那些我曾经懂过的问题

Salieri

2022 年 12 月 4 日

前言

此笔记总结我在学习过程中遇到的各种细节问题。

Salieri

2022 年 12 月 4 日

目录

第一章　凝聚态场论、量子多体

1.1　电、声子有效相互作用

第二章　量子信息

2.1　Multipartite Entanglement

第三章　量子场论

3.1　同一粒子的不同表示

3.2　Dirac,Weyl and Majorana fermions

[1] 简单来讲，Dirac fermion 是 Dirac 方程的一般解，Majorana fermion 是 Dirac 方程的“实”解，Weyl fermion 是无质量 Dirac 方程的解。

3.2.1　Dirac 方程及其解

Dirac 方程定义为：

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\Psi = 0 \tag{3.1}$$

它可以看作具有如下哈密顿量的薛定谔方程：

$$H = \gamma^{0}\left(\gamma^{i}p^{i} + m\right) \tag{3.2}$$

γ 矩阵定义为：

$$\begin{aligned} &[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = 2g^{\mu\nu}, \\ &\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu^{\dagger} \end{aligned} \tag{3.3}$$

可以看到，当 γ 矩阵为纯虚时，Dirac 方程为实方程，有实解。我们可以找到一组 γ 矩阵满足这样的条件，这个表象称为 Majorana 表象。

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\gamma}^1 = \begin{bmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\gamma}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{bmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 σ^i 为 Pauli 矩阵。在此表象下写出 Dirac 方程，我们有实解：

$$\widetilde{\psi} = \tilde{\psi}^\star \tag{3.5}$$

此解即代表 Majorana fermion。γ 矩阵不同表示之间通过幺正变换相联系：

$$\gamma^\mu = U\tilde{\gamma}^\mu U^\dagger \tag{3.6}$$

此时解 $\tilde{\Psi}$ 与 Majorana 表象下的解也通过一个幺正矩阵相联系：

$$\Psi = U\tilde{\Psi} \tag{3.7}$$

实解条件(3.5)此时为

$$\psi = UU^\top \psi^\star \tag{3.8}$$

我们一般不直接使用幺正矩阵 U，而是转而定义如下矩阵：

$$UU^\top = \gamma_0 C \tag{3.9}$$

由此定义协变共轭（协变性将在稍后证明）：

$$\hat{\Psi} \equiv \gamma_0 C \Psi^\star \tag{3.10}$$

此时实解条件(3.5)可以写为：

$$\hat{\psi} = \psi \tag{3.11}$$

3.2.2 Fourier 展开

一个 Majorana fermion 解在一般的表象下的 Fourier 展开为:

$$\psi(x) = \sum_s \int_p \left(a_s(p)u_s(p)e^{-ip\cdot x} + a_s^\dagger(p)v_s(p)e^{+ip\cdot x}\right) \tag{3.12}$$

v 和 u 互为协变共轭 $v_s(p) = \gamma_0 C u_s^\star(p)$

3.2.3 矩阵 C 的一些性质

除了通过找到实解对应的 Majorana 表象外，我们还可以通过研究 C 矩阵本身的性质来定义一组 C 矩阵，再由此找到不依赖于表象的"实解"条件。

简单观察可以发现，C 矩阵满足如下性质:

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\left(U\tilde{\gamma}_\mu U^\dagger\right)^\top = -\gamma_\mu^\top \tag{3.13}$$

事实上，对于任何表象的 γ 矩阵我们总可以找到满足上式的 C 矩阵，此式可以直接称为 C 矩阵的定义，由此我们有一般情况的实解条件(3.11)

3.3 Pology

3.4 Noether 定理与 local 对称性

3.5 规范场的量子化:QED, 非阿贝尔, 与凝聚态中的电磁场路径积分

第四章　张量网络

参考文献

[1] P. B. Pal, "Dirac, majorana, and weyl fermions," *American Journal of Physics*, vol. 79, no. 5, pp. 485–498, 2011.