含参变量积分典型例题

例 1 求极限 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

解 $\int_0^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}+\int_1^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

$\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$在$(x,\alpha)\in[0,1]\times[-\delta,\delta]$上连续，有

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\left(\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\right)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4};$$

而$\left|\int_1^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}\right|\le\left|\int_1^{1+\alpha}\left|\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}\right|dx\right|\le\left|\int_1^{1+\alpha}dx\right|=|\alpha|\to 0$，$(\alpha\to 0)$.

因此 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

例 2 利用交换积分顺序的方法计算积分 $\int_0^1\sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx$.

解 $\int_0^1\sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx=-\int_0^1\sin(\ln x)\left(\int_a^b x^t dt\right)dx=-\int_a^b dt\int_0^1 x^t\sin(\ln x)dx$,

而 $\int_0^1 x^t\sin(\ln x)dx=-\dfrac{1}{t+1}\int_0^1 x^{t+1}\cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx=-\dfrac{1}{(t+1)^2}\int_0^1\cos(\ln x)dx$

$=-\dfrac{1}{(t+1)^2}-\dfrac{1}{(t+1)^2}\int_0^1 x^t\sin(\ln x)dx$.

解得 $\int_0^1 x^t\sin(\ln x)dx=-\dfrac{1}{(t+1)^2}\cdot\dfrac{(t+1)^2}{1+(t+1)^2}=-\dfrac{1}{1+(t+1)^2}$.

于是 $\int_0^1\sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx=-\int_a^b dt\int_0^1 x^t\sin(\ln x)dx=\int_a^b\dfrac{1}{1+(t+1)^2}dt$

$$=\arctan(t+1)\big|_a^b=\arctan(b+1)-\arctan(a+1)=\arctan\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}.$$

例 3 求函数$I(y)=\int_y^{y^2}\dfrac{\cos xy}{x}dx$的导数.

解 $I'(y)=-\int_{y}^{y^2}\frac{x\sin xy}{x}dx+\frac{\cos y^3}{y^2}\cdot 2y-\frac{\cos y^2}{y}$

$=-\int_{y}^{y^2}\sin xydx+\frac{2\cos y^3-\cos y^2}{y}=\frac{\cos y^3-\cos y^2}{y}+\frac{2\cos y^3-\cos y^2}{y}$

$=\frac{3\cos y^3-2\cos y^2}{y}$.

例 4 设$I(y)=\int_0^y(x+y)f(x)dx$，其中$f(x)$为可微函数．求$I''(y)$.

解 $I(y)=\int_0^y(x+y)f(x)dx=\int_0^y xf(x)dx+y\int_0^y f(x)dx$.

$I'(y)=\frac{d}{dy}\left(\int_0^y xf(x)dx+y\int_0^y f(x)dx\right)=yf(y)+\int_0^y f(x)dx+yf(y)$

$=2yf(y)+\int_0^y f(x)dx$；

$I''(y)=2f(y)+2yf'(y)+f(y)=3f(y)+2yf'(y)$.

例 5 利用积分号下求导法计算积分 $\int_0^\pi\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$.

解 $\alpha=1$时，$\int_0^\pi\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\int_0^\pi\ln(2-2\cos x)dx$

$=\int_0^\pi[2\ln 2+2\ln\sin\frac{x}{2}]dx=2\pi\ln 2+2\int_0^\pi\ln\sin\frac{x}{2}dx$

$\overset{t=\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}2\pi\ln 2+4\int_0^\pi\ln\sin tdt=2\pi\ln 2+4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=0$.

$\alpha=-1$时，类似得$\int_0^\pi\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\int_0^\pi\ln(2+2\cos x)dx=0$.

当$|\alpha|\neq 1$时，设$I(\alpha)=\int_0^\pi\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$，就有

$I'(\alpha)=\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\int_0^\pi\frac{2\alpha-2\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx$

$=\int_0^\pi\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\right)dx=\frac{\pi}{\alpha}+\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\int_0^\pi\frac{dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$

$$\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=}\frac{\pi}{\alpha}+\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{2dt}{(1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2t^2}=\frac{\pi}{\alpha}+\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\cdot\frac{2}{\alpha^2-1}\arctan\frac{\alpha+1}{\alpha-1}t\,\Big|_0^{+\infty};$$

于是，当$|\alpha|<1$时，有$I'(\alpha)=\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha}\cdot=0$．得$I(\alpha)=c$，又$I(1-0)=I(1)=0$，因此$I(\alpha)=0$；当$|\alpha|>1$时，$I'(\alpha)=\frac{\pi}{\alpha}+\frac{\pi}{\alpha}\cdot=\frac{2\pi}{\alpha}$，得$I(\alpha)=\pi\ln\alpha^2$．

综上，有 $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\begin{cases}0, & |\alpha|\le 1,\\ \pi\ln\alpha^2, & |\alpha|>1.\end{cases}$

例 6 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)>0$．研究函数$I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$的连续性．

解 $f(x)$是$[0,1]$上连续的正值函数，故$f(x)$在$[0,1]$上有正下界和上界，即$\exists m>0$和M，使对$\forall x\in[0,1]$，有$0<m<f(x)<M$．

当$y>0$时，就有$\frac{ym}{x^2+y^2}<\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$，可得$\int_0^1\frac{ym}{x^2+y^2}dx<\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$．

由于$\int_0^1\frac{ym}{x^2+y^2}dx=m\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^1=m\arctan\frac{1}{y}\to m\cdot\frac{\pi}{2}>0$，（$y\to 0^+$），又得

$\lim\limits_{y\to 0^+}I(y)=\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx\ne 0$，但$I(0)=\int_0^1\frac{0f(x)}{x^2+y^2}dx=0$．因而$\lim\limits_{y\to 0^+}I(y)\ne I(0)$．

则函数$I(y)$在点$y=0$间断．除点$y=0$外，函数$I(y)$在其它点显然连续．

例 7 证明下列含参变量反常积分在指定义区间上一致收敛：

（1） $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$， $y\ge a>0$；

解 在$(x,y)\in[0,+\infty)\times[a,+\infty)$上有$\left|\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{1}{x^2+a^2}$，而

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2a}$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$ 关于 y 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

（2） $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx$， $0\le\alpha\le\alpha_0$.

解 $|\int_0^A\sin 2xdx|\le 1$；对每个 $0\le\alpha\le\alpha_0$， $\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ ↘，且由 $0<\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}\le\frac{1}{x}\searrow 0$ $(x\to+\infty)$，得 $\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 对每个 $0\le\alpha\le\alpha_0$ 单调且关于 α 在 $[0,\alpha_0]$ 上一致收敛于零．于是，据 *Dirichlet* 判别法，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx$ 关于 α 在 $[0,\alpha_0]$ 上一致收敛.

例 8 证明函数 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $\alpha>0$ 内连续.

证 先证积分 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内内闭一致收敛.

对任何 $[a,b]\subset(0,+\infty)$，有 $a>0$．由于 $|\int_1^A\cos xdx|\le 2$，即积分 $\int_1^A\cos xdx$ 关于 α 在 $[a,b]$ 上一致有界，又当 $x\to+\infty$ 时，有于 $\frac{1}{x^\alpha}\le\frac{1}{x^a}$，可见 $\frac{1}{x^\alpha}$ 单调且一致地趋于零．据 *Dirichlet* 判别法，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛．由 $[a,b]$ 在 $(0,+\infty)$ 内的任意性，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内内闭一致收敛.

次证函数 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续．事实上，对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$，有 $x_0\in\left[\frac{x_0}{2},2x_0\right]\subset(0,+\infty)$．由于积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内内闭一致收敛，因此在区间 $\left[\frac{x_0}{2},2x_0\right]$ 上一致收敛，又函数 $\frac{\cos x}{x^\alpha}$ 在域 $(\alpha,x)\in(0,+\infty)\times[1,+\infty)$ 上连续，因此函数 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在区间 $\left[\frac{x_0}{2},2x_0\right]$ 上连续，因此在点 x_0 连续．由点 x_0 在

区间$(0,+\infty)$内的任意性，函数$F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$在区间$(0,+\infty)$内连续.

例 9 计算$g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

解 $\frac{d}{d\alpha}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$，积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}dx$关于$\alpha\in(-\infty,+\infty)$一致收敛，因此该积分满足积分号下求导定理的条件.

$$\frac{d}{d\alpha}g(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\xlongequal{x=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^2)[(1+\alpha^2)t^2+\alpha^2]}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}-\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+\alpha^2)t^2+\alpha^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha^2}{|\alpha|\sqrt{1+\alpha^2}}\arctan\frac{\sqrt{1+\alpha^2}t}{|\alpha|}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right).$$

注意到$g(0)=0$，就有

$$g(\alpha)=g(\alpha)-g(0)=\int_0^\alpha g'(t)dt=\frac{\pi}{2}\int_0^\alpha\left(1-\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\alpha\left(1-\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt=\frac{\pi}{2}\int_0^\alpha\left(1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sgn}t\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}(\sqrt{1+\alpha^2}-1)\operatorname{sgn}\alpha=(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha.$$

例 10 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a},\quad(a,b>0).$$

证 对$\forall\ 0<\delta\le\eta<+\infty$，由于$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，积分$\int_\delta^\eta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$存在，且$\int_\delta^\eta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\delta^\eta\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\delta^\eta\frac{f(bx)}{x}dx$

$$\overset{令z=ax,\,z=bx}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_{a\delta}^{a\eta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{b\delta}^{b\eta}\frac{f(z)}{z}dz$$

$$=\int_{a\delta}^{a\eta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{b\delta}^{b\eta}\frac{f(z)}{z}dz+\int_{a\eta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{a\eta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz$$

$$=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{a\eta}^{b\eta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{z}dz-\int_{a\eta}^{b\eta}\frac{f(z)}{z}dz$$

$$=f(\xi)\ln\frac{b}{a}-\int_{a\eta}^{b\eta}\frac{f(z)}{z}dz,$$

其中$a\delta\le\xi\le b\delta$，当$\delta\to0^+$时，$\xi\to0^+$，由$f(x)$连续，$\lim\limits_{\xi\to0^+}f(\xi)=f(0)$，则得

$\lim\limits_{\xi\to0^+}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(0)\ln\frac{b}{a}$；$\int_{a\eta}^{b\eta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\tau)\int_{a\eta}^{b\eta}\frac{1}{z}dz=f(\tau)\ln\frac{b}{a}$，其中$a\eta\le\tau\le b\eta$.

当$\eta\to+\infty$时，$\tau\to+\infty$，$f(\tau)\to0$，又有$\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int_{a\eta}^{b\eta}\frac{f(z)}{z}dz=0$. 于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\substack{\delta\to0^+\\ \eta\to+\infty}}\int_\delta^\eta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\lim_{\eta\to+\infty}\int_{a\eta}^{b\eta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\,0\,)\ln\frac{b}{a}.$$

例 11　计算下列积分：

（1）　$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$；

解　$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}=\frac{1}{n}\int_0^1x^{1-n}(1-x^n)^{-\frac{1}{n}}d(x^n)\overset{t=x^n}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{n}\int_0^1t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{\frac{n-1}{n}-1}dt$$

$$=\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

（2）　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7x\cos^{\frac{1}{2}}xdx$.

解　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7x\cos^{\frac{1}{2}}xdx=\frac{1}{2}B\left(\frac{7+1}{2},\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right)=\frac{1}{2}B\left(4,\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(4+\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3!\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{15}{4}\times\frac{11}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{256}{1055}.$$

例 12 计算 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx$.

解 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx \overset{x=1-t}{=\!=\!=\!=\!=} -\int_1^0 \ln\Gamma(1-t)dt=\int_0^1 \ln\Gamma(1-x)dx$.

因此，$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx+\int_0^1 \ln\Gamma(1-x)dx\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\Gamma(x)\Gamma(1-x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}dx=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\sin\pi x dx.$$

$$\int_0^1 \ln\sin\pi x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^1 \ln\sin\pi x d\pi x \overset{t=\pi x}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\sin t dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx,$$

注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=\!=\!=\!=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t dt$ 和

$$\int_0^{\pi} \ln\sin x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx,$$

就有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2}\sin 2x dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1}{2}dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x d2x=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \ln\sin t dt$$

$=-\frac{\pi}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$，解得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

于是，$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2}\int_0^1 \ln\sin\pi x dx=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)=\ln\sqrt{2\pi}$.