200[illegible]春季试卷(A卷)标准化部分答案:

一. 1. [B]. 2. [D]. 3. [C]. 4 [C]. 5. [A]

二. 1. $\underline{-\pi}$.

2. $\underline{1}$, $\underline{-\frac{1}{2e}}$.

3. $\underline{-2\pi^2 i}$.

4. $\underline{\frac{1}{2}<|z-1|<+\infty}$. (注意,只有有限个正幂项)

5. $\underline{0}$. (利用 $\mathrm{Res}\left[\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \infty\right]=0$: $m-n\geq 2$)

2008秋季试卷(A卷)标准化部分答案:

一. 1. [D] 2. [B]. 3 [A]. 4. [C], 5. [B]

二. 1. $\underline{12\pi i}$ (课后习题特例,用Green公式)

2. $\underline{\pi i(2-\pi)}$.

3. $\underline{\frac{1}{e}}$.

4. $\underline{\frac{2z^2}{(1-z)^3}}$.

5. $\underline{\frac{1}{4}<|z-1|<4}$. (正幂、负幂项部分分别用根值法. 注意,负幂项部分最好先转换为正幂项处理)

6. $\underline{2\pi i}$. (利用 $\mathrm{Res}[R(z),\infty]=0$. 其中 $R(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 为有理函数, $m-n\geq 2$).

三. 1. $R=|A|$

$$F(z)=z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)\,z^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$=\cdots=zf'(z).$$

2. (1) $I_1=\frac{2\pi}{3}$; (2) $I_2=\frac{\pi e^{-4}}{2}\cos 4$.

3. $f(z)=z\sin\frac{z}{z-1}$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上只有两个孤立奇点, i.e., $z_1=1$, $z_2=\infty$.

z_1 是本性奇点, ∞ 是~~可去~~一级奇点, 大家可以参照 2009年秋考试题中关于 $f(z)=z\cos\frac{z}{z-1}$ 的处理过程

$$\Longrightarrow \operatorname{Res}\left[z\sin\frac{z}{z-1},1\right]=c_{-1}=\cos 1-\frac{\sin 1}{2}$$
$$=-\operatorname{Res}\left[z\sin\frac{z}{z-1},\infty\right].$$

四. 1. 课上例题 (同参教材 P_{67}. $T_{10}(4)$.)

2. 课上例题的特例 $(m=2)$.

三. 4. 利用 Cauchy 积分公式及高阶导数公式比较两边, 注意一一系数 $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} a=(2\pi i)^5, \\ b=6, \\ c=6!=720. \\ d=7. \end{cases}$$

二、1. 方法一：求出 c_n 通项公式

然后利用根值法或比值法求出 $R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

方法二：利用已有条件 $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$ 及 Taylor 展式：$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$；$|z|<R$.

可得 $f(z)=1+(z+z^2)f(z)\Rightarrow f(z)=\frac{1}{1-(z+z^2)}$

$\Rightarrow$ R为从0到 $f(z)$ 最近奇点距离 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. (1) $I_1=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$；(2) $I_2=\frac{\pi}{2}e^{-a^2}$

3. 对 $f(z)$ 在 $z=1$ 处进行 Laurent 展开

$$f(z)=[(z-1)+1]\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)\xlongequal{\zeta=z-1}(\zeta+1)\cos\left(1+\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$=(\zeta+1)\left[\cos1\cos\frac{1}{\zeta}-\sin1\sin\frac{1}{\zeta}\right]$$

$$=(\zeta+1)\left[\cos1\left(1-\frac{1}{2\zeta^2}+\frac{1}{4!\zeta^4}-\cdots\right)-\sin1\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{3!\zeta^3}+\frac{1}{5!\zeta^5}-\cdots\right)\right]$$

$$\Rightarrow c_{-1}=-\left(\frac{\cos1}{2}+\sin1\right)=\mathrm{Res}[f(z),1]=-\mathrm{Res}[f(z),\infty]$$

$z=1$ 为本性奇点，∞ 为可去奇点.（仅有两个孤立奇点 $1,\infty$）.

4. $S=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\frac{1+\cos\theta}{2}d\theta$.

$$=\oint_{|z|=1}f(z)\cdot\frac{1+\frac{z^2+1}{2z}}{2}\frac{dz}{iz}=\cdots=\pi\left(f(0)+\frac{f'(0)}{2}\right)$$

（利用 Cauchy 积分公式及其 $z=0$ 处一阶导数公式）

四、1（课上例题），2. 课后习题，对 $f(z)$ 及 $\frac{1}{f(z)}$ 分别用最大模原理 $\Rightarrow|f(z)|\equiv M\Rightarrow$ $f(z)\equiv Me^{i\theta}$ （$\theta\in\mathbb{R}$，常数）.