Esame Ricerca Operativa

20 giugno 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____**Matricola:**_____________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri una rete logistica per trasportare delle merci da dei punti di produzione a dei punti di vendita utilizzando anche dei punti di transito.
La rete logistica è rappresentata da un grafo $G(V, A)$ in cui l'insieme dei vertici V rappresenta i punti di produzione, di vendita e di transito, mentre gli archi $(i, j) \in A$ rappresentano i canali disponibili per trasportare le merci. Per ciascun vertice $i \in V$ abbiamo che $b_i > 0$ unità di merce sono "disponibili" se i è un punto di produzione, oppure $b_i < 0$ unità di merce sono "richieste" se i è un punto di vendita, mentre $b_i = 0$ se i è un punto di transito. Trasportare una unità di merce dal vertice i al vertice j utilizzando l'arco $(i, j) \in A$ prevede un costo pari a c_{ij}, mentre la quantità massima di merce trasportata da i a j non può superare la quantità u_{ij}.
Si vuole determinare come trasportare le merci nella rete logistica per soddisfare tutte le richieste dei punti di vendita utilizzando le merci disponibili nei punti di produzione minimizzando il costo complessivo.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)
Per formulare matematicamente il problema definiamo le variabili decisionali binarie x_{ij}, ciascuna delle quali indicherà quante unità di merce sono trasportate dal vertice i al vertice j. Un possibile modello matematico è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_i, && i \in V \\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, && (i,j) \in A \\
& x_{ij} \ge 0, && (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = +2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \quad \text{s.t.}\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ \qquad +4x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|     -2.000      3.000     -3.000      0.000
-----------+--------------------------------------------
      2.000|     -1.000      2.000      1.000      1.000
      4.000|      4.000     -2.000     -1.000      0.000

Tableau Fase 1: iniziale
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|     -1.000      2.000      1.000      1.000      0.000
      4.000|      4.000     -2.000     -1.000      0.000      1.000

Tableau Fase 1: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      4.000|      4.000     -2.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|     -1.000      2.000      1.000      1.000      0.000
      4.000|      4.000     -2.000     -1.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,1)
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      3.000|      0.000      1.500      0.750      1.000      0.250
      1.000|      1.000     -0.500     -0.250      0.000      0.250

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      3.000|      0.000      1.500      0.750      1.000      0.250
      1.000|      1.000     -0.500     -0.250      0.000      0.250

Tableau Fase 2: iniziale
      0.000|     -2.000      3.000     -3.000     -0.000
-----------+--------------------------------------------
      3.000|      0.000      1.500      0.750      1.000
      1.000|      1.000     -0.500     -0.250      0.000

Tableau Fase 2: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      2.000|      0.000      2.000     -3.500      0.000
-----------+--------------------------------------------
      3.000|      0.000      1.500      0.750      1.000
      1.000|      1.000     -0.500     -0.250      0.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,2)
     -2.000|      0.000      0.000     -4.500     -1.333
-----------+--------------------------------------------
      2.000|      0.000      1.000      0.500      0.667
      2.000|      1.000      0.000      0.000      0.333

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 2
     -2.000|      0.000      0.000     -4.500     -1.333
-----------+--------------------------------------------
      2.000|      0.000      1.000      0.500      0.667
      2.000|      1.000      0.000      0.000      0.333

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -2.0000

X(   1):     2.0000
X(   2):     2.0000
```

b) Scrivere il duale di **P.** (2 punti)

Il duale **D** del problema **P** è il seguente:

$$
(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} \max z = 2w_1 + 4w_2 \\ \quad \text{s.t.} \quad -w_1 + 4w_2 \le 2 \\ \quad\quad 2w_1 - 2w_2 \le -3 \\ \quad\quad w_1 - w_2 \le 3 \\ \quad\quad w_1 \le 0, \ w_2 \text{ qualsiasi} \end{cases}
$$

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge -2 \\ \quad\quad x_1 + 3x_2 - x_3 \le 1 \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = (0,1,2)$ è ottima per il problema **P**. (6 punti)

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = (0,1,2)$:

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 2 - 4 = -2 \\ 0 + 3 - 2 = 1 \end{cases}
$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il duale del problema **P** è il seguente:

$$
(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} \max z = -2w_1 + w_2 \\ \quad \text{s.t.} \quad w_1 + w_2 \le 2 \\ \quad\quad 2w_1 + 3w_2 \le -2 \\ \quad\quad -2w_1 - w_2 \le -3 \\ \quad\quad w_1 \ge 0, w_2 \le 0 \end{cases}
$$

I vincoli del primale sono tutti saturi, quindi per gli scarti complementari le variabili duali possono anche non essere nulle.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, allora il secondo e il terzo vincolo duale devono essere saturi:

$$
\begin{cases} 2w_1 + 3w_2 = -2 \\ -2w_1 - w_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2w_1 + 3(3 - 2w_1) = -2 \\ w_2 = 3 - 2w_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2w_1 + 9 - 6w_1 = -2 \\ w_2 = 3 - 2w_1 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} 4w_1 = 11 \\ w_2 = 3 - 2w_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = \frac{11}{4} \\ w_2 = 3 - \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = \frac{11}{4} \\ w_2 = -\frac{5}{2} \end{cases}
$$

La soluzione duale rispetta i vincoli di segno delle variabili duali e anche il primo vincolo:

$$
w_1 + w_2 \le 2 \ \Rightarrow \frac{11}{4} - \frac{5}{2} = \frac{1}{4} \le 2
$$

quindi la soluzione $\mathbf{x} = (0,1,2)$ è ottima.

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 3 \\ \quad\quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \ \text{ intere} \end{cases}
$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso abbiamo ottenuto il seguente tableau ottimo:

```
Tableau ottimo
      3.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000
-----------+-----------------------------------------------------
      7.000|      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000
      5.500|      1.500      0.000      1.000     -0.500      1.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     3.0000

X(   2):     7.0000
X(   3):     5.5000
```

a) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema **P** (i.e., nodo radice), svolgere una iterazione dell'algoritmo branch and bound, in particolare:

- definire i nodi figli e i problemi corrispondenti; (1 punto)

  Se consideriamo il tableau ottimo del Simplesso, tra le variabili in base con valori frazionari abbiamo solo la variabile $x_3 = \frac{11}{2}$. Quindi, in questo caso, possiamo considerare il branching solo rispetto alla variabile x_3, che prevede i seguenti nodi figli: $P_1 = P(x_3 \leq 5)$ e $P_2 = P(x_3 \geq 6)$.

- selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto). (5 punti)

  Se selezioniamo il nodo figlio $P_1 = P(x_3 \leq 5)$, in questo caso dobbiamo aggiungere il vincolo $x_3 \leq 5$, che aggiungendo la variabile di scarto è della seguente forma:

  $$x_3 + x_6 = 0$$

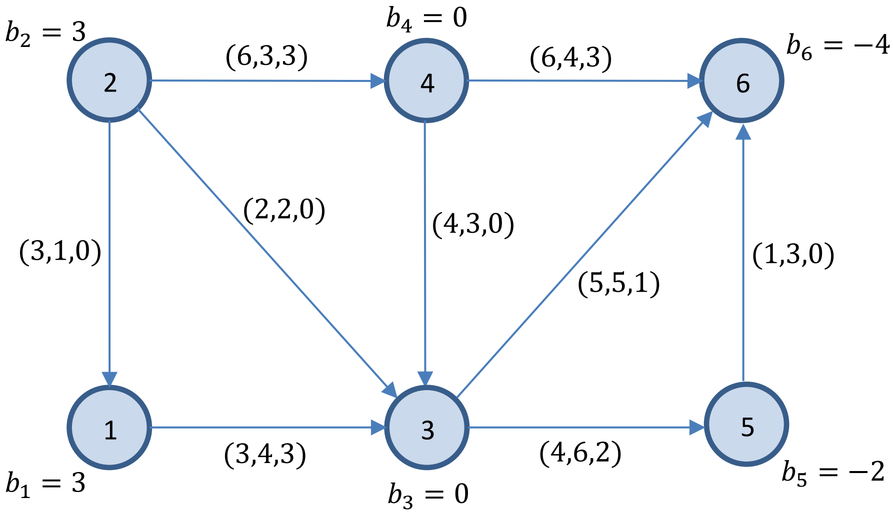
  Una volta aggiunto il nuovo vincolo al tableau, dobbiamo ripristinare una base pivotando sulla colonna di x_3 per annullare il coefficiente "1" nella riga del nuovo vincolo e riottimizzare.

  Qui di seguito i passaggi:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo.
      3.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      7.000|      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000      0.000
      5.500|      1.500      0.000      1.000     -0.500      1.000      0.000
      5.000|      0.000      0.000      1.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver ripristinato la base.
      3.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      7.000|      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000      0.000
      5.500|      1.500      0.000      1.000     -0.500      1.000      0.000
     -0.500|     -1.500      0.000      0.000      0.500     -1.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (4,1)
      3.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      6.667|      0.000      1.000      0.000     -0.667      0.333      0.667
      5.000|      0.000      0.000      1.000      0.000      0.000      1.000
      0.333|      1.000     -0.000     -0.000     -0.333      0.667     -0.667

Tableau ottimo
      3.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      6.667|      0.000      1.000      0.000     -0.667      0.333      0.667
      5.000|      0.000      0.000      1.000      0.000      0.000      1.000
      0.333|      1.000     -0.000     -0.000     -0.333      0.667     -0.667

Soluzione ottima trovata!
```

```
Costo ottimo:     3.0000

X(   1):     0.3333
X(   2):     6.6667
X(   3):     5.0000
```

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente. (6 punti)

```
Algoritmo Flusso di Costo Minimo

Soluzione Ammissibile Iniziale
Nodo 1: x(1,3)=3
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,3)=0 x(2,4)=3
Nodo 3: x(3,5)=2 x(3,6)=1
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=3
Nodo 5: x(5,6)=0

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione 1
Ciclo: C(2,3)=2 C(3,6)=5 C(6,4)=-6 C(4,2)=-6
Aumento flusso di: 2

Iterazione 2
Ciclo: C(1,3)=3 C(3,6)=5 C(6,4)=-6 C(4,2)=-6 C(2,1)=3
Aumento flusso di: 1

Iterazione 3
Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 3

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,3)=4
Nodo 2: x(2,1)=1 x(2,3)=2 x(2,4)=0
Nodo 3: x(3,5)=2 x(3,6)=4
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,6)=0

Costo Soluzione = 47
```

Potevano esserci anche altri cicli di costo negativo che potevano essere scelti, richiedendo un numero diverso di iterazioni, per raggiungere la stessa soluzione.

6) Dato il problema $z_P = \min\{\mathbf{cx} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, rilassando i vincoli $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ in modo Lagrangiano si ottiene la Funzione Langragiana $z_{LR}(\boldsymbol{\lambda}) = \min\{\mathbf{cx} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})\}$.

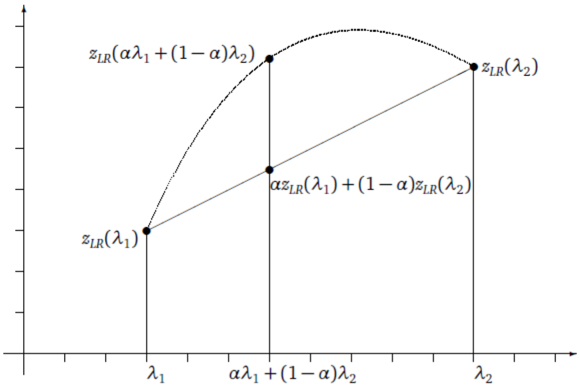
a) Dimostrare che la Funzione Langragiana $z_{LR}(\boldsymbol{\lambda})$ è concava. (3 punti)

Teorema

La Funzione Lagrangiana $z_{LR}(\bar{\lambda}) = \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}})$ *è concava.*

Dimostrazione

Si consideri il seguente esempio:



Siano $\lambda_1, \lambda_2 \geq \mathbf{0}$ *e* $\bar{\lambda}$ *una combinazione convessa di* λ_1 *e* λ_2, *i.e.* $\bar{\lambda} = \alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2$ *con* $\alpha \in [0,1]$. *Sia* $\bar{\mathbf{x}}$ *la soluzione ottima di* $LR(\bar{\lambda})$:

$$z_{LR}(\bar{\lambda}) = \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) \tag{75}$$

$\bar{\mathbf{x}}$ *è una soluzione ammissibile di* $LR(\lambda_1)$ *e* $LR(\lambda_2)$, *quindi:*

$$z_{LR}(\lambda_1) \leq \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} + \lambda_1(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) \tag{76}$$

$$z_{LR}(\lambda_2) \leq \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} + \lambda_2(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) \tag{77}$$

da cui si ottiene:

$$\alpha z_{LR}(\lambda_1) + (1-\alpha) z_{LR}(\lambda_2) \leq \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} + \underbrace{(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)}_{=\bar{\lambda}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) = z_{LR}(\bar{\lambda}).$$