Esame Ricerca Operativa

29 Agosto 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____**Matricola:**________________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri il problema di caricare un insieme di prodotti P in dei contenitori di capacità in peso pari a W. I contenitori possono contenere al massimo un numero di prodotti pari a K. Ciascun prodotto $i \in P$ ha un peso complessivo pari a w_i e deve essere caricato interamente in un solo contenitore (quindi si ipotizza che $w_i \leq W$).
Si vuole determinare come caricare tutti i prodotti nel minor numero di contenitori rispettando i vincoli sopra descritti.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \ -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ \quad -3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)
b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \ x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ \quad -2x_1 + x_2 \geq 3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = (1,5,0)$ è ottima per il problema **P**. (6 punti)

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = +3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \;\; 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ \quad\; 3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ \quad\; x_1, x_2, x_3 \geq 0 \;\text{ intere} \end{cases}$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso abbiamo ottenuto il seguente tableau ottimo:

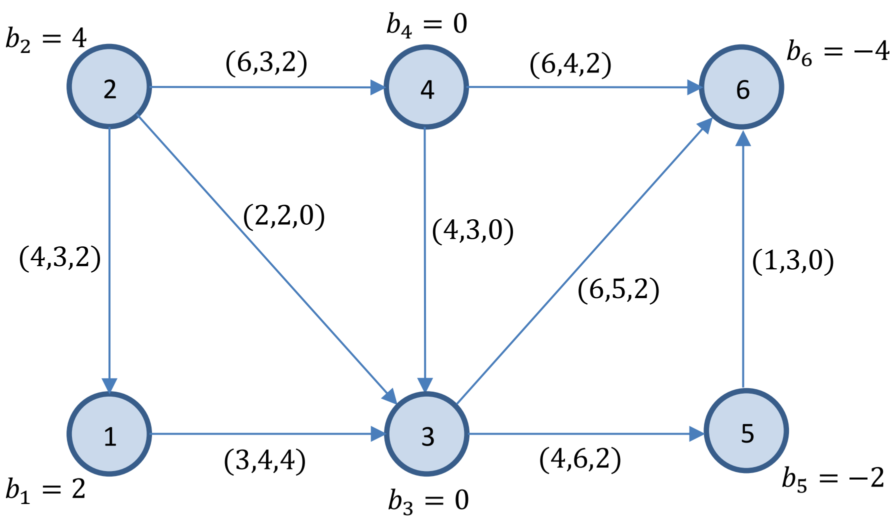
```
      -3.600|     -4.400       0.000       0.000      -0.800      -0.600
-----------+------------------------------------------------------------
       2.800|      2.200       1.000       0.000       0.400      -0.200
       0.400|     -0.400       0.000       1.000       0.200       0.400

Costo ottimo:     -3.6000

X(   1):      0.0000
X(   2):      2.8000
X(   3):      0.4000
```

a) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema **P** (i.e., nodo radice), svolgere una iterazione dell'algoritmo branch and bound, in particolare:
   - definire i nodi figli e i problemi corrispondenti; (1 punto)
   - selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto). (5 punti)

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente. (6 punti)

6) Si consideri il Teorema della Dualità Lagrangiana Debole.

a) Scrivere l'enunciato e fornire la dimostrazione del teorema. (3 punti)