清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计（A卷）

2012 年 6 月 17 日

一、填空题（30分）

1. 设两个相互独立的事件A和B都不发生的概率是$1/9$，A发生B不发生的概率与B发生A不发生的概率相等，则$P(A) =$ ________。

2. 随机的选一个点将一个区间分成两部分，则长区间至少为短区间的3倍的概率为________。

3. 设随机变量X与Y互相独立，且均服从区间$[0,3]$上的均匀分布，则$\mathrm{P}(\min\{\mathrm{X},\mathrm{Y}\} < 1) =$ ________。

4. 若$X \sim N(1,4)$，$P(X < x) = \Phi(1)$，则$x =$ ________。

5. 设随机变量X的概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a, & 0 \le x \le 1 \\ ae^{-2(x-1)}, & x > 1 \end{cases}$$

则$a =$ ________，$E(X) =$ ________，$Var(X) =$ ________。

6. 设随机向量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，定义随机变量：

$$Z = g(X,Y) = \begin{cases} 1, & a < X \le b \text{且} c < Y \le d \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

则$E(Z) =$ ____________________________。

7. 设总体X在区间$[0,\theta]$上服从均匀分布，其中$\theta > 0$未知。从总体中抽取样本x_1，x_2，x_3，x_4，则下列统计量中不是θ的无偏估计的是________。

   (A) $\hat{\theta} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}$　　(B) $\hat{\theta} = 2x_1 + x_2 - x_3$

   (C) $\hat{\theta} = x_1 + x_2 + x_3 - x_4$　　(D) $\hat{\theta} = \max\{x_1，x_2，x_3，x_4\}$

8. 设x_1，x_2，…，$\mathrm{x_n}$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中μ，σ未知。若μ的95%置信区间为$[1,3]$；且假设检验问题

$$H_0：\mu = 2 \quad \text{vs} \quad H_1：\mu \ne 2$$

的显著性水平为α的拒绝域为$\{|\bar{x} - 2| \ge 1.3\}$，则$\alpha$_____0.05（填>或<）。

二、（10分）茶杯成套出售，每套五只，假设各套无次品和含一只次品的概率分别为4/5和1/5。一顾客在购买时，售货员随意取出一套，而顾客随机地查看其中的一只，若非次品，则买下该套，否则退回。试求：

1. 顾客买下该套的概率；
2. 在顾客买下的一套中确实无次品的概率。

三、（20 分）设X和Y具有联合密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases}21x^2y^3, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

1. 求边际密度函数$p_X(x)$和$p_Y(y)$，并判断X与Y的独立性，说明理由；
2. 求条件密度函数$p_{Y|X}(y|x)$；
3. 求在给定$X=x$下Y的条件数学期望$E(Y|X=x)$。

四、（15 分）设随机向量(X,Y)服从二维正态分布，且$X\sim N(3,4)$，$Y\sim N(2,1)$，X与Y的相关系数为$\rho=1/4$。

1. 求$Z=X+Y$的概率密度；
2. 若$W=X-cY$与Z独立，求常数c；
3. 若条件期望$f(z)=E(X^2+aXY+bY^2|Z=z)$不依赖于z，求常数a，b以及$f(z)$的值。

五、（15分）设总体X服从参数为λ的指数分布，x_1，x_2，…，x_n，为来自X的样本。

1. 求$1/\lambda$的最大似然估计，并判断其相合性，说明理由；
2. 验证最大似然估计与$n\min\{x_1，x_2，…，x_n\}$均为$1/\lambda$的无偏估计；
3. 比较最大似然估计与$n\min\{x_1，x_2，…，x_n\}$的有效性。

六、（10分）某厂生产一种标准长度为45mm的螺钉，实际生产的产品长度服从正态分布$N(\mu,4)$。做假设检验H_0：$\mu=45$，H_1：$\mu\neq45$。拒绝域为$W=\{|\overline{x}-45|>1\}$。

1. 当样本容量$n=25$时，求犯第一类错误的概率；
2. 当样本容量$n=25$，$\mu=46$时，求犯第二类错误的概率。

（注：所求概率可用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示。）