Explicação numérica: mínimos quadrados para aproximar um círculo [1]

Deseja-se encontrar um círculo que melhor aproxime uma série de pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$.

Uma circunferência qualquer em $\mathbb{R}^2$ pode ser descrita por

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0,$$

sendo (α, β) o centro da circunferência, e R o raio. Contudo, como deseja-se obter α, β e R de forma a melhor aproximar os pontos (x_i, y_i), esta expressão não terá resultado nulo, e sim resultado igual ao resíduo, isto é

$$\begin{aligned} r &= (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 \\ &= \alpha^2 - 2\alpha x + \beta^2 - 2\beta y - R^2 + x^2 + y^2 \\ &= (x^2 + y^2) - (2\alpha x + 2\beta y + R^2 + \alpha^2 + \beta^2) \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ \vdots \\ x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_i & 2y_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ R^2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto obteve-se $||b - A\theta||^2 = ||A\theta - b||^2$ desejado, com

$$A = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_i & 2y_i & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ \vdots \\ x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ R^2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{bmatrix}.$$

Na implementação prática deste exemplo, "utcfr_exercicio.py" o valor de R, necessário para obter a equação da circunferência, é recuperado através de $R = \sqrt{\theta_3 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$.

Referências

[1] S. Mottelet, *Least squares problems: How to state and solve them, then evaluate their solutions*, Université de Technologie de Compiègne, 2020.

[1] Exemplo adaptado de [1].