有联合密度函数

$$p(x,y) = \begin{cases} 21x^2y^3, & 0 < x < y < 1; \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

1. 求边际密度函数$p_X(x)$和$p_Y(y)$，并判断X与Y的独立性，说明理由；
2. 求条件密度函数$p_{Y|X}(y|x)$；
3. 求在给定$X = x$下Y的条件数学期望$E(Y|X = x)$。

解：(1) 由边际密度函数的定义知，当$x < 0$或者$x > 1$时，$p_X(x) = 0$. 当$0 < x < 1$时

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \int_x^1 21x^2y^3dy = \frac{21}{4}(x^2 - x^6).$$

同理可知，当$y < 0$或者$y > 1$时，$p_Y(y) = 0$. 当$0 < y < 1$时

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx = \int_0^y 21x^2y^3dx = 7y^6.$$

(2) 由条件密度的定义可得，当$p_X(x) \neq 0$时，

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{4y^3}{1 - x^4}, \quad (0 < x < y < 1).$$

(3) 首先只有当$0 < x < 1$时要求的条件期望才有定义。固定$0 < x < 1$。则由条件期望的定义可得

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_{Y|X}(y|x)dy = \int_x^1 \frac{4y^4}{1 - x^4}dy = \frac{4(1 - x^5)}{5(1 - x^4)}.$$

四、（15分）设随机向量(X,Y)服从二维正态分布，且$X \sim N(3,4)$, $Y \sim N(2,1)$，X与Y的相关系数为$\rho = 1/4$。

1. 求$Z = X + Y$的概率密度；
2. 若$W = X - cY$与Z独立，求常数c；
3. 若条件期望$f(z) = E(X^2 + aXY + bY^2 \mid Z = z)$不依赖于$z$，求常数$a$, b以及$f(z)$的值。

1. 首先，

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X)+E(Y)=5, \\ Var(Z) &= Var(X)+2\,Cov(X,Y)+Var(Y) \\ &= 4+2\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{1}{4}+1=6. \end{aligned}$$

因为Z仍然服从正态分布，所以

$$p_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{12\,\pi}}\exp\left\{-\frac{(z-5)^2}{12}\right\}.$$

2. 因为随机向量(Z,W)服从二维正态分布，所以W与Z独立当且仅当它们不相关，即协方差$Cov(Z,W)=0$。

$$\begin{aligned} Cov(Z,W) &= Cov(X+Y, X-c\,Y) \\ &= Var(X)-(c-1)\,Cov(X,Y)-c\,Var(Y) \\ &= 4-\frac{1}{2}(c-1)-c=0, \end{aligned}$$

于是$c=3$。

3. 做坐标变换$(X,Y)\mapsto(Z,W)=(X+Y,\ X-3\,Y)$，利用$Z$、$W$的独立性可得

$$\begin{aligned} f(z) &= E\left[\frac{(3Z+W)^2}{4^2}+a\frac{3Z+W}{4}\frac{Z-W}{4}+b\frac{(Z-W)^2}{4^2}\mid Z=z\right] \\ &= \frac{9+3\,a+b}{4^2}z^2+\frac{6-2\,a-2\,b}{4^2}z\,E(W)+\frac{1-a+b}{4^2}E(W^2). \end{aligned}$$

注意$E(W)=3-3\cdot 2=-3\neq 0$，所以若$f(z)$不依赖于z，则必有：

$$\left\{\begin{array}{l} 9+3\,a+b=0, \\ 6-2\,a-2\,b=0, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-6, \\ b=9, \end{array}\right.$$

于是

$$\begin{aligned} f(z) &= E(W^2)=Var(W)+(EW)^2 \\ &= 4-2\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \frac{1}{4}+3^2\cdot 1+(-3)^2=19. \end{aligned}$$

五、（15分）设总体X服从参数为λ的指数分布，$x_1,x_2,...,x_n$为来自X的样本，

1. 求$1/\lambda$的最大似然估计，并判断其相合性，说明理由；
2. 验证最大似然估计与$n\min\{x_1,x_2,...,x_n\}$均为$1/\lambda$的无偏估计；
3. 比较最大似然估计与$n\min\{x_1,x_2,...,x_n\}$的有效性。

1. 似然函数$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$，

   对数似然函数$\ln L(\lambda)=\ln\left(\lambda^n\exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}\right)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$，

   令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，得$1\hat{/}\lambda=\sum_{i=1}^{n}x_i/n=\bar{x}$。

   因为$EX=1/\lambda$，由大数定律知，$\bar{x}$是相合的。

2. $X\sim Exp(\lambda)$，则$E\bar{x}=EX=1/\lambda$。指数分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

   令$\theta=\min\{x_1,x_2,...,x_n\}$，则

$$\begin{aligned}F_\theta(x) &= 1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-e^{-\lambda nx}, & x>0,\\ 0, & x\le 0;\end{cases}\\ p_\theta(x) &= \begin{cases}\lambda ne^{-\lambda nx}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\end{aligned}$$

   那么，$E\theta=\int_0^\infty xp_\theta(x)dx=1/(n\lambda)$，$E(n\min\{x_1,x_2,...,x_n\})=1/\lambda$。

3. 由$Var(X)=1/\lambda^2$得，$Var(\bar{x})=1/(n\lambda^2)$。

   注意$\theta\sim Exp(\lambda n)$，所以，$Var(\theta)=1/(n\lambda)^2$，$Var(n\min\{x_1,x_2,...,x_n\})=1/\lambda^2$。

   于是，$\bar{x}$有效。

六、（10分）某厂生产一种标准长度为45mm的螺钉，实际生产的产品长度服从正态分布$N(\mu,4)$。做假设检验$H_0:\mu=45$，$H_1:\mu\ne 45$。拒绝域为$W=\{|\bar{x}-45|>1\}$。

1. 当样本容量n=25时，求犯第一类错误的概率；
2. 当样本容量n=25，μ=46时，求犯第二类错误的概率。

（注：所求概率可用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示。）

解：当样本容量n=25时，$\bar{x}\sim N(\mu,4/25)$，

$$\begin{aligned}\alpha &= P(|\bar{x}-45|>1\mid\mu=45)=1-P(|\bar{x}-45|\le 1\mid\mu=45)\\ &= 1-P\left[-\frac{5}{2}\le\frac{5(\bar{x}-45)}{2}\le\frac{5}{2}\mid\mu=45\right]\\ &= 1-\Phi(5/2)+\Phi(-5/2)=2-2\Phi(5/2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= P(|\bar{x}-45|\le 1\mid\mu=46)=P(-1\le\bar{x}-45\le 1\mid\mu=46)\\ &= P\left[-5\le\frac{5(\bar{x}-46)}{2}\le 0\mid\mu=46\right]\\ &= \Phi(0)-\Phi(-5)=\Phi(5)-1/2.\end{aligned}$$