Instituto de Ciencias Matemáticas de Computación-Universidad de Sao Paulo

Introducción a la Teoría de las Probabilidades

Profesor: Francisco A. Rodrigues

Solución de la Primera lista de ejercicios

---

1. Defina los espacios muestrales asociados a los experimentos de abajo.

   - E_1: Lanzamiento de un dado.
   - E_2: Lanzamiento de una moneda cinco veces y verifique el número de caras.
   - E_3: Lanzamiento de una moneda hasta que una cara aparezca y cuente el número de lanzamientos.
   - E_4: Verifique el tiempo de una maquina antes de fallar.
   - E_5: Medida de la altura de un jugador de básquet de la selección brasileña.

   Solución
   • Para E_1: Lanzamiento de un dado.

   $$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   • Para E_2: Lanzamiento de una moneda cinco veces y verifique el número de caras.

   $$\Omega_2 = \{0, , 1, 2, 3, 4, 5\}$$

   • Para E_3: Lanzamiento de una moneda hasta que una cara aparezca y cuente el número de lanzamientos.

   $$\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

   • Para E_4: Verifique el tiempo de una maquina antes de fallar.

   $$\Omega_4 = \{t \in \mathbb{R} | t > 0\}$$

   • Para E_5: Medida de la altura de un jugador de básquet de la selección brasileña.

   $$\Omega_5 = \{h \in \mathbb{R} | 1,75 \leq h \leq 2,2\}$$

2. Enuncie un evento asociado a cada uno uno de los espacios muestrales del ejercicio anterior.
   Solución
   • Para Ω_1

   $$E_1 = \{x \in \Omega_1 : \ x \text{ sea par}\} = \{2, 4, 6\}$$

   • Para Ω_2

   $$E_2 : \text{Lanzar una moneda cinco veces y que verifique una cara}$$

   $$E_2 = \{CSSSS, SCSSS, SSCSS, SSSCS, SSSSC\}$$

   • Para Ω_3

   $$E_3 : \text{Lanzar una moneda y que aparezca cara en el tercer lanzamiento}$$

$$E_3 = \{S, SS, SSC\}$$

- Para Ω_4

$$E_4 = \{t \in \Omega_4 :\ t \text{ falla al 2do segundo}\} = \{t \in \Omega_4 : 0 < t < 2\}$$

- Para Ω_5

$$E_5 = \{h \in \Omega_5 :\ h \text{ sean mayor a 1,90cm}\} = \{h \in \Omega_5 : 1,90 < h \leq 2,2\}$$

3. En una sala de 30 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de esas personas tengan aniversario el mismo día.

Solución

Calculemos la probabilidad de que, en una habitación con n personas, al menos dos cumplan años el mismo día, desechando los años bisiestos y las personas gemelas, y asumiendo que existen 365 cumpleaños que tienen la misma probabilidad. El truco es calcular primero la probabilidad de que ninguna persona cumpla años el mismo día que otra, la cual viene dada por lo que:

$$p = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - n + 1}{365}$$

porque la segunda persona no puede tener el mismo cumpleaños que el primero (364/365), la tercera persona no puede tener el mismo cumpleaños que las dos primeras (363/365), etc. Usando notación factorial, puede ser escrita como

$$p = \begin{cases} \dfrac{365!}{365^n (365-n)!}, & 1 \leq n \leq 365 \\ 0, & n > 365 \end{cases}$$

Ahora, $1 - p$ es la probabilidad de que al menos dos personas tengan el mismo día de cumpleaños. Para $n = 30$ se obtiene una probabilidad de alrededor

$$1 - p = 1 - \frac{365!}{365^{30}(335!)} \simeq 0,7$$

4. Una nueva prueba de diagnóstico para detectar el vírus HIV se presenta con un 95% de posibilidades de dar un resultado positivo si el paciente es portador del HIV, y 98% de posibilidad de dar negativo si el paciente no es portador del HIV. En una población con una prevalencia de 1/1000 casos de HIV (fracción de infectados), ¿cuál es la probabilidad de que una persona con prueba positivo tenga realmente el vírus?

Solución

Consideremos los siguientes eventos:

- A: paciente que dá positivo.
- B: paciente portador del HIV (está infectado).

Tenemos por dato:

$$P(A/B) = 0,95,\ P(\overline{A}/\overline{B}) = 0,98,\ P(B) = 1/1000 = 0,001.$$

Nos piden $P(B/A)$.
Utilizamos probabilidad total

$$P(B/A) = \frac{P(B)P(A/B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A/B)}{P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B})}$$

Además tenemos que $P(A/\overline{B})+P(\overline{A}/\overline{B})=1$ entonces $P(A/\overline{B})=0,02$.
Reemplazando

$$P(B/A)=\frac{(0,001)(0,95)}{(0,95)(0,001)+(0,02)(0,999)}=0,045389393\simeq 0,045$$

5. Suponga que lanzamos tres monedas. Sea la variable aleatoria Y: "número de caras obtenidas". Calcule la función de probabilidad de Y.
Solución
Considermos S: sello, C: cara, calculemos el espacio muestral

$$\Omega=\{CCC,CCS,CSC,CSS,SCC,SCS,SSC,SSS\}$$

$n(\Omega)=8$
- para $Y=0$ entonces $E_1=\{SSS\}\longrightarrow P(E_1)=\frac{1}{8}$.
- para $Y=1$ entonces $E_2=\{CSS,SCS,SSC\}\longrightarrow P(E_2)=\frac{3}{8}$.
- para $Y=2$ entonces $E_3=\{CCS,CSC,SCC\}\longrightarrow P(E_3)=\frac{3}{8}$.
- para $Y=3$ entonces $E_4=\{CCC\}\longrightarrow P(E_4)=\frac{1}{8}$.

Y	0	1	2	3
P(Y=y)	1/8	3/8	3/8	1/8

6. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad $f(x)=be^{-bx}$, $x\geq 0$. Muestre que si $p_j=P(j\leq X\leq j+1)$ entonces $p_j=(1-a)a^j$ y determine a.
Solución

$$p_j=\int_j^{j+1}f(x)dx=\int_j^{j+1}be^{-bx}dx=-e^{-bx}|_j^{j+1}=e^{-bj}-e^{-(j+1)b}=e^{-bj}(1-e^{-b})$$

Considerando $a=e^{-b}$, se tiene que $p_j=a^j(1-a)$.

7. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases} x/2, & 0\leq x\leq 1\\ 1/2, & 1\leq x\leq 2\\ -x/2+3/2, & 2\leq x\leq 3\\ 0, & \text{caso contrario.}\end{cases}$$

Calcule $P(X>2|1\leq X\leq 3)$.
Solución
Recordamos probabilidad condicional: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$P(X>2|1\leq X\leq 3)=\frac{P((X>2)\cap(1\leq X\leq 3)}{P(1\leq X\leq 3)}=\frac{P(2<X\leq 3)}{P(1\leq X\leq 3)}$$

- Calculemos $P(2<X\leq 3)$

$$P(2<X\leq 3)=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3(-\frac{x}{2}+\frac{3}{2})dx=\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{2}\right)\Big|_2^3=\frac{1}{4}$$

- Calculemos $P(1 \leq X \leq 3)$

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= P(1 \leq X \leq 2) + P(2 < x \leq 3) \\ &= \int_1^2 f(x)dx + \frac{1}{4} \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2}dx + \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)\Big|_1^2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P(X > 2|1 \leq X \leq 3) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

8. El tiempo T, en semanas, necesario para un programador desarrollar un website es una variable aleatoria con distribución de probabilidad dada a continuación.

T	2	3	4	5
P(T=t)	0,2	0,1	0,3	0,4

Calcule $F(t) = P(T \leq t)$.
Solución
- Calculemos $F(1)$

$$F(1) = P(T \leq 1) = 0$$

- Calculemos $F(2)$

$$F(2) = P(T \leq 2) = 0,2$$

- Calculemos $F(3)$

$$F(3) = P(T \leq 3) = 0,2 + 0,1 = 0,3$$

- Calculemos $F(4)$

$$F(4) = P(T \leq 4) = 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,6$$

- Calculemos $F(5)$

$$F(5) = P(T \leq 5) = 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,4 = 1$$

9. Sea $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$. Calcule $f(x)$.
Solución
Sabemos que $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, de donde $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-\lambda x}) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$$

10. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 4(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Determine la función de distribución acumulada de X.

Solución

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- para $x < 1/2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} 4tdt = 2t^2|_0^x = 2x^2$$

- para $x \leq 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{0}^{1/2} f(t)dt + \int_{1/2}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{0}^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^{x} 4(1-t)dt \\ &= 2t^2|_0^{1/2} + (4t - 2t^2)|_{1/2}^{x} \\ &= \frac{1}{2} + (4x - 2x^2) - (2 - \tfrac{1}{2}) \\ &= 4x - 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

Escribiendo un solo resultado,

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x < 1/2 \\ 4x - 2x^2 - 1, & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

11. Una fábrica produce partes de automóviles tales que 5% de ellas son defectuosas y el 95% no son defectuosas. Si una parte defectuosa por producir el fabricante pierde \$ 5,00, en cuanto una parte no defectuosa le dá una ganancia de \$ 10,00. Si X es el beneficio neto de la pieza, calcule $E(X)$.

Solución

Escribimos nuestra distribución de probabilidades

X	-5	10
P(X=x)	0,05	0,95

La experanza

$$E[X] = \sum_{i=1}^{2} x_i P(X = x_i) = -5(0,05) + 10(0,95) = 9,25$$

12. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Calcule el valor esperado de X.

Solución

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx}_{0} + \int_{0}^{1} xf(x)dx + \int_{1}^{2} xf(x)dx + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} xf(x)dx}_{0} \\ &= \int_{0}^{1} x(x)dx + \int_{1}^{2} x(2-x)dx \\ &= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1} + \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{1}^{2} = \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

13. Sean las variables aleatorias X e Y con distribución de probabilidades:

X	-2	-1	0	1	2
P(X=x)	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Y	-2	-1	0	1	2
P(Y=y)	0	1/4	1/2	1/4	0

Calcule $E[X]$, $E[Y]$, $E[X^2]$, $E[Y^2]$.

Solución

- Calculemos $E[X]$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{5} x_i P(X = x_i) = -2\left(\frac{1}{5}\right) - 1\left(\frac{1}{5}\right) + 0\left(\frac{1}{5}\right) + 1\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{5}\right) = 0$$

- Calculemos $E[Y]$

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{5} x_i P(Y = y_i) = -2\,(0) - 1\left(\frac{1}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\,(0) = 0$$

- Calculemos $E[X^2]$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 P(X = x_i) = 4\left(\frac{1}{5}\right) + 1\left(\frac{1}{5}\right) + 0\left(\frac{1}{5}\right) + 1\left(\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{1}{5}\right) = 2,0$$

- Calculemos $E[Y^2]$

$$E[Y^2] = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 P(Y = y_i) = 4\,(0) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 4\,(0) = 0,5$$

14. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Calcule la varianza de X.

Solución

Del problema 12 tenemos que: $E[X] = 1$, ahora calculemos $E[X^2]$.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^1 x^2 f(x)dx + \int_1^2 x^2 f(x)dx \\ &= \int_0^1 x^2(x)dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx \\ &= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{12}\right) \\ &= 7/6 \end{aligned}$$

Ahora si calculemos la varianza de X,

$$\begin{aligned} V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= 7/6 - 1 \\ &= 1/6. \end{aligned}$$

15. Muestre que si X es una variable aleatoria con A y B constantes:

$$\begin{aligned} E[AX+B] &= AE[X] + B \\ V[AX+B] &= A^2V[X]. \end{aligned}$$

Solución

- Calculemos $E[AX+B]$

$$\begin{aligned} E[AX+B] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax+B)f(x)dx \\ &= A\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}_{E[X]} + B\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}_{1} \\ &= AE[X] + B. \end{aligned}$$

- Calculemos $V[AX+B] = E[(AX+B)^2] - E[AX+B]^2$

$$\begin{aligned} E[(AX+B)^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax+B)^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (A^2x^2 + 2ABx + B^2)f(x)dx \\ &= A^2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx}_{E[X^2]} + 2AB\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}_{E[X]} + B^2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}_{1} \\ &= A^2E[X^2] + 2ABE[X] + B^2 \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} V[AX+B] &= A^2E[X^2] + 2ABE[X] + B^2 - (AE[X]+B)^2 \\ &= A^2E[X^2] + 2ABE[X] + B^2 - (A^2E[X]^2 + 2ABE[X] + B^2) \\ &= A^2(E[X^2] - E[X]^2) \\ &= A^2V[X]. \end{aligned}$$