那些我曾经懂过的问题

Salieri

2022 年 12 月 5 日

前言

此笔记总结我在学习过程中遇到的各种细节问题。

Salieri

2022 年 12 月 5 日

目录

第一章 凝聚态场论、量子多体

1.1 电、声子有效相互作用

第二章　量子信息

2.1 Multipartite Entanglement

第三章　量子场论

3.1　同一粒子的不同表示

3.2　Dirac,Weyl and Majorana fermions

[1] 简单来讲，Dirac fermion 是 Dirac 方程的一般解，Majorana fermion 是 Dirac 方程的“实”解，Weyl fermion 是无质量 Dirac 方程的解。

3.2.1　Dirac 方程及其解

Dirac 方程定义为：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi = 0 \tag{3.1}$$

它可以看作具有如下哈密顿量的薛定谔方程：

$$H = \gamma^0\left(\gamma^i p^i + m\right) \tag{3.2}$$

γ 矩阵定义为：

$$\begin{aligned}&[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu},\\&\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger\end{aligned} \tag{3.3}$$

可以看到，当 γ 矩阵为纯虚时，Dirac 方程为实方程，有实解。我们可以找到一组 γ 矩阵满足这样的条件，这个表象称为 Majorana 表象。

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\gamma}^1 = \begin{bmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\gamma}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{bmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 σ^i 为 Pauli 矩阵。在此表象下写出 Dirac 方程，我们有实解：

$$\widetilde{\psi} = \tilde{\psi}^\star \tag{3.5}$$

此解即代表 Majorana fermion。γ 矩阵不同表示之间通过幺正变换相联系：

$$\gamma^\mu = U\tilde{\gamma}^\mu U^\dagger \tag{3.6}$$

此时解 $\tilde{\Psi}$ 与 Majorana 表象下的解也通过一个幺正矩阵相联系：

$$\Psi = U\tilde{\Psi} \tag{3.7}$$

实解条件(3.5)此时为

$$\psi = UU^\top \psi^\star \tag{3.8}$$

我们一般不直接使用幺正矩阵 U，而是转而定义如下矩阵：

$$UU^\top = \gamma_0 C \tag{3.9}$$

由此定义协变共轭（协变性将在稍后证明）：

$$\hat{\Psi} \equiv \gamma_0 C \Psi^\star \tag{3.10}$$

此时实解条件(3.5)可以写为：

$$\hat{\psi} = \psi \tag{3.11}$$

3.2.2 Fourier 展开

一个 Majorana fermion 解在一般的表象下的 Fourier 展开为:

$$\psi(x)=\sum_s\int_p\left(a_s(p)u_s(p)e^{-ip\cdot x}+a_s^\dagger(p)v_s(p)e^{+ip\cdot x}\right) \tag{3.12}$$

v 和 u 互为协变共轭 $v_s(p)=\gamma_0 C u_s^\star(p)$

3.2.3 矩阵 C 的一些性质

除了通过找到实解对应的 Majorana 表象外，我们还可以通过研究 C 矩阵本身的性质来定义一组 C 矩阵，再由此找到不依赖于表象的“实解”条件。

简单观察可以发现，C 矩阵满足如下性质:

$$C^{-1}\gamma_\mu C=-\left(U\tilde{\gamma}_\mu U^\dagger\right)^\top=-\gamma_\mu^\top \tag{3.13}$$

事实上，对于任何表象的 γ 矩阵我们总可以找到满足上式的 C 矩阵，此式可以直接称为 C 矩阵的定义，由此我们有一般情况的实解条件(3.11) 同时，很容易验证 C 矩阵在任意表象下都是完全反对称矩阵。

3.2.4 实条件的洛伦兹不变性

此节将阐述为什么称(3.10)为协变共轭，我们取 Lorentz 变换的生成元为 $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$，注意，这并非 Pauli 矩阵。一个 fermion 场的变换为:

$$\Psi'\left(x'\right)=\exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\Psi(x) \tag{3.14}$$

对上式取复共轭并左乘 $\gamma_0 C$，注意到 γ 矩阵的性质，可以推出:

$$\widehat{\Psi}'\left(x'\right)=\exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\widehat{\Psi}(x) \tag{3.15}$$

由此可以看出，协变共轭场于原场具有相同的洛伦兹变换规则，所以实解条件是洛伦兹不变的。

3.2.5 左与右

在处理费米场时，我们通常会遇到两个和左右有关的概念，螺旋度（helicity）和手性（chirality），两者通常并不相同，但在某些情况下又有关联，本节将阐述这种关联。

螺旋度　满足 Dirac 方程的费米子额度螺旋度定义为：

$$h_p = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{\mathrm{p}} \tag{3.16}$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ 为自旋矩阵。很显然，h_p 的本征值为 ± 1，分别对应“右手”和“左手”。可以验证 h_p 与哈密顿量对易，也就是说它是一个守恒量，并且其点乘结构也保证了旋转不变形，但可以验证对于有质量粒子，螺旋度在推动下是改变的。一个简单的论证是考虑螺旋度的物理意义：自旋在动量方向上的投影，考虑在粒子速度方向上一运动更快的参考系，此时动量反号，但自旋投影在该 boost 下不改变，因此螺旋度改变。上面的论述依赖于速度更快的参考系，这对无质量粒子是不可能的，因此这暗示无质量粒子的螺旋度是一个真正的洛伦兹不变量。

手性　可以额外定义一个矩阵 γ_5，它满足：

$$[\gamma_5, \gamma_\mu]_+ = 0 \quad \forall \mu \tag{3.17}$$

一个显然的解是：

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{3.18}$$

给上式乘上额外的相因子也是满足定义的，上述的选择保证了 γ_5 有如下性质：

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad (\gamma_5)^2 = 1 \tag{3.19}$$

后者保证了如下定义的两个矩阵确实是投影算符：

$$L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \tag{3.20}$$

两者的本征空间里的矢量分别称为“左手”的和“右手”的。每个 Dirac 旋量也总可以拆分成两者之和。可以验证，γ_5 与洛伦兹变换的生成元对易，但与哈密顿量不对易，这是由于质量相含一个 γ 矩阵, 因此和 γ_5 反对易。

3.2.6 Wyle fermion

如前文所述，质量项同时阻碍了螺旋度和手性成为性质良好的物理量，因此我们考虑无质量费米子。由于 γ_5 的存在以及 Schur 引理，一般的 Dirac 方程解并非 Lorentz 群的不可约表示，而手性解是可约的，称为 Wyle fermion。一个一般的费米子是可约表示 $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$, 即一个左手 Wyle 一个右手 Wyle。上述说法对螺旋度同样适用，因为无质量时两者相同。

3.2.7 从 Wyle 费米子到 Majorana 与 Dirac 费米子

Majorana fermion 是含有质量的，因此必须包含左右手两部分，考虑到实条件，这必须是一个 Wyle 场与它的协变共轭：

$$\psi(x) = \chi(x) + \widehat{\chi}(x) \tag{3.21}$$

而 Dirac fermion 的区别就是没有实解条件，因此两个左手、右手场之间独立：

$$\Psi(x) = \chi_1(x) + \widehat{\chi}_2(x) \tag{3.22}$$

3.3 Pology

3.4 Noether 定理与 local 对称性

3.5 规范场的量子化:QED, 非阿贝尔, 与凝聚态中的电磁场路径积分

第四章　张量网络

参考文献

[1] P. B. Pal, "Dirac, majorana, and weyl fermions," *American Journal of Physics*, vol. 79, no. 5, pp. 485–498, 2011.