Decomposições Matriciais

I Decomposição SVD

Def. A decomposição em valor singular (SVD) de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ é a fatoração

$$A = U \Sigma V^* \quad \text{onde } \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

com $p = \min\{m, n\}$, e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$. Além disso, as matrizes quadradas

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in \mathbb{C}^{m\times m}$$
$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

são unitárias.

Obs. As entradas da diagonal de Σ são chamados de valores singulares de A, as colunas de U são chamados de vetores singulares à esquerda, e as colunas de V são chamados de vetores singulares à direita (de A).

Def (Forma reduzida) Seja $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ com posto $r \leq p = \min\{m, n\}$. A forma reduzida da SVD de A é a fatoração

$$A = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}^*, \quad \text{com } \hat{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r}$$

onde $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, $\hat{U} = [u_1, \dots, u_r] \in \mathbb{C}^{m\times r}$ e

$$\hat{V} = [v_1, \dots, v_r] \in \mathbb{C}^{n\times r}.$$

Neste caso, as colunas de $\hat{U}$ e $\hat{V}$ são ortonormais

Propriedades:

a) Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ possui uma decomposição SVD na forma

$$A = U \Sigma V^*$$

b) Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, então U e V são matrizes reais.

c) Se $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ possui uma decomposição SVD, então para todo $j = 1, 2, \dots p = \min\{m, n\}$ temos:

$$A v_j = \sigma_j u_j \;; \quad A^* u_j = \sigma_j v_j \;; \quad u_j^* A v_j = \sigma_j$$