TD Introduction à la théorie des langages Salif Biaye DIC2 (GLSI)

TD1

Exercice1: Alphabets et mots

- Comptons le nombre d'occurrences des lettres a et b dans les mots suivants

> `aabg,jdd,titi,babc,a^3cbbca`.
> `|m|a` dans `aabg` = 2
> `|m|a` dans `jdd` = 0
> `|m|a` dans `titi` = 0
> `|m|a` dans `babc` = 1
> `|m|a` dans `a^3cbbca` = 4
> `|m|b` dans `aabg` = 1
> `|m|b` dans `jdd` = 0
> `|m|b` dans `titi` = 0
> `|m|b` dans `babc` = 2
> `|m|b` dans `a^3cbbca` = 2

- Donnons l'ensemble des couples (`u,v`) tels que `uv =abaac`

> `u=a, v=baac → uv=abaac`
> `u=ab , v=aac → uv=abaac`
> `u=aba , v=ac → uv=abaac`
> `u=abaa, v=c → uv=abaac`
> `u=abaac , v=ε → uv=abaac`

- Déterminons les facteurs , les préfixes et les suffixes du mot u = `abac`

1. Les facteurs

> `"ε"`
> `"a"`
> `"b"`
> `"c"`
> `"ab"`
> `"ba"`
> `"ac"`
> `"aba"`
> `"bac"`
> `"abac"`
> 2. Les préfixes

> `"ε"`
> `"a"`
> `"ab"`
> `"aba"`
> `"abac"`
> 3. Les suffixes

> `"ε"`
> `"c"`
> `"ac"`
> `"bac"`
> `"abac"`

Soient les alphabets suivants :

- $$\mathit{\Sigma}1 = \Sigma_1 = \{a, b\}$$
- $$\mathit{\Sigma}2 = \Sigma_1 = \{d, e, f\}$$
- $$\mathit{\Sigma}3 = \Sigma_1 = \{b, cd\}$$
- Donnez les alphabets suivants ainsi que quelques mots qu'ils peuvent générer par la fermeture de Kleene.

1. $$\mathit{\Sigma}_1^1 = \{a, b\}$$
2. $$\mathit{\Sigma}_1^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$$
3. $$\mathit{\Sigma}_2^3 = \{ddd, eee, fff, dde, ddf, def, ded, fed, fef, eed, eef, edf, efd, ffe, ffd, fed, fde, \dots\}$$
4. $$\mathit{\Sigma}_2^1 U \mathit{\Sigma}_3^2 = \{df, e, bb, bcd, cdb, cdcd\}$$
5. $$(\mathit{\Sigma}_1 U \mathit{\Sigma}_2)^2 = \{aa, ab, ba, bb, ad, ae, af, bd, be, bf, ea, da, fa, db, eb, fb, ff, dd, ee, fe, ef, fd, df, de, ed\}$$

Exercice 2 : Langages

Soit l'alphabet Σ={a,b} Donnez une description des langages suivants et quelques exemples de mots.

Langages donnés :

1. $$L1 = \Sigma^n, n \in N^*$$
2. L2= `m∈Σ^* avec |m|_a=|m|_b`
3. L3= `a^ib^j avec 0≤i≤j`
4. L4= `a^n,b^m avec (m,n) ∈ N^2`
5. $$L5 = a, ba, /alorsquereprésenteL^*$$
6. $$L6 = a^n, b|n >= 0, /alorsquereprésenteL^*$$
7. L1 : L'ensemble des mots non vide
8. L2: L'ensemble des mots dont le nombre de symbole a soit égale au nombre de symbole de b
9. L3: L'ensemble des mots contenant i a suivis de j b, avec i≤j avec i et j >=0
10. L4: L'ensemble des mots contenant n a suivis de m b, avec n et m >=0
11. L5: L* représente la fermeture de Kleene du langage L5
12. L6 : L* représente la fermeture de Kleene du langage L6

Exercice 3 : Operations sur les langages

1. Soit l'alphabet :
   `Σ={a,b,c}`
2. Les langages définis :

   `– L1={ab,ba} `- L2={c,cc}` `- L3={ac}``

Question 1 : Calcul des opérations sur L1,L2,L3

a) L1L2

`L1L2={abc,abcc,bac,bacc}`

b) L1L2L3

`L1L2L3={abcac,abccac,bacac,baccac}`

c) L_1^2

`L_1^2={abab,abba,baab,baba}`

Langages donnés :

L1 = {abb, b, a}
L2 = {ba, baa, a}

1. (L1)³ ∩ L2

Calcul de (L1)² :
(L1)² = {abb, b, a}{abb, b, a}
= {abbabb, abbb, abba, babb, bb, ba, aabb, ab, aa}

Calcul de (L1)³ :
(L1)³ = {abbabb, abbb, abba, babb, bb, ba, aabb, ab, aa}{abb, b, a}
= {abbabbabb, abbabbb, abbabba, abbbabb, abbbb, abbba, abbaabb, abbab, abbaa, babbabb, babbb, babba, bbabb, bbb, bba, baabb, bab, baa, ababb, aabbb, aabba, ababb, abb, aba, aaabb, aab, aaa}

2. (L1)³ ∩ L2 = {baa}

3. Calcul de (L1 ∪ L2)

L1 ∪ L2 = {abb, b, a} ∪ {ba, baa, a}
= {abb, b, a, ba, baa}

Calcul de (L1 ∪ L2)² :
(L1 ∪ L2)² = {abb, b, a, ba, baa}{abb, b, a, ba, baa}
= {abbabb, abbb, abba, abbba, abbbaa, babb, bb, ba, bba, bbaa, aabb, ab, aa, aba, abaa, baabb, bab, baa, baba, babaa, baaabb, baab, baaa, bba, baaba, baabaa}

4. Calcul de (L1 ∪ L2)² · L2

(L1 ∪ L2)² · L2 = {abbabb, abbb, abba, abbba, abbbaa, babb, bb, ba, bba, bbaa, aabb, ab, aa, aba, abaa, baabb, bab, baa, baba, babaa, baaabb, baab, baaa, bba, baaba, baabaa} · {ba, baa, a}
= {abbabbba, abbabbbaa, abbabba, abbbba, abbbbaa, abbba, abbaba, abbbabaa, abbaa, abbbaba, abbbabaa, abbbaa...}

Exercice 4 : Reconnaisseur

- Dans quel état se trouve R Apres la lecture des mots `a, ab, abb, abba`

1. `a`

État	Entrée	État suivant
0	a	1

2. `ab`

État	Entrée	État suivant
0	a	1
1	b	2

3. `abb`

État	Entrée	État suivant
0	a	1
1	b	2
2	b	2

4. `abba`

État	Entrée	État suivant
0	a	1
1	b	2
2	b	2
2	a	2

- Que se passe t-il quand on donne le mot `aab` à lire à R

  on remarque qu'a partir de l'état 1 il ne pourra plus se déplacer pour lire un prochain symbole a car il n'y a pas de chemin
- les mots aba^2 b,a^2ba^2 b,ab^4 et b^3 a^2 sont-ils reconnus par R ?

  aba^2 b et ab^4 seront reconnus
  a^2ba^2 b et a^2 ne seront pas reconnus

Exercice 5: Grammaire de réécriture

Soit la grammaire formelle G=({S,R},{a,b},P,S)G = ({S, R}, {a, b}, P, S)G=({S,R},{a,b},P,S), où l'ensemble des règles de production PPP est :

1. `S→aS`
2. `S→bR`
3. `S→b`
4. `R→aR`
5. `R→bS`

Question 1 : Montrer que le mot abb est généré par G

Pour générer `abb` :

1. `S→aS` : on génère a, reste S.
2. `S→bR` : on génère b, reste R.
3. `R→bS` : on génère b, reste R.
4. `S→b` : on génère b, il ne reste plus rien.

Ainsi, le mot abbb est obtenu.

Question 2 : Montrer que le mot abb n'est pas généré par G

1. `S→aS` : on génère a, reste S.
2. `S→bR` : on génère b, reste R.
3. `R→bS` : on génère b, reste R.
   et donc on aura `abbR` or R ne peut pas donner `ε` donc `abb` ne peut être généré par G

TD2

Exercice 1 :

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse puis justifier :

1. Tout langage régulier est infini.
   Faux : ∅ est fini et ∅ est un langage régulier.
2. Il y a une infinité de langages réguliers.
   Vrai : on peut avoir une infinité d'E.R et chaque E.R désigne un langage régulier.
3. L'union de 2 langages reconnaissables est reconnaissable.
   Vrai : les langages reconnaissables sont clos par l'union.
4. L'intersection de deux langages reconnaissables est un langage reconnaissable.
   Vrai : car les langages reconnaissables sont clos par l'intersection.

Exercice 2 :

Ces E.R contiennent-elles le mot vide ?

1. (a + b)a* b(a + b(b + ab)*)*

⇔ **b donc ne contient pas ∈.**

2. (a + b)(aa* + bb*a)*
   ⇔ **a + b ne contient pas le mot vide ∈.**
3. (a + c)(a + b)(1 + c)(1 + d)(∈ + f)
   ⇔ **ne contient pas le mot vide.**
4. (a + (b + (c + d)*))*
   ⇔ **∈ donc contient le mot vide.**

Exercice 3 :

Donnons tous les mots de longueur 0, 1, 2, 3 et 4 dans les langages réguliers suivants :

1. (a.b + ba)*
   - L^0 = {∈}
   - L^1 = {a, b}
   - L^2 = {aa, ba}
   - L^3 = {aaa, aba, baa}
   - L^4 = {abaa, baba, aaaa, aaba, baaa}
2. a(aa + b(ab)*a)*a

- L^0 = ∅
- L^1 = ∅
- L^2 = {aa}
- L^3 = ∅
- L^4 = {aaaa, abaa}

Exercice 4 :

Soit A = {a, b}. Donnez la description des langages donnés par les expressions relationnelles :

1. A*
   {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de tous les mots .}
2. **AA**
   {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de tous les mots de longueur 2.}
3. **(E + A)(E + A)**
   {m ∈ {a, b}* / |m| ≤ 2, tous les mots de longueur au plus 2 sur {a, b}.}
4. (AA)*
   {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de mots de longueur paire sur A = {a, b}.}
5. aA*
   {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de mots commençant par a.}
6. A* a
   {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de mots terminant par a.}
7. A* a A*
   {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de mots contenant le mot a ou bien a est facteur.}
8. A* abA*
   {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de mots où ab est le facteur du mot m.}
9. A* aA* bA*
   L'ensemble de tous les mots sur l'alphabet {a, b} avec au moins une occurrence de a suivie par au moins une occurrence de b.
10. **(b + ab)(a + E)**
    {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de mots se terminant par a.}
11. a* + b*
    {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de mots contenant 0 ou plusieurs a ou bien 0 ou plusieurs b.}
12. (aa + b)*
    m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble des mots formés de **zéro ou plusieurs** répétitions de "aa" et de "b"
13. (ab* a + b)
    {m ∈ {a, b}* / m est composé de zéro ou plusieurs répétitions de une occurrence de "a", suivie de zéro ou plusieurs "b", puis un autre "a", ou simplement une occurrence de "b".}
14. (ab)*
    {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble des mots contenant 0 ou plusieurs ab sur A = {a, b}.}
15. a* + bc* d
    {m ∈ {a, b}* / m représente l'ensemble de mots contenant uniquement des "a" (y compris la chaîne vide), ou contenant un "b", suivi de zéro ou plusieurs "c", et se terminant par un "d".}

Exercice 5

1. le langage des mots qui entre deux occurrences de la lettre a ont un nombre pair de b

   b* +(a(bb)*a)*+b*
2. Le langage des mots tels que toutes les éventuelles occurrences de a precedent toute les éventuelles occurrences de b
   a* b*

Exercice 6

Le langage L(E) :

Le langage L(E), qui est l'ensemble des chaînes acceptées par l'expression régulière E, est donc constitué de toutes les chaînes qui :

- Se terminent par un "c",
- Et qui avant ce "c" peuvent contenir n'importe quelle combinaison de "a" et "b", ou rien du tout (c'est-à-dire la chaîne vide).

Ainsi, le langage L(E) est formé des chaînes suivantes :

- "", "c", "ac", "bc", "abc", "bac", "aabbc", "abac", etc.

En résumé, L(E) est l'ensemble de toutes les chaînes qui se terminent par un "c", et qui avant ce "c" peuvent être composées de n'importe quel lettre entre "a" et "b" ou epsilon.