那些我曾经懂过的问题

Salieri

2022 年 12 月 13 日

前言

此笔记总结我在学习过程中遇到的各种细节问题。

Salieri

2022 年 12 月 13 日

目录

第一章　凝聚态场论、量子多体

1.1　平均场近似，高斯近似，鞍点近似，Product State

1.2　电、声子有效相互作用

1.3　Goldstone 定理 (经典)

考虑一个理论涉及若干个场 $\phi^a(x)$，具有如下形式的拉氏量：

$$\mathcal{L} = (\text{ terms with derivatives }) - V(\phi) \tag{1.1}$$

令 ϕ_a^0 为最小化 V 的恒定场，即

$$\frac{\partial}{\partial \phi^a} V \bigg|_{\phi^a(x)=\phi_0^a} = 0.$$

将 V 在极小值附近展开，有：

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi-\phi_0)^a (\phi-\phi_0)^b \left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\partial\phi^b} V\right)_{\phi_0} + \cdots .$$

定义取二次项的系数作为矩阵，由于是在极小值展开，矩阵是半正定的，本征值就是质量。下面开始正式证明 Goldstone 定理。考虑某一般的连续对称变换：

$$\phi^a \longrightarrow \phi^a + \alpha \Delta^a(\phi) \tag{1.2}$$

α 是无限小参数，Δ^a 是一个关于所有场的函数。考虑退化到恒定场的情况，此时含导数项自动为零，因此势能本身就需要不变，即

$$\Delta^a(\phi)\frac{\partial}{\partial\phi^a}V(\phi)=0$$

此式再对 ϕ^b 求导，并取 $\phi=\phi_0$:

$$0=\left(\frac{\partial\Delta^a}{\partial\phi^b}\right)_{\phi_0}\left(\frac{\partial V}{\partial\phi^a}\right)_{\phi_0}+\Delta^a\left(\phi_0\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\partial\phi^b}V\right)_{\phi_0}$$

由于 ϕ_0 使得 V 最小，第一项自动为 0，因此第二项也等于零。若对称性依然对于场 ϕ_0 成立，$\Delta^a(\phi_0)=0$。若发生自发对称性破缺，则二阶导项为零，即质量为零。

第二章　量子信息

2.1　Multipartite Entanglement

第三章　量子场论

3.1　同一粒子的不同表示

3.2　Dirac,Weyl and Majorana fermions

[1] 简单来讲，Dirac fermion 是 Dirac 方程的一般解，Majorana fermion 是 Dirac 方程的“实”解，Weyl fermion 是无质量 Dirac 方程的解。

3.2.1　Dirac 方程及其解

Dirac 方程定义为：

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\Psi = 0 \tag{3.1}$$

它可以看作具有如下哈密顿量的薛定谔方程：

$$H = \gamma^{0}\left(\gamma^{i}p^{i} + m\right) \tag{3.2}$$

γ 矩阵定义为：

$$\begin{aligned} &[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = 2g^{\mu\nu}, \\ &\gamma_{0}\gamma_{\mu}\gamma_{0} = \gamma_{\mu}^{\dagger} \end{aligned} \tag{3.3}$$

可以看到，当 γ 矩阵为纯虚时，Dirac 方程为实方程，有实解。我们可以找到一组 γ 矩阵满足这样的条件，这个表象称为 Majorana 表象。

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\gamma}^1 = \begin{bmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\gamma}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{bmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 σ^i 为 Pauli 矩阵。在此表象下写出 Dirac 方程，我们有实解：

$$\widetilde{\psi} = \tilde{\psi}^\star \tag{3.5}$$

此解即代表 Majorana fermion。γ 矩阵不同表示之间通过幺正变换相联系：

$$\gamma^\mu = U\tilde{\gamma}^\mu U^\dagger \tag{3.6}$$

此时解 $\tilde{\Psi}$ 与 Majorana 表象下的解也通过一个幺正矩阵相联系：

$$\Psi = U\tilde{\Psi} \tag{3.7}$$

实解条件(3.5)此时为

$$\psi = UU^\top \psi^\star \tag{3.8}$$

我们一般不直接使用幺正矩阵 U，而是转而定义如下矩阵：

$$UU^\top = \gamma_0 C \tag{3.9}$$

由此定义协变共轭（协变性将在稍后证明）：

$$\hat{\Psi} \equiv \gamma_0 C \Psi^\star \tag{3.10}$$

此时实解条件(3.5)可以写为：

$$\hat{\psi} = \psi \tag{3.11}$$

3.2.2 Fourier 展开

一个 Majorana fermion 解在一般的表象下的 Fourier 展开为:

$$\psi(x)=\sum_s\int_p\left(a_s(p)u_s(p)e^{-ip\cdot x}+a_s^\dagger(p)v_s(p)e^{+ip\cdot x}\right) \tag{3.12}$$

v 和 u 互为协变共轭 $v_s(p)=\gamma_0 C u_s^\star(p)$

3.2.3 矩阵 C 的一些性质

除了通过找到实解对应的 Majorana 表象外，我们还可以通过研究 C 矩阵本身的性质来定义一组 C 矩阵，再由此找到不依赖于表象的"实解"条件。

简单观察可以发现，C 矩阵满足如下性质:

$$C^{-1}\gamma_\mu C=-\left(U\tilde{\gamma}_\mu U^\dagger\right)^\top=-\gamma_\mu^\top \tag{3.13}$$

事实上，对于任何表象的 γ 矩阵我们总可以找到满足上式的 C 矩阵，此式可以直接称为 C 矩阵的定义，由此我们有一般情况的实解条件(3.11) 同时，很容易验证 C 矩阵在任意表象下都是完全反对称矩阵。

3.2.4 实条件的洛伦兹不变性

此节将阐述为什么称(3.10)为协变共轭，我们取 Lorentz 变换的生成元为 $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$，注意，这并非 Pauli 矩阵。一个 fermion 场的变换为:

$$\Psi'\left(x'\right)=\exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\Psi(x) \tag{3.14}$$

对上式取复共轭并左乘 $\gamma_0 C$，注意到 γ 矩阵的性质，可以推出:

$$\widehat{\Psi}'\left(x'\right)=\exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\widehat{\Psi}(x) \tag{3.15}$$

由此可以看出，协变共轭场于原场具有相同的洛伦兹变换规则，所以实解条件是洛伦兹不变的。

3.2.5　左与右

在处理费米场时，我们通常会遇到两个和左右有关的概念，螺旋度（helicity）和手性（chirality），两者通常并不相同，但在某些情况下又有关联，本节将阐述这种关联。

螺旋度　满足 Dirac 方程的费米子额度螺旋度定义为：

$$h_p = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{\mathrm{p}} \tag{3.16}$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ 为自旋矩阵。很显然，h_p 的本征值为 ± 1，分别对应“右手”和“左手”。可以验证 h_p 与哈密顿量对易，也就是说它是一个守恒量，并且其点乘结构也保证了旋转不变形，但可以验证对于有质量粒子，螺旋度在推动下是改变的。一个简单的论证是考虑螺旋度的物理意义：自旋在动量方向上的投影，考虑在粒子速度方向上一运动更快的参考系，此时动量反号，但自旋投影在该 boost 下不改变，因此螺旋度改变。上面的论述依赖于速度更快的参考系，这对无质量粒子是不可能的，因此这暗示无质量粒子的螺旋度是一个真正的洛伦兹不变量。

手性　可以额外定义一个矩阵 γ_5，它满足：

$$[\gamma_5, \gamma_\mu]_+ = 0 \quad \forall \mu \tag{3.17}$$

一个显然的解是：

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{3.18}$$

给上式乘上额外的相因子也是满足定义的，上述的选择保证了 γ_5 有如下性质：

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad (\gamma_5)^2 = 1 \tag{3.19}$$

后者保证了如下定义的两个矩阵确实是投影算符：

$$L = \frac{1}{2}\left(1 - \gamma_5\right), \quad R = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma_5\right) \tag{3.20}$$

两者的本征空间里的矢量分别称为“左手”的和“右手”的。每个 Dirac 旋量也总可以拆分成两者之和。可以验证，γ_5 与洛伦兹变换的生成元对易，但与哈密顿量不对易，这是由于质量相含一个 γ 矩阵, 因此和 γ_5 反对易。

3.2.6 Wyle fermion

如前文所述，质量项同时阻碍了螺旋度和手性成为性质良好的物理量，因此我们考虑无质量费米子。由于 γ_5 的存在以及 Schur 引理，一般的 Dirac 方程解并非 Lorentz 群的不可约表示，而手性解是可约的，称为 Wyle fermion。一个一般的费米子是可约表示 $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$, 即一个左手 Wyle 一个右手 Wyle。上述说法对螺旋度同样适用，因为无质量时两者相同。

3.2.7 从 Wyle 费米子到 Majorana 与 Dirac 费米子

Majorana fermion 是含有质量的，因此必须包含左右手两部分，考虑到实条件，这必须是一个 Wyle 场与它的协变共轭：

$$\psi(x) = \chi(x) + \widehat{\chi}(x) \tag{3.21}$$

而 Dirac fermion 的区别就是没有实解条件，因此两个左手、右手场之间独立：

$$\Psi(x) = \chi_1(x) + \widehat{\chi}_2(x) \tag{3.22}$$

3.3 Pology

3.4 Noether 定理与 local 对称性

3.5 规范场的量子化:QED, 非阿贝尔, 与凝聚态中的电磁场路径积分

3.6 外场与有效作用量

3.6.1 来自热力学的类比

考虑一个磁性系统，配分函数以及 Helmholtz 自由能为:

$$Z(H) = e^{-\beta F(H)} = \int \mathcal{D}s \exp\left[-\beta \int dx(\mathcal{H}[s] - Hs(x))\right] \tag{3.23}$$

H 为外加磁场。磁化强度可以通过对 Helmholtz 自由能求导得到:

$$\begin{aligned} -\left.\frac{\partial F}{\partial H}\right|_{\beta \text{ fixed}} &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\log Z \\ &= \frac{1}{Z}\int dx \int \mathcal{D}s s(x) \exp\left[-\beta \int dx(\mathcal{H}[s] - Hs)\right] \\ &= \int dx \langle s(x)\rangle \equiv M. \end{aligned}$$

Gibbs 自由能通过 Legendre 变换得到

$$G = f + MH$$

外场可以对 Gibbs 自由能求导得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial M} &= \frac{\partial F}{\partial M} + M\frac{\partial H}{\partial M} + H \\ &= \frac{\partial H}{\partial M}\frac{\partial F}{\partial H} + M\frac{\partial H}{\partial M} + H \\ &= H \end{aligned} \tag{3.24}$$

当 $H=0$ 时，Gibbs 自由能取极值，热力学上最稳定的态由 $G(M)$ 的最小值给出。通过类比，我们也可以在 QFT 中构造相似的量，为方便仅考虑标量场。

3.6.2 有效作用量的引入

标量场的生成函数为:

$$Z[J]=e^{-iE[J]}=\int\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int d^4x(\mathcal{L}[\phi]+J\phi)\right] \tag{3.25}$$

一般而言通常的记号并非 $E(J)$, 而是 $W(J)$, 后文中可能交替使用两种记号。可以看出 $E(J)$ 可以类比 Helmholtz 自由能，它的物理意义是真空-真空振幅的联通部分。J 类比外磁场。之后的讨论中我们假定 J 是均匀的，通过泛函的一些技巧我们很容易推广到一般的场。

令 $E(J)$ 对 J 求泛函导数，有:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}E[J]=i\frac{\delta}{\delta J(x)}\log Z=-\frac{\int\mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)}{\int\mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}} \tag{3.26}$$

将上式简记为:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}E[J]=-\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle_J \tag{3.27}$$

等式右侧为有场 J 时 ϕ 的真空期望。注意到热力学中和外场共轭的物理量也是内场的平均值，因此我们定义:

$$\phi_{\mathrm{cl}}(x)=\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle_J \tag{3.28}$$

由此定义 Gibbs 自由能的 QFT 类比, 即 $E(J)$ 的 Legendre 变换:

(note: 在 Weinberg 等教材中，此处的 Legendre 变换定义略有不同，并没有取场在源 J 的真空期望值作为 Legendre 变换中和 J 共轭的量，而是定义 J_ϕ 为产生期望值为 ϕ^r 的流，再定义 Legendre 变换:

$$\Gamma[\phi]\equiv-\int\mathrm{d}^4x\phi^r(x)J_{\phi r}(x)+W\left[J_\phi\right] \tag{3.29}$$

后文在计算有效作用量时主要采用了这个定义)

$$\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right] \equiv -E[J]-\int d^4 y J(y) \phi_{\mathrm{cl}}(y) \tag{3.30}$$

对经典场再求泛函导数，有:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta \phi_{\mathrm{cl}}(x)} \Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right] &= -\frac{\delta}{\delta \phi_{\mathrm{cl}}(x)} E[J]-\int d^4 y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{\mathrm{cl}}(x)} \phi_{\mathrm{cl}}(y)-J(x) \\
&= -\int d^4 y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{\mathrm{cl}}(x)} \frac{\delta E[J]}{\delta J(y)}-\int d^4 y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{\mathrm{cl}}(x)} \phi_{\mathrm{cl}}(y)-J(x) \\
&= -J(x).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

热力学和 QFT 的类比总结如图 3.1:
很容易看出，当外场为零时，有:

Magnetic System	Quantum Field Theory
$\mathbf{x}$	$x=(t, \mathbf{x})$
$s(\mathbf{x})$	$\phi(x)$
H	$J(x)$
$\mathcal{H}(s)$	$\mathcal{L}(\phi)$
$Z(H)$	$Z[J]$
$F(H)$	$E[J]$
M	$\phi_{\mathrm{cl}}(x)$
$G(M)$	$-\Gamma[\phi_{\mathrm{cl}}]$

图 3.1: 热力学与 QFT 类比

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{\mathrm{cl}}(x)} \Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]=0 \tag{3.32}$$

此方程的解就是理论中的稳定构型。对于平移不变的真空态，解是不依赖于 x 的，但有时也会有额外的解称为瞬子。
在此假设考虑的理论中可能的真空态在平移以及 Lorentz 变换下总是不变的，此时方程变为非常简单的非泛函方程，进一步我们知道 Γ 是一个广延

量，它正比于我们所选取的时空体积：

$$\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]=-(VT)\cdot V_{\mathrm{eff}}\left(\phi_{\mathrm{cl}}\right) \tag{3.33}$$

系数 $V_{\mathrm{eff}}\left(\phi_{\mathrm{cl}}\right)$ 称为有效势。$\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]$ 取极值的条件简化为 $V_{\mathrm{eff}}\left(\phi_{\mathrm{cl}}\right)$ 取极值。

3.6.3 有效作用量的性质

先给出结论：我们知道 $Z[J]$ 是关联函数的生成泛函，而 $\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]$ 是单粒子不可约关联函数的生成泛函。为看出这一点，从两点关联函数算起。

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 E[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}&=-\frac{i}{Z}\int\mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)\phi(y)\\&+\frac{i}{Z^2}\int\mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(x)\cdot\int\mathcal{D}\phi e^{i\int(\mathcal{L}+J\phi)}\phi(y)\\&=-i[\langle\phi(x)\phi(y)\rangle-\langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle].\end{aligned} \tag{3.34}$$

非连通部分刚好被抵消，对更高阶的泛函导数也有相同的结果 (link cluster theorem)，因此有：

$$\frac{\delta^n E[J]}{\delta J\left(x_1\right)\cdots\delta J\left(x_n\right)}=(i)^{n+1}\left\langle\phi\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\right\rangle_{\mathrm{conn}} \tag{3.35}$$

现在开始考虑 γ, 对(3.32)求场 $J(y)$ 的泛函导数有：

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}=-\delta(x-y)$$

利用链式法则展开左式：

$$\begin{aligned}\delta(x-y)&=-\int d^4z\frac{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(z)}{\delta J(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(z)\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}\\&=\int d^4z\frac{\delta^2 E}{\delta J(y)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(z)\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)}\\&=\left(\frac{\delta^2 E}{\delta J\delta J}\right)_{yz}\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}\delta\phi_{\mathrm{cl}}}\right)_{zx}\end{aligned} \tag{3.36}$$

可以看到这两个无限维矩阵互为逆：

$$\left(\frac{\delta^2 E}{\delta J\delta J}\right)=\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}\delta\phi_{\mathrm{cl}}}\right)^{-1} \tag{3.37}$$

已知左式为连通两点关联函数，即传播子，因此右式为传播子的逆。到动量空间可以更容易看出物理意义：

$$\widetilde{D}^{-1}(p)=-i\left(p^2-m^2-M^2\left(p^2\right)\right)$$

$M^2\left(p^2\right)$ 是自能函数，是所有单粒子不可约两点图的求和。进一步求泛函导数，用链式法则改写求导：

$$\frac{\delta}{\delta J(z)}=\int d^4w\frac{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(w)}{\delta J(z)}\frac{\delta}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(w)}=i\int d^4wD(z,w)\frac{\delta}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(w)}$$

并利用矩阵逆求导的法则：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}M^{-1}(\alpha)=-M^{-1}\frac{\partial M}{\partial\alpha}M^{-1}$$

继续对(3.36)求泛函导数，有：

$$\begin{aligned}\frac{\delta^3E[J]}{\delta J_x\delta J_y\delta J_z}&=i\int d^4wD(z,w)\frac{\delta}{\delta\phi_w^{\mathrm{cl}}}\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_x^{\mathrm{cl}}\delta\phi_y^{\mathrm{cl}}}\right)^{-1}\\&=i\int d^4wD_{zw}(-1)\int d^4u\int d^4v\left(-iD_{xu}\right)\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_u^{\mathrm{cl}}\delta\phi_v^{\mathrm{cl}}\delta\phi_w^{\mathrm{cl}}}\left(-iD_{vy}\right)\\&=i\int d^4ud^4vd^4wD_{xu}D_{yv}D_{zw}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_u^{\mathrm{cl}}\delta\phi_v^{\mathrm{cl}}\delta\phi_w^{\mathrm{cl}}}\end{aligned}$$

深灰圈表示连通图的求和，浅灰圈表示量子作用量的三阶泛函导数，可以

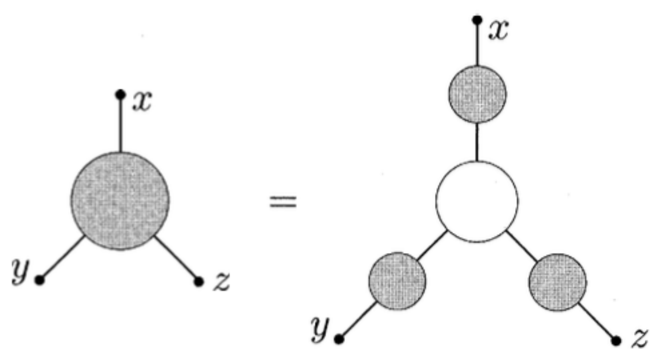

图 3.2: 三点关系的图像表示

看出它代表所有完全传播子移除后的连通三点关联函数，即单粒子不可约三点函数：

$$\frac{i\delta^3\Gamma}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}(x)\phi_{\mathrm{cl}}(y)\phi_{\mathrm{cl}}(z)}=\langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)\rangle_{1\mathrm{PI}}$$

继续求导，可以总结出以下关系：

$$\frac{\delta^n\Gamma\left[\phi_{\mathrm{cl}}\right]}{\delta\phi_{\mathrm{cl}}\left(x_1\right)\cdots\delta\phi_{\mathrm{cl}}\left(x_n\right)}=-i\left\langle\phi\left(x_1\right)\cdots\phi\left(x_n\right)\right\rangle_{1\mathrm{PI}} \tag{3.38}$$

因此我们得出，量子有效作用量是单粒子不可约关联函数的生成泛函。因此，类比 $W(J)$ 是所有连通真空-真空图的求和，$\Gamma[\phi_{cl}]$ 是所有单粒子不可约连通图的求和。

若将生成泛函中的经典作用量 $I[\phi]$ 直接换成量子有效作用量 $\Gamma[\phi]$，则有：

$$Z_\Gamma[j]=e^{W_\Gamma[j]}=\int[D\phi(x)]\exp\left[i\Gamma[\phi(x)]+i\int d^4xj(x)\phi(x)\right] \tag{3.39}$$

我们将证明，这个生成泛函所代表的真空-真空振幅的连通树图部分给出了原本经典作用量 $I[\phi]$ 的理论的所有阶贡献。为分离出树图部分，引入一个常数试图标记不同部分的贡献：

$$Z_r[j;\hbar]=e^{w_r[j;\hbar]}=\int[D\phi(x)]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\Gamma[\phi(x)]+\int d^4xj(x)\phi(x)\right)\right] \tag{3.40}$$

传播子给出贡献 $\hbar$，顶点给出贡献 $\hbar^{-1}$，又拓扑恒等式，圈数 n_L、内线数 I，顶点数 V 有关系 $n_L=I-V+1$，因此 L 圈图的贡献正比于 $\hbar^{n_L-1}$，形式上可以有：

$$W_\Gamma[j;\hbar]=\sum_{n_L=0}^{\infty}\hbar^{n_L-1}\underbrace{W_{\Gamma,n_L}[j]}_{n_L\text{ loops}} \tag{3.41}$$

为分离出树图，形式上取极限 $\hbar\to0$，此时圈图贡献趋于零，且路径积分由稳相点主导。

3.6.4 有效作用量的计算

我们在重整微扰论的框架下，从定义式(3.30)出发，逐阶计算泛函。首先，照常把拉氏量写为两部分：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L} \tag{3.42}$$

把流分为两部分 $J(x) = J_1(x) + \delta J(x)$ ，其中一部分满足如下方程：

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi}\right|_{\phi=\phi_{\mathrm{cl}}} + J_1(x) = 0 \tag{3.43}$$

而 $\delta J(x)$ 的取值是的总的流让场的真空期望值仍是 $\phi_{cl}(x)$ 即 $\langle\phi(x)\rangle_J = \phi_{\mathrm{cl}}(x)$

现在生成泛函为：

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_1[\phi]+J_1\phi)} e^{i\int d^4x(\delta\mathcal{L}[\phi]+\delta J\phi)} \tag{3.44}$$

平移场的定义，取 $\phi(x) = \phi_{\mathrm{cl}}(x) + \eta(x)$ ，指数中的项做幂级数展开：

$$\begin{aligned}\int d^4x\,(\mathcal{L}_1 + J_1\phi) = &\int d^4x\,(\mathcal{L}_1[\phi_{\mathrm{cl}}] + J_1\phi_{\mathrm{cl}}) + \int d^4x\eta(x)\left(\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi} + J_1\right)\\ &+ \frac{1}{2}\int d^4xd^4y\eta(x)\eta(y)\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\\ &+ \frac{1}{3!}\int d^4xd^4yd^4z\eta(x)\eta(y)\eta(z)\frac{\delta^3\mathcal{L}_1}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)} + \cdots\end{aligned} \tag{3.45}$$

一阶项由(3.40)直接为零，二阶项给出高斯积分，高阶项视作微扰修正。暂且忽略抵消项与高阶修正，高斯积分给出有效作用量的第一个修正项：

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{D}\eta \exp\left[i\left(\int (\mathcal{L}_1[\phi_{\mathrm{cl}}] + J_1\phi_{\mathrm{cl}}) + \frac{1}{2}\int \eta\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\eta\right)\right]\\ &= \exp\left[i\int (\mathcal{L}_1[\phi_{\mathrm{cl}}] + J_1\phi_{\mathrm{cl}})\right]\cdot\left(\det\left[-\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\right]\right)^{-1/2}.\end{aligned} \tag{3.46}$$

高阶项的作用在 Feynman 图表示中，给出了一系列以 $-i\left(\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\right)^{-1}$ 作为传播子，高阶项作为顶点的 Feynman 规则图。

考虑抵消项，也在 ϕ_{cl} 处展开，有

$$(\delta\mathcal{L}[\phi_{\mathrm{cl}}]+\delta J\phi_{\mathrm{cl}})+(\delta\mathcal{L}[\phi_{\mathrm{cl}}+\eta]-\delta\mathcal{L}[\phi_{\mathrm{cl}}]+\delta J\eta) \tag{3.47}$$

第二项 Taylor 展开后也给出 Feynman 图修正，第一项是一个常数。总结，有效作用量为:

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_{\mathrm{cl}}]=\int d^4x\mathcal{L}_1[\phi_{\mathrm{cl}}]+\frac{i}{2}\log\det\left[-\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\delta\phi}\right]\\ -i\cdot(\text{ connected diagrams })+\int d^4x\delta\mathcal{L}[\phi_{\mathrm{cl}}]\end{aligned} \tag{3.48}$$

上述连通图都是真空-真空图，至少也是两圈图，因此最低阶修正就是泛函行列式。上面的构造中比正常的重整化多了一个抵消项：δJ，它由下述方法给出：
首先在头阶项有关系 $\langle\phi\rangle=\phi_{\mathrm{cl}}$，此等式会因为 Feynman 图给出的修正而不成立，且贡献都来自于"蝌蚪"图，他们刚好可以由 $\delta J\eta$ 项抵消是的等式依然成立。在实际操纵中我们直接忽略连通单粒子不可约单点图，因为刚好被 $\delta J\eta$ 抵消。

3.6.5 有效作用量的对称性

虽然不总是这样, 但在某些情况下, 作用量 $I[\phi]$ 的对称性自动地也是有效作用量的 $\Gamma[\phi]$ 的对称性。除非我们能够证明附加于作用量的对称性也适用于有效作用量, 否则我们在建立理论的可重整性时会遇到问题。
为此没我们研究一种重要的对称性，它由如下无限小变换生成：

$$\chi^n(x)\to\chi^n(x)+\epsilon F^n[x;\chi] \tag{3.49}$$

假定测度和作用量在变换下都不变：

$$\begin{aligned}I[\chi+\epsilon F]=I[\chi]\\ \prod_{n,x}\mathrm{d}(\chi^n(x)+\epsilon F[x;\chi])=\prod_{n,x}\mathrm{d}\chi^n(x)\end{aligned} \tag{3.50}$$

此时生成泛函为:

$$
\begin{aligned}
Z[J]=&\int\left[\prod_{n,x}\mathrm{d}\left(\chi^n(x)+\epsilon F^n[x;\chi]\right)\right]\\
&\times\exp\left\{\mathrm{i}I[\chi+\epsilon F]+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left(\chi^n(x)+\epsilon F^n[x;\chi]\right)J_n(x)\right\}\\
=&\int\left[\prod_{n,x}\mathrm{d}\chi^n(x)\right]\exp\left\{\mathrm{i}I[\chi]+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left(\chi^n(x)+\epsilon F^n[x;\chi]\right)J_n(x)\right\}\\
=&Z[J]+\mathrm{i}\epsilon\int\left(\prod_{n,x}\mathrm{d}\chi^n(x)\right)\int F^n(y;\chi)J_n(y)\mathrm{d}^4y\\
&\times\exp\left\{\mathrm{i}I[\chi]+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\chi^n(x)J_n(x)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

上式中 Taylor 展开了指数项。因此:

$$
\int\mathrm{d}^4y\left\langle F^n(y)\right\rangle_J J_n(y)=0 \tag{3.52}
$$

回忆起在此定义下流由此式给出:

$$
J_{n,\chi}(y)=-\frac{\delta\Gamma[\chi]}{\delta\chi^n(y)} \tag{3.53}
$$

因此有:

$$
0=\int\mathrm{d}^4y\left\langle F^n(y)\right\rangle_{J_\chi}\frac{\delta\Gamma[\chi]}{\delta\chi^n(y)} \tag{3.54}
$$

也即 $\Gamma[\chi]$ 在无限小变换

$$
\chi^n(y)\to\chi^n(y)+\epsilon\left\langle F^n(y)\right\rangle_{J_\chi} \tag{3.55}
$$

下不变，这样的对称性调教被称为 Slavnov-Taylor 恒等式。若我们出发的无限小变换时线性变换那两者时相同的。

第四章　张量网络

参考文献

[1] P. B. Pal, "Dirac, majorana, and weyl fermions," *American Journal of Physics*, vol. 79, no. 5, pp. 485–498, 2011.