## Esercizi

## Programmazione Lineare Intera

**1)** Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \text{Min } z = -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad +4x_1 + x_2 - 2x_3 \le +2 \\ \quad +2x_1 - 2x_2 + x_3 \le +3 \\ \quad -x_1 + x_2 - 2x_3 \le -1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \ \text{ intere} \end{cases}$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso Primale abbiamo ottenuto il seguente Tableau ottimo:

```
Tableau Ottimo Fase 2
     -0.400|      0.000     -7.000      0.000     -0.800     -0.000     -1.200
-----------+-----------------------------------------------------------------
      0.600|      1.000      0.000      0.000      0.200      0.000     -0.200
      1.600|      0.000     -1.500      0.000     -0.300      1.000      0.800
      0.200|      0.000     -0.500      1.000     -0.100     -0.000     -0.400

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -0.4000

X(   1):     0.6000
X(   3):     0.2000
```

a) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo (i.e., il tableau dato), svolgere una ulteriore iterazione dell'algoritmo branch and bound:
   - definire i nodi figli e i problemi corrispondenti;
   - selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto).

b) Aggiungere un taglio di Gomory relativo alla variabile $x_1$ (i.e., riga 1 del Tableau) e riottimizzare (i.e., aggiungere il Taglio di Gomory al tableau e trovare la nuova soluzione ottima).

**2)** Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \text{Min } z = +2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad +2x_1 + x_2 - 2x_3 \le +3 \\ \quad +x_1 - 5x_2 + x_3 \ge +4 \\ \quad +2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \ge +3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \ \text{ intere} \end{cases}$$

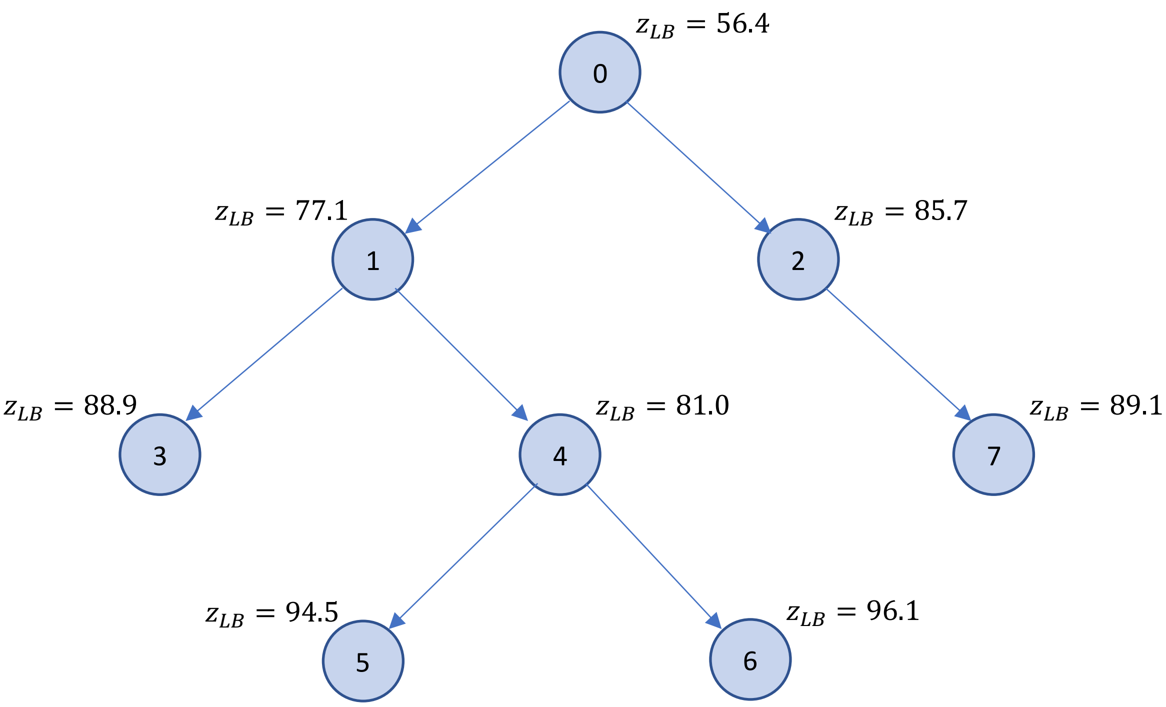
Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso Primale abbiamo ottenuto il seguente Tableau ottimo:

```
Tableau Ottimo Fase 2
      9.250|      0.000    -13.750      0.000     -0.250     -2.500      0.000
-----------+-----------------------------------------------------------------
      2.750|      1.000     -2.250      0.000      0.250     -0.500      0.000
      1.250|      0.000     -2.750      1.000     -0.250     -0.500      0.000
     -0.000|     -0.000      3.000     -0.000      1.000     -0.000      1.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:      9.2500

X(   1):      2.7500
X(   3):      1.2500
```

a) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo (i.e., il tableau dato), svolgere una ulteriore iterazione dell'algoritmo branch and bound:
   - definire i nodi figli e i problemi corrispondenti;
   - selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto).

b) Aggiungere un taglio di Gomory relativo alla variabile $x_3$ (i.e., riga 2 del Tableau) e riottimizzare (i.e., aggiungere il Taglio di Gomory al tableau e trovare la nuova soluzione ottima).

**3)** Dato un problema di programmazione lineare intera di minimo, in figura è riportato l'albero di ricerca ottenuto fino a una certa iterazione di un algoritmo Branch and Bound. Per ogni nodo è fornito il corrispondente lower bound. Se l'upper bound viene aggiornato al valore $z_{UB} = 89.1$, quali nodi possono essere eliminati?



**4)** Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +2x_1 + x_2 \geq +1 & (1) \\ \qquad\quad +x_1 + 3x_2 \geq +1 & (2) \\ \qquad\quad 0 \leq x_1 \leq 2 \ \text{ intero} & (3) \\ \qquad\quad 0 \leq x_2 \leq 2 \ \text{ intero} & (4) \end{cases}$$

a) Risolvere graficamente il problema P.

b) Risolvere il rilassamento lineare del problema P (i.e., il problema ottenuto rilassando i vincoli di interezza) con il metodo del simplesso primale.

c) Risolvere il rilassamento lineare del problema P con il metodo del simplesso duale.

d) Rilassare in modo Lagrangiano i vincoli (1) e (2) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

   i. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$;

   ii. $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$.

**5)** Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = -2x_1 - x_2 - x_3 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq +2 & (1) \\ \qquad\quad +x_1 + x_2 + x_3 \leq +2 & (2) \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ \text{ intere} & (3) \end{cases}$$

a) Risolvere il rilassamento lineare del problema P (i.e., il problema ottenuto rilassando i vincoli di interezza) con il metodo del simplesso primale.

b) Risolvere il rilassamento lineare del problema P con il metodo del simplesso duale.

c) Se la soluzione ottima del rilassamento lineare ha almeno una variabile frazionaria, aggiungere un Taglio di Gomory (scelta della variabile a discrezione dello studente).

d) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema P (i.e., nodo radice), svolgere una iterazione dell'algoritmo branch and bound:

   - definire i nodi figli e i problemi corrispondenti;
   - selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto).

e) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

   i. $\lambda_1 = 0$;

   ii. $\lambda_1 = -2$.

**6)** Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = +x_1 + x_2 + 3x_3 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 - x_2 - x_3 \leq +1 & (1) \\ \quad\quad\quad\; +x_1 + x_2 + x_3 \geq +1 & (2) \\ \quad\quad\quad\; x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (3) \end{cases}
$$

a) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

   i. $\lambda_1 = 0$;

   ii. $\lambda_1 = -2$.

b) Rilassare in modo Lagrangiano i vincoli (1) e (2) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

   i. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$;

   ii. $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = +1$.

**7)** Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Max } z = +9x_1 + 4x_2 + 15x_3 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq +5 & (1) \\ \quad\quad\quad\; x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (2) \end{cases}
$$

Si noti che si vuole <u>massimizzare la funzione obiettivo</u>.

a) Risolvere il rilassamento lineare del problema P (i.e., il problema ottenuto rilassando i vincoli di interezza).

b) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

   i. $\lambda_1 = 0$;

   ii. $\lambda_1 = -2$;

   iii. $\lambda_1 = -3$.