那些我曾经懂过的问题

Salieri

2022 年 12 月 16 日

前言

此笔记总结我在学习过程中遇到的各种细节问题。

Salieri
2022 年 12 月 16 日

目录

第一章　凝聚态场论、量子多体

1.1　二次量子化中的一些细节

1.1.1　一次算符与二次算符的关系

1.1.2　波函数规范变换与产生算符对应的变换

ref:AltlandP573

1.2　平均场近似，高斯近似，鞍点近似，Product State

1.3　电、声子有效相互作用

1.4　Goldstone 定理 (经典)

考虑一个理论涉及若干个场 $\phi^a(x)$，具有如下形式的拉氏量：

$$\mathcal{L} = (\text{ terms with derivatives }) - V(\phi) \tag{1.1}$$

令 ϕ_a^0 为最小化 V 的恒定场，即

$$\left.\frac{\partial}{\partial \phi^a} V\right|_{\phi^a(x)=\phi_0^a} = 0.$$

将 V 在极小值附近展开，有：

$$V(\phi) = V\left(\phi_0\right) + \frac{1}{2}\left(\phi-\phi_0\right)^a\left(\phi-\phi_0\right)^b\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^a \partial \phi^b} V\right)_{\phi_0} + \cdots .$$

定义取二次项的系数作为矩阵，由于是在极小值展开，矩阵是半正定的，本征值就是质量。下面开始正式证明 Goldstone 定理。考虑某一般的连续对称变换：

$$\phi^a \longrightarrow \phi^a + \alpha\Delta^a(\phi) \tag{1.2}$$

α 是无限小参数，Δ^a 是一个关于所有场的函数。考虑退化到恒定场的情况，此时含导数项自动为零，因此势能本身就需要不变，即

$$\Delta^a(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi^a}V(\phi) = 0$$

此式再对 ϕ^b 求导，并取 $\phi = \phi_0$:

$$0 = \left(\frac{\partial\Delta^a}{\partial\phi^b}\right)_{\phi_0}\left(\frac{\partial V}{\partial\phi^a}\right)_{\phi_0} + \Delta^a\left(\phi_0\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\partial\phi^b}V\right)_{\phi_0}$$

由于 ϕ_0 使得 V 最小，第一项自动为 0，因此第二项也等于零。若对称性依然对于场 ϕ_0 成立，$\Delta^a(\phi_0) = 0$。若发生自发对称性破缺，则二阶导项为零，即质量为零。

第二章　量子信息

2.1 Multipartite Entanglement

第三章 量子场论

3.1 同一粒子的不同表示

3.2 Dirac,Weyl and Majorana fermions

[1] 简单来讲，Dirac fermion 是 Dirac 方程的一般解，Majorana fermion 是 Dirac 方程的“实”解，Weyl fermion 是无质量 Dirac 方程的解。

3.2.1 Dirac 方程及其解

Dirac 方程定义为：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi = 0 \tag{3.1}$$

它可以看作具有如下哈密顿量的薛定谔方程：

$$H = \gamma^0\left(\gamma^i p^i + m\right) \tag{3.2}$$

γ 矩阵定义为：

$$\begin{aligned} &[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}, \\ &\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger \end{aligned} \tag{3.3}$$

可以看到，当 γ 矩阵为纯虚时，Dirac 方程为实方程，有实解。我们可以找到一组 γ 矩阵满足这样的条件，这个表象称为 Majorana 表象。

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\gamma}^1 = \begin{bmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\gamma}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{bmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 σ^i 为 Pauli 矩阵。在此表象下写出 Dirac 方程，我们有实解：

$$\widetilde{\psi} = \tilde{\psi}^\star \tag{3.5}$$

此解即代表 Majorana fermion。γ 矩阵不同表示之间通过幺正变换相联系：

$$\gamma^\mu = U\tilde{\gamma}^\mu U^\dagger \tag{3.6}$$

此时解 $\tilde{\Psi}$ 与 Majorana 表象下的解也通过一个幺正矩阵相联系：

$$\Psi = U\tilde{\Psi} \tag{3.7}$$

实解条件(3.5)此时为

$$\psi = UU^\top \psi^\star \tag{3.8}$$

我们一般不直接使用幺正矩阵 U，而是转而定义如下矩阵：

$$UU^\top = \gamma_0 C \tag{3.9}$$

由此定义协变共轭（协变性将在稍后证明）：

$$\hat{\Psi} \equiv \gamma_0 C \Psi^\star \tag{3.10}$$

此时实解条件(3.5)可以写为：

$$\hat{\psi} = \psi \tag{3.11}$$

3.2.2 Fourier 展开

一个 Majorana fermion 解在一般的表象下的 Fourier 展开为：

$$\psi(x) = \sum_s \int_p \left(a_s(p)u_s(p)e^{-ip\cdot x} + a_s^\dagger(p)v_s(p)e^{+ip\cdot x}\right) \tag{3.12}$$

v 和 u 互为协变共轭 $v_s(p) = \gamma_0 C u_s^\star(p)$

3.2.3 矩阵 C 的一些性质

除了通过找到实解对应的 Majorana 表象外，我们还可以通过研究 C 矩阵本身的性质来定义一组 C 矩阵，再由此找到不依赖于表象的“实解”条

件。
简单观察可以发现，C 矩阵满足如下性质：

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\left(U\tilde{\gamma}_\mu U^\dagger\right)^\top = -\gamma_\mu^\top \tag{3.13}$$

事实上，对于任何表象的 γ 矩阵我们总可以找到满足上式的 C 矩阵，此式可以直接称为 C 矩阵的定义，由此我们有一般情况的实解条件(3.11) 同时，很容易验证 C 矩阵在任意表象下都是完全反对称矩阵。

3.2.4 实条件的洛伦兹不变性

此节将阐述为什么称(3.10)为协变共轭，我们取 Lorentz 变换的生成元为 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$，注意，这并非 Pauli 矩阵。一个 fermion 场的变换为：

$$\Psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\Psi(x) \tag{3.14}$$

对上式取复共轭并左乘 $\gamma_0 C$，注意到 γ 矩阵的性质，可以推出：

$$\widehat{\Psi}'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\widehat{\Psi}(x) \tag{3.15}$$

由此可以看出，协变共轭场于原场具有相同的洛伦兹变换规则，所以实解条件是洛伦兹不变的。

3.2.5 左与右

在处理费米场时，我们通常会遇到两个和左右有关的概念，螺旋度（helicity）和手性（chirality），两者通常并不相同，但在某些情况下又有关联，本节将阐述这种关联。

螺旋度 满足 Dirac 方程的费米子额度螺旋度定义为：

$$h_p = \frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{\mathrm{p}} \tag{3.16}$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ 为自旋矩阵。很显然，h_p 的本征值为 ± 1，分别对应“右手”和“左手”。可以验证 h_p 与哈密顿量对易，也就是说它是一个守恒量，并且其点乘结构也保证了旋转不变形，但可以验证对于有质量粒子，螺旋度在推动下是改变

的。一个简单的论证是考虑螺旋度的物理意义：自旋在动量方向上的投影，考虑在粒子速度方向上一运动更快的参考系，此时动量反号，但自旋投影在该 boost 下不改变，因此螺旋度改变。上面的论述依赖于速度更快的参考系，这对无质量粒子是不可能的，因此这暗示无质量粒子的螺旋度是一个真正的洛伦兹不变量。

手性 可以额外定义一个矩阵 γ_5，它满足：

$$[\gamma_5, \gamma_\mu]_+ = 0 \quad \forall \mu \tag{3.17}$$

一个显然的解是：

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{3.18}$$

给上式乘上额外的相因子也是满足定义的，上述的选择保证了 γ_5 有如下性质：

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad (\gamma_5)^2 = 1 \tag{3.19}$$

后者保证了如下定义的两个矩阵确实是投影算符：

$$L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \tag{3.20}$$

两者的本征空间里的矢量分别称为“左手”的和“右手”的。每个 Dirac 旋量也总可以拆分成两者之和。可以验证，γ_5 与洛伦兹变换的生成元对易，但与哈密顿量不对易，这是由于质量相含一个 γ 矩阵, 因此和 γ_5 反对易。

3.2.6 Wyle fermion

如前文所述，质量项同时阻碍了螺旋度和手性成为性质良好的物理量，因此我们考虑无质量费米子。由于 γ_5 的存在以及 Schur 引理，一般的 Dirac 方程解并非 Lorentz 群的不可约表示，而手性解是可约的，称为 Wyle fermion。一个一般的费米子是可约表示 $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$, 即一个左手 Wyle 一个右手 Wyle。上述说法对螺旋度同样适用，因为无质量时两者相同。

3.2.7 从 Wyle 费米子到 Majorana 与 Dirac 费米子

Majorana fermion 是含有质量的，因此必须包含左右手两部分，考虑到实条件，这必须是一个 Wyle 场与它的协变共轭：

$$\psi(x) = \chi(x) + \widehat{\chi}(x) \tag{3.21}$$

而 Dirac fermion 的区别就是没有实解条件，因此两个左手、右手场之间独立：

$$\Psi(x) = \chi_1(x) + \widehat{\chi}_2(x) \tag{3.22}$$

3.3 Pology

3.4 Noether 定理与 local 对称性

3.5 规范场的量子化:QED, 非阿贝尔, 与凝聚态中的电磁场路径积分

3.6 外场与有效作用量

3.6.1 来自热力学的类比

考虑一个磁性系统，配分函数以及 Helmholtz 自由能为：

$$Z(H) = e^{-\beta F(H)} = \int \mathcal{D}s \exp\left[-\beta \int dx(\mathcal{H}[s] - Hs(x))\right] \tag{3.23}$$

H 为外加磁场。磁化强度可以通过对 Helmholtz 自由能求导得到：

$$\begin{aligned} -\left.\frac{\partial F}{\partial H}\right|_{\beta \text{ fixed}} &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\log Z \\ &= \frac{1}{Z}\int dx \int \mathcal{D}s s(x) \exp\left[-\beta \int dx(\mathcal{H}[s] - Hs)\right] \\ &= \int dx \langle s(x) \rangle \equiv M. \end{aligned}$$

Gibbs 自由能通过 Legendre 变换得到

$$G = f + MH$$

外场可以对 Gibbs 自由能求导得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial M} &= \frac{\partial F}{\partial M} + M\frac{\partial H}{\partial M} + H \\ &= \frac{\partial H}{\partial M}\frac{\partial F}{\partial H} + M\frac{\partial H}{\partial M} + H \\ &= H \end{aligned} \tag{3.24}$$

当 $H=0$ 时，Gibbs 自由能取极值，热力学上最稳定的态由 $G(M)$ 的最小值给出。通过类比，我们也可以在 QFT 中构造相似的量，为方便仅考虑标量场。

3.6.2 有效作用量的引入

标量场的生成函数为:

$$Z[J]=e^{-iE[J]}=\int \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int d^4x(\mathcal{L}[\phi]+J\phi)\right] \tag{3.25}$$

一般而言通常的记号并非 $E(J)$, 而是 $W(J)$, 后文中可能交替使用两种记号。可以看出 $E(J)$ 可以类比 Helmholtz 自由能，它的物理意义是真空-真空振幅的联通部分。J 类比外磁场。之后的讨论中我们假定 J 是均匀的，通过泛函的一些技巧我们很容易推广到一般的场。
令 $E(J)$ 对 J 求泛函导数，有:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}E[J]=i\frac{\delta}{\delta J(x)}\log Z=-\frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}} \tag{3.26}$$

将上式简记为:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}E[J]=-\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle_J \tag{3.27}$$

等式右侧为有场 J 时 ϕ 的真空期望。注意到热力学中和外场共轭的物理量也是内场的平均值，因此我们定义:

$$\phi_{\mathrm{cl}}(x)=\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle_J \tag{3.28}$$

由此定义 Gibbs 自由能的 QFT 类比, 即 $E(J)$ 的 Legendre 变换 [1]

$$\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]\equiv -E[J]-\int d^4yJ(y)\phi_{\mathrm{cl}}(y) \tag{3.30}$$

[1]在 Weinberg 等教材中，此处的 Legendre 变换定义略有不同，并没有取场在源 J 的真空期望值作为 Legendre 变换中和 J 共轭的量，而是定义 J_ϕ 为产生期望值为 ϕ^r 的流，再定义 Legendre 变换:

$$\Gamma[\phi]\equiv-\int \mathrm{d}^4x\phi^r(x)J_{\phi r}(x)+W\left[J_\phi\right] \tag{3.29}$$

后文在计算有效作用量时主要采用了这个定义

对经典场再求泛函导数，有:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right] &= -\frac{\delta}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}E[J] - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}\phi_{\mathrm{cl}}(y) - J(x) \\
&= -\int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}\frac{\delta E[J]}{\delta J(y)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}\phi_{\mathrm{cl}}(y) - J(x) \\
&= -J(x).
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

热力学和 QFT 的类比总结如图 3.1:
很容易看出，当外场为零时，有:

Magnetic System	Quantum Field Theory
$\mathbf{x}$	$x=(t,\mathbf{x})$
$s(\mathbf{x})$	$\phi(x)$
H	$J(x)$
$\mathcal{H}(s)$	$\mathcal{L}(\phi)$
$Z(H)$	$Z[J]$
$F(H)$	$E[J]$
M	$\phi_{\mathrm{cl}}(x)$
$G(M)$	$-\Gamma[\phi_{\mathrm{cl}}]$

图 3.1: 热力学与 QFT 类比

$$
\frac{\delta}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right] = 0 \tag{3.32}
$$

此方程的解就是理论中的稳定构型。对于平移不变的真空态，解是不依赖于 x 的，但有时也会有额外的解称为瞬子。
在此假设考虑的理论中可能的真空态在平移以及 Lorentz 变换下总是不变的，此时方程变为非常简单的非泛函方程，进一步我们知道 Γ 是一个广延量，它正比于我们所选取的时空体积:

$$
\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right] = -(VT)\cdot V_{\mathrm{eff}}\left(\phi_{\mathrm{cl}}\right) \tag{3.33}
$$

系数 $V_{\mathrm{eff}}\left(\phi_{\mathrm{cl}}\right)$ 称为有效势。$\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]$ 取极值的条件简化为 $V_{\mathrm{eff}}\left(\phi_{\mathrm{cl}}\right)$ 取极值。

3.6.3 有效作用量的性质

先给出结论：我们知道 $Z[J]$ 是关联函数的生成泛函，而 $\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]$ 是单粒子不可约关联函数的生成泛函。为看出这一点，从两点关联函数算起。

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 E[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} &= -\frac{i}{Z}\int \mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)\phi(y)\\ &+\frac{i}{Z^2}\int \mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)\cdot\int \mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(y)\\ &= -i[\langle\phi(x)\phi(y)\rangle-\langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle].\end{aligned} \tag{3.34}$$

非连通部分刚好被抵消，对更高阶的泛函导数也有相同的结果 (link cluster theorem)，因此有：

$$\frac{\delta^n E[J]}{\delta J\left(x_1\right)\cdots\delta J\left(x_n\right)} = (i)^{n+1}\left\langle\phi\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\right\rangle_{\text{conn}} \tag{3.35}$$

现在开始考虑 γ, 对(3.32)求场 $J(y)$ 的泛函导数有：

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)} = -\delta(x-y)$$

利用链式法则展开左式：

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= -\int d^4z\frac{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(z)}{\delta J(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(z)\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}\\ &= \int d^4z\frac{\delta^2 E}{\delta J(y)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(z)\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}\\ &= \left(\frac{\delta^2 E}{\delta J\delta J}\right)_{yz}\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}\delta\phi_{\mathrm{cl}}}\right)_{zx}\end{aligned} \tag{3.36}$$

可以看到这两个无限维矩阵互为逆：

$$\left(\frac{\delta^2 E}{\delta J\delta J}\right) = \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}\delta\phi_{\mathrm{cl}}}\right)^{-1} \tag{3.37}$$

已知左式为连通两点关联函数，即传播子，因此右式为传播子的逆。到动量空间可以更容易看出物理意义：

$$\widetilde{D}^{-1}(p) = -i\left(p^2-m^2-M^2\left(p^2\right)\right)$$

$M^2(p^2)$ 是自能函数，是所有单粒子不可约两点图的求和。进一步求泛函导数，用链式法则改写求导：

$$\frac{\delta}{\delta J(z)}=\int d^4w\frac{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(w)}{\delta J(z)}\frac{\delta}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(w)}=i\int d^4wD(z,w)\frac{\delta}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(w)}$$

并利用矩阵逆求导的法则：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}M^{-1}(\alpha)=-M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\alpha}M^{-1}$$

继续对(3.36)求泛函导数，有：

$$\begin{aligned}\frac{\delta^3E[J]}{\delta J_x\delta J_y\delta J_z}&=i\int d^4wD(z,w)\frac{\delta}{\delta\phi_w^{\mathrm{cl}}}\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_x^{\mathrm{cl}}\delta\phi_y^{\mathrm{cl}}}\right)^{-1}\\&=i\int d^4wD_{zw}(-1)\int d^4u\int d^4v\left(-iD_{xu}\right)\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_u^{\mathrm{cl}}\delta\phi_v^{\mathrm{cl}}\delta\phi_w^{\mathrm{cl}}}\left(-iD_{vy}\right)\\&=i\int d^4ud^4vd^4wD_{xu}D_{yv}D_{zw}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_u^{\mathrm{cl}}\delta\phi_v^{\mathrm{cl}}\delta\phi_w^{\mathrm{cl}}}\end{aligned}$$

深灰圈表示连通图的求和，浅灰圈表示量子作用量的三阶泛函导数，可以

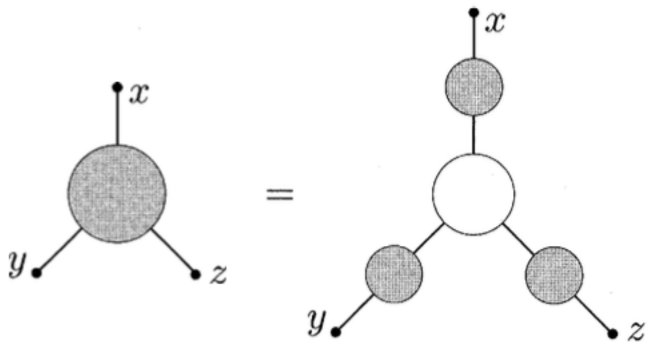

图 3.2: 三点关系的图像表示

看出它代表所有完全传播子移除后的连通三点关联函数，即单粒子不可约三点函数：

$$\frac{i\delta^3\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)\phi_{\mathrm{cl}}(y)\phi_{\mathrm{cl}}(z)}=\langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)\rangle_{\mathrm{1PI}}$$

继续求导，可以总结出以下关系：

$$\frac{\delta^n\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}\left(x_1\right)\cdots\delta\phi_{\mathrm{cl}}\left(x_n\right)}=-i\left\langle\phi\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\right\rangle_{\mathrm{1PI}}\tag{3.38}$$

因此我们得出，量子有效作用量是单粒子不可约关联函数的生成泛函。因此，类比 $W(J)$ 是所有连通真空-真空图的求和，$\Gamma[\phi_{cl}]$ 是所有单粒子不可约连通图的求和。
若将生成泛函中的经典作用量 $I[\phi]$ 直接换成量子有效作用量 $\Gamma[\phi]$，则有:

$$Z_\Gamma[j] = e^{W_\Gamma[j]} = \int [D\phi(x)] \exp\left[i\Gamma[\phi(x)] + i\int d^4x j(x)\phi(x)\right] \tag{3.39}$$

我们将证明，这个生成泛函所代表的真空-真空振幅的连通树图部分给出了原本经典作用量 $I[\phi]$ 的理论的所有阶贡献。为分离出树图部分，引入一个常数试图标记不同部分的贡献:

$$Z_r[j;\hbar] = e^{w_r[j;\hbar]} = \int [D\phi(x)] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\Gamma[\phi(x)] + \int d^4x j(x)\phi(x)\right)\right] \tag{3.40}$$

传播子给出贡献 $\hbar$，顶点给出贡献 $\hbar^{-1}$，又拓扑恒等式，圈数 n_L、内线数 I，顶点数 V 有关系 $n_L = I - V + 1$，因此 L 圈图的贡献正比于 $\hbar^{n_L-1}$，形式上可以有:

$$W_\Gamma[j;\hbar] = \sum_{n_L=0}^{\infty} \hbar^{n_L-1} \underbrace{W_{\Gamma,n_L}[j]}_{n_L \text{ loops}} \tag{3.41}$$

为分离出树图，形式上取极限 $\hbar \to 0$，此时圈图贡献趋于零，且路径积分由稳相点主导。

3.6.4 有效作用量的计算

我们在重整微扰论的框架下，从定义式(3.30)出发，逐阶计算泛函。首先，照常把拉氏量写为两部分:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L} \tag{3.42}$$

把流分为两部分 $J(x) = J_1(x) + \delta J(x)$ ，其中一部分满足如下方程:

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi}\right|_{\phi=\phi_{\rm cl}} + J_1(x) = 0 \tag{3.43}$$

而 $\delta J(x)$ 的取值是的总的流让场的真空期望值仍是 $\phi_{cl}(x)$ 即 $\langle\phi(x)\rangle_J = \phi_{\rm cl}(x)$
现在生成泛函为:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_1[\phi]+J_1\phi)} e^{i\int d^4x(\delta\mathcal{L}[\phi]+\delta J\phi)} \tag{3.44}$$

平移场的定义，取 $\phi(x)=\phi_{\mathrm{cl}}(x)+\eta(x)$ ，指数中的项做幂级数展开：

$$\begin{aligned}\int d^4x\left(\mathcal{L}_1+J_1\phi\right)=&\int d^4x\left(\mathcal{L}_1\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]+J_1\phi_{\mathrm{cl}}\right)+\int d^4x\eta(x)\left(\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi}+J_1\right)\\&+\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\eta(x)\eta(y)\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\\&+\frac{1}{3!}\int d^4xd^4yd^4z\eta(x)\eta(y)\eta(z)\frac{\delta^3\mathcal{L}_1}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)}+\cdots\end{aligned}\tag{3.45}$$

一阶项由(3.43)直接为零，二阶项给出高斯积分，高阶项视作微扰修正。暂且忽略抵消项与高阶修正，高斯积分给出有效作用量的第一个修正项：

$$\begin{aligned}&\int\mathcal{D}\eta\exp\left[i\left(\int\left(\mathcal{L}_1\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]+J_1\phi_{\mathrm{cl}}\right)+\frac{1}{2}\int\eta\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\eta\right)\right]\\&=\exp\left[i\int\left(\mathcal{L}_1\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]+J_1\phi_{\mathrm{cl}}\right)\right]\cdot\left(\det\left[-\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\right]\right)^{-1/2}.\end{aligned}\tag{3.46}$$

高阶项的作用在 Feynman 图表示中，给出了一系列以 $-i\left(\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\right)^{-1}$ 作为传播子，高阶项作为顶点的 Feynman 规则图。
考虑抵消项，也在 ϕ_{cl} 处展开，有

$$\left(\delta\mathcal{L}\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]+\delta J\phi_{\mathrm{cl}}\right)+\left(\delta\mathcal{L}\left[\phi_{\mathrm{cl}}+\eta\right]-\delta\mathcal{L}\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]+\delta J\eta\right)\tag{3.47}$$

第二项 Taylor 展开后也给出 Feynman 图修正，第一项是一个常数。总结，有效作用量为：

$$\begin{aligned}\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]=&\int d^4x\mathcal{L}_1\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]+\frac{i}{2}\log\det\left[-\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\right]\\&-i\cdot(\text{ connected diagrams })+\int d^4x\delta\mathcal{L}\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]\end{aligned}\tag{3.48}$$

上述连通图都是真空-真空图，至少也是两圈图，因此最低阶修正就是泛函行列式。上面的构造中比正常的重整化多了一个抵消项：δJ，它由下述方法给出：
首先在头阶项有关系 $\langle\phi\rangle=\phi_{\mathrm{cl}}$，此等式会因为 Feynman 图给出的修正而不成立，且贡献都来自于“蝌蚪”图，他们刚好可以由 $\delta J\eta$ 项抵消是的等式依然成立。在实际操纵中我们直接忽略连通单粒子不可约单点图，因为刚好被 $\delta J\eta$ 抵消。

3.6.5 有效作用量的对称性

虽然不总是这样, 但在某些情况下, 作用量 $I[\phi]$ 的对称性自动地也是有效作用量的 $\Gamma[\phi]$ 的对称性。除非我们能够证明附加于作用量的对称性也适用于有效作用量, 否则我们在建立理论的可重整性时会遇到问题。
为此没我们研究一种重要的对称性，它由如下无限小变换生成:

$$\chi^n(x) \to \chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi] \tag{3.49}$$

假定测度和作用量在变换下都不变:

$$\begin{gathered} I[\chi + \epsilon F] = I[\chi] \\ \prod_{n,x} \mathrm{d}\left(\chi^n(x) + \epsilon F[x;\chi]\right) = \prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x) \end{gathered} \tag{3.50}$$

此时生成泛函为:

$$\begin{aligned} Z[J] = & \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\left(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]\right)\right] \\ & \times \exp\left\{\mathrm{i}I[\chi+\epsilon F] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \left(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]\right) J_n(x)\right\} \\ = & \int \left[\prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x)\right] \exp\left\{\mathrm{i}I[\chi] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \left(\chi^n(x) + \epsilon F^n[x;\chi]\right) J_n(x)\right\} \\ = & Z[J] + \mathrm{i}\epsilon \int \left(\prod_{n,x} \mathrm{d}\chi^n(x)\right) \int F^n(y;\chi) J_n(y) \mathrm{d}^4y \\ & \times \exp\left\{\mathrm{i}I[\chi] + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \chi^n(x) J_n(x)\right\} \end{aligned} \tag{3.51}$$

上式中 Taylor 展开了指数项。因此:

$$\int \mathrm{d}^4y \left\langle F^n(y)\right\rangle_J J_n(y) = 0 \tag{3.52}$$

回忆起在此定义下流由此式给出:

$$J_{n,\chi}(y) = -\frac{\delta\Gamma[\chi]}{\delta\chi^n(y)} \tag{3.53}$$

因此有:

$$0 = \int \mathrm{d}^4y \left\langle F^n(y)\right\rangle_{J_\chi} \frac{\delta\Gamma[\chi]}{\delta\chi^n(y)} \tag{3.54}$$

也即 $\Gamma[\chi]$ 在无限小变换

$$\chi^n(y) \to \chi^n(y) + \epsilon \left\langle F^n(y) \right\rangle_{J_\chi} \tag{3.55}$$

下不变，这样的对称性调教被称为 Slavnov-Taylor 恒等式。若我们出发的无限小变换时线性变换那两者时相同的。

3.7 量子 Goldstone 定理

QFT 中的 Goldstone 定理证明与经典场类似，只不过势能换成有效势。为说明这一点，需要引入一些关于有效作用量的结论.

3.7.1 寻找真空

我们知道，量子有效作用量在场的真空期望值处取极值：

$$\left(\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} \right)_{\phi=\langle\Omega|\phi|\Omega\rangle} = 0 \tag{3.56}$$

为找出真空态 $|\Psi >$，它需要使得哈密顿量期望值最小，并且对场的期望值给出上述极值条件的解，还要满足归一性，利用 Lagrange 乘数法求解这个约束极值问题，可以转化为最小化以下的量：

$$\langle\Psi|H|\Psi\rangle - A\langle\Psi \mid \Psi\rangle - \int d^3x B(\mathbf{x}) \langle\Psi|\phi(\mathbf{x})|\Psi\rangle \tag{3.57}$$

对量子态变分取极值，给出条件：

$$H|\Psi\rangle = A|\Psi\rangle + \int d^3x B(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) |\Psi\rangle \tag{3.58}$$

$$\left(H - \int d^3x J(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right) |\Psi_J\rangle = E[J] \, |\Psi_J\rangle \tag{3.59}$$

原则上 A、B 的值也需要求极值得出，最终结果以泛函的关系依赖于场的期望值 $\phi_0 x0$，但可以通过一种取巧的方式找到 A、B。
考虑含流哈密顿量的基态本征方程：

$$\left(H - \int d^3x J(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \right) |\Psi_J\rangle = E[J] \, |\Psi_J\rangle \tag{3.60}$$

若取 $B=J_0:=J_{\phi_0}, A=E\left[J_{\phi_0}\right]$，则 $|\Psi_J\rangle$ 满足约束条件且能量取极值。
为得到有效作用量与能量的关系，考虑这样一个过程：$-\infty\rightarrow+\infty$ 过程中，逐渐光滑地打开源，并维持恒定的 $J(\vec{x})$ 时间 T，最后再光滑地撤去源。
真空-真空振幅会积累一个相因子：

$$\langle\Omega, \infty \mid \Omega,-\infty\rangle_J=\exp(-i E[J] T) \tag{3.61}$$

于是有关系：$W[J]=-E[J]T$。回到没有外源的原本理论，它的真空态由下列方程给出：

$$\begin{aligned}
H\left|\Psi_{J_0}\right\rangle & =\left(E\left[J_0\right]+\int d^3 x J_0(\mathbf{x}) \phi_0(\mathbf{x})\right)\left|\Psi_{J_0}\right\rangle \\
& =\frac{1}{T}\left(-W\left[J_0\right]+\int d^4 x J_0(x) \phi_0(x)\right)\left|\Psi_{J_0}\right\rangle \\
& =-\frac{\Gamma\left[\phi_0\right]}{T}\left|\Psi_{J_0}\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.62}$$

也就是说，对于期望值为 ϕ_0 的场构型的态，它的能量与该场构型对应的量子作用量只相差一个负系数。满足极值条件的场构型中，是的量子作用量最大值的就对应能量的最低点，即真空态。

我们总希望真空仍就具有 Poincare 群的对称性，因此场的期待值是一个常数，从而量子作用量的展开中含导数项的都为零，只剩下了 V_{eff} 称为有效势 $\Gamma\left[\phi_0\right]=-VTV_{\text{eff}}\left(\phi_0\right)$，此时寻求真空就变成了寻求有效势的极值，而在最低阶近似下有效势就是拉氏量中的经典势。

3.7.2　量子 Goldstone 定理的证明

Proof 1　第一个证明与之前经典的情况几乎完全一致，只需补充几个小细节。我们假设作用量以及测度再一个连续对称变化下都不变，它的代表，无限小变换时线性的：

$$\phi_n(x)\rightarrow\phi_n(x)+\mathrm{i}\epsilon\sum_m t_{nm}\phi_m(x) \tag{3.63}$$

由之前的论证，作用量线性的对称性在量子作用量中仍然保持，因此有关系：

$$\sum_{n,m}\int\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi_n(x)}t_{nm}\phi_m(x)\mathrm{d}^4x=0$$

再考虑平移不变理论，作用量的形式为 $\Gamma[\phi]=-\mathscr{V}V(\phi)$，不变条件可以改写为：

$$\sum_{n,m}\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_n}t_{nm}\phi_m=0$$

再次对场球道，并且利用极值条件，给出关系：

$$\sum_{n,m}\left.\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_\ell}\right|_{\phi=\bar{\phi}}t_{nm}\bar{\phi}_m=0$$

在经典的情况中，势能二阶导矩阵的本征值直接被认为是质量。有效势的二阶导如有效作用量节所述，是单粒子不可约两点图之和，直接与动量空间的完全传播子的导数联系：

$$\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_\ell}=\Delta^{-1}_{n\ell}(0)$$

因此方程改写为：

$$\sum_{n,m}\Delta^{-1}_{n\ell}(0)t_{nm}\bar{\phi}_m=0$$

当对称性破缺时，$\sum_m t_{nm}\bar{\phi}_m$ 不为零，此时它是 $\Delta^{-1}_{n\ell}(0)$ 本征值为零的本征矢，若对角化，$\phi_{Gm}=U_{nm}\phi_m$，U_{mn} 为使得矩阵对角化的变换，n 取为零本征值对应的下标。这意味着 $\Delta^{-1}_{n\ell}(q)$ 在 $q^2=0$ 处有一极点，因此无质量。

为看出 Goldstone 粒子属于洛伦兹群的哪个表示，我们先假设场 ϕ_α 对应表示 D，于是有 $\phi'_\alpha=D_{\alpha\beta}(\Lambda)\phi_\beta$。Goldstone 子与原本场的线性关系可能让人误以为他们对应相同的表示，但 U 在 Lorentz 变化下并不平庸，为看出这一点，传播子的倒数按照 $D^{-1}\otimes D^{-1}$ 变换，对角化后的矩阵为 Lorentz 标量矩阵，因此变换矩阵按照 D^{-1} 变换，刚好抵消的原本场的变换，因此 Goldstone 粒子是零自旋玻色子。

Proof 2　任何连续对称性都给出一个守恒流 J^μ，以及相应的守恒荷 Q，并且这个 Q 诱导对应的对称变换：

$$Q=\int \mathrm{d}^3x J^0(\mathbf{x},0)$$

$$[Q,\phi_n(x)]=-\sum_m t_{nm}\phi_m(x)$$

上述算符关系不受自发对称性破缺的影响。现在考察流和场的对易子的真空期望值，并对中间态求和，有：

$$\left\langle\left[J^\lambda(y), \phi_n(x)\right]\right\rangle_{\mathrm{VAC}}=(2 \pi)^{-3} \int \mathrm{d}^4 p\left[\rho_n^\lambda(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i} p \cdot(y-x)}-\tilde{\rho}_n^\lambda(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i} p \cdot(x-y)}\right] \tag{3.64}$$

其中利用平移不变形，以及插入完备关系定义了：

$$\begin{aligned}
(2 \pi)^{-3} \mathrm{i} \rho_n^\lambda(p) & =\sum_N\left\langle\mathrm{VAC}\left|J^\lambda(0)\right| N\right\rangle\left\langle N\left|\phi_n(0)\right| \mathrm{VAC}\right\rangle \delta^4\left(p-p_N\right), \\
(2 \pi)^{-3} \mathrm{i} \tilde{\rho}_n^\lambda(p) & =\sum_N\left\langle\mathrm{VAC}\left|\phi_n(0)\right| N\right\rangle\left\langle N\left|J^\lambda(0)\right| \mathrm{VAC}\right\rangle \delta^4\left(p-p_N\right) .
\end{aligned} \tag{3.65}$$

对 N 的求和表示对所有离散的指标求和以及对连续指标的积分。由于 ρ 是动量四矢的函数，且自身有一个 Lorentz 矢量指标，因此正比于 p^μ，而插入完备集中的态能量总是正定的，因此也正比于能量的阶梯函数，即：

$$\begin{aligned}
& \rho_n^\lambda(p)=p^\lambda \rho_n\left(-p^2\right) \theta\left(p^0\right) \\
& \tilde{\rho}_n^\lambda(p)=p^\lambda \tilde{\rho}_n\left(-p^2\right) \theta\left(p^0\right)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

真空期望可以改写为：

$$\begin{aligned}
\left\langle\left[J^\lambda(y), \phi_n(x)\right]\right\rangle_{\mathrm{VAC}}= & \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int \mathrm{d} \mu^2\left[\rho_n\left(\mu^2\right) \Delta_{+}\left(y-x ; \mu^2\right)\right. \\
& \left.+\tilde{\rho}_n\left(\mu^2\right) \Delta_{+}\left(x-y ; \mu^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.67}$$

其中：$\Delta_{+}\left(z ; \mu^2\right)=(2 \pi)^{-3} \int \mathrm{d}^4 p \theta\left(p^0\right) \delta\left(p^2+\mu^2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i} p \cdot z}$。

当 $z^2>0$ 时，Lorentz 不变形要求 $\Delta_{+}\left(z ; \mu^2\right)$ 仅能依赖于 z^2 μ^2。因此 $\Delta_{+}\left(z ; \mu^2\right)$ 关于 $(x-y)$ 在类空时是偶函数，此时：

$$\left\langle\left[J^\lambda(y), \phi_n(x)\right]\right\rangle_{\mathrm{VAC}}=\frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int \mathrm{d} \mu^2\left[\rho_n\left(\mu^2\right)+\tilde{\rho}_n\left(\mu^2\right)\right] \Delta_{+}\left(y-x ; \mu^2\right) \tag{3.68}$$

由因果关系，类空对易子必为零给出条件：

$$\rho_n\left(\mu^2\right)=-\tilde{\rho}_n\left(\mu^2\right) \tag{3.69}$$

而对于一般的 x,y，代入上式给出：

$$\left\langle\left[J^\lambda(y), \phi_n(x)\right]\right\rangle_{\mathrm{VAC}}=\frac{\partial}{\partial y_\lambda} \int \mathrm{d} \mu^2 \rho_n\left(\mu^2\right)\left[\Delta_{+}\left(y-x ; \mu^2\right)-\Delta_{+}\left(x-y ; \mu^2\right)\right] \tag{3.70}$$

为利用流守恒条件，两边同时再对 Y^λ 求导，利用性质：

$$\left(\square_y-\mu^2\right)\Delta_+\left(y-x;\mu^2\right)=0$$

于是，对于任意的 x 和 y，有：

$$0=\int \mathrm{d}\mu^2\mu^2\rho_n\left(\mu^2\right)\left[\Delta_+\left(y-x;\mu^2\right)-\Delta_+\left(x-y;\mu^2\right)\right] \tag{3.71}$$

只能有：

$$\mu^2\rho_n\left(\mu^2\right)=0 \tag{3.72}$$

此方程的解要么为 $rho_n\left(\mu^2\right)=0$，要么为 $rho_n\left(\mu^2\right)\propto\delta(\mu^2)$。我们将看到，对于对称破缺情况，只能为后者。令 $\lambda=0,x^0=y^0=0$，则有：

$$\begin{aligned}\left\langle\left[J^0(\mathbf{y},t),\phi_n(\mathbf{x},t)\right]\right\rangle_{\mathrm{VAC}} =&2\mathrm{i}(2\pi)^{-3}\int \mathrm{d}\mu^2\rho_n\left(\mu^2\right)\\&\times\int \mathrm{d}^4p\sqrt{\mathbf{p}^2+\mu^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\theta(p_0)\delta\left(p^2+\mu^2\right)\\=&\mathrm{i}\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x})\int \mathrm{d}\mu^2\rho_n\left(\mu^2\right).\end{aligned} \tag{3.73}$$

其中用到了公式：$\int_{-\infty}^{+\infty}dk^0\delta\left(k^2+m^2\right)\theta\left(k^0\right)=\frac{1}{2\omega}$ 。对 y 空间积分，利用荷 Q 生成了这个对称变换，给出：

$$-\sum_m t_{nm}\left\langle\phi_m\right\rangle_{\mathrm{VAC}}=\mathrm{i}\int \mathrm{d}\mu^2\rho_n\left(\mu^2\right) \tag{3.74}$$

仅当

$$\rho_n\left(\mu^2\right)=\mathrm{i}\delta\left(\mu^2\right)\sum_m t_{nm}\left\langle\phi_m(0)\right\rangle_{\mathrm{VAC}} \tag{3.75}$$

可以看出，对称破缺时，$\rho_n\left(\mu^2\right)$ 不能为零，但正比于 $\delta\left(\mu^2\right)$ 的项职能出现在无质量粒子的理论中，而且必须是单粒子态，因为多粒子态会给出连续的贡献。态 $\phi_n(0)|\mathrm{VAC}\rangle$ 是旋转不变的[2]，因此呢只有螺旋度为零的态对 $\langle N\left|\phi_n(0)\right|\ \mathrm{VAC}\ \rangle$ 有贡献，同时只有内禀宇称以及内部量子数同 J_0 相同的态 N 对 $\langle VAC\left|J^0\right|N\rangle$ 有贡献，因此呢 Goldstone 粒子是一个自旋为零的无质量粒子，且与 J_0 有相同的宇称以及内部量子数。

[2]这似乎依赖 ϕ 是标量场

第四章　张量网络

参考文献

[1] P. B. Pal, "Dirac, majorana, and weyl fermions," *American Journal of Physics*, vol. 79, no. 5, pp. 485–498, 2011.