

凝聚态物理中的拓扑物态

江文涛 191840114

2023 年 3 月 15 日

目录

第一章 Berry 相位

1.1 离散情况

干涉条纹的产生来自 $P = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_1 \Psi_2^*$ 。

相对相位是有物理意义的。 $\gamma_{12} = -\arg \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$

离散 Berry 相位的定义

对于 N 个 Hilbert 空间中的态，将它们排序为一个圈，定义下面的一个量：

$$\gamma_L = -\arg e^{-i(\gamma_{12} + \gamma_{23} + \dots + \gamma_{N1})} = -\arg (\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle \langle \Psi_2 | \Psi_3 \rangle \dots \langle \Psi_N | \Psi_1 \rangle) \quad (1.1)$$

它可以改写为如下形式：

$$\gamma_L = -\arg \text{Tr} (|\Psi_1\rangle \langle \Psi_1| |\Psi_2\rangle \langle \Psi_2| \dots |\Psi_N\rangle \langle \Psi_N|) \quad (1.2)$$

作为一组规范不变投影算符的乘积，它显然也是规范不变的。

Berry 通量

考虑一个二维格点，将每个点都对应一个态，定义如下一个 Berry 相：

$$\gamma_L = -\arg \exp \left[-i \left(\sum_{n=1}^{N-1} \gamma_{(n,1),(n+1,1)} + \sum_{m=1}^{M-1} \gamma_{(N,m),(N,m+1)} + \sum_{n=1}^{N-1} \gamma_{(n+1,M),(n,M)} + \sum_{m=1}^{M-1} \gamma_{(1,m+1),(1,m)} \right) \right] \quad (1.3)$$

直接计算涉及很多依赖规范的量，下面引入一种方法使得计算可以拆解为规范不变量的和。对于每个“小圈”，定义它边界对应的 Berry 相位：

$$\begin{aligned} F_{nm} &= -\arg \exp \left[-i \left(\gamma_{(n,m),(n+1,m)} + \gamma_{(n+1,m),(n+1,m+1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma_{(n+1,m+1),(n,m+1)} + \gamma_{(n,m+1),(n,m)} \right) \right] \\ &= \gamma_{(n,m),(n+1,m)} + \gamma_{(n+1,m),(n+1,m+1)} + \gamma_{(n+1,m+1),(n,m+1)} + \gamma_{(n,m+1),(n,m)} + 2\pi n_{nm} \end{aligned} \quad (1.4)$$

称为 Berry 通量。将所有的 Berry 通量相乘，每个内部的边都被计算了方向相反的两次，因此互为复共轭，最终只剩下边界的相，所以这个量和之前定义的 Berry 相相等。

$$\exp \left[-i \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} F_{nm} \right] = e^{-i\gamma_L} \quad (1.5)$$

这让人联想到 Stokes 定理，但在这里 Berry 通量的求和与 Berry 相本身并不相等，而是可以相差 $2\pi n$ 。

Chern 数

对于上边定义的格点参数空间取周期边界条件，(??)变为 $\prod_{m=1}^M \prod_{n=1}^N e^{-iF_{nm}} = 1$ ，Chern 数的定义为：

$$Q = \frac{1}{2\pi} \sum_{nm} F_{nm} \quad (1.6)$$

它显然是一个整数。

1.2 连续情况

现在用 D 维参数空间中的矢量标记 Hilbert 空间中的态矢： $|\Psi(\mathbf{R})\rangle$ 。在参数空间中取一定向曲线： $\mathcal{C} : [0, 1) \rightarrow \mathcal{P}$ ， $t \mapsto \mathbf{R}(t)$ ，曲线上相邻的两点映射到的态矢之间的相对相位为：

$$e^{-i\Delta\gamma} = \frac{\langle \Psi(\mathbf{R}) | \Psi(\mathbf{R} + d\mathbf{R}) \rangle}{|\langle \Psi(\mathbf{R}) | \Psi(\mathbf{R} + d\mathbf{R}) \rangle|}; \quad \Delta\gamma = i \langle \Psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \Psi(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R}, \quad (1.7)$$

上式右边中乘上 $d\vec{R}$ 的量为 Berry 联络：

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = i \langle \Psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \Psi(\mathbf{R}) \rangle = -\text{Im} \langle \Psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \Psi(\mathbf{R}) \rangle \quad (1.8)$$

其中有定义： $\langle \Phi | \nabla_{\mathbf{R}} \Psi(\mathbf{R}) \rangle = \nabla_{\mathbf{R}} \langle \Phi | \Psi(\mathbf{R}) \rangle$ 。¹ 波函数的 Local 规范变换使得 Berry 联络如下变换：

$$|\Psi(\mathbf{R})\rangle \rightarrow e^{i\alpha(\mathbf{R})} |\Psi(\mathbf{R})\rangle : \quad \mathbf{A}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \nabla_{\mathbf{R}} \alpha(\mathbf{R}) \quad (1.9)$$

对于参数空间的一条闭曲线，沿着这条曲线的 Berry 相位为：

$$\gamma(\mathcal{C}) = -\arg \exp \left[-i \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{R} \right] \quad (1.10)$$

仿照 Stokes 定理，定义 Berry 曲率：

$$B = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \quad (1.11)$$

此时线积分可改写为面积分：

$$\oint_{\partial \mathcal{F}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{R} = \int_{\mathcal{F}} (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx dy = \int_{\mathcal{F}} B dx dy \quad (1.12)$$

如果规范的选取是连续的，对于闭合曲面上积分为零，但若规范存在不连续的奇点

¹此内积纯虚， $\nabla_{\mathbf{R}} \langle \Psi(\mathbf{R}) | \Psi(\mathbf{R}) \rangle = \langle \Psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \Psi(\mathbf{R}) \rangle + (\langle \Psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \Psi(\mathbf{R}) \rangle)^* = 0$