

Matematička analiza I, test II, 08.06.2023. god.

1. (a) Koristeći definiciju granične vrijednosti niza dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^4 - 2n^2 + 3} = 0$.
(b) Dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.
2. (a) Posmatrajmo niz čiji je opći član $a_n = \frac{n^2}{2n^2 + 1} \cos \frac{2n\pi}{3}$. Odrediti $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ i $\limsup_{n \rightarrow \infty}$.
(b) Dokazati konvergenciju niza $\frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}$.
(c) Ako je $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da je $x_n > 0$ na $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = +\infty$ dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right) = 0$.
3. (a) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n^2}$.
(b) Odrediti sumu reda $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{2}{n^2 - 1} \right)$.
(c) Ispitati uslovnu i apsolutnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{n!}$.
4. Po definiciji pokazati da je
(a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 1) = 3$.
(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x}) = +\infty$.