凝聚态物理中的拓扑物态

江文涛 191840114

2023 年 3 月 16 日

目录

第一章 Berry 相位

1.1 离散情况

干涉条纹的产生来自 $P=|\Psi_1+\Psi_2|^2=\Psi_1^2+\Psi_2^2+\Psi_1^*\Psi_2+\Psi_1\Psi_2^*$。

相对相位是有物理意义的。$\gamma_{12}=-arg<\Psi_1|\Psi_2>$

离散 Berry 相位的定义

对于 N 个 Hilbert 空间中的态，将它们排序为一个圈，定义下面的一个量：

$$\gamma_L=-\arg e^{-i(\gamma_{12}+\gamma_{23}+\ldots+\gamma_{N1})}=-\arg\left(\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle\langle\Psi_2\mid\Psi_3\rangle\ldots\langle\Psi_N\mid\Psi_1\rangle\right) \tag{1.1}$$

它可以改写为如下形式：

$$\gamma_L=-\arg\operatorname{Tr}\left(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1||\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|\ldots|\Psi_N\rangle\langle\Psi_N|\right) \tag{1.2}$$

作为一组规范不变投影算符的乘积，它显然也是规范不变的。

Berry 通量

考虑一个二维格点，将每个点都对应一个态，定义如下一个 Berry 相：

$$\begin{aligned}\gamma_L=-\arg\exp\Bigg[-i\Bigg(&\sum_{n=1}^{N-1}\gamma_{(n,1),(n+1,1)}+\sum_{m=1}^{M-1}\gamma_{(N,m),(N,m+1)}\\&+\sum_{n=1}^{N-1}\gamma_{(n+1,M),(n,M)}+\sum_{m=1}^{M-1}\gamma_{(1,m+1),(1,m)}\Bigg)\Bigg]\end{aligned} \tag{1.3}$$

直接计算涉及很多依赖规范的量，下面引入一种方法使得计算可以拆解为规范不变量的和。对于每个“小圈”，定义它边界对应的 Berry 相位：

$$\begin{aligned}F_{nm} &= -\arg\exp\left[-i\left(\gamma_{(n,m),(n+1,m)}+\ \gamma_{(n+1,m),(n+1,m+1)}\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\gamma_{(n+1,m+1),(n,m+1)}+\gamma_{(n,m+1),(n,m)}\right)\right]\\&=\gamma_{(n,m),(n+1,m)}+\gamma_{(n+1,m),(n+1,m+1)}+\gamma_{(n+1,m+1),(n,m+1)}+\gamma_{(n,m+1),(n,m)}+2\pi n_{nm}\end{aligned} \tag{1.4}$$

称为 Berry 通量。将所有的 Berry 通量相乘，每个内部的边都被计算了方向相反的两次，因此互为复共轭，最终只剩下边界的相，所以这个量和之前定义的 Berry 相相等。

$$\exp\left[-i\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{M-1}F_{nm}\right]=e^{-i\gamma_L} \tag{1.5}$$

这让人联想到 Stokes 定理，但在这里 Berry 通量的求和与 Berry 相本身并不相等，而是可以相差 $2\pi n$。

Chern 数

对于上边定义的格点参数空间取周期边界条件，(1.5)变为 $\prod_{m=1}^{M}\prod_{n=1}^{N}e^{-iF_{nm}}=1$ ，Chern 数的定义为：

$$Q=\frac{1}{2\pi}\sum_{nm}F_{nm} \tag{1.6}$$

它显然是一个整数。

1.2　连续情况

现在用 D 维参数空间中的矢量标记 Hilbert 空间中的态矢：$|\Psi(\mathbf{R})\rangle$。在参数空间中取一定向曲线：$\mathscr{C}:[0,1)\to\mathscr{P},\quad t\mapsto\mathbf{R}(t)$，曲线上相邻的两点映射到的态矢之间的相对相位为：

$$e^{-i\Delta\gamma}=\frac{\langle\Psi(\mathbf{R})\mid\Psi(\mathbf{R}+d\mathbf{R})\rangle}{|\langle\Psi(\mathbf{R})\mid\Psi(\mathbf{R}+d\mathbf{R})\rangle|};\quad \Delta\gamma=i\left\langle\Psi(\mathbf{R})\left|\nabla_{\mathbf{R}}\right|\Psi(\mathbf{R})\right\rangle\cdot d\mathbf{R}, \tag{1.7}$$

上式右边中乘上 $d\vec{R}$ 的量为 Berry 联络：

$$\mathbf{A}(\mathbf{R})=i\left\langle\Psi(\mathbf{R})\mid\nabla_{\mathbf{R}}\Psi(\mathbf{R})\right\rangle=-\operatorname{Im}\left\langle\Psi(\mathbf{R})\mid\nabla_{\mathbf{R}}\Psi(\mathbf{R})\right\rangle \tag{1.8}$$

其中有定义：$\langle \Phi \mid \nabla_{\mathbf{R}} \Psi(\mathbf{R})\rangle = \nabla_{\mathbf{R}} \langle \Phi \mid \Psi(\mathbf{R})\rangle$。[1] 波函数的 Local 规范变换使得 Berry 联络如下变换：

$$|\Psi(\mathbf{R})\rangle \to e^{i\alpha(\mathbf{R})}|\Psi(\mathbf{R})\rangle : \quad \mathbf{A}(\mathbf{R}) \to \mathbf{A}(\mathbf{R}) - \nabla_{\mathbf{R}}\alpha(\mathbf{R}) \tag{1.9}$$

对于参数空间的一条闭曲线，沿着这条曲线的 Berry 相位为：

$$\gamma(\mathscr{C}) = -\operatorname{argexp}\left[-i\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{R}\right] \tag{1.10}$$

仿照 Stokes 定理，定义 Berry 曲率：

$$B = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \tag{1.11}$$

此时线积分可改写为面积分：

$$\oint_{\partial\mathscr{F}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{R} = \int_{\mathscr{F}} (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\, dxdy = \int_{\mathscr{F}} B dxdy \tag{1.12}$$

如果规范的选取是连续的，对于闭合曲面上述积分为零，但若规范存在不连续的奇点，则会出现非零的 Chern 数。

[1]此内积纯虚，$\nabla_{\mathbf{R}}\langle\Psi(\mathbf{R}) \mid \Psi(\mathbf{R})\rangle = \langle\Psi(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}\Psi(\mathbf{R})\rangle + (\langle\Psi(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}\Psi(\mathbf{R})\rangle)^* = 0$