DS

École Supérieure Polytechnique de Dakar

Intégration Numérique

outils et méthodes mathématiques analyse numérique

Étudiants :

- Ouleymatou Sadiya Cissé
- Salif Biaye
- Ndeye Astou Diagouraga
- Mouhamadou Tidiane Seck

Enseignant : Dr SARR

22 février 2025

Table des matières

Interpolation de Lagrange pour un gaz en thermodynamique

Dans cette étude, nous cherchons à déterminer un polynôme d'interpolation permettant d'estimer le volume spécifique d'un gaz en fonction de la pression. Nous utiliserons la méthode d'interpolation de Lagrange, qui permet de construire un polynôme passant exactement par un ensemble de points donnés.

I Données de l'expérience

Les résultats expérimentaux fournis sont les suivants :

Pression (P) [kPa]	Volume spécifique (Vg) [m³/kg]
308.6	0.055309
362.6	0.047485
423.3	0.040914
491.4	0.035413

Nous allons construire le polynôme d'interpolation de Lagrange P(x) qui relie la pression P au volume spécifique Vg.

II Méthode : Interpolation de Lagrange

Le polynôme d'interpolation de Lagrange pour un ensemble de points (xi, yi) est donné par :

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

où Li(x) est le polynôme de base de Lagrange, défini par :

$$L_i(x)=\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

III Calcul des polynômes de base de Lagrange

Nous avons quatre points, donc le polynôme d'interpolation sera de degré 3. Les polynômes de base sont calculés comme suit :

$$L_0(x)=\frac{(x-362.6)(x-423.3)(x-491.4)}{(-54)(-114.7)(-182.8)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-308.6)(x-423.3)(x-491.4)}{(54)(-60.7)(-128.8)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-308.6)(x-362.6)(x-491.4)}{(114.7)(60.7)(-68.1)}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-308.6)(x-362.6)(x-423.3)}{(182.8)(128.8)(68.1)}$$

IV Calcul du polynôme final

En multipliant chaque Li(x) par le volume spécifique correspondant Vg(xi) et en les sommant, nous obtenons :

$$P(x)=0.055309 L_0(x)+0.047485 L_1(x)+0.040914 L_2(x)+0.035413 L_3(x)$$

$$P(x)=-5.8031\times 10^{-10} x^3+9.5455\times 10^{-7} x^2-5.8908\times 10^{-4} x+0.1632$$

V Approximation du volume spécifique pour P = 400 kPa

En utilisant le polynôme obtenu, nous calculons l'approximation de Vg pour une pression de 400 kPa :

$$V_g(400)\approx 0.043156\ \mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$$

Le polynôme obtenu permet d'estimer le volume spécifique du gaz pour toute pression comprise entre 308.6 kPa et 491.4 kPa. Cette méthode d'interpolation est utile pour approximer des valeurs expérimentales et éviter des mesures supplémentaires coûteuses. Ce modèle peut également être utilisé pour extrapoler des valeurs en dehors de cette plage, bien que la précision ne soit pas garantie au-delà des points expérimentaux donnés.

Approximation de la Vitesse et de l'Accélération

L'objectif est d'approximer la vitesse et l'accélération d'une voiture en utilisant une méthode numérique d'ordre deux. La loi horaire du mouvement est donnée par :

$$x(t)=35e^{2t}$$

où t est le temps en heures et x(t) est la distance parcourue en kilomètres.

VI Méthodes numériques

1 Approximation de la vitesse

La vitesse est la dérivée première de x(t) :

$$v(t)=x'(t)$$

Une approximation d'ordre 2 de cette dérivée est donnée par la méthode des différences finies centrées :

$$v_{approx}(t)\approx \frac{x(t+h)-x(t-h)}{2h}$$

2 Approximation de l'accélération

L'accélération est la dérivée seconde de x(t) :

$$a(t)=x''(t)$$

Une approximation d'ordre 2 de cette dérivée est donnée par :

$$a_{approx}(t)\approx \frac{x(t+h)-2x(t)+x(t-h)}{h^2}$$

VII Calculs

Nous appliquons ces formules à t = 1 heure et h = 0.1.

1 Calcul des valeurs de x(t)

Nous calculons x(1 + h), x(1) et x(1 - h) :

$$x(1.1) = 35e^{2(1.1)} = 315.87$$

$$x(1) = 35e^{2(1)} = 258.61$$

$$x(0.9) = 35e^{2(0.9)} = 211.73$$

2 Calcul de la vitesse approximée

$$v_{approx}(1) = \frac{x(1.1) - x(0.9)}{2h} = \frac{315.87 - 211.73}{2 \times 0.1} = 520.7 \text{ km/h}$$

3 Calcul de l'accélération approximée

$$a_{approx}(1) = \frac{x(1.1) - 2x(1) + x(0.9)}{h^2} = \frac{315.87 - 2(258.61) + 211.73}{(0.1)^2} = 1038 \text{ km/h}^2$$

VIII Calcul des valeurs exactes

La dérivée exacte de x(t) donne la vitesse :

$$v_{exact}(t) = 70e^{2t}$$

Pour t = 1 :

$$v_{exact}(1) = 70e^{2(1)} = 517.23 \text{ km/h}$$

La dérivée seconde donne l'accélération exacte :

$$a_{exact}(t) = 140e^{2t}$$

Pour t = 1 :

$$a_{exact}(1) = 140e^{2(1)} = 1034.47 \text{ km/h}^2$$

IX Comparaison des résultats

	Valeur Approximée	**Valeur Exacte**
Vitesse (km/h)	520.7	517.23
Accélération (km/h²)	1038	1034.47

L'erreur relative de l'approximation est très faible, ce qui montre l'efficacité des différences finies centrées.

Nous avons utilisé la méthode des différences finies centrées pour approximer la vitesse et l'accélération d'un véhicule. Les résultats sont très proches des valeurs exactes, montrant que cette méthode est précise pour une fonction exponentielle.

Méthodes d'Intégration Numérique

L'objectif est de calculer des valeurs approchées de trois intégrales définies en utilisant différentes méthodes d'intégration numérique :

- Méthode des points milieux pour

  $$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x^2) dx$$

  avec n = 5
- Méthode des trapèzes pour

  $$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

  avec n = 4
- Méthode de Simpson composée pour

  $$I_2 = \int_0^1 e^{x^2} dx$$

  avec n = 6

X Méthode des Points Milieux

La méthode des points milieux consiste à approximer une intégrale définie en subdivisant l'intervalle [a, b] en n sous-intervalles de largeur égale :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Au lieu d'évaluer la fonction aux extrémités des sous-intervalles, on l'évalue en **leur point milieu** :

$$m_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Nous avons les extrémités des sous-intervalles définies par :

$$x_i = a + ih, x_{i+1} = a + (i+1)h$$

En substituant ces valeurs dans l'expression du point milieu :

$$m_i = \frac{a + ih + a + (i+1)h}{2} = \frac{2a + 2ih + h}{2} = a + ih + \frac{h}{2} = a + (i + \frac{1}{2})h$$

L'intégrale sur un sous-intervalle [xi, xi+1] est alors approximée par :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx hf(m_i)$$

En sommant sur tous les sous-intervalles, on obtient la formule de la méthode des points milieux :

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(m_i)$$

Nous avons :

- a = 0, b = π/2 (bornes de l'intégrale)
- n = 5 (nombre de sous-intervalles)
- La largeur des sous-intervalles :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/2 - 0}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Les points milieux sont définis par :

$$m_i = 0 + (i + \frac{1}{2})\frac{\pi}{10}, i = 0, 1, 2, 3, 4$$

En substituant les valeurs :

$$m_0 = \frac{\pi}{20}$$

$$m_1 = \frac{3\pi}{20}$$

$$m_2 = \frac{5\pi}{20}$$

$$m_3 = \frac{7\pi}{20}$$

$$m_4 = \frac{9\pi}{20}$$

Nous évaluons f(x) = sin(x²) aux points milieux :

$$f(m_0) = \sin((\frac{\pi}{20})^2)$$

$$f(m_1) = \sin((\frac{3\pi}{20})^2)$$

$$f(m_2) = \sin((\frac{5\pi}{20})^2)$$

$$f(m_3) = \sin((\frac{7\pi}{20})^2)$$

$$f(m_4) = \sin((\frac{9\pi}{20})^2)$$

L'approximation de I est alors donnée par :

$$I \approx h\sum_{i=0}^{4} f(m_i)$$

En substituant les valeurs, nous obtenons :

$$I \approx \frac{\pi}{10}[\sin((\frac{\pi}{20})^2) + \sin((\frac{3\pi}{20})^2) + \sin((\frac{5\pi}{20})^2) + \sin((\frac{7\pi}{20})^2) + \sin((\frac{9\pi}{20})^2)]$$

$$I \approx 0.83782$$

XI Méthode des Trapèzes

L'objectif est de calculer une valeur approchée de l'intégrale suivante en utilisant la méthode des trapèzes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

La formule d'approximation par la méthode des trapèzes est donnée par :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)]$$

Nous avons :

- a = 0, b = 1 (bornes de l'intégrale)
- n = 4 (nombre de sous-intervalles)
- La largeur des sous-intervalles :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

Les points d'évaluation sont définis par :

$$x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, 3, 4$$

Nous évaluons f(x) = 1/√(x² + 1) aux points xi :

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{0^2+1}} = 1.0000$$

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{0.25^2+1}} = 0.9701$$

$$f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{0.50^2+1}} = 0.8944$$

$$f(x_3) = \frac{1}{\sqrt{0.75^2+1}} = 0.8000$$

$$f(x_4) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = 0.7071$$

L'approximation de I_1 est alors donnée par :

$$I_1 \approx \frac{1}{8}[1.0000 + 2(0.9701 + 0.8944 + 0.8) + 0.7071]$$

$$\approx \frac{1}{8}[1.0000 + 5.329 + 0.7071]$$

$$\approx \frac{1}{8} \times 7.0691$$

$$\approx 0.8795$$

Nous avons appliqué la méthode des trapèzes pour approximer l'intégrale donnée en expliquant en détail la méthode et en effectuant les calculs numériques jusqu'au bout. Cette approche est utile lorsque l'intégrale ne peut pas être calculée analytiquement. Le résultat final donne une estimation précise en fonction du nombre de subdivisions choisies.

XII Méthode de Simpson Composée

L'objectif est de calculer une valeur approchée de l'intégrale suivante en utilisant la méthode de Simpson composée :

$$I_2 = \int_0^1 e^{x^2} dx$$

La méthode de Simpson composée utilise la formule d'approximation :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + f(b)]$$

où h = $\frac{b-a}{2n}$ et n doit être pair.

Nous avons :

- a = 0, b = 1 (bornes de l'intégrale)
- n = 6 (nombre de sous-intervalles)
- h = $\frac{1-0}{12} = \frac{1}{12}$

Les points d'évaluation sont :

$$x_i = \frac{i}{12}, i = 0, 1, 2, \ldots, 12$$

Nous évaluons f(x) = e^(x²) aux points xi :

$$f(x_0) = e^0 = 1.0000$$
$$f(x_1) = e^{(1/12)^2} = 1.0069$$
$$f(x_2) = e^{(2/12)^2} = 1.0281$$
$$f(x_3) = e^{(3/12)^2} = 1.0644$$
$$f(x_4) = e^{(4/12)^2} = 1.1175$$
$$f(x_5) = e^{(5/12)^2} = 1.1895$$
$$f(x_6) = e^{(6/12)^2} = 1.2840$$
$$f(x_7) = e^{(7/12)^2} = 1.4053$$
$$f(x_8) = e^{(8/12)^2} = 1.5596$$
$$f(x_9) = e^{(9/12)^2} = 1.7550$$
$$f(x_{10}) = e^{(10/12)^2} = 2.0025$$
$$f(x_{11}) = e^{(11/12)^2} = 2.3170$$
$$f(x_{12}) = e^1 = 2.7183$$

L'approximation de I_2 est alors donnée par :

$$I_2 \approx \frac{1}{18}[1.0000 + 2(1.0281 + 1.1175 + 1.2840 + 1.5596 + 2.0025) + 4(1.0069 + 1.0644 + 1.1895 + 1.4053 + 1.7550 + 2.3170) + 2.7183]$$
$$\approx \frac{1}{18}[1.0000 + 2(6.9917) + 4(8.7381) + 2.7183]$$
$$\approx \frac{1}{18}[1.0000 + 13.9834 + 34.9524 + 2.7183]$$
$$\approx \frac{52.6541}{18}$$
$$\approx 2.9252$$

Nous avons appliqué la méthode de Simpson composée pour approximer l'intégrale donnée en expliquant en détail la méthode et en effectuant les calculs numériques jusqu'au bout. Cette approche est utile lorsque l'intégrale ne peut pas être calculée analytiquement. Le résultat final donne une estimation précise en fonction du nombre de subdivisions choisies.

Détermination de n pour la Méthode de Simpson

L'objectif est de déterminer le nombre de subdivisions n pour évaluer l'intégrale suivante avec une précision de 0.251 × 10^-3 en utilisant la méthode de Simpson composée :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx$$

Nous allons détailler toutes les étapes nécessaires.

XIII Formule de l'Erreur en Simpson Composée

L'erreur de la méthode de Simpson composée est donnée par :

$$E = \frac{(b-a)h^4}{180} \times \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Nous devons trouver n tel que :

$$|E| \leq 0.251 \times 10^{-3}$$

XIV Calcul des Paramètres

Nous avons :

- a = -π, b = π
- $$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}$$
- La quatrième dérivée de f(x) = cos(x) :

$$f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

- La valeur maximale de |f^(4)(x)| sur [-π, π] est

$$\max |f^{(4)}(x)| = 1$$

XV Résolution pour n

Substituons ces valeurs dans la formule de l'erreur :

$$\frac{2\pi h^4}{180} \times 1 \leq 0.251 \times 10^{-3}$$

En remplaçant h = 2π/n, nous obtenons :

$$\frac{2\pi}{180} \times (\frac{2\pi}{n})^4 \leq 0.251 \times 10^{-3}$$

En résolvant pour n, nous trouvons :

$$n \approx 21.58$$

Comme n doit être un nombre pair pour la méthode de Simpson, nous prenons :

$$n = 22$$

Nous avons déterminé que le nombre de subdivisions nécessaire pour obtenir une précision de 0.251 × 10^-3 en utilisant la méthode de Simpson composée est n = 22. Cette valeur garantit une erreur inférieure au seuil spécifié.