



TOMODENSITOMÉTRIE

Traitement d'image

Par Cristiano Ulundu Mendes et Moustapha Alifei Salimata
Encadrant : Mr. Sylvain Durand

Mai 2021

Table des matières

Notations	2
Introduction	3
1 Transformée de Radon	4
2 Propriétés de la transformée de Radon	6
3 Stabilité de l'inverse de la transformée de Radon entre $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ et $H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})$	12
4 Débruitage de l'image : Bruit de Poisson	16
a. La méthode de Richardson-Lucy	18
b. Estimateur du maximum a posteriori avec une régularisation par variation totale (VT)	18
c. Méthode primal-duale	20
Conclusion	22
Bibliographie	24

Notations

\mathbb{K}	: \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
\mathcal{C}^∞	: ensemble des fonctions infiniment dérivables.
$\mathbb{L}^1(\Omega)$: ensemble des fonctions intégrables sur Ω le disque unité de \mathbb{R}^2 .
$\mathcal{S}(\Omega)$: ensemble des fonctions définies sur Ω infiniment dérivables et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.
$\mathbb{L}_{loc}^1(\Omega)$: ensemble de classes de fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ mesurables telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$, f est intégrable sur K .
$\mathcal{D}(\Omega)$: espace vectoriel des fonctions $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^∞ et à support compact.
E^*	: espace dual de E c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur E .
$\langle x, y \rangle$: produit scalaire euclidien.
$\langle T, g \rangle$: produit dual entre T et g .
$(f g)$: produit scalaire usuel de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ c'est-à-dire $(f g) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}g(x)dx$.
$f * g$: le produit de convolution entre f et g .
A^t	: transposée de A .
Θ	: pour tout angle $\theta \in [0, 2\pi[$, $\Theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$.
Θ^\perp	: pour tout angle $\theta \in [0, 2\pi[$, $\Theta^\perp = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$.
$\frac{A}{B}$: Si A et B sont des matrices $n \times m$, alors $\frac{A}{B}$ est la division terme à terme c'est-à-dire $C = \frac{A}{B}$ est la matrice $n \times m$ telle que $C(i, j) = \frac{A(i, j)}{B(i, j)}$.

Introduction

Ce projet s'inscrit dans le cadre de la première année de master Mathématiques, Modélisation et Apprentissage (MMA) de l'Université de Paris (anciennement Paris Descartes). Il a pour but de placer les étudiants en situation professionnelle et de leur permettre de mettre en oeuvre différentes compétences acquises au cours de l'année.

Nous présenterons la tomographie assistée par ordinateur en commençant par une description des principes fondamentaux. Ensuite nous introduirons la transformée de Radon qui est au cœur de ce procédé : nous donnerons les propriétés qui nous seront utiles pour la suite ainsi que sa relation avec la transformation de Fourier. Enfin nous nous intéresserons à la reconstruction d'une image à partir de son sinogramme bruité par un bruit de Poisson. Nous comparerons trois méthodes : la rétroprojection filtrée, la méthode de Richardson-Lucy et un estimateur du maximum a priori. Deux algorithmes de minimisation seront proposées pour calculer ce dernier estimateur.

a. Le scanner

Le scanner, aussi appelé tomodensitométrie, est une technique d'imagerie médicale qui permet d'obtenir des images en coupe d'un organe ou d'une partie du corps humain. Cette technique repose sur l'utilisation des rayons X qui peuvent traverser le corps humain et être absorbés ou atténués par des substances solides, liquides ou gazeuses.

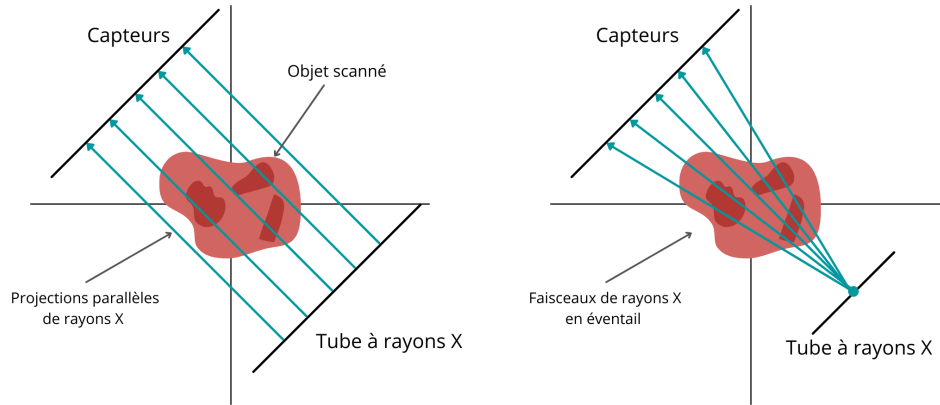
Contrairement à la radiographie, souvent utilisée pour l'observation des os et des articulations, le scanner combine l'utilisation des rayons X avec des techniques informatiques permettant de reconstruire la partie du corps souhaitée en deux ou trois dimensions. Au delà de la dimension de reconstruction, il permet également d'obtenir plus d'informations sur différentes structures anatomiques (cerveau, abdomen, etc), et ce même au travers des os.

Les premiers imageurs couplés à, ou « assistés » par, des ordinateurs suffisamment puissants pour être capables de réaliser rapidement les calculs nécessaires à la reconstruction des images sont apparus au début des années 1970. Pour la mise au point de cette technique, Godfrey Newbold Hounsfield et Allan MacLeod Cormack ont été récompensés par le Prix Nobel de physiologie ou médecine en 1979. (Source : wikipédia)

b. Fonctionnement du scanner

Le principe du scanner consiste à réaliser des images en coupes fines du corps. Tout d'abord, le patient est placé sur un lit d'examen qui se déplace dans le sens longitudinal à l'intérieur d'un anneau. Cet anneau est constitué d'un tube à rayons X qui seront projetés sur le patient. Une partie du rayonnement qui entre en contact avec le corps est alors absorbée par les tissus traversés et le rayonnement qui ressort est capté par des détecteurs à rayons X, eux aussi placés dans l'anneau et qui tournent en même temps que le tube de manière à toujours être opposés à ce dernier.

Bien qu'en pratique les faisceaux de rayons X sont diffusés en forme d'éventail, nous nous concentrerons dans ce document sur un exemple plus simple mais équivalent mathématiquement : la tomographie par rayons X parallèles.



1 Transformée de Radon

Définition 1.1 (Transformée de Radon) On appelle transformée de Radon d'une fonction f dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$ l'application $\mathcal{R}f$ telle que pour toute droite \mathcal{L} dans \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{R}f(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} f(x) dx.$$

L'application R est bien définie puisque si f est intégrable sur \mathbb{R}^2 , f est intégrable sur presque toute droite \mathcal{L} de \mathbb{R}^2 par majoration.

Notons qu'une droite \mathcal{L} de \mathbb{R}^2 peut être caractérisée par sa distance ρ à l'origine du repère et l'angle θ que fait sa perpendiculaire avec l'axe des abscisses. Un

point (x, y) appartenant à \mathcal{L} vérifie alors l'équation $\rho = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$.

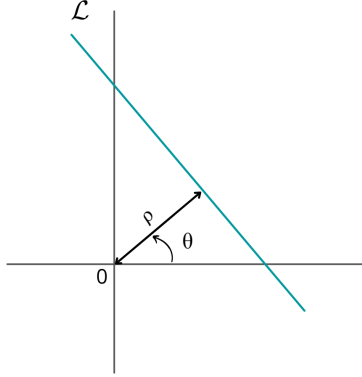


FIGURE 1: Caractérisation d'une droite.

Ainsi, on a

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, \forall \theta \in [0, 2\pi[, \quad \mathcal{R}f(\theta, \rho) = \int_{\{x \in \mathbb{R}^2, \langle x, \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \rangle = \rho\}} f(x) dx.$$

Pour tout angle θ fixé, on notera par la suite Θ le vecteur $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et Θ^\perp le vecteur $\begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$ tel que $\langle \Theta, \Theta^\perp \rangle = 0$. On utilisera comme image d'illustration un fantôme bien connu dans le monde de l'imagerie médicale, le fantôme de Shepp Logan.

Proposition 1.1 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{R}f(\theta, \rho) = \int_{\mathbb{R}} f(\rho\Theta + v\Theta^\perp) dv$.*

Preuve

Θ et Θ^\perp forment une famille libre de \mathbb{R}^2 qui est de dimension 2, il s'agit donc d'une base de \mathbb{R}^2 .

On a alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \exists!(u, v) \in \mathbb{R}^2, x = u\Theta + v\Theta^\perp.$$

Si de plus $x \in \mathcal{L}(\Theta, \rho)$ alors $\langle x, \Theta \rangle = \rho$. Or,

$$\begin{aligned} \langle x, \Theta \rangle &= \langle u\Theta + v\Theta^\perp, \Theta \rangle \\ &= u\langle \Theta, \Theta \rangle + v\langle \Theta^\perp, \Theta \rangle \\ &= u. \end{aligned}$$

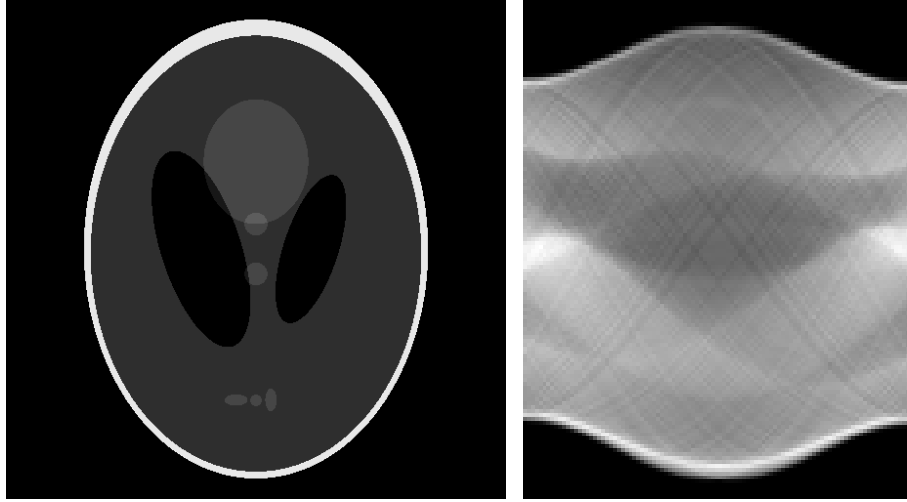


FIGURE 2: Fantôme 228x228 de Shepp Logan et sa transformée de Radon (sinogramme).

Donc

$$\forall x \in \mathcal{L}(\Theta, \rho), \exists ! v \in \mathbb{R}, x = \rho\Theta + v\Theta^\perp.$$

$$\text{D'où } \int_{\mathcal{L}(\Theta, \rho)} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(\rho\Theta + v\Theta^\perp) dv.$$

□

2 Propriétés de la transformée de Radon

Proposition 2.1 (Parité) *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ et pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathcal{R}f(\theta + \pi, -\rho) = \mathcal{R}f(\theta, \rho).$$

On peut alors restreindre le paramètre θ à l'intervalle $[0, \pi[$ et ainsi diminuer d'une moitié la quantité de données à collecter et le temps d'exposition du patient dans la phase de projections quand on réalise la technique de Tomographie.

Preuve

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\rho \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}f(\theta + \pi, -\rho) &= \int_{v \in \mathbb{R}} f(-\rho(-\Theta) + v(-\Theta^\perp)) dv \quad \text{en utilisant les propriétés de cos et sin} \\
&= \int_{v \in \mathbb{R}} f(\rho\Theta - v\Theta^\perp) dv \\
&= \int_{u \in \mathbb{R}} f(\rho\Theta + u\Theta^\perp) du \quad \text{avec le changement de variable } u = -v \\
&= \mathcal{R}f(\theta, \rho)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 2.2 (Intégrabilité des projections) *Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$ et $\theta \in [0, \pi[$ fixé. Alors la fonction $\mathcal{R}_\theta f : \rho \mapsto \mathcal{R}f(\theta, \rho)$ est intégrable sur \mathbb{R} .*

Preuve

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{R}_\theta f(\rho)| d\rho &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(\rho\Theta + v\Theta^\perp) dv \right| d\rho \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(\rho\Theta + v\Theta^\perp)| dv d\rho \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |f(\rho\Theta + v\Theta^\perp)| dv d\rho \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| dx \\
&< +\infty \quad \text{car } f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}_\theta f$ est bien intégrable.

Pour tout θ fixé, cette proposition nous permet de définir la transformée de Fourier de $\mathcal{R}_\theta f$ qui, comme on le verra dans la suite, joue un rôle important dans l'inversion de $\mathcal{R}f$.

Introduisons maintenant le théorème de la coupe centrale ou théorème de coupe projection qui nous donne une relation entre la transformée de Radon et la transformation de Fourier d'une fonction f . Ici on se concentrera sur des fonctions de l'espace de Schwartz noté $\mathcal{S}(\Omega)$ qui est l'espace des fonctions définies sur Ω infiniment dérivables et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

Tout le long de ce document et sans perte de généralité, nous utiliserons la

définition de la transformée de Fourier suivante :

$$\forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n), \forall \omega \in \mathbb{R}^n, \mathcal{T}f(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \omega, x \rangle} dx$$

Proposition 2.3 (Théorème de la coupe centrale) Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$ et $\theta \in [0, \pi[$ fixé. Alors

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\omega\Theta)$$

De plus, si f appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ alors $\mathcal{R}_\theta f$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Preuve

Soit $\theta \in [0, \pi[$ fixé. Si f appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$, alors $\mathcal{R}_\theta f$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ d'après la proposition précédente. Donc on peut calculer leur transformée de Fourier, et on a

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \mathbb{R}, \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_\theta f(\rho) e^{-i\omega\rho} d\rho \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\rho\Theta + v\Theta^\perp) dv \right) e^{-i\omega\rho} d\rho \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) e^{-i\omega\langle x, \Theta \rangle} dx \\ &= \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\omega\Theta) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que si f appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ alors $\mathcal{R}_\theta f$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En fait, comme f appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, sa transformée de Fourier \widehat{f} appartient aussi à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ car la transformation de Fourier est bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ dans lui-même. L'égalité précédente implique alors que la fonction $\widehat{\mathcal{R}_\theta f}$ est infiniment dérivable comme composition de deux fonctions infiniment dérivables (\widehat{f} et la fonction qui à ω associe $\omega\Theta$) et à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées (vu que c'est le cas pour \widehat{f}). Donc $\widehat{\mathcal{R}_\theta f}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, d'où l'on déduit que la fonction $\mathcal{R}_\theta f$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

Proposition 2.4 (Injectivité de la transformée de Radon) L'opérateur \mathcal{R} est injectif.

Preuve

La preuve de ce théorème découle directement du théorème de la coupe centrale et de l'injectivité de la transformée de Fourier.

Nous noterons dans la suite respectivement Ω et S^1 le disque et le cercle unité de \mathbb{R}^2 .

□

Proposition 2.5 (Continuité de l'opérateur \mathcal{R}) Notons $\mathbb{L}^2(S^1 \times [-1, 1])$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable définies sur $S^1 \times [-1, 1]$ muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \overline{f(\Theta, \rho)} g(\Theta, \rho) d\rho d\theta$$

L'opérateur \mathcal{R} est linéaire et continu de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(S^1 \times [-1, 1])$. Son opérateur adjoint, noté \mathcal{R}^* est continu de $\mathbb{L}^2(S^1 \times [-1, 1])$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et vérifie

$$\forall h \in \mathbb{L}^2(S^1 \times [-1, 1]), \forall x \in \Omega, \quad \mathcal{R}^* h(x) = \int_0^{2\pi} h(\Theta, \langle x, \Theta \rangle) d\theta$$

Dans la suite, sauf mention du contraire, nous considérerons des fonctions de $\mathbb{L}^2(S^1 \times [-1, 1])$.

Preuve

La preuve de cette proposition est admise.

Proposition 2.6 (Formule inverse) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{i\omega \langle x, \Theta \rangle} |\omega| d\omega d\theta$$

Preuve

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. D'après le théorème de la coupe centrale, on a :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall \theta \in [0, \pi[, \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\omega \Theta) \quad (1)$$

Or on connaît la formule d'inversion de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(s) e^{i\langle x, s \rangle} ds$$

Par passage en coordonnées polaires où $x_1 = \omega \cos \theta$ et $x_2 = \omega \sin \theta$, avec $\theta \in [0, \pi[$ et $\omega \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\pi \widehat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i\langle x, (\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \rangle} |\omega| d\theta d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{i\omega \langle x, \Theta \rangle} |\omega| d\theta d\omega && \text{d'après (1)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\pi \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{i\omega \langle x, \Theta \rangle} |\omega| d\theta d\omega \end{aligned}$$

□

Nous obtenons donc finalement une expression de f , la fonction de densité que l'on cherchait, en fonction de la transformée de Radon. Ceci dit, implémenter cette formule sur un ordinateur est une tâche pas des moins problématiques.

Montrons que cette formule peut s'exprimer à l'aide de l'opérateur adjoint \mathcal{R}^* et d'un filtre passe haut.

Définition 2.1 (Filtre linéaire) *Soit E un espace fonctionnel. Un opérateur $A : E \rightarrow E$ est un filtre linéaire si et seulement s'il existe une fonction ou une distribution h telle que :*

$$\forall f \in E, \quad Af = h * f \quad \text{avec } * \text{ l'opérateur de convolution}$$

Dans ce cas, h est appelé réponse impulsionnelle et caractérise totalement le filtre A . Une deuxième définition d'un filtre linéaire, équivalente à la première peut être donnée en considérant l'inverse de la transformée de Fourier d'un produit de convolution.

$$\exists h \in E, \forall f \in E, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad Af(\omega) = (\widehat{hf})(-\omega)$$

Reprenons l'expression de la formule inverse

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{i\omega \langle x, \Theta \rangle} |\omega| d\omega d\theta$$

Dans la formule inverse donnée plus haut, on voit apparaître l'expression du filtre Λ défini par $\widehat{\Lambda g}(\omega) = |\omega| \widehat{g}(w), \forall w \in \mathbb{R}$. La fonction de transfert de ce filtre $\widehat{h}(w) = |\omega|$ n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction mais d'une distribution tempérée.

Définition 2.2 (Distributions tempérées) *On appelle distribution tempérée sur \mathbb{R}^2 une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.*

Proposition 2.7 *Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Les opérateurs valeur principale et partie finie notés respectivement $vp \frac{1}{x}$ et $pf \frac{1}{x^2}$ définis tels que :*

$$\langle vp \frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

$$\langle pf \frac{1}{x^2}, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{|x| > \epsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\phi(0)}{\epsilon} \right)$$

sont des distributions tempérées sur \mathbb{R} et

$$\widehat{vp \frac{1}{x}} = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}$$

$$\partial vp \frac{1}{x} = -pf \frac{1}{x^2}$$

en posant $\operatorname{sgn} : \omega \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\omega}{|\omega|}$.

Preuve

Vue dans le cours "Distributions et théorie de l'échantillonnage" [MT7BM050].

Proposition 2.8 (Filtre rampe) Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'opérateur $\Lambda : g \mapsto \frac{1}{\pi} vp \frac{1}{x} * \partial g$ est bien défini et est un filtre linéaire tel que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\widehat{\Lambda g}(\omega) = |\omega| \hat{g}(\omega)$.

Preuve

Tout d'abord, on a que $vp \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\partial g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc la convolution est bien définie. On a :

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \Lambda g &= \frac{1}{\pi} vp \frac{1}{x} * \partial g \\ &= -\frac{1}{\pi} pf \frac{1}{x^2} * g \end{aligned}$$

Donc Λ est un filtre linéaire.

De plus

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall \omega \in \mathbb{R}^*, |\omega| \hat{g}(\omega) &= (i\omega \hat{g}(\omega))(-i \operatorname{sgn}(\omega)) \\ &= (i\omega \hat{g}(\omega)) \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \widehat{vp \frac{1}{x}}(\omega) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\partial g}(\omega) \times \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \widehat{vp \frac{1}{x}}(\omega) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \widehat{vp \frac{1}{x}}(\omega) \widehat{\partial g}(\omega) \\ &= \widehat{\Lambda g}(\omega) \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 2.0.1

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}^* \Lambda \mathcal{R} f(x)$$

Preuve

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Lambda \mathcal{R}_\theta f}(\omega) e^{i\omega \langle x, \Theta \rangle} d\omega d\theta \\ &= \frac{2\pi}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_0^\pi \Lambda \mathcal{R}_\theta f(\langle x, \Theta \rangle) d\theta && \text{par inversion de } T f \\ &= \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}^* \Lambda \mathcal{R} f(x) \end{aligned}$$

car, en appliquant l'opérateur adjoint \mathcal{R}^* à $\Lambda \mathcal{R} f$, on obtient $\mathcal{R}^*(\Lambda \mathcal{R} f)(x) = 2 \int_0^\pi \Lambda \mathcal{R}_\theta f(\langle x, \Theta \rangle) d\theta$. □

La méthode de reconstruction par rétroprojection filtrée consiste à appliquer l'opérateur $\mathcal{R}^* \Lambda$ au sinogramme. L'implémentation (la discrétisation) de cet opérateur est une tâche qui peut s'avérer problématique. En effet, passer des valeurs polaires aux valeurs cartésiennes dans le domaine de Fourier nécessite une étape intermédiaire d'interpolation de données. Or en appliquant cette interpolation, les valeurs dites de basses fréquences dans la grille polaire seront sur-représentées car toutes les projections (en pratique de nombre fini) s'intersectent à ce niveau ce qui crée un problème de résolution dans l'image reconstruite. Pour éviter l'apparition d'artefacts sur l'image, il est donc nécessaire d'avoir beaucoup de projections (cf figure 3).

3 Stabilité de l'inverse de la transformée de Radon entre $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ et $H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})$

L'opérateur \mathcal{R} est linéaire continu de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(S^1 \times [-1, 1])$, mais on ne peut pas construire un inverse stable de $\mathbb{L}^2(S^1 \times [-1, 1])$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. On peut le voir en considérant le disque Ω_r inclus dans le disque unité, de rayon $r < 1$ et de densité constante $\alpha_r > 0$, comme le fait Anne Bilgot dans sa thèse [Bil07]. En effet, si on calcule la transformée de Radon dans ce disque, alors en choisissant des valeurs particulières de α_r on constate que les normes \mathbb{L}^2 de f_r (fonction de densité associée à Ω_r) et de sa transformée de Radon $\mathcal{R} f_r$ ont des comportements très différents quand on fait tendre r vers 0. Par exemple pour $\alpha_r = \frac{1}{r\sqrt{r}}$, la norme \mathbb{L}^2 de la transformée de Radon reste constante alors que celle de la fonction f_r tend vers $+\infty$.

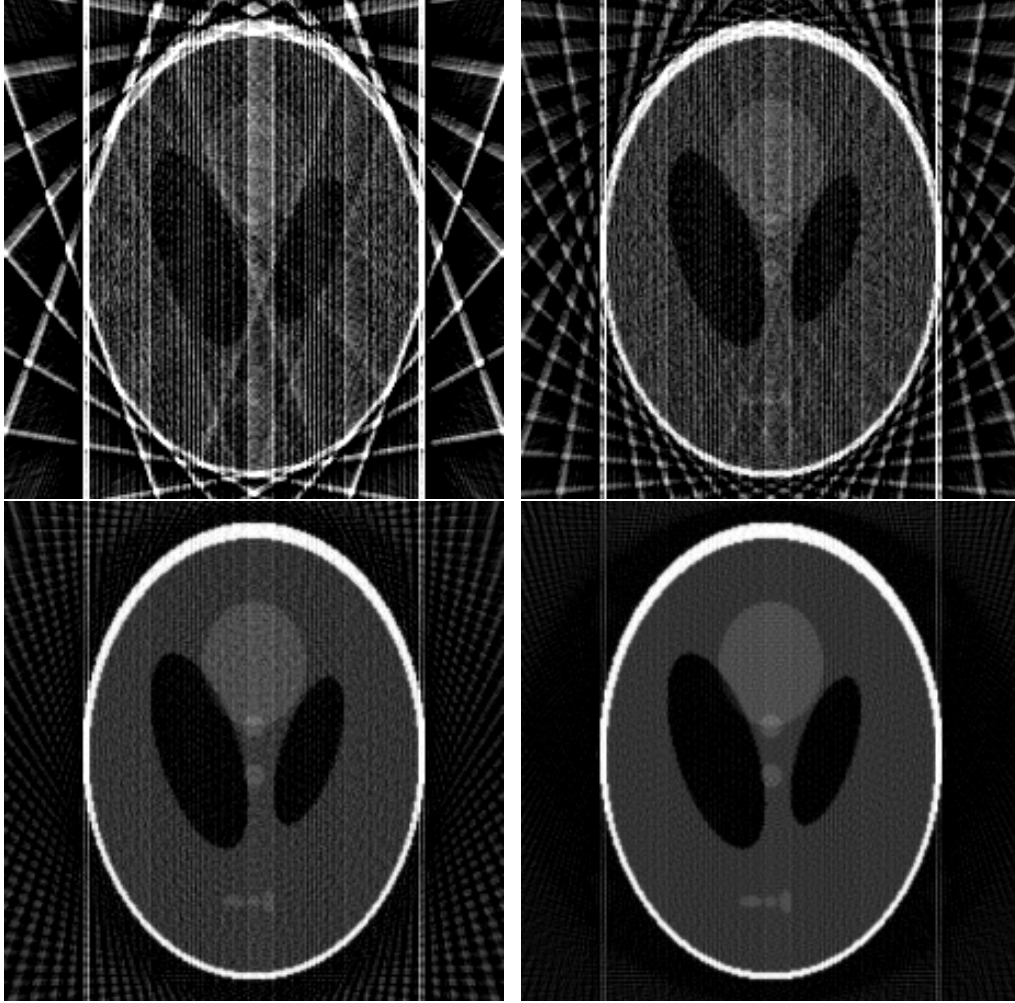


FIGURE 3: Résultat de la rétroprojection filtrée sur le fantôme de Shepp Logan avec respectivement 10, 20, 50 et 100 angles.

On verra dans la proposition suivante qu'il est possible de construire un inverse stable en considérant d'autres espaces.

Définition 3.1 (Espace de Sobolev d'ordre fractionnaire $\frac{1}{2}$) *On définit l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})$ par,*

$$H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{L}^2(S^1 \times \mathbb{R}); \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\theta, \omega)|^2 (1 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} d\omega d\theta < +\infty\}$$

Pour tous $f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})$ on pose,

$$\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})} = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\theta, \omega)|^2 (1 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} d\omega d\theta$$

Proposition 3.1 *Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$, à support compact inclus dans le disque unité de \mathbb{R}^2 , alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$2\sqrt{\pi}\|f\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|\mathcal{R}f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C\|f\|_{\mathbb{L}^2}$$

Et donc, l'application $f \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mapsto \mathcal{R}f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})$ est continue, injective, donc inversible sur son image et son inverse est continu, avec

$$\forall g \in \text{Im}(\mathcal{R}), \|\mathcal{R}^{-1}g\|_{\mathbb{L}^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

Preuve

Montrons d'abord que $f \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mapsto \mathcal{R}f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})$ est bien définie. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ que l'on prolonge par 0 sur \mathbb{R}^2 , montrons que $\mathcal{R}f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})$.

$$\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 (1 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} d\omega d\theta \leq \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 (1 + |\omega|) d\omega d\theta$$

car $\sqrt{1 + \omega^2} \leq 1 + |\omega|$ vu que $u \mapsto \sqrt{u}$ est sous additive.

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 d\omega d\theta &= \|\widehat{\mathcal{R}f}\|_{\mathbb{L}^2(S^1 \times \mathbb{R})}^2 \\ &= \|\mathcal{R}f\|_{\mathbb{L}^2(S^1 \times \mathbb{R})}^2 \\ &\leq C' \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \text{par continuité de l'opérateur } \mathcal{R} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 |\omega| d\omega d\theta &= (\widehat{\mathcal{R}f} | \omega | \widehat{\mathcal{R}f})_{\mathbb{L}^2(S^1 \times \mathbb{R})} \\ &= (\widehat{\mathcal{R}f} | \widehat{\Lambda \mathcal{R}f})_{\mathbb{L}^2(S^1 \times \mathbb{R})} \\ &= (\mathcal{R}f | \Lambda \mathcal{R}f)_{\mathbb{L}^2(S^1 \times \mathbb{R})} \quad (\text{égalités de Plancherel-Parseval}) \\ &= (f | \mathcal{R}^* \Lambda \mathcal{R}f)_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)} \quad \text{par la propriété de l'adjoint} \\ &= 4\pi (f | f)_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)} \quad \text{car } f = \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}^* \Lambda \mathcal{R}f \\ &= 4\pi \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &< +\infty \quad \text{car } f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 (1 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} d\omega d\theta &\leq \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 d\omega d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 |\omega| d\omega d\theta \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})$ et notre application est bien définie (et linéaire).
Montrons maintenant qu'elle est continue.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}f\|_{H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})}^2 &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 (1 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} d\omega d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 d\omega d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 |\omega| d\omega d\theta \\ &\leq C' \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 4\pi \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leq C \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2, \end{aligned} \quad C = C' + 4\pi$$

Donc notre application est continue et on a démontré en même temps l'inégalité de droite.

Montrons que $2\sqrt{\pi}\|f\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|\mathcal{R}f\|_{H^{\frac{1}{2}}}$.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}f\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 (1 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} d\omega d\theta \\ &\geq \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mathcal{R}_\theta f}(\omega)|^2 |\omega| d\omega d\theta \\ &= 4\pi \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

Donc on a bien, $2\sqrt{\pi}\|f\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|\mathcal{R}f\|_{H^{\frac{1}{2}}}$.

Montrons que l'application est injective.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f = 0 &\implies \|\mathcal{R}f\|_{H^{\frac{1}{2}}} = 0 \\ &\implies \|f\|_{\mathbb{L}^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \|\mathcal{R}f\|_{H^{\frac{1}{2}}} = 0 \\ &\implies f = 0 \end{aligned} \quad (\text{au sens } \mathbb{L}^2)$$

Donc $f \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mapsto \mathcal{R}f \in H^{\frac{1}{2}}(S^1 \times \mathbb{R})$ est injective, donc bijective sur son image.

L'inégalité avec l'inverse découle directement de la dernière inégalité démontrée (l'inégalité de gauche dans la proposition). Et donc l'inverse est continu.

□

4 Débruitage de l'image : Bruit de Poisson

Soit $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}, p)$ un espace de probabilité.

Dans les systèmes réels, les données récoltées souffrent inévitablement de bruits aléatoires. Deux types de bruits sont généralement présents dans les projections mesurées : les bruits électroniques et les arrondis qui peuvent être modélisés comme des bruits additifs et les bruits de Poisson liés aux détections individuelles de photons.

Dans cette partie du document, nous parlerons du deuxième type de bruit, le bruit de Poisson. Celui-ci domine le bruit additif lorsque le temps d'acquisition est court.

Notons I l'image qu'on veut reconstruire et S le sinogramme de I à la sortie c'est-à-dire l'image de I par la transformation \mathcal{R} calculée par les capteurs à photons. Pour simplifier l'écriture, on supposera que I et S sont des vecteurs colonnes de taille d obtenus en concaténant les colonnes des matrices I et S et on notera R la matrice de dimension finie "associée" à l'opérateur \mathcal{R} . RI est donc le sinogramme théorique et on a :

$$S \sim \mathcal{P}(\mathcal{R}(I)) = \mathcal{P}(RI)$$

c'est-à-dire que pour chaque coordonnée I_i du vecteur I et S_i du vecteur S , S_i suit une loi de Poisson de paramètre $(RI)_i$ indépendante de $S_j, \forall j \neq i$.

Ainsi, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, p(S_i|I) = \frac{(RI)_i^{S_i} e^{-(RI)_i}}{S_i!}$$

et donc

$$p(S|I) = \prod_{i=1}^d p(S_i|I) = \prod_{i=1}^d \frac{(RI)_i^{S_i} e^{-(RI)_i}}{S_i!}$$

Le logarithme népérien de la fonction de vraisemblance du n-échantillon $(I_i)_{i \leq d}$

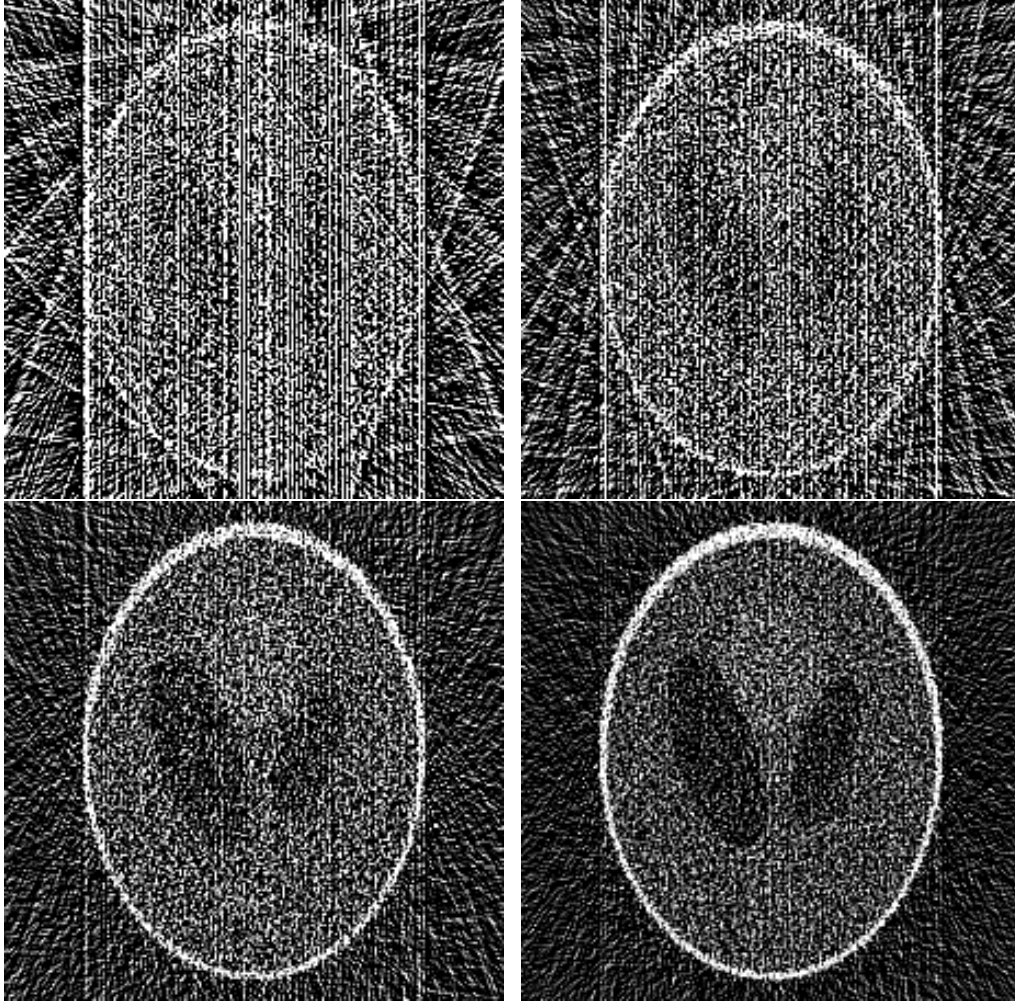


FIGURE 4: Reconstruction par retroprojection filtrée d'un sinogramme auquel on a ajouté un bruit de Poisson de paramètre le sinogramme théorique. Reconstruction avec respectivement 10, 20, 50 et 100 angles.

est :

$$\begin{aligned}
 l_{MV}(I) &= -\log(p(S|I)) \\
 &= -\sum_{i=1}^d \log\left[\frac{(RI)_i^{S_i} e^{-(RI)_i}}{S_i!}\right] \\
 &= -\sum_{i=1}^d (\log[(RI)_i^{S_i}] - (RI)_i - \log[S_i!]) \\
 &= -\log(RI)^t S + (RI)^t \mathbb{1} + \sum_{i=1}^d \log[S_i!] \\
 &= \langle \log(RI), S \rangle + \langle RI, \mathbb{1} \rangle + c \quad \text{avec } c = \sum_{i=1}^d \log[S_i!] \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Et on sait que

$$\partial_j[\langle \log(J), S \rangle - \langle J, \mathbb{1} \rangle - c] = \partial_j[S_j \log(J_j) - \partial_j J_j] = \frac{S_j}{J_j} - 1$$

Donc

$$\nabla l_{MV}(I) = R^t \left(\frac{S}{RI} - \mathbb{1} \right)$$

a. La méthode de Richardson-Lucy

On cherche le maximum de vraisemblance des $(I_i)_{i \leq d}$, ce qui revient à minimiser la fonction l_{MV} .

La fonction \log étant concave, l_{MV} est une fonction convexe et coercive donc admet bien un minimum. L'objectif est alors de trouver un vecteur I qui annule le gradient de l_{MV} . Un algorithme pour répondre à cette question est l'algorithme de descente de gradient :

$$\begin{aligned} I^{(n+1)} &= I^{(n)} - \lambda_n \nabla l_{MV}(I^{(n)}) \\ &= I^{(n)} - \lambda_n R^t \left(\frac{S}{RI^{(n)}} - \mathbb{1} \right) \end{aligned}$$

avec λ_n un pas de descente.

La méthode de Richardson-Lucy consiste à poser $\lambda_n = -\frac{I^{(n)}}{R^t \mathbb{1}}$. Notons que le pas de descente n'est pas un scalaire mais un vecteur. Ceci implique alors que le produit du pas de descente avec le gradient se fasse coordonnée par coordonnée.

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} I^{(n+1)} &= I^{(n)} + \frac{I^{(n)}}{R^t \mathbb{1}} R^t \left(\frac{S}{RI^{(n)}} - \mathbb{1} \right) \\ &= I^{(n)} + \frac{I^{(n)}}{R^t \mathbb{1}} R^t \frac{S}{RI^{(n)}} - I^{(n)} \\ &= I^{(n)} \frac{R^t \frac{S}{RI^{(n)}}}{R^t \mathbb{1}} \end{aligned}$$

Ici on se passe de faire une projection sur les I positifs à chaque itération car le terme de droite est positif dès que $I^{(1)}$ l'est.

b. Estimateur du maximum a posteriori avec une régularisation par variation totale (VT)

L'estimateur du maximum a posteriori (MAP) consiste à minimiser la fonction suivante

$$\begin{aligned} l_{MAP}(I) &= -\log(p(I|S)) \\ &= -\log(p(S|I)p(I)) \\ &= -\log(p(S|I)) - \log(p(I)) \end{aligned}$$

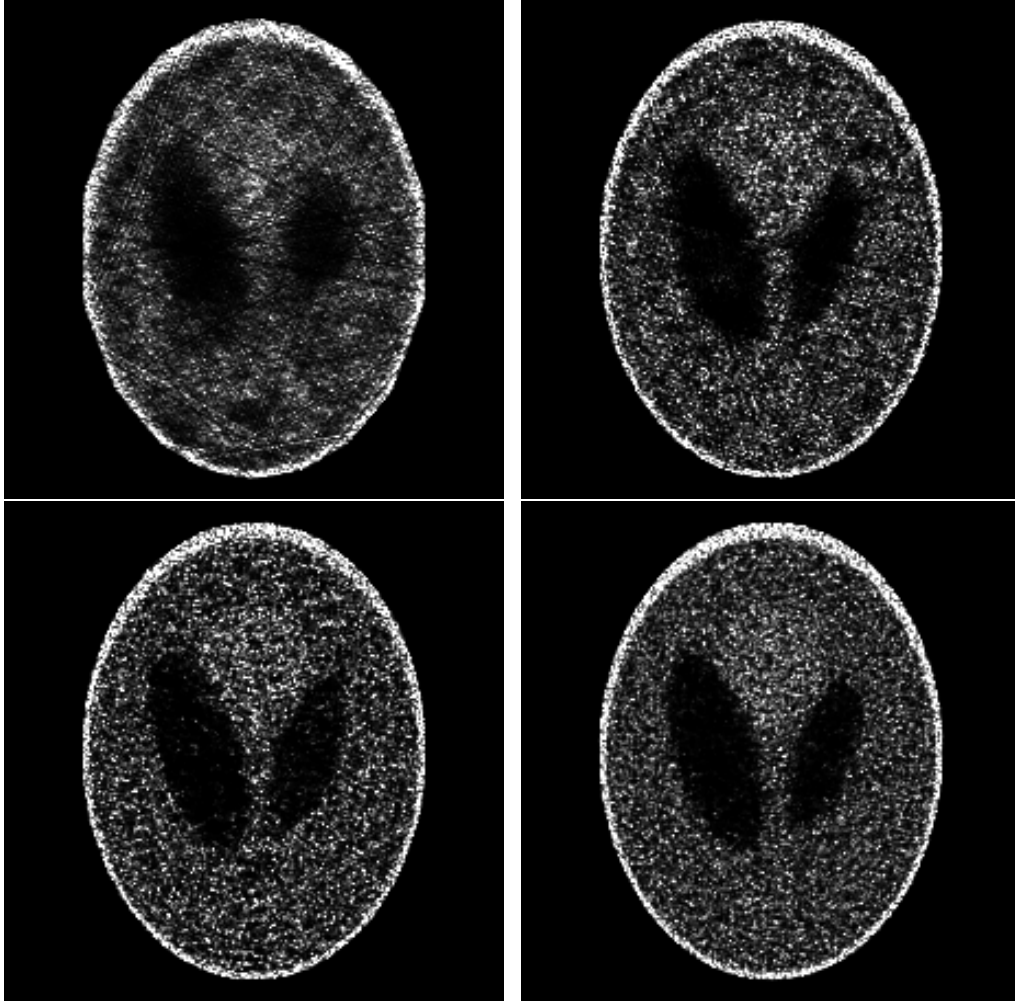


FIGURE 5: Reconstruction du sinogramme bruité avec Richardson-Lucy à 100 itérations et avec respectivement 10, 20, 50 et 100 angles.

On peut remarquer que cela revient à minimiser le maximum de vraisemblance (comme dans la méthode de Richardson-Lucy) auquel est ajouté un terme de régularisation qui permet d'éviter l'explosion du bruit.

Nous proposons d'approcher $\log(p(I))$ par la variation totale définie par $VT(I) := \sum_{k=1}^d \|\nabla I(k)\|$. La fonction à minimiser devient alors

$$l_{MAP}(I) = -\log(p(S|I)) - \sum_{k=1}^d \|\nabla I(k)\| \quad (2)$$

Ici nous ne pouvons pas appliquer une méthode de descente de gradient comme fait plus haut car la variation totale n'est pas différentiable sur tout \mathbb{R}^d .

En effet, $\forall k \in \{1, \dots, d\}$, $\|\nabla I(k)\| = \sqrt{(\partial_1 I(k))^2 + \dots + (\partial_d I(k))^2}$ et la fonction

racine carré n'est pas différentiable en $I = 0_{\mathbb{R}^d}$.

Pour minimiser VT , il nous faut alors un algorithme qui ne requiert pas de conditions de différentiabilité : la descente de sous gradient.

Définition 4.1 (Espace Γ_0) Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

$$f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \begin{cases} f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ est convexe} \\ f \text{ est propre : } \exists x \in \mathbb{R}^d, f(x) \neq +\infty \\ f \text{ est semi-continue inférieurement : } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x \in \mathbb{R}^d, f(x) \leq \alpha\} \text{ est fermé} \end{cases}$$

Définition 4.2 (Sous-gradient) Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$. Le vecteur $g \in \mathbb{R}^d$ est un sous-gradient de f au point x si et seulement si

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, f(y) \geq f(x) + \langle g, y - x \rangle$$

Théorème 4.1 (Existence d'un sous-gradient) Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$. Alors f admet au moins un sous-gradient en tout point x intérieur à son domaine $D_f := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < +\infty\}$.

Descente de sous-gradient projeté

Soit $\epsilon > 0$. Posons $E = [\epsilon, +\infty[^d$.

- a. Initialisation : $I \in E$
- b. Itérations : $I^{(n+1)} = \pi_E(I^{(n)} - \frac{\alpha_n}{\|g_n\|} g_n)$ avec g_n sous-gradient de f en $I^{(n)}$, α_n un pas de descente et π_E la projection sur E .

On remarque qu'ici, pour garantir que $I^k \in E, \forall k$ et ainsi la définition du logarithme dans la formule (2), on effectue une projection sur E à chaque itération de l'algorithme.

Une condition nécessaire à la convergence de cet algorithme est de prendre la suite $(\alpha_n)_n$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$ et $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_+$.

c. Méthode primal-duale

Il est possible de montrer que pour tout algorithmes basés sur une méthode du premier ordre reposant sur les sous-gradients il existe une fonction $h \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$ telle que $h(x_n) = \min_x h(x)$ ne converge pas plus rapidement que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (ça a été fait par Polyak(1987) et Nesterov(2004)). Dans cette partie nous introduisons un algorithme décrit dans un article de A. Chambolle et T. Pock [CP16] et qui est basé sur la méthode primal-duale. Nous verrons plus bas que cette dernière a une meilleure vitesse de convergence.

Rappelons qu'on cherche à résoudre le problème suivant :

$$\min_{I \geq 0} g(I) + f(DI)$$

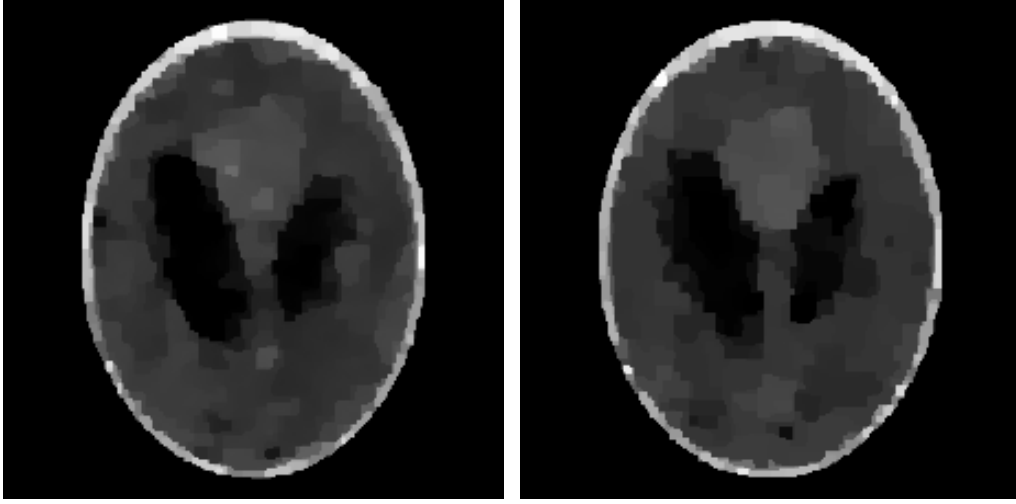


FIGURE 6: Résultat de l'estimateur MAP sur un fantôme Shepp Logan avec 20 angles respectivement à 1000 et 10.000 itérations

où $f = \|\cdot\|_{2,1}$, $g : I \in \mathbb{R}^d \mapsto -\log(p(S|I))$ et $D : \mathbb{R}^d \longrightarrow (\mathbb{R}^2)^d$ est l'opérateur linéaire associé au gradient discret.

Définition 4.3 (Transformée de Legendre-Fenchel) Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Legendre-Fenchel est la fonction f^* définie par

$$f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle - f(y), \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Proposition 4.1 Soit $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Legendre-Fenchel f^* est convexe et vérifie

$$(f^*)^* = f$$

Preuve Admise. □

Proposition 4.2 Soient $f, g \in \Gamma_0(\mathbb{R}^d)$ et $K : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire, alors on a

$$\min_{x \in X} g(x) + f(Kx) = \min_{x \in X} (\sup_{y \in Y} \langle y, Kx \rangle - f^*(y) + g(x))$$

où f^* est la transformée de Legendre-Fenchel de f aussi appelé la fonction conjuguée de f .

Preuve La preuve est une application directe de la proposition 4.1 (et de la définition de la transformée de Legendre-Fenchel). □

Définition 4.4 (fonction indicatrice d'un ensemble) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, alors la fonction indicatrice de l'ensemble E est définie par

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 4.3 (fonction conjuguée d'une norme) Si $f = \|\cdot\|_{p,1}$ alors $f^* = I_B$ où $B = B_{\|\cdot\|_{q,\infty}}$ est la boule unité par rapport à la norme $\|\cdot\|_{q,\infty}$ et q vérifie $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Notre problème rentre bien dans le cadre de la proposition (4.1) et donc en utilisant la proposition (4.2) on peut le réécrire de la façon suivante

$$\begin{aligned} \min_{I \geq 0} g(I) + f(DI) &= \min_{I \geq 0} (\sup_{J \in (\mathbb{R}^2)^d} \langle J, DI \rangle - I_B(J) + g(I)) \\ &= \min_{I \geq 0} (\sup_{J \in B} \langle J, DI \rangle + g(I)) \end{aligned}$$

car $J \notin B$ implique que $-I_B(J) = -\infty$ et donc le sup est atteint dans B .

On retrouve donc la forme standard des problèmes primal-duals.

La forme générale des algorithmes permettant la résolution de ce type de problème est décrite ci-dessous :

Initialisation : $I^{(0)}, J^{(0)}$ dans \mathbb{R}^d ; $\tau, \sigma > 0$.

$$\text{Itérations : } \begin{cases} I^{(n+1)} = \pi_{\mathbb{R}^+}(I^{(n)} - \tau(\nabla g(I^{(n)}) + D^*J^{(n)})) \\ \tilde{I}^{(n+1)} = 2I^{(n+1)} - I^{(n)} \\ J^{(n+1)} = \pi_B(J^{(n)} + \sigma D\tilde{I}^{(n+1)}) \end{cases}$$

où D^* est l'adjoint de l'opérateur du gradient discret, $\pi_{\mathbb{R}^+}$ et π_B sont les projections respectives sur $(\mathbb{R}^+)^d$ et sur B .

Proposition 4.4 (convergence de la méthode primal-duale) Soient $\tau, \sigma > 0$, $L = \|D\|$ et L_g la constante de Lipschitz du gradient de g , si

$$\left(\frac{1}{\tau} - L_g\right)\frac{1}{\sigma} \geq L^2$$

alors l'algorithme précédent converge en $O(\frac{1}{n})$.

Conclusion

Dans ce document nous avons présenté 4 méthodes permettant la reconstruction d'une image en fonction de sa transformée de Radon (sinogramme) et nous avons pu en tester 3 qui ont chacune leurs avantages et inconvénients.

La Rétro-projection-filtrée (RPF) qui est la première méthode que nous avons vu permet, en l'absence de bruit, d'avoir une reconstruction presque à l'identique de

l'image d'origine avec éventuellement quelques artefacts qui s'estompent quand on augmente le nombre de projections. Donc pour cette méthode la précision de la reconstruction se paye par une augmentation de la quantité de donnée à traiter et donc du temps d'acquisition ce qui pose problème, par exemple, dans le cas de l'imagerie in vivo. La RPF constituerait tout de même un outil très puissant si elle fonctionnait aussi bien en pratique mais ce n'est pas le cas, en effet comme nous l'avons remarqué au cours de nos expériences cette méthode ne permet pas d'obtenir des images exploitables lorsque les données sont trop bruitées et ce peut importe le nombre de projections. Pour palier à ce problème nous avons introduit un algorithme itératif basé sur la méthode de Richardson -Lucy. Ce dernier paraissait prometteur dans le sens où avec très peu d'itérations on obtenait des résultats nettement meilleures que celles de la RPF mais très vite on s'est rendu compte que le bruit persistait et même qu'il augmentait légèrement au fur et à mesure des itérations sur la zone d'intérêt du fantôme de Shepp-Logan.

Avec ces deux premières méthodes notre problème reste irrésolu car même si elles permettent de reproduire la forme de l'objet, le niveau de détail reste insuffisant pour une application dans le domaine médical où des vies sont en jeu et donc chaque détail compte. C'est seulement avec la troisième méthode basé sur l'estimateur du maximum a priori que nous avons pu obtenir des résultats encourageants, en effet on sait que cette méthode converge en un temps fini et on a pu avoir des images très lisses et donc proches de l'image d'origine avec peu de projections. On pourrait imaginer qu'avec cette méthode le patient passerait moins de temps dans la machine lors de la phase d'acquisition ce qui réduit les risques de surexposition aux rayons x. Cette méthode présente néanmoins un gros inconvénient qui est sa lenteur ce qui la rend peu adaptée à la médecine moderne. Enfin nous avons introduit la méthode primal-dual que nous n'avons pas pu tester mais qui est supposée être très efficace en terme d'atténuation du bruit et beaucoup plus rapide que la précédente.

Bibliographie

- [Cha04] Antonin CHAMBOLLE. « An algorithm for total variation minimization and applications ». In : (2004).
- [Zha06] Xiaoqun ZHANG. « Reconstruction et régularisation en tomographie par une méthode de Fourier basée sur la variation totale ». Nov. 2006.
- [Bil07] Anne BILGOT. « Méthodes locales d'identification de surfaces de discontinuité à partir de projections tronquées pour l'imagerie interventionnelle ». Oct. 2007.
- [CP16] Antonin CHAMBOLLE et Thomas POCK. « An introduction to continuous optimization for imaging ». In : (2016).
- [Wet] Gordon WETZSTEIN. « Computational Imaging and Display ». In :
- [Wik] WIKIPÉDIA. *Richardson-Lucy deconvolution*. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Richardson%E2%80%93Lucy_deconvolution (visité le 18/03/2021).