Estruturas de Dados I

Filas de Prioridade

Igor Machado Coelho

14/10/2020 - rev. 26/08/2021

Section 1

Filas de Prioridade

Pré-Requisitos

São requisitos para essa aula:

- Introdução/Fundamentos de Programação (em alguma linguagem de programação)
- Interesse em aprender C/C++
- Noções de tipos de dados
- Noções de listas e encadeamento
- Aula de filas
- Aula de árvores

Section 2

Tipo Abstrato: Fila de Prioridade

Fila de Prioridade

A Fila de Prioridade (do inglês *Priority Queue*) é um Tipo Abstrato de Dado (TAD) que opera de forma similar a uma Fila.

Lembramos que o TAD Fila tem comportamento FIFO (*first-in first-out*), onde o elemento de *maior prioridade para sair da fila* é o elemento que *entrou primeiro na fila*.

O conceito de *prioridade* é explicitado nas Filas de Prioridade através de um *valor numérico*. Nesse caso, a lógica de prioridade pode operar pelo *menor* ou pelo *maior* valor, dependendo da aplicação.

Filas de Prioridade na Computação

Filas de Prioridade são estruturas fundamentais na própria computação. Também são úteis na implementações de algoritmos em grafos, como a busca por *árvores geradoras mínimas* (aulas futuras).

Por exemplo, quando se envia pacotes de dados a roteadores, existem mecanismos que podem tirar vantagem de *valores de prioridade* entre pacotes (dados de voz e de download, etc). Uma interpretação cotidiana poderia ser uma *fila prioritária por idade*, na qual os indivíduos *mais velhos* seriam sempre atendidos antes dos *mais novos*.

Figure 1: Fila de Prioridade - CC BY 3.0 - thenounproject.com

Operações de uma Fila de Prioridade

Uma Fila de Prioridade é uma estrutura de dados com uma *direção pre-definida* (vamos assumir *maior prioridade* para o *menor valor*), consistindo de 3 operações básicas:

- frente "mais prioritária" (*peek min* ou *find min*)
- enfileira (*enqueue*, *push* ou *insert*)
- desenfileira "mais prioritário" (*dequeue min*, *pop min* ou *extract min*)

As operações trabalham com *chaves numéricas* e, opcionalmente, um conteúdo atrelado a cada chave. Outra operação comum no TAD, embora considerada uma *operação interna*, é a de *redução de chave* (*decrease key*).

Implementações

A implementação do TAD Fila de Prioridade geralmente se dá através de uma *árvores de prioridade* denominada *heap*. O heap (ou *min heap*) é uma *árvore binária completa* com a seguinte propriedade:

- se x é pai de y, então $x \leq y$

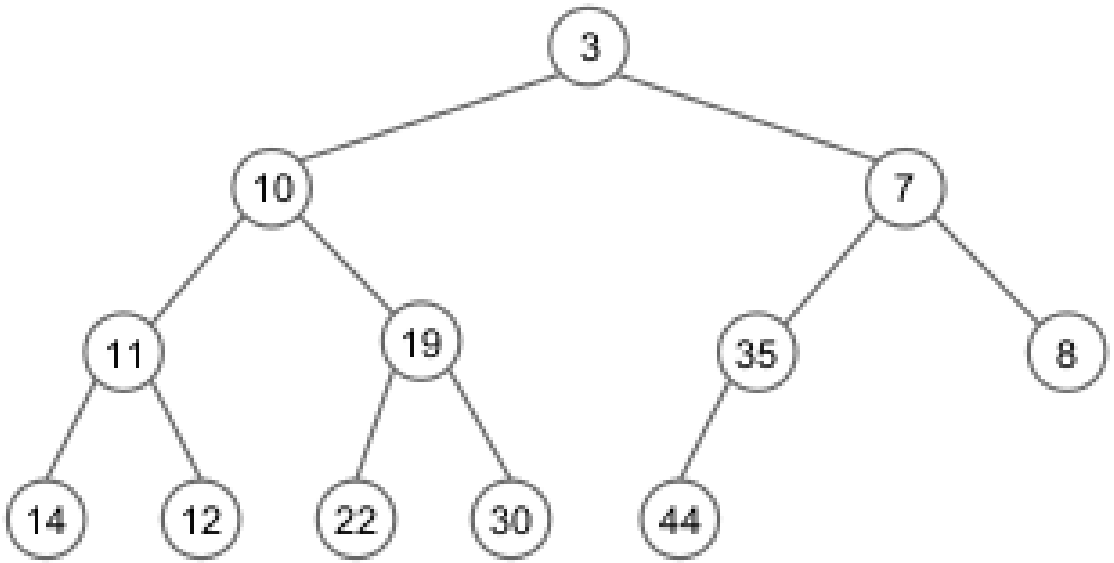


Figure 2: Min-Heap. Créditos: Fabiano Oliveira

Definição do *Conceito* Fila de Prioridade em C++

O *conceito* de fila de prioridade somente requer suas três operações básicas. Como consideramos uma *fila de prioridade genérica* (fila de inteiro, char, etc), definimos um *conceito genérico* chamado `FilaPrioridadeTAD`:

```
template<typename Agregado, typename Tipo>
concept bool
FilaPrioridadeTAD = requires(Agregado a, Tipo t)
{
    // requer operação 'frente' mais prioritária
    { a.frente() };
    // requer operação 'insere' sobre tipo 't'
    { a.insere(t) };
    // requer operação 'remove' mais prioritário
    { a.remove() };
};
```

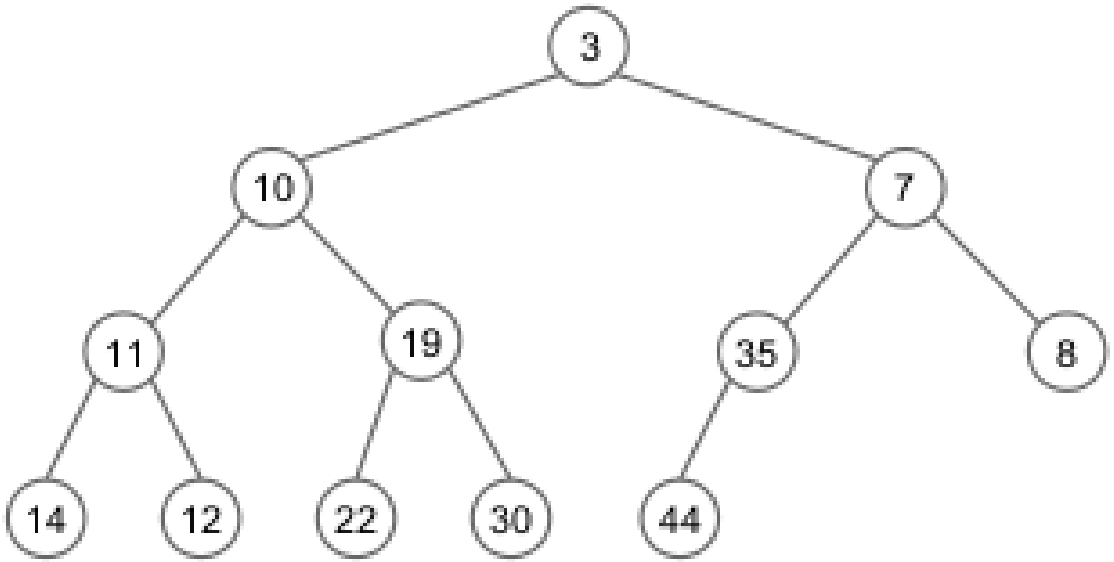
Note que o tipo genérico pode ser estendido para comportar um elemento interno, além da chave numérica.

Section 3

Implementação *heap*

Implementação *heap* com vetor

Apesar de sua estrutura de árvore, podemos representá-la eficientemente com um vetor, numa implementação puramente sequencial.



Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Assim, os dados sempre estarão em um *espaço contíguo* de memória.

Implementação Heap1

Consideraremos uma fila sequencial com, no máximo, `MAXN` elementos do tipo caractere.

```
constexpr int MAX_N = 50; // capacidade máxima da fila
class Heap1
{
public:
  int elementos [MAXN];       // elementos na fila
  int N;                      // num. de elementos na fila
  void cria () { ... }        // inicializa agregado
  void libera () { ... }      // finaliza agregado
  int frente () { ... }
  void insere (int chave){ ... }
  int remove () { ... }
};
// verifica se agregado Heap1 satisfaz conceito FilaPrioridade
static_assert(FilaPrioridadeTAD<Heap1, int>);
```

Utilização do Heap

Antes de completar as funções pendentes, utilizaremos a `Heap1`:

```
int main () {
    Heap1 h;
    h.cria();
    h.insere(20);
    h.insere(10);
    h.insere(30);
    printf("%c\n", h.frente());
    printf("%c\n", h.remove());
    h.insere(25);
    while(p.N > 0)
        printf("%c\n", h.remove());
    h.libera();
    return 0;
}
```

Verifique as impressões em tela: *10 10 20 25 30*

Implementação Heap1 - cria/libera

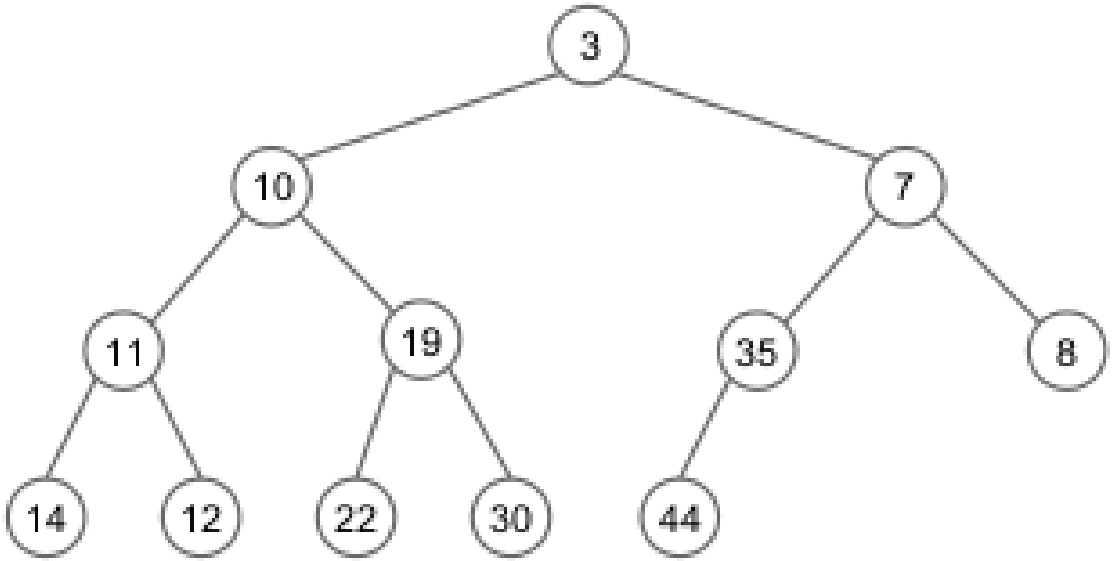
A operação `cria` inicializa a fila para uso, e a função `libera` desaloca os recursos dinâmicos.

```
class Heap1 {
...
void cria() {
    this->N = 0;
}

void libera() {
    // nenhum recurso dinâmico para desalocar
}
...
}
```

Algoritmo Heap1 *frente*

A operação `frente` retorna o elemento mais prioritário do heap. Felizmente, ele sempre será a raiz da árvore!



Representação por níveis (*árvore completa*):

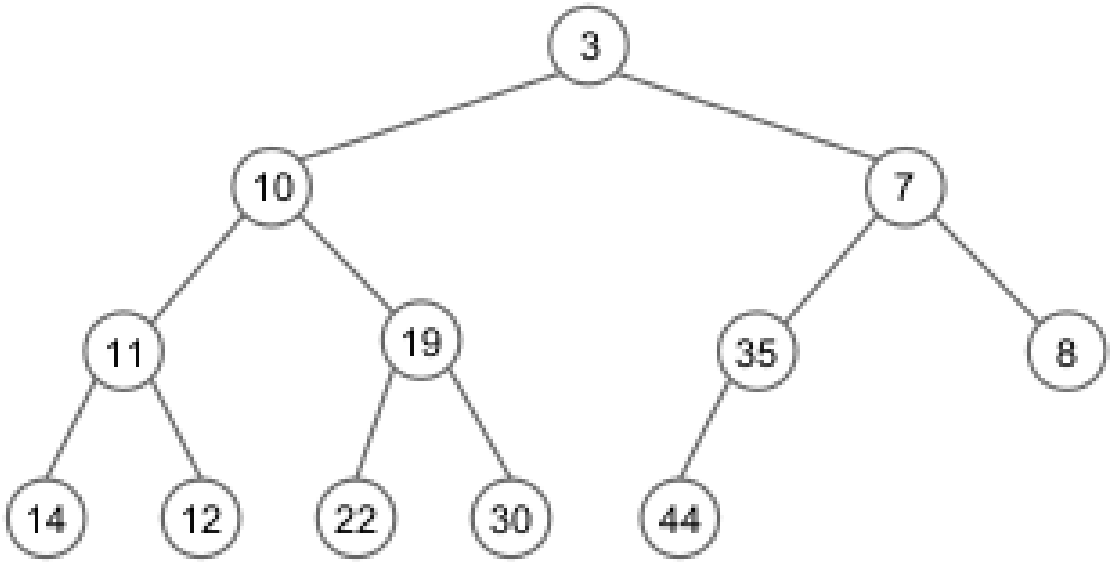
| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Desafio: verifique se é possível o elemento mais prioritário não estar na raiz do heap.

Algoritmo Heap1 *insere* - Parte 1/2

A operação `insere` em adiciona um novo elemento de acordo com sua prioridade. Como manter a corretude das propriedades do heap?

Exemplo: como inserir o elemento 5?



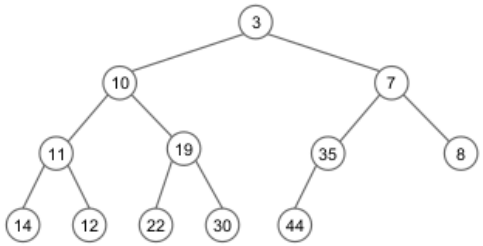
Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Algoritmo Heap1 *insere* - Parte 2/2

Para manter a corretude das propriedades do heap, em especial, de uma *árvore completa*, adicionamos o elemento na *última posição do vetor*.

Exemplo: como inserir o elemento 5?



Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

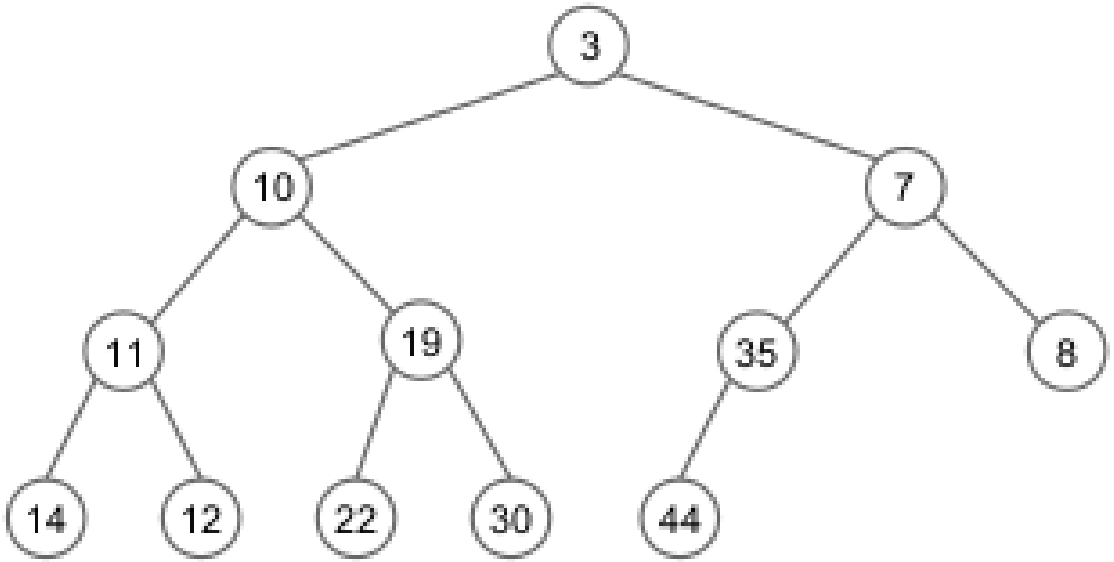
Como *corrigir* a árvore? **Solução:** trocas sucessivas *subindo* até a raiz.

3	10	7	11	19	35	8	14	12	22	30	44	5
3	10	7	11	19	*5	8	14	12	22	30	44	*35
3	10	*5	11	19	*7	8	14	12	22	30	44	*35

Algoritmo Heap1 *remove* - Parte 1/2

A operação `remove` em adiciona um novo elemento de acordo com sua prioridade. Como manter a corretude das propriedades do heap?

Exemplo: como remover o elemento 3?



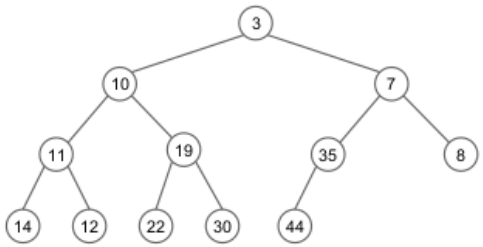
Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Algoritmo Heap1 *remove* - Parte 2/2

Para manter a corretude das propriedades do heap, em especial, de uma *árvore completa*, trocamos o *primeiro* com o *último* elemento do vetor.

Exemplo: como remover o elemento 3?



Representação por níveis (*árvore completa*):

| 3 | 10 | 7 | 11 | 19 | 35 | 8 | 14 | 12 | 22 | 30 | 44 |

Como *corrigir* a árvore? **Solução:** trocas sucessivas *descendo* até uma folha.

44	10	7	11	19	35	8	14	12	22	30	3
*7	10	*44	11	19	35	8	14	12	22	30	3
*7	10	*8	11	19	35	*44	14	12	22	30	3
*7	10	*8	11	19	35	*44	14	12	22	30	x

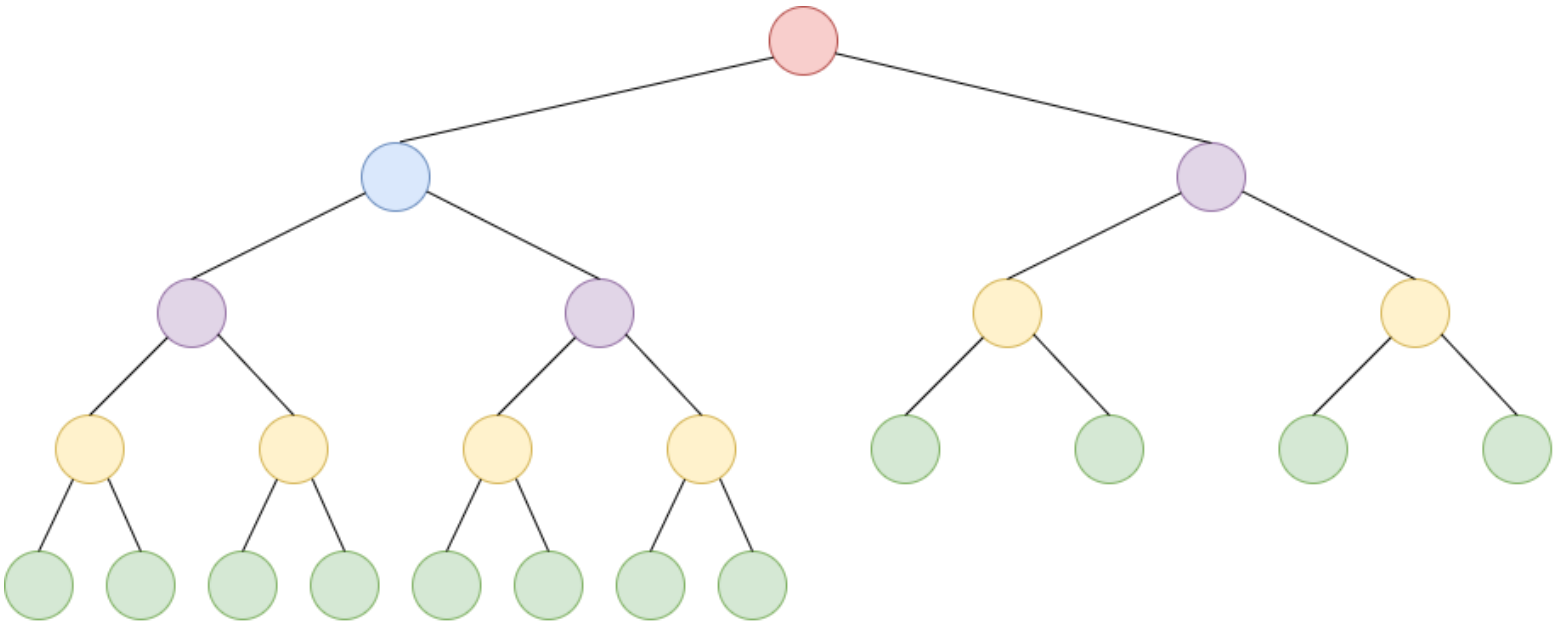
Section 4

Implementação Heap em C++

Heapify / Constroi

A construção de um heap através de um vetor é chamada de *heapify*. É possível efetuar a construção de forma iterativa, através dos métodos *sobe* ou *desce*.

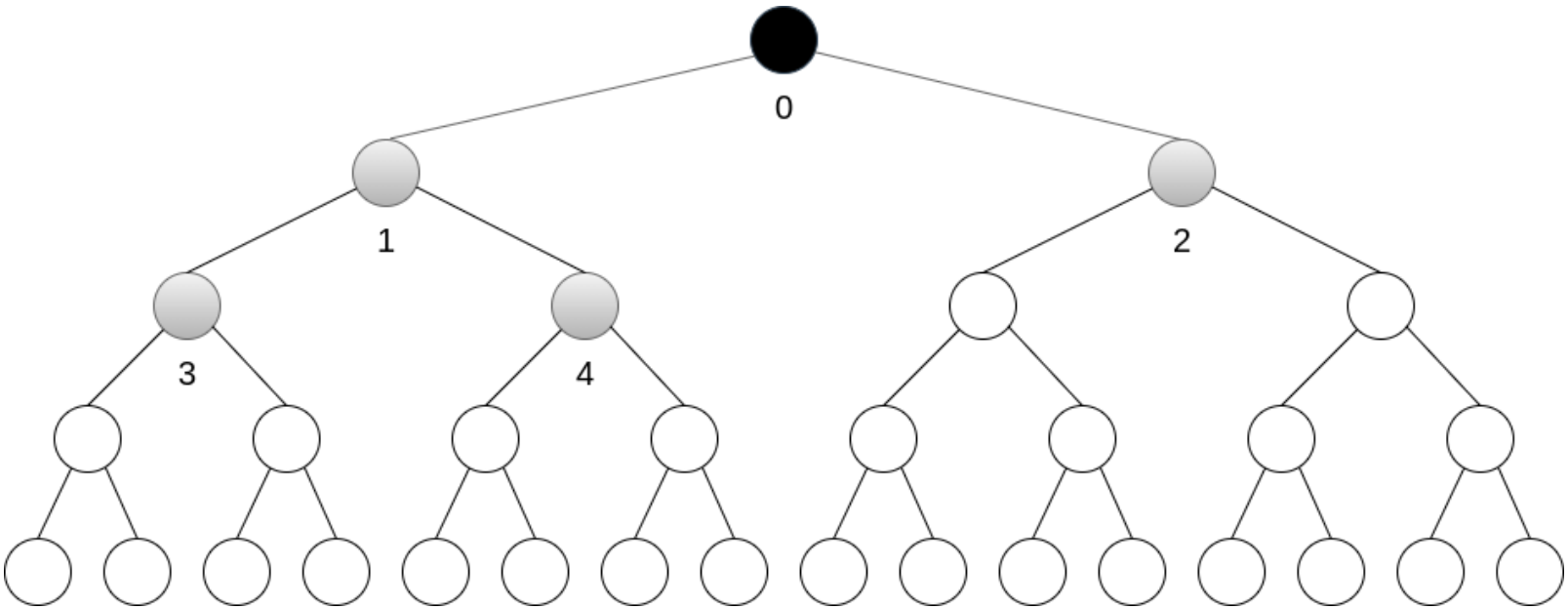
Como vimos anteriormente, o método *sobe* custa, no máximo, o nível do nó, enquanto o método *desce* custa, no máximo, a altura do nó.



Veja as alturas dos nós (N=23): vermelho(5), azul(4), roxo(3), amarelo(2), verde(1). Metade dos nós (12) tem altura 1.

Heapify com *sobe*

A construção do heap ($N = 31$) com o método *sobe* opera sequencialmente a partir dos nós $1, 2, 3, 4...$, e a raiz não efetua nenhuma troca. Cada elemento folha ($\approx N/2$) irá incorrer em $O(h = \lceil lg\ N \rceil)$ trocas, no pior caso, tendo assim complexidade $O(N\ lg\ N)$.

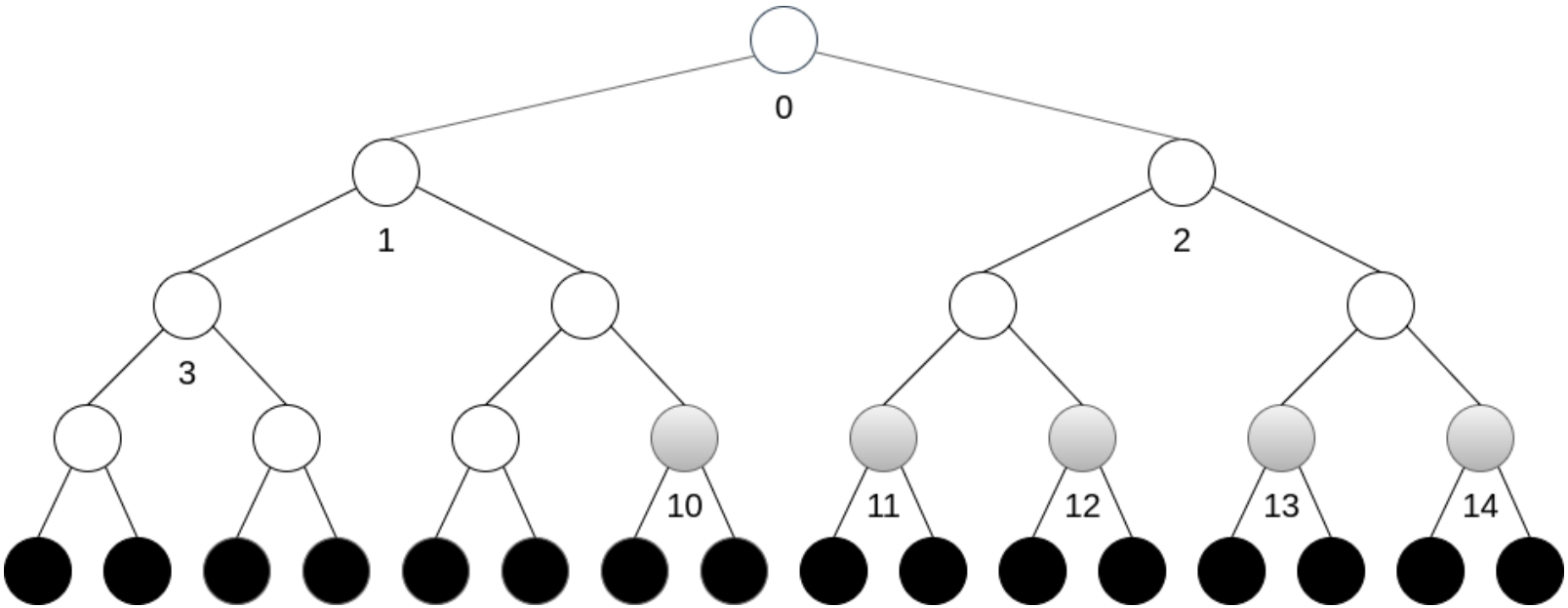



```
nós: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... ->
```

Método Heapify com *sobe*

Heapify com *desce*

A construção do heap ($N = 31$) com o método *desce* toma vantagem de que as folhas ($\approx N/2$) tem altura 1, portanto não necessitando de troca alguma. O método opera sequencialmente em ordem decrescente a partir do nó $\lfloor N/2 \rfloor - 1 = 14$ como $14, 13, 12, 11, 10, \ldots$. Note que um único elemento (a raiz) irá incorrer em $O(h = \lceil lg\ N \rceil)$ trocas, sendo a complexidade $O(N\ lg\ N)$ superestimada neste caso.



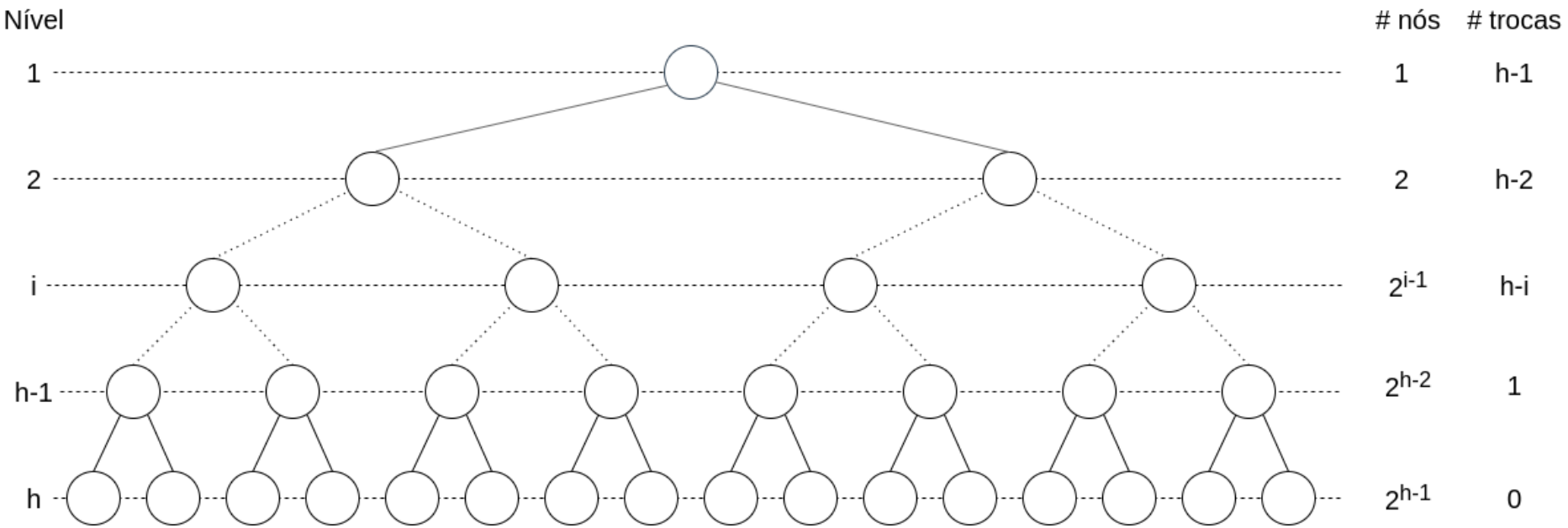

```
nós: | 0 | 1 | ... <- | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | ...
```

Método Heapify com *desce*

Análise do Método Heapify com *desce*

Consideramos uma árvore com N nós e $h = \lceil lg\ N \rceil$ níveis. No nível 1, um único nó (a raiz) efetua $h-1$ trocas, no pior caso. Por outro lado, existem 2^{h-1} folhas que não fazem nenhuma troca.

De forma geral, no nível i, cada um dos 2^{i-1} nós efetuam $h-i$ trocas, no pior caso, totalizando $\sum_{i=1}^{h-1} (2^{i-1}(h-i))$ trocas.



Análise do Método Heapify com *desce*

Temos que $\sum_{i=1}^{h-1}\left(2^{i-1}(h-i)\right) = 2^h-(h+1)$, dado que $\sum_{i=0}^{m} 2^i = 2^{m+1}-1$. Desmembramos em cada linha i abaixo as $h-i$ ocorrências de 2^{i-1}, de $i=1$ até $h-1$. Efetuamos então uma soma por colunas.

$$
\begin{array}{rccccccccccccc}
 & \multicolumn{13}{c}{\overbrace{\hspace{20em}}^{H-1}} \\
i=1: & & 1 & + & 1 & +\cdots+ & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 \\
i=2: & + & 2 & + & 2 & +\cdots+ & 2 & + & 2 & + & 2 & & \\
i=3: & + & 4 & + & 4 & +\cdots+ & 4 & + & 4 & & & & \\
i=4: & + & 8 & + & 8 & +\cdots+ & 8 & & & & & & \\
i: & + & \cdots & + & \cdots & +\cdots & & & & & & & \\
i=h-2: & + & 2^{h-3} & + & 2^{h-3} & & & & & & & & \\
i=h-1: & + & 2^{h-2} & + & & & & & & & & & \\
 & = & \sum_{i=0}^{h-2} 2^i & + & \sum_{i=0}^{h-3} 2^i & +\cdots+ & \sum_{i=0}^{3} 2^i & + & \sum_{i=0}^{2} 2^i & + & \sum_{i=0}^{1} 2^i & + & \sum_{i=0}^{0} 2^i
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccc}
= & (2^{h-1}-1)+(2^{h-2}-1) & +\cdots+ & (2^3-1)+(2^2-1)+(2^1-1) \\
= & 2^{h-1}+2^{h-2} & +\cdots+ & 2^3+2^2+2^1-(h-1) \\
= & \sum_{i=0}^{h-1} 2^i - h & = & 2^h-(h+1) \quad \square
\end{array}
$$

Análise do Método Heapify com *desce*

Temos então que o total de trocas do heapify é $2^h-(h+1)$, e considerando uma altura $h = \lceil lg\ N \rceil = O(lg\ N)$, temos:

$$2^{O(lg\ N)}-(O(lg\ N)+1) = O(N)$$

Na prática, para $N = 31$ e, portanto, $h = 5$, temos:
$8\times1+4\times2+2\times3+1\times4 = 26$ trocas.

Veja código em `materiais`.

Agradecimentos ao Prof. Fabiano Oliveira, pelo embasamento dessa prova.

Bibliografia Recomendada

Além da bibliografia do curso, recomendamos para esse tópico:

- Szwarcfiter, J.L; Markenzon, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos. Rio de Janeiro, LTC, 1994. Bibliografia Adicional:
- Cerqueira, R.; Celes, W.; Rangel, J.L. Introdução a estruturas de dados: com técnicas de programação em C. Editora, 2004.
- Cormen, T.H.; Leiserson, C.E.; Rivest, R.L.; Stein Algoritmos: Teoria e Prática. Ed. Campus, 2002.
- Cormen, T.H.; Leiserson, C.E.; Rivest, R.L.; Stein, C. Introduction to Algorithms, 3rd ed.. The MIT Press, 2009.
- Preiss, B.R. Estruturas de Dados e Algoritmos Ed. Campus, 2000;
- Knuth, D.E. The Art of Computer Programming - Vols I e III. 2nd Edition. Addison Wesley, 1973.
- Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. Matemática Concreta. Segunda Edição, Rio de Janeiro, LTC, 1995.
- Livro "The C++ Programming Language" de Bjarne Stroustrup
- Dicas e normas C++: https://github.com/isocpp/CppCoreGuidelines

Section 5

Agradecimentos

Pessoas

Em especial, agradeço aos colegas que elaboraram bons materiais, como o prof. Fabiano Oliveira (IME-UERJ), e o prof. Jayme Szwarcfiter cujos conceitos formam o cerne desses slides.

Estendo os agradecimentos aos demais colegas que colaboraram com a elaboração do material do curso de Pesquisa Operacional, que abriu caminho para verificação prática dessa tecnologia de slides.

Software

Esse material de curso só é possível graças aos inúmeros projetos de código-aberto que são necessários a ele, incluindo:

- pandoc
- LaTeX
- GNU/Linux
- git
- markdown-preview-enhanced (github)
- visual studio code
- atom
- revealjs
- groomit-mpx (screen drawing tool)
- xournal (screen drawing tool)
- ...

Empresas

Agradecimento especial a empresas que suportam projetos livres envolvidos nesse curso:

- github
- gitlab
- microsoft
- google
- ...

Reprodução do material

Esses slides foram escritos utilizando pandoc, segundo o tutorial ilectures:

- https://igormcoelho.github.io/ilectures-pandoc/

Exceto expressamente mencionado (com as devidas ressalvas ao material cedido por colegas), a licença será Creative Commons.

Licença: CC-BY 4.0 2020

Igor Machado Coelho

This Slide Is Intentionally Blank (for goomit-mpx)