Ricerca Operativa
Introduzione alla Programmazione Lineare

Marco A. Boschetti

Università degli Studi di Bologna
Dipartimento di Matematica
marco.boschetti@unibo.it

Outline

Outline (2)

Algoritmi di Ottimizzazione: Modelli

- Il primo passo per definire un algoritmo di ottimizzazione per un problema consiste nel definire il modello matematico.
- Un modello matematico si può rappresentare come segue:

$$
\begin{aligned}
(P) \qquad z_P = \min f(\boldsymbol{x}) & \\
s.t.\ g_i(\boldsymbol{x}) \le b_i, & \qquad i = 1, \dots, n \\
h_j(\boldsymbol{x}) = d_j, & \qquad j = 1, \dots, m \\
\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} &
\end{aligned}
$$

- La funzione $f(\boldsymbol{x})$ è detta *funzione obiettivo*, mentre le espressioni $g_i(\boldsymbol{x}) \le b_i$ e $h_j(\boldsymbol{x}) = d_j$ rappresentano i *vincoli*.
- L'espressione $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ rappresenta i *vincoli di non negatività*.

Algoritmi di Ottimizzazione: Modelli (2)

- Se le funzioni $f(\boldsymbol{x})$, $g_i(\boldsymbol{x})$ e $h_j(\boldsymbol{x})$ sono lineari parliamo di programmazione lineare continua.
- Nel caso vi sia il vincolo aggiuntivo che la soluzione $\boldsymbol{x}$ deve avere componenti intere, parliamo di programmazione lineare intera, mentre se solo alcune componenti di $\boldsymbol{x}$ devono essere intere, parliamo di programmazione lineare mista intera.

Algoritmi di Ottimizzazione: Lower e Upper Bounds

- Dato un problema di programmazione lineare P di "minimo", un valido lower bound z_{LB} è una stima per difetto del valore della soluzione ottima z_P, i.e., $z_{LB} \leq z_P$. Le procedure per calcolare i lower bound sono dette procedure di bounding.

- Dato un problema di programmazione lineare P di "minimo", una soluzione ammissibile corrisponde a un valido upper bound z_{UB} ed è, quindi, una stima per eccesso del valore della soluzione ottima z_P, i.e., $z_P \leq z_{UB}$. Le procedure per calcolare soluzioni ammissibili sono dette euristici.

Algoritmi di Ottimizzazione: Esatti

- Dato un problema di programmazione lineare P, un algoritmo esatto è un algoritmo che "garantisce" (compatibilmente con le risorse di memoria e tempo calcolo disponibili) la determinazione della soluzione ottima di P.

Esempio: il Knapsack Problem

- Il problema del knapsack consiste nel determinare quale degli n oggetti di peso w_i e profitto p_i devono essere inseriti nel knapsack di capacità W, per massimizzare il profitto complessivo.
- Se si ipotizza che per ogni oggetto si ha una sola copia, allora si parla del problema del knapsack (0–1).
- Il modello matematico classico per il problema del knapsack (0–1) è il seguente:

$$
\begin{aligned}
(KP) \qquad z_{KP} = \max \ & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\
s.t. \ & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Il Problema del Knapsack: Upper Bound

- Un valido upper bound per il problema del knapsack può essere calcolato risolvendo il rilassamento continuo (i.e., LP-relaxation) della formulazione matematica *KP*:

$$
(LKP) \qquad \begin{aligned} z_{LKP} = \max \ & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ s.t. \ & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}
$$

- Il problema *LKP* corrisponde a un problema di programmazione lineare continua, che in generale può essere risolto con il Metodo del Simplesso o A Punti Interni. Ma in questo caso il problema è molto più facile e ha complessità $O(n \log n)$.

Il Problema del Knapsack: Upper Bound

- Un valido upper bound per il problema del knapsack può essere calcolato con il seguente algoritmo:

UPPER BOUND KP(W, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{x}$)

Ordina tutti gli oggetti per ordine non crescente di $r_i = \frac{p_i}{w_i}$
Inizializza $W' = W$ e $x_i = 0$, per ogni oggetto $i = 1, \ldots, n$
foreach $i = 1, \ldots, n$ in ordine non crescente di r_i **do**
  if $W' \geq w_i$
    then $x_i = 1$
      $W' = W' - w_i$
    else $x_i = \frac{W'}{w_i}$ (elemento “critico”)
      exit

Il Problema del Knapsack: Euristico

- Una soluzione ammissibile (valido lower bound) per il problema del knapsack può essere calcolato con il seguente algoritmo "greedy" derivato dall'upper bound:

GREEDY KP(W, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{x}$)

Ordina tutti gli oggetti per ordine non crescente di $r_i = \frac{p_i}{w_i}$
Inizializza $W' = W$ e $x_i = 0$, per ogni oggetto $i = 1, \ldots, n$
foreach $i = 1, \ldots, n$ in ordine non crescente di r_i **do**
    if $W' \geq w_i$
        then $x_i = 1$
            $W' = W' - w_i$

Il Problema del Knapsack: Euristico (2)

- L'algoritmo euristico può essere migliorato applicando delle permutazioni all'ordinamento originario. Esiste una permutazione per cui si ottiene la soluzione ottima.

Il Problema del Knapsack: Esatti

- La soluzione ottima per il problema del knapsack può essere calcolata utilizzando i seguenti due approcci:
  - Metodi Branch & Bound
  - Programmazione Dinamica
- Il Branch & Bound è un algoritmo di enumerazione che utilizza le procedure di bounding per ridurre le dimensioni dell'albero di ricerca. L'algoritmo ad ogni nodo dell'albero calcola il bound e identifica uno dei seguenti stati:
  (a) Il bound indica che non può essere ottenuta una soluzione migliore della migliore soluzione ammissibile disponibile: il nodo viene eliminato;

Il Problema del Knapsack: Esatti (2)

(b) Il bound fornisce una soluzione ammissibile: si aggiorna la migliore soluzione ammissibile disponibile e il nodo viene eliminato;

(c) Non si sono verificati i casi (a) e (b): il problema viene ulteriormente decomposto in k sottoproblemi (*branching*).

Il Problema del Knapsack: Branch and Bound

- Per ogni nodo dell'albero di ricerca si definisce l'insieme $F_0 \subseteq \{1, \dots, n\}$ delle variabili fissate a 0 (oggetti che non devono essere caricati) e l'insieme $F_1 \subseteq \{1, \dots, n\}$ delle variabili fissate a 1 (oggetti che devono essere caricati). Ovviamente, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.
- L'insieme delle variabili "libere" è $L = \{1, \dots, n\} \backslash (F_0 \cup F_1)$.
- Per calcolare un upper bound ad ogni nodo del Branch & Bound si definisca il seguente rilassamento lineare del knapsack (0–1):

$$
\begin{aligned}
(LKP) \quad z_{LKP}(L, F_0, F_1) = \max \sum_{i \in L} p_i x_i + \sum_{i \in F_1} p_i & \\
s.t. \sum_{i \in L} w_i x_i \le W - \sum_{i \in F_1} w_i & \\
0 \le x_i \le 1, \qquad\qquad i \in L &
\end{aligned}
$$

Il Problema del Knapsack: Branch and Bound

- Un algoritmo Branch & Bound per il knapsack (0–1) è il seguente:

BBKP($F_0, F_1, W, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, z$)

Definisci $L = \{1, \dots, n\} \setminus (F_0 \cup F_1)$.
Calcola $z_{LKP}(L, F_0, F_1)$. Sia $\boldsymbol{x}'$ la sua soluzione.
if $z_{LKP}(L, F_0, F_1) < z$ oppure $z_{LKP}(L, F_0, F_1)$ non ha soluzione **then**
    Elimina il nodo; RETURN;
else if la variabile dell'elemento critico j è intera **then**
    if $z_{LKP}(L, F_0, F_1) > z$ **then**
        $z = z_{LKP}(L, F_0, F_1)$; $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$;
    RETURN;
else
    $F_0 = F_0 \cup \{j\}$; call BBKP($F_0, F_1, W, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, z$); $F_0 = F_0 \setminus \{j\}$
    $F_1 = F_1 \cup \{j\}$; call BBKP($F_0, F_1, W, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, z$); $F_1 = F_1 \setminus \{j\}$

Il Problema del Knapsack: Programmazione Dinamica

- La Programmazione Dinamica risolve il problema componendo le soluzioni a "*stadi*" partendo dalle soluzioni parziali di sottoproblemi, seguendo un approccio di tipo "*bottom-up*".
- La programmazione dinamica si applica ai problemi di ottimizzazione che hanno le seguenti caratteristiche:
  (a) Il problema può essere decomposto in stadi. Ad ogni stadio è associata una decisione;
  (b) Ad ogni stadio k il problema può trovarsi in un numero finito di "stati" possibili: $\{s_1^k, \ldots, s_{q_k}^k\}$;
  (c) Può essere definita una funzione di costo $f_k(s_i^k)$ dello stato s_i^k dello stadio k che dipende solo dagli stadi precedenti;
  (d) Da ogni stato s_i^k dello stadio k può essere calcolato ogni possibile stato dello stadio $k+1$.

Il Problema del Knapsack: Programmazione Dinamica

- La Programmazione Dinamica per risolve il problema del knapsack (0–1) prevede $n+1$ stadi (il numero di oggetti + 1) e ad ogni stadio un numero di stati pari a $W+1$ (la capacità del knapsack + 1).
- Ad ogni stadio $j \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni stato $w \in \{0, \ldots, W\}$ si risolve il seguente sottoproblema:

$$
\begin{aligned}
(KP_j(w)) \qquad z_j(w) = \max \ & \sum_{i=1}^{j} p_i x_i \\
s.t. \ & \sum_{i=1}^{j} w_i x_i \le w \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, j
\end{aligned}
$$

Il Problema del Knapsack: Programmazione Dinamica

- Risolvere per ogni stato w dello stadio j i problemi $KP_j(w)$ equivale a utilizzare la seguente recursione:
  (a) Inizializza $KP_0(w) = 0$, per ogni $w \in \{0, \dots, W\}$;
  (b) Ad ogni stadio $j \in \{1, \dots, n\}$ e per ogni stato $w \in \{0, \dots, W\}$, calcola la seguente recursione:

$$z_j(w) = \begin{cases} z_{j-1}(w), & \text{if } w < w_j \\ \max\left\{z_{j-1}(w), z_{j-1}(w - w_j) + p_j\right\}, & \text{if } w \geq w_j \end{cases}$$

- L'algoritmo di programmazione dinamica qui proposto ha complessità $O(nW)$. Quindi si dice che è "*pseudopolinomiale*".
- Un algoritmo di programmazione dinamica alternativo per il knapsack (0–1) poteva essere ottenuto definendo uno stadio per ogni $w \in \{0, \dots, W\}$ e uno stato per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.

Programmazione Lineare (LP)

- La programmazione lineare consiste nel *minimizzare* (o *massimizzare*) una *funzione obiettivo* lineare in presenza di vincoli lineari.
- Si consideri un problema di programmazione lineare *continua* con n variabili decisionali e m vincoli:

$$
\begin{aligned}
\min\ z\ =\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.t.\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad && i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, && j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

dove

x_j: variabile decisionale;
c_j: coefficiente di costo della variabile x_j;
b_i: termine noto del vincolo i;
a_{ij}: coefficiente della variabile x_j nel vincolo i;
z: valore della funzione obiettivo.

Programmazione Lineare (LP)

Una rappresentazione più compatta del problema è la seguente[1]:

$$\begin{aligned} \min\ z \ =\ & \mathbf{cx} \\ s.t.\ \ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La matrice **A** è anche detta, semplicemente, *matrice dei vincoli*.

[1] per non appesantire la notazione, qui e nel proseguo, dove non è indispensabile non si esplicitano i *trasposti* di vettori e matrici (e.g., $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$)

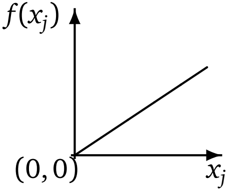
Assunzioni implicite per LP

Nella formulazione di un problema di programmazione lineare sono implicite alcune assunzioni.

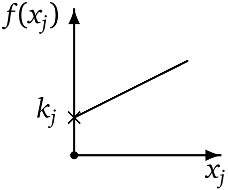
- **Proporzionalità**

  Ogni variabile x_j contribuisce con la quantità:
  - $c_j x_j$ al valore della funzione obiettivo;
  - $a_{ij} x_j$ al vincolo i.

Esempi



(a) Proporzionale



(b) Non proporzionale

Assunzioni implicite per LP (2)

- **Additività**
  - Il valore della funzione obiettivo è dato dalla somma dei contributi $c_j x_j$ forniti da ciascuna variabile j.
  - Il contributo totale ad ogni vincolo i è dato dalla somma dei contributi $a_{ij} x_j$ forniti da ciascuna variabile j.

- **Dati deterministici**
  - I coefficienti c_j, a_{ij} e b_i devono essere noti.
  - Nel caso in cui alcuni dati fossero, ad esempio, di natura stocastica, essi devono essere *approssimati* con dati deterministici.

Assunzioni implicite per LP (3)

- **Continuità delle variabili**
  Le variabili possono assumere tutti i valori reali che soddisfano i vincoli.

Soluzione di un problema LP

- **Soluzione ammissibile**
  Una soluzione $\mathbf{x}$ che soddisfa i vincoli $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ e i vincoli di *non-negatività* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ è detta *soluzione ammissibile*.

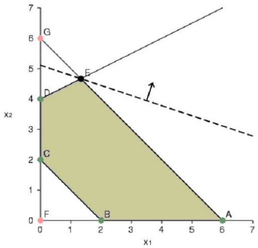
- **Regione ammissibile**
  L'insieme di tutte le soluzioni ammissibili di un problema è detta *regione ammissibile*.

- **Soluzione Ottima**
  La soluzione ammissibile $\mathbf{x}^*$ che minimizza (o massimizza) il valore della funzione obiettivo è detta *soluzione ottima*.

- **Problema senza soluzione**
  Se la regione ammissibile è *vuota* diremo che il problema non ha soluzione o che il problema non è ammissibile.

Esempio: Soluzione ottima unica

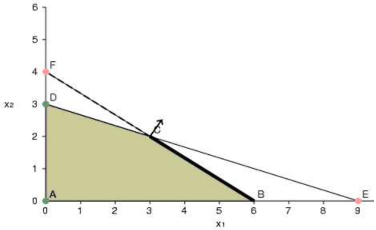
$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\min z = & - & x_1 & - & 3x_2 & & & \\
& - & x_1 & - & x_2 & \geq & -6 & (a) \\
& & x_1 & - & 2x_2 & \geq & -8 & (b) \\
& & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & (c) \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



- Per minimizzare la funzione obiettivo $z = -x_1 - 3x_2$ bisogna muoversi nella direzione $-c = (1, 3)$.
- La soluzione ottima corrisponde a un *vertice* (o *punto estremo*) della regione ammissibile.

Esempio: Soluzioni ottime equivalenti

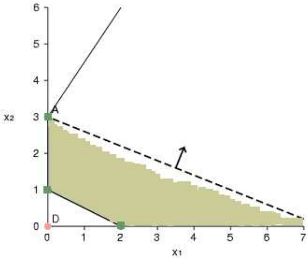
$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \\
 & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 & (a) \\
 & 4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 24 & (b) \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



- Nei punti $B = (6, 0)$ and $C = (3, 2)$ la funzione obiettivo assume il valore ottimo $z^* = 12$.
- In ogni punto del segmento cha va da P_1 a P_2 la funzione obiettivo assume lo stesso valore $z^* = 12$.

Esempio: Soluzione illimitata

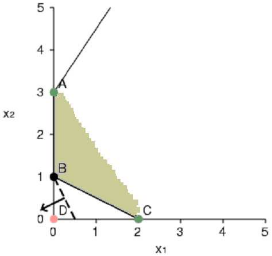
$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\min z = & - & 2x_1 & - & 5x_2 & & & \\
 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 & (a) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 2 & (b) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



- Tutti i punti $x_1 = x_2$, con $x_1 \geq \frac{2}{3}$ appartengono alla regione ammissibile.
- Nei punti $x_1 = x_2$ il valore della funzione obiettivo $z = -2x_1 - 5x_2$ diviene $z = -7x_1$, da cui $z \to -\infty$ per $x_1 \to \infty$.

Esempio: Regione amm. illimitata ma sol. limitata

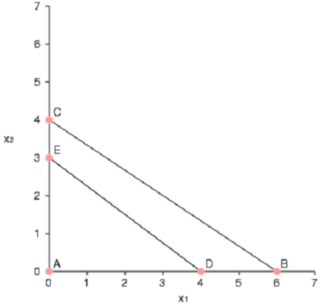
$$\begin{array}{rrcrcll} \min z = & 2x_1 & + & x_2 & & & \\ & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 & (a) \\ & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 2 & (b) \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$



- Per minimizzare la funzione obiettivo $z = 2x_1 + x_2$ bisogna muoversi nella direzione $-c = (-2, -1)$.
- La soluzione ottima corrisponde a un punto estremo della regione ammissibile.

Esempio: Problema senza soluzione

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\min z = & 2x_1 & + & 5x_2 & & & \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 12 & (a) \\
& 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 & (b) \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

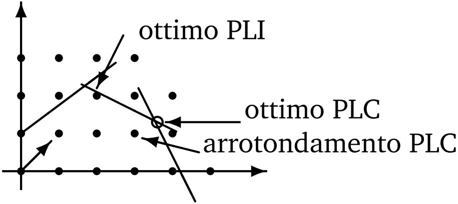


- La regione ammissibile è *vuota*.

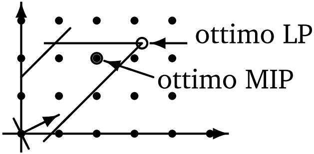
Programmazione Lineare Intera (MIP)

Un problema di programmazione lineare intera prevede il vincolo aggiuntivo che le variabili decisionali devono assumere valori interi.

$$
\begin{aligned}
\min\ z \ =\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.t.\ \ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \qquad\qquad\quad j = 1, \ldots, n \\
& x_j \text{ intera}, \qquad\quad\ \ j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$



(a)



(b)

Il problema della dieta

- Determinare la composizione della dieta di costo minimo, che garantisca un contributo minimo giornaliero di energia (2000 Kcal), di proteine (55 g) e di calcio (800 mg) scegliendo tra:

Alimenti disponibili	Porzione	Ener. (kcal)	Prot. (g)	Calcio (mg)	Costo (Euro)
Fiocchi avena	28 g	100	5	2	0.30
Pollo	100 g	205	32	12	0.90
Uova	2	160	13	54	0.80
Latte	237 cc	160	8	285	0.50
Torta ciliegie	170 g	420	4	22	2.00
Maiale e piselli	260 g	260	14	80	1.90

- Se la dieta prevedesse un solo alimento avremo:

Il problema della dieta (2)

Alimento	N. porzioni	Costo
Fiocchi avena	400.0	120.00
Pollo	66.6	59.94
Uova	14.8	11.84
Latte	12.5	6.25
Torta ciliegie	36.3	72.60
Maiale e piselli	10.0	19.00

- Aggiungiamo l'ulteriore vincolo sul numero di porzioni-giorno per ciascun alimento:

$$\begin{array}{ll} \text{Fiocchi avena} & \leq 4 \\ \text{Pollo} & \leq 3 \\ \text{Uova} & \leq 2 \\ \text{Latte} & \leq 8 \\ \text{Torta ciliegie} & \leq 2 \\ \text{Maiale e piselli} & \leq 2 \end{array}$$

Il problema della dieta (3)

- Per formulare matematicamente il problema facciamo uso delle seguenti variabili decisionali:

x_1: N. porzioni di Fiocchi avena
x_2: N. porzioni di Pollo
x_3: N. porzioni di Uova
x_4: N. porzioni di Latte
x_5: N. porzioni di Torta ciliegie
x_6: N. porzioni di Maiale e piselli

Il problema della dieta (4)

- **Formulazione matematica**

$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
\min\ z = & .30x_1 & +.90x_2 & +.80x_3 & +.50x_4 & +2.00x_5 & +1.90x_6 & & \\
& 100x_1 & +205x_2 & +160x_3 & +160x_4 & +420x_5 & +260x_6 & \geq & 2000 \\
& 5x_1 & +32x_2 & +13x_3 & +8x_4 & +4x_5 & +14x_6 & \geq & 55 \\
& 2x_1 & +12x_2 & +54x_3 & +285x_4 & +22x_5 & +80x_6 & \geq & 800 \\
& x_1 & & & & & & \leq & 4 \\
& & x_2 & & & & & \leq & 3 \\
& & & x_3 & & & & \leq & 2 \\
& & & & x_4 & & & \leq & 8 \\
& & & & & x_5 & & \leq & 2 \\
& & & & & & x_6 & \leq & 2 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Il problema della selezione dei fondi di investimento

- Si vuole determinare la composizione del portafoglio di fondi di investimento che massimizzi il rendimento complessivo.
- L'investimento complessivo deve ammontare a 100 KEuro e si vuole garantire che il portafoglio copra per almeno la percentuale α il mercato industriale, β il mercato bancario e γ quello tecnologico.

Fondi	Rendimento atteso	Industriale (%)	Bancario (%)	Tecnologico (%)	Rating
A	1.05	100	0	0	1.5
B	1.04	80	20	0	1.6
C	1.20	0	0	100	5.0
D	1.08	50	25	25	2.0
E	1.09	60	10	30	3.0
F	1.15	0	20	80	4.0
G	1.12	30	30	40	2.5

Il problema della selezione dei fondi di investimento (2)

- Denotiamo con F l'insieme dei fondi.
- I parametri α, β e γ sono delle percentuali, quindi $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$.
- I rimanenti parametri sono i seguenti:

r_i: rendimento fondo i;
α_i: percentuale industriale fondo i, $0 \leq \alpha_i \leq 1$;
β_i: percentuale bancario fondo i, $0 \leq \beta_i \leq 1$;
γ_i: percentuale tecnologico fondo i, $0 \leq \gamma_i \leq 1$;
ρ_i: rating fondo i;
ρ: rating medio.

- La variabile decisionale x_i indica la somma investita nel fondo i.

Il problema della selezione dei fondi di investimento (3)

- **Modello matematico:**

$$
\begin{aligned}
\max z = & \sum_{i \in F} r_i x_i \\
s.t. & \sum_{i \in F} x_i = 100 \\
& \sum_{i \in F} \alpha_i x_i \geq 100\alpha \\
& \sum_{i \in F} \beta_i x_i \geq 100\beta \\
& \sum_{i \in F} \gamma_i x_i \geq 100\gamma \\
& \sum_{i \in F} \rho_i x_i \leq 100\rho \\
& x_i \geq 0, \quad i \in F
\end{aligned}
$$

- Esiste una soluzione ammissibile per ogni combinazione dei valori α, β e γ?
- La soluzione è sempre limitata per ogni combinazione dei valori α, β e γ?

Il problema della selezione dei fondi di investimento (4)

- Cosa dobbiamo fare se vogliamo limitare il rischio *medio*?
- Si può usare un modello deterministico in cui si usa il rendimento atteso per valutare il rendimento complessivo. Quali sono i limiti di questo approccio? Come si potrebbe modellare il problema diversamente?
- Di quali dati bisognerebbe disporre per poter costruire un modello alternativo?

Il problema dei trasporti

- Siano dati:
  - *n origini* con disponibilità pari a a_i, $i = 1, \ldots, n$;
  - *m destinazioni* con richiesta b_j, $j = 1, \ldots, m$;
  - il costo c_{ij} per trasportare una unità di merce dalla sorgente i alla destinazione j.
- Determinare come trasportare la merce dalle origini alle destinazioni rispettando i vincoli su disponibilità e richieste, minimizzando il costo totale.
- Si ipotizza che $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$.
- Cosa accadrebbe se $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j$?

Il problema dei trasporti (2)

- **Modello matematico:**

$$
\begin{array}{rl}
\min z = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\
s.t. & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, \ldots, m \\
& x_{ij} \geq 0, \text{ intera}, \qquad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

  dove x_{ij} rappresenta la quantità di merce trasportata dall'origine i alla destinazione j.

- Il vincolo di interezza applicato alle variabili x_{ij} rende *difficile* il problema?

- La risposta è NO, perché se i parametri a_i e b_j sono interi allora anche la soluzione del *rilassamento continuo* del problema è sempre intera.

Il problema dei trasporti (3)

- La proprietà che implica l'interezza della soluzione, se i parametri a_i e b_j sono interi, è dovuta alla particolare struttura della matrice dei vincoli, che in questo caso è sempre *totalmente unimodulare*.

Definizione. Una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice totalmente unimodulare se il determinante di ogni sottomatrice quadrata di $\mathbf{A}$ (cioè di ogni minore di $\mathbf{A}$) è uguale a 0, +1 oppure −1.

- Se $\mathbf{A}$ è totalmente unimodulare e $\mathbf{b}$ è un vettore intero, allora ogni vertice della regione ammissibile $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ è intero.

- Vedremo meglio più avanti cosa significa esattamente.

Il problema del trasferimento di fondi

- Il problema dei trasporti è un caso speciale del problema più generale dei *flussi di costo minimo*, che ha numerose applicazioni a problemi di logistica, finanza, etc.
- Una possibile applicazione alla finanza è il *problema del trasferimento ottimo di fondi*, in cui delle *sorgenti* devono inviare delle risorse (e.g., liquidità ottenuta dalla vendita di prodotti) a delle *destinazioni* che le richiedono (e.g., per pagare i costi di produzione).
- Il problema del trasferimento ottimo di fondi può essere definito come segue:
  - n *origini* con disponibilità pari a a_i unità, $i = 1, \ldots, n$;
  - m *destinazioni* con richiesta di b_j unità, $j = 1, \ldots, m$;
  - il costo della transazione c_{ij} per trasferire una unità di risorsa (e.g., 1 Euro) dalla sorgente i alla destinazione j.

Il problema del trasferimento di fondi (2)

- Si vuole determinare come trasferire i fondi dalle origini alle destinazioni rispettando i vincoli su disponibilità e richieste, minimizzando il costo totale delle transazioni.
- Come cambia il modello se il costo di ciascuna transazione, oltre ad avere un *costo variabile* c_{ij} (che è proporzionale alle quantità trasferite), ha anche un *costo fisso* f_{ij} (che si paga se viene trasferita una quantità strettamente maggiore di zero da i a j)?
- In presenza di costi fissi come si può modellare il problema? E' ancora un problema facile?

Il problema del trasferimento di fondi (3)

- **Modello matematico:**

$$
\begin{array}{rll}
\min\ z = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} y_{ij} & \\
s.t. & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, & i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, & j = 1, \ldots, m \\
& x_{ij} \leq M_{ij} y_{ij}, & i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \\
& x_{ij} \geq 0, \ \text{intera}, & i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, & i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

dove:

- x_{ij} rappresenta le unità trasferite da i a j;
- y_{ij} è una variabile binaria $0-1$ uguale a 1 se e solo se $x_{ij} > 0$;
- M_{ij} è un numero sufficientemente grande, i.e., $M_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$.

Il problema del trasferimento di fondi (4)

- Purtroppo il problema è difficile (NP-Hard) ed è un caso particolare del problema più generale di *network design*.
- Solitamente la presenza di costi fissi induce a problemi di programmazione lineare mista intera difficili da risolvere.

Problema del flusso a costo minimo

- Dato un grafo orientato $G = (V, A)$, dove V è l'insieme dei vertici (nodi) e A è l'insieme degli archi.
- Il problema del flusso a costo minimo può essere definito utilizzando i seguenti parametri:
  - b_i quantità di flusso immessa ($b_i > 0$) o assorbita ($b_i < 0$) in corrispondenza del vertice $i \in V$. Se $b_i = 0$, allora il flusso che entra nel vertice i deve essere pari al flusso che esce.
  - u_{ij} capacità dell'arco $(i, j) \in A$.
- Le variabili x_{ij} indicano quante unità di flusso attraversano l'arco (i, j).

Problema del flusso a costo minimo (2)

- **Modello matematico: problema del flusso a costo minimo**

$$
\begin{array}{rll}
\min\ z = & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
s.t. & \sum_{j\in\Gamma_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in\Gamma_i^-} x_{ji} = b_i, & i \in V \\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, & (i,j) \in A
\end{array}
$$

- Se aggiungiamo un costo fisso f_{ij} e le variabili y_{ij} che indicano se l'arco (i,j) è usato, otteniamo il modello matematico per il problema del network design.

- **Modello matematico: problema del network design**

$$
\begin{array}{rll}
\min\ z = & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}y_{ij} & \\
s.t. & \sum_{j\in\Gamma_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in\Gamma_i^-} x_{ji} = b_i, & i \in V \\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij}y_{ij}, & (i,j) \in A
\end{array}
$$

Mix ottimale di produzione

- Un'azienda che produce infissi in legno (L) e Alluminio(A) ha tre reparti di lavorazione:
  - lavorazione legno (Rep. L);
  - lavorazione alluminio (Rep. A);
  - assemblaggio e inserimento vetri (Rep. V).
- I tempi di produzione (in minuti) in ciascun reparto sono:

	Rep. L	Rep. A	Rep. V
Infisso in alluminio	-	10	8
Infisso in legno	21	-	12

- Il guadagno netto (in Euro) per infisso è:

Infisso in alluminio	60
Infisso in legno	180

Mix ottimale di produzione (2)

- Le ore lavorative totali disponibili settimanalmente per ciascun reparto sono:

Rep. A	240
Rep. L	180
Rep. V	240

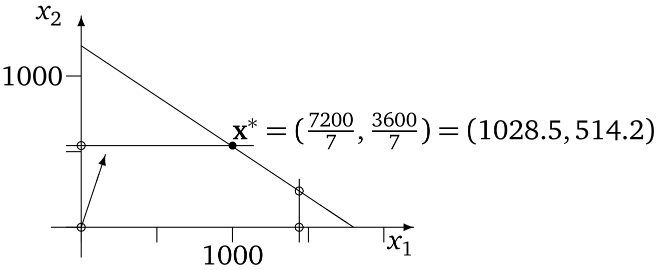
- Determinare il mix di prodotti che massimizza il guadagno, nel caso in cui si possa vendere tutta la produzione.
- Le variabili decisionali sono le seguenti:

  x_1: numero infissi in alluminio prodotti;
  x_2: numero infissi in legno prodotti.

Mix ottimale di produzione (3)

Modello matematico:

$$
\begin{array}{rrcrl}
\max z = & 60x_1 & + & 180x_2 & \\
s.t. & 10x_1 & & & \leq 14400 \ (= 240 \times 60) \\
 & & & 21x_2 & \leq 10800 \ (= 180 \times 60) \\
 & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq 14400 \ (= 240 \times 60) \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \ \text{interi}
\end{array}
$$



Manipolazioni di un problema

- **Minimizzazione e Massimizzazione**
  Un problema di massimo può essere convertito in un problema di minimo e viceversa:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$$

- **Inversione di una disequazione**
  Una disequazione del tipo "$\geq$" si converte in una disequazione del tipo "$\leq$" moltiplicando entrambe i membri per -1:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \leq -b_i$$

Manipolazioni di un problema (2)

- **Equazioni in disequazioni**
  Ad una equazione corrispondono 2 disequazioni:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \end{cases}$$

- **Disequazioni in equazioni**
  Una disequazione può essere trasformata in una equazione utilizzando una *variabile di scarto* non-negativa:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

Manipolazioni di un problema (3)

- **Non negatività delle variabili**
  Se nel modello del problema una variabile x_j può assumere qualsiasi valore, allora può essere sostituita con 2 variabili x_j^+ e x_j^- non-negative:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0$$

Forma canonica e forma standard

- **Forma "canonica"**

$$
\begin{aligned}
z = \min \ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.t. \ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \qquad\qquad\quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Utile per illustrare le relazioni di dualità.

- **Forma "standard"**

$$
\begin{aligned}
z = \min \ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.t. \ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \qquad\qquad\quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Necessaria per risolvere il problema con algoritmi come il simplesso.

Definizione di Soluzione Base Ammissibile

- Si consideri il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min\ z \ = \ & \mathbf{cx} \\ s.t.\ \ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

  dove $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Il problema deve essere definito necessariamente in forma *standard*. Per cui se eventualmente alcuni vincoli sono disequazioni devono essere trasformati in equazioni.
- Si suppone per semplicità che:

$$Rango(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = Rango(\mathbf{A}) = m$$

Definizione di Soluzione Base Ammissibile (2)

- La matrice $\mathbf{A}$ può essere riscritta per comodità nella forma

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$$

dove $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,m}$ corrisponde a m colonne linearmente indipendenti ed $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m,n-m}$ sono le rimanenti $n-m$ colonne di $\mathbf{A}$.

- Ponendo $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}]$ il sistema dei vincoli $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ può essere riscritto come:

$$[\mathbf{B}, \mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}\mathbf{x_B} + \mathbf{N}\mathbf{x_N} = \mathbf{b}$$

e poichè $\mathbf{B}$ è invertibile si ha:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$$

Definizione di Soluzione Base Ammissibile (3)

- Se fissiamo $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$, la soluzione $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = \left[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}\right]$ rappresenta una *Soluzione Base*.

- Nel caso in cui $\mathbf{x_B} \geq \mathbf{0}$ (i.e., soddisfa i vincoli di non negatività) diremo che $\mathbf{x}$ è una *Soluzione Base Ammissibile*.

Insieme Poliedrico Convesso

- Un *Insieme Poliedrico Convesso* è definito dall'intersezione di un numero finito di sottospazi chiusi:

$$X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

oppure

$$X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

- Ogni punto $\mathbf{x}$ di un insieme poliedrico convesso X, che non può essere espresso come combinazione convessa di due punti $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ tali che $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^2 \neq \mathbf{x}$, è detto *Punto Estremo* di X.

Insieme Poliedrico Convesso (2)

Teorema. L'insieme dei punti estremi dell'insieme poliedrico convesso $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ corrisponde all'insieme delle soluzioni base ammissibili.

Teorema. Un insieme poliedrico convesso $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ ha un numero finito di punti estremi.

Dimostrazione. Se la matrice $\mathbf{A}$ di ordine $(m \times n)$ è di rango pieno, allora il numero massimo di basi è pari al numero di possibili scelte di m delle n colonne di $\mathbf{A}$; ossia:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Teorema. Se la soluzione ottima di un problema di programmazione lineare è finita, allora il punto di minimo si ottiene in corrispondenza di almeno uno dei punti estremi (i.e. soluzione base ammissibile).

Insieme Poliedrico Convesso (3)

- Un vettore non nullo $\mathbf{d}$ è detto *direzione* dell'insieme convesso X, se dato un qualsiasi punto $\mathbf{x}_0 \in X$ ogni altro punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}$, $\lambda \geq 0$, appartiene a X.

Teorema. Dato un insieme poliedrico convesso $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, il vettore $\mathbf{d}$ è direzione di X se e solo se:

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{d} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$$

- Due vettori $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ sono distinti se $\mathbf{d}_1 \neq \beta \mathbf{d}_2$ per ogni β.
- Un vettore $\mathbf{d}$ è detto direzione estrema di X se non può essere rappresentato come combinazione lineare di altre due direzioni distinte $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$.

Insieme Poliedrico Convesso (4)

Teorema della Rappresentazione.
Sia dato un insieme poliedrico convesso $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.
Sia $P = \{\mathbf{x}_i\colon\ i = 1, \dots, np\}$ l'insieme di tutti i punti estremi di X e sia $D = \{\mathbf{d}_j\colon j = 1, \dots, nd\}$ l'insieme di tutte le direzione estreme di X.
Ogni punto di X può essere rappresentato come:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \ &= \sum_{i=1}^{np} \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{nd} \mu_j \mathbf{d}_j \\
s.t. &\sum_{i=1}^{np} \lambda_i = 1 \\
&\lambda_i \geq 0, \qquad\qquad i = 1, \dots, np \\
&\mu_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1, \dots, nd
\end{aligned}
$$

NOTA: Se il poliedro è limitato, allora $D = \emptyset$.

Insieme Poliedrico Convesso (5)

Teorema. La soluzione ottima di un problema di programmazione lineare è finita se e solo se $\mathbf{cd}_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, nd$. In questo caso il minimo si ottiene in corrispondenza di almeno uno dei punti estremi.

Dimostrazione. Dal Teorema della Rappresentazione deriva si ottiene che la funzione obiettivo può essere riscritto come:

$$\min z = \mathbf{cx} = \sum_{i=1}^{np} (\mathbf{cx}_i)\lambda_i + \sum_{j=1}^{nd} (\mathbf{cd}_j)\mu_j$$

Se per almeno una direzione estrema $\mathbf{d}_j$ abbiamo che $\mathbf{cd}_j < 0$, allora possiamo aumentare arbitrariamente μ_j e la funzione obiettivo risulterà illimitata.

Insieme Poliedrico Convesso (6)

Invece, se per ogni direzione $\mathbf{d}_j$ abbiamo che $\mathbf{c}\mathbf{d}_j \geq 0$ oppure non ne abbiamo, allora nella soluzione ottima avremo $\mu_j = 0$, per ogni $j = 1, \ldots, nd$.
In questo caso la funzione obiettivo si riduce a:

$$\min z = \mathbf{c}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{np} (\mathbf{c}\mathbf{x}_i)\lambda_i$$

Siccome $\sum_{i=1}^{np} \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$, allora la soluzione è sicuramente finita.
Sia x_p il punto extremo tale che $\mathbf{c}\mathbf{x}_p \leq \mathbf{c}\mathbf{x}_i$, per ogni $i = 1, \ldots, np$.
Se ora consideriamo un qualsiasi punto $\mathbf{x} \in X$ avremo:

$$\mathbf{c}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{np} (\mathbf{c}\mathbf{x}_i)\lambda_i \geq \sum_{i=1}^{np} (\mathbf{c}\mathbf{x}_p)\lambda_i = (\mathbf{c}\mathbf{x}_p) \sum_{i=1}^{np} \lambda_i = \mathbf{c}\mathbf{x}_p$$

quindi

$$\mathbf{c}\mathbf{x} \geq \mathbf{c}\mathbf{x}_p$$

Migliorare una Soluzione Base

- Il valore della funzione obiettivo corrispondente alla soluzione base $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = \left[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}\right]$, è dato dall'espressione:

$$z = [\mathbf{c_B}, \mathbf{c_N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

- Per determinare come varia la funzione obiettivo per valori non nulli delle variabili non base $\mathbf{x_N}$, dato che $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$, avremo:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c_B}\mathbf{x_B} + \mathbf{c_N}\mathbf{x_N} \\ &= \mathbf{c_B}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}) + \mathbf{c_N}\mathbf{x_N} \\ &= \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - (\mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c_N})\mathbf{x_N} \end{aligned}$$

Migliorare una Soluzione Base (2)

- Se definiamo $\mathbf{w} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$ possiamo scrivere:

$$z = \mathbf{wb} - (\mathbf{wN} - \mathbf{c_N})\mathbf{x_N} = \mathbf{wb} - \sum_{k \in N}(\mathbf{wa}_k - c_k)x_k$$

dove N è l'insieme degli indici delle variabili/colonne non base.

- Se $(\mathbf{wN} - \mathbf{c_N}) \leq \mathbf{0}$ la soluzione base ammissibile $\mathbf{x}$ è *ottima*.
- Nel caso, invece, esistesse una colonna k non base tale che:

$$\mathbf{wa}_k - c_k > 0$$

allora il valore della funzione obiettivo può decrescere dal valore attuale $z_0 = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{wb}$ al valore:

$$z = z_0 - (\mathbf{wa}_k - c_k)x_k$$

Migliorare una Soluzione Base (3)

- L'entità del miglioramento della funzione obiettivo dipende dal valore massimo che la variabile x_k può assumere, garantendo che la nuova soluzione sia sempre Base Ammissibile.

- Per determinare di quanto posso aumentare la variabile x_k per avere un nuova soluzione Base Ammissibile, dobbiamo considerare l'equazione che dermina la soluzione $\mathbf{x_B}$ in funzione di $\mathbf{x_N}$:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$$

che possiamo riscrivere come:

$$\mathbf{x_B} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}^k x_k$$

dove $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ e $\mathbf{y}^k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ (ipotizzando che $x_j = 0$, $\forall j \in N \setminus \{k\}$).

Migliorare una Soluzione Base (4)

- Per ogni componente i-esima di $\mathbf{x_B}$, $i = 1, \ldots, m$, abbiamo che:

$$x_i = \bar{b}_i - y_i^k x_k$$

- Se vogliamo che la soluzione base rimanga ammissibile dobbiamo aumentare x_k in modo che:

$$x_i = \bar{b}_i - y_i^k x_k \geq 0$$

- Quindi per ogni i la variabile x_k deve rispettare la condizione:

$$x_k \leq \frac{\bar{b}_i}{y_i^k}$$

Migliorare una Soluzione Base (5)

- Il valore massimo che la variabile x_k può assumere è dato dal cosiddetto *Rapporto Minimo*:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_r^k} = \min_{i=1,\dots,m} \left[\frac{\bar{b}_i}{y_i^k} : y_i^k > 0 \right]$$

- Nel caso in cui $\mathbf{y}^k \leq \mathbf{0}$ la funzione obiettivo è *illimitata*, in quanto $(\mathbf{wa}_k - c_k) > 0$ e x_k può arbitrariamente crescere garantendo l'ammissibilità della soluzione.

Migliorare una Soluzione Base (6)

- Una volta aggiornato il valore della variabile x_k tutte le variabili x_i in base sono aggiornate come segue:

$$x_i = \bar{b}_i - y_i^k \frac{\bar{b}_r}{y_r^k}$$

  mentre tutte le altre variabili non base diverse da k rimangono nulle.

- Si noti che la variabile x_r dopo essere stata aggiornata sarà nulla e la colonna $\mathbf{a}_k$ sostituisce la colonna $\mathbf{a}_r$ nella base $\mathbf{B}$.

- Diremo che x_k *entra* in base, mentre x_r *esce* dalla base.

Algoritmo del Simplesso Primale

*Step*1. Inizializzazione:
Definisce una soluzione base ammissibile
$\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = \left[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}\right] = \left[\bar{\mathbf{b}}, \mathbf{0}\right]$ di costo $z = \mathbf{c_B x_B} = \mathbf{c_B B^{-1} b}$.

*Step*2. Pricing:
Calcola $\mathbf{w} = \mathbf{c_B B}^{-1}$, che equivale a risolvere $\mathbf{wB} = \mathbf{c_B}$.
Calcola i *costi ridotti* $\mathbf{wa}_j - c_j$ per le variabili non-base $j \in N$ e determina:

$$\mathbf{wa}_k - c_k = \max_{j \in N} \left\{\mathbf{wa}_j - c_j\right\}$$

*Step*3. Condizioni di ottimalità:
Se $\mathbf{wa}_k - c_k < 0$, allora STOP la soluzione è *ottima*.

*Step*4. La variabile k è candidata a entrare in base:
Calcola $\mathbf{y}^k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$, che equivale a risolvere $\mathbf{By}^k = \mathbf{a}_k$.
Se $\mathbf{y}^k \leq \mathbf{0}$, allora STOP la soluzione è *illimitata*.

Algoritmo del Simplesso Primale (2)

*Step*5. Rapporto minimo:

Calcola il valore da assegnare a x_k:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_r^k} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_i^k} : y_i^k > 0, i = 1, \ldots, m\right\}$$

La variabile x_r esce dalla base e x_k entra al suo posto.
Aggiorna $\mathbf{B}$, $\mathbf{N}$ e la soluzione base $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = \left[\bar{\mathbf{b}}, \mathbf{0}\right]$.
Ritorna allo Step 2.

Definizione del Problema Duale

- Si consideri il problema LP in forma canonica, che chiameremo problema "*primale*" :

$$\begin{aligned} z_P = \min \;& \mathbf{cx} \\ s.t. \;& \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

  dove l'insieme dei sui punti ammissibili è $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.
- Il suo problema "*duale*" è il seguente:

$$\begin{aligned} z_D = \max \;& \mathbf{wb} \\ s.t. \;& \mathbf{wA} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

  dove l'insieme dei sui punti ammissibili è $W = \{\mathbf{w} : \mathbf{wA} \leq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$.

Come si ottiene il duale?

- Partendo dal problema primale in forma canonica:

$$\begin{aligned} z_P = \min \ & \mathbf{cx} \\ s.t. \ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Aggiungendo m variabili $\mathbf{x_S}$ di *slack* alle n variabili originarie, il primale equivale al problema in forma standard:

$$\begin{aligned} z_P = \min \ & \mathbf{cx} \\ s.t. \ & \mathbf{Ax} - \mathbf{I}\mathbf{x_S} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{x_S} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

  dove $\mathbf{I} = [\mathbf{a}_{n+1}, \ldots, \mathbf{a}_{n+m}] = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m]$ è la matrice identità di ordine m.

Come si ottiene il duale? (2)

- In corrispondenza di una soluzione ottima del primale deve esistere una base **B** per cui:

$$\mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j \leq 0, \quad j = 1, \ldots, n+m$$

dove, ricordiamo, $\mathbf{w} = \mathbf{c}_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}$.

- Riscrivendo la disequazione $\mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j \leq 0$ per le variabili originarie e quelle di slack si ha:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{w}\mathbf{a}_j & \leq & c_j, \quad j = 1, \ldots, n \\ -\mathbf{w}\mathbf{e}_i & \leq & 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

che in forma matriciale può essere riscritta:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{w}\mathbf{A} & \leq & \mathbf{c} \\ \mathbf{w} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

Come si ottiene il duale? (3)

- Quindi abbiamo mostrato perché l'insieme delle soluzioni ammissibili del duale è definito come:

$$W = \{\mathbf{w} : \mathbf{wA} \leq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$$

- Ora si vuole mostrare perché la funzione obiettivo da massimizzare è rappresentata da **wb** (i.e., $z_D = \max\{\mathbf{wb} : \mathbf{w} \in W\}$).

Dualità debole

Lemma 1 (Dualità Debole).
Se $\tilde{\mathbf{x}} \in X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ e $\tilde{\mathbf{w}} \in W = \{\mathbf{w} : \mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$ allora $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$.

Dimostrazione.
Siccome $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ allora $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}$. Poichè $\tilde{\mathbf{w}} \geq \mathbf{0}$, si ha:

$$\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \geq \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \tag{1}$$

Siccome $\tilde{\mathbf{w}} \in W$ allora $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}$. Poichè $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, si ha:

$$\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} \tag{2}$$

Dalle espressioni (1) e (2) si ottiene $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$.$\square$

Dualità debole (2)

- Dalla dualità debole si deduce che il valore $\mathbf{wb}$ di qualsiasi soluzione $\mathbf{w} \in W$ è un lower bound alla soluzione ottima del primale.
- Il miglior lower bound $\mathbf{w}^*\mathbf{b}$ alla soluzione ottima del primale lo si può ottenere risolvendo il seguente problema "*duale*":

$$\begin{aligned} z = \max \quad & \mathbf{wb} \\ s.t. \quad & \mathbf{wA} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dualità debole

Corollario 1. Se $\mathbf{x}^* \in X$ e $\mathbf{w}^* \in W$ soddisfano $\mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$ allora $\mathbf{x}^*$ è soluzione ottima del primale e $\mathbf{w}^*$ è soluzione ottima del duale.

Dimostrazione. Per il *lemma della dualità debole* si ha $\mathbf{wb} \leq \mathbf{cx}$, $\forall \mathbf{w} \in W$ e $\forall \mathbf{x} \in X$.
Quindi, $\mathbf{cx} \geq \mathbf{w}^*\mathbf{b}$, $\forall \mathbf{x} \in X$, ma poichè per ipotesi $\mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$ si ha:

$$\mathbf{cx} \geq \mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*, \forall \mathbf{x} \in X \tag{3}$$

Per cui $\mathbf{x}^* \in X$ è soluzione ottima del primale.
Analogamente, $\mathbf{c}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{wb}$, $\forall \mathbf{w} \in W$, ma poichè per ipotesi $\mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$ si ha:

$$\mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{wb}, \forall \mathbf{w} \in W \tag{4}$$

Per cui $\mathbf{w}^* \in W$ è soluzione ottima del duale.$\square$

Dualità Forte

Il *teorema della dualità forte* stabilisce che se esistono soluzioni ammissibili sia per il primale che per il duale, allora esistono due soluzioni ottime i cui valori coincidono.

Teorema 1 (Dualità Forte). Se $X \neq \emptyset$ e $W \neq \emptyset$, allora esiste una soluzione $\mathbf{x}^*$ ottima per il primale e una soluzione $\mathbf{w}^*$ ottima per il duale. Inoltre, $\mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$.

Dimostrazione. Per il corollario 1 è sufficiente dimostrare l'esistenza di $\mathbf{x}^* \in X$ e $\mathbf{w}^* \in W$ tali che $\mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$.

Siccome $W \neq \emptyset$, per il lemma della dualità debole il valore $\mathbf{cx}$ è limitato inferiormente (i.e. $\max\{\mathbf{wb} : \mathbf{w} \in W\} \leq \min\{\mathbf{cx} : \mathbf{x} \in X\}$).

Quindi, $X \neq \emptyset$ e $\mathbf{cx}$ limitata, implica che il primale ha soluzione ottima limitata.

Dualità Forte (2)

Riscriviamo il primale in forma standard:

$$\begin{aligned} z = \min \ & \mathbf{cx} \\ s.t. \ & \mathbf{Ax} - \mathbf{Ix_S} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{x_S} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Indichiamo con $(\mathbf{x}^*, \mathbf{x_S}^*)$ la soluzione ottima del primale e con $\mathbf{B}$ la corrispondente base ottima.

Per le condizioni di ottimalità si ha:

$$\mathbf{c_B B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \leq \mathbf{0}, \quad j = 1, \ldots, n+m$$

che, ponendo $\mathbf{w}^* = \mathbf{c_B B}^{-1}$, equivale a:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^* \mathbf{A} & \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{w}^* & \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dualità Forte (3)

Per cui la soluzione $\mathbf{w}^* = \mathbf{c_B B}^{-1}$ è duale ammissibile, i.e. $\mathbf{w}^* \in W$.

Infine, siccome $\mathbf{w}^* = \mathbf{c_B B}^{-1}$ e $\mathbf{x}^* = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$, si ha:

$$\mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c_B B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$$

Per cui il teorema è dimostrato.$\square$

Relazione tra Primale e Duale

- Dal teorema della dualità debole abbiamo:

$$\mathbf{cx} \geq \mathbf{wAx} \geq \mathbf{wb}$$

  Se supponiamo che il primale ha soluzione ottima non limitata allora:

$$\mathbf{cx} \rightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad -\infty \geq \mathbf{wb}, \forall \mathbf{w} \in W$$

  allora il duale non ha soluzioni ammissibili, i.e. $W = \emptyset$.

- È vero anche il viceversa: se il duale ha soluzione ottima non limitata:

$$\mathbf{wb} \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathbf{cx} \geq +\infty, \forall \mathbf{x} \in X$$

  allora il primale non ha soluzioni ammissibili, i.e. $X = \emptyset$.

Relazione tra Primale e Duale (2)

- Se il primale non ha soluzioni ammissibili, i.e. $X = \emptyset$, allora il duale o non ha soluzioni ammissibili o ha una soluzione ottima non limitata.

- Possiamo riassumere tutti i possibili casi nella seguente tabella:

		D		
		Ottimo	Non Amm.	Illim.
P	Ottimo	X		
	Non Amm.		X	X
	Illim.		X	

Forme Miste del Primale

- Un problema di programmazione lineare si può presentare nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \min z_P = \ & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ s.t. \ & \mathbf{A}_1\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \\ & \mathbf{A}_3\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_3 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Per scrivere il duale portiamo il primale in forma standard:

$$\begin{array}{rlllll} \min z_P = & \mathbf{c}\mathbf{x} & & & & \\ s.t. & \mathbf{A}_1\mathbf{x} & -\mathbf{I}\mathbf{x}_S & & = \mathbf{b}_1 & : \mathbf{w}_1 \\ & \mathbf{A}_2\mathbf{x} & & & = \mathbf{b}_2 & : \mathbf{w}_2 \\ & \mathbf{A}_3\mathbf{x} & & +\mathbf{I}\mathbf{x}_T & = \mathbf{b}_3 & : \mathbf{w}_3 \\ & \mathbf{x}, \ \mathbf{x}_S, \ \mathbf{x}_T \geq \mathbf{0} & & & & \end{array}$$

Forme Miste del Primale (2)

- Dato il primale in forma standard:

$$
\begin{array}{rlllll}
\min z_P = & \mathbf{c}\mathbf{x} & & & & \\
s.t. & \mathbf{A}_1\mathbf{x} & -\mathbf{I}\mathbf{x}_S & & = \mathbf{b}_1 & : \mathbf{w}_1 \\
& \mathbf{A}_2\mathbf{x} & & & = \mathbf{b}_2 & : \mathbf{w}_2 \\
& \mathbf{A}_3\mathbf{x} & & +\mathbf{I}\mathbf{x}_T & = \mathbf{b}_3 & : \mathbf{w}_3 \\
& \mathbf{x},\ \mathbf{x}_S,\ \mathbf{x}_T \geq \mathbf{0} & & & &
\end{array}
$$

- Il duale è il seguente:

$$
\begin{array}{rl}
\max z_D = & \mathbf{w}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{w}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{w}_3\mathbf{b}_3 \\
s.t. & \mathbf{w}_1\mathbf{A_1} + \mathbf{w}_2\mathbf{A_2} + \mathbf{w}_3\mathbf{A_3} \leq \mathbf{c} \\
& \mathbf{w}_1 \geq \mathbf{0} \\
& \mathbf{w}_2 \text{ qualsiasi} \\
& \mathbf{w}_3 \leq \mathbf{0}
\end{array}
$$

Forme Miste del Primale (3)

- Possiamo riassumere tutti i possibili casi nella seguente tabella:

Primale	Duale
min	max
Vincolo i	Variabile w_i
$\geq$	$w_i \geq 0$
$=$	qualsiasi
$\leq$	$w_i \leq 0$
Variabile x_j	Vincolo j
$x_j \geq 0$	$\leq$
qualsiasi	$=$
$x_j \leq 0$	$\geq$

Forme Miste del Primale: Esempio

Dato il seguente problema primale:

$$
\begin{aligned}
\min z_P = \ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\
s.t. \ & x_1 + x_2 \geq 2 && : w_1 \\
& -x_1 + x_2 - x_3 = 1 && : w_2 \\
& +x_2 - 2x_3 \leq 3 && : w_3 \\
& x_1 \ \text{ qualsiasi} \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

Il problema duale è:

$$
\begin{aligned}
\max z_D = \ & 2w_1 + w_2 + 3w_3 \\
s.t. \ & w_1 - w_2 = 1 && : x_1 \\
& w_1 + w_2 + w_3 \leq -2 && : x_2 \\
& -w_2 - 2w_3 \geq 3 && : x_3 \\
& w_1 \geq 0 \\
& w_2 \ \text{qualsiasi} \\
& w_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

Condizioni di Complementarietà

Dai teoremi relativi alla dualità è possibile derivare delle condizioni di ottimalità.

Corollario 2 (Complementarietà). Le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ del primale e $\tilde{\mathbf{w}} \in W$ del duale sono ottime se e solo se

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) & = & 0 \\ (b) & (\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}} & = & 0 \end{array}$$

Dimostrazione.
Si vuole dimostrare che:

- Se (a) e (b) sono soddisfatte, allora le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime.
- Se le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime, allora le condizioni (a) e (b) devono essere soddisfatte.

Condizioni di Complementarietà (2)

- (a) e (b) sono soddisfatte le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime.

  Dal lemma della dualità debole si ha che per ogni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$:

$$\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \leq \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$$

  Ma se (a) e (b) sono soddisfatte si ha anche:

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} & = & \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \\ (b) & \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} & = & \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \end{array}$$

  Per cui $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$ e, per il corollario 1, $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime.

Condizioni di Complementarietà (3)

- Se le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime allora le condizioni (a) e (b) devono essere soddisfatte.

  Se una delle due condizioni di complementarietà non è soddisfatta allora almeno una delle due soluzioni non è ottima.

  Infatti, se ad esempio $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{b}) > 0$ allora ne consegue che $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} < \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$.

Per cui il corollario è dimostrato.$\square$

NOTA: il corollario stabilisce che data una soluzione del primale $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ per dimostrarne l'ottimalità è sufficiente trovare una soluzione duale $\tilde{\mathbf{w}} \in W$ che soddisfi le condizioni di complementarietà (*o viceversa*).

Condizioni di Complementarietà (4)

Le condizioni di complementarietà:

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \mathbf{w}(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}) & = & 0 \\ (b) & (\mathbf{c}-\mathbf{w}\mathbf{A})\mathbf{x} & = & 0 \end{array}$$

corrispondono alle equazioni:

$$\begin{array}{lrcll} (a') & w_i(\mathbf{a}^i\mathbf{x}-b_i) & = & 0, & i=1,\ldots,m \\ (b') & (c_j-\mathbf{w}\mathbf{a}_j)x_j & = & 0, & j=1,\ldots,n \end{array}$$

dalle quali si derivano le seguenti osservazioni:

- $w_i > 0$ implica che $\mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i$ ($\mathbf{a}^i$ è la riga i-esima della matrice $\mathbf{A}$);
- $\mathbf{a}^i\mathbf{x} > b_i$ implica che $w_i = 0$;
- $x_j > 0$ implica che $\mathbf{w}\mathbf{a}_j = c_j$ ($\mathbf{a}_j$ è la colonna j-esima della matrice $\mathbf{A}$);
- $\mathbf{w}\mathbf{a}_j < c_j$ implica che $x_j = 0$.

Interpretazione economica della dualità

- Il valore di ciascuna variabile duale corrisponde al valore della risorsa espressa dal termine noto del corrispondente vincolo (shadow price)
- In altre parole, il valore della variabile duale indica il potenziale peggioramento/miglioramento del valore della soluzione ottima se modifico di una unità il termine noto del corrispondente vincolo.
- Una interpretazione economica alternativa della dualità la possiamo ottenere dal seguente esempio.

Interpretazione economica della dualità (2)

Esempio: il problema della dieta.

Siano dati n alimenti e m nutrienti:

x_j: consumo dell'alimento j;

c_j: costo unitario dell'alimento j;

a_{ij}: quantità del nutriente i contenuto in una unità dell'alimento j;

r_i: quantità minima dell'i-esimo nutriente.

La formulazione matematica del problema può essere la seguente:

$$
\begin{array}{lrll}
(P) & \min z_P = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& s.t. & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq r_i, & i = 1, \ldots, m \\
& & x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Interpretazione economica della dualità (3)

Si vuole produrre una *pillola* sostitutiva che contenga gli m nutrienti.

L'obiettivo è quello di fissare il costo w_i per ogni unità di nutriente i, in modo da massimizzare il costo della pillola, mantenendolo competitivo con quello del cibo reale.

Il problema può essere formulato come segue:

$$
\begin{array}{llll}
(D) & \max z_D = & \sum_{i=1}^{m} w_i r_i & \\
 & s.t. & \sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij} \leq c_j, & j = 1, \ldots, n \\
 & & w_i \geq 0, & i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Il problema D è il duale del problema P.

Esempio n. 1

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare continua:

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\min z = & - & 3x_1 & + & x_2 & & & \\
s.t. & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & +4 & (a) \\
 & - & x_1 & + & x_2 & \leq & +1 & (b) \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Il problema si può riscrivere in forma standard:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
\min z = & - & 3x_1 & + & x_2 & & & & & & & \\
s.t. & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & +4 & (a) \\
 & - & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & +1 & (b) \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

dove x_3 e x_4 sono le variabili di slack (scarto).

Esempio n. 1

Data la base $\mathbf{B} = \left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\right]$, la corrispondente soluzione base $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = \left[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}\right]$ [2] è la seguente:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

siccome i vincoli di non-negatività sono rispettati la soluzione base è ammissibile.

La funzione obiettivo è pari a $z = \mathbf{c_B}\mathbf{x_B} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = -12$.

La soluzione è ottima?

Per saperlo dobbiamo verificare se $\mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j \leq 0$ per ogni variabile non base x_j, dove $\mathbf{w} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$.

[2] come in precedenza, dove non necessario non si esplicitano i *trasposti* di vettori e matrici

Esempio n. 1

Calcoliamo $\mathbf{w} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1} = [-3, 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [-3, 0]$$

Per cui verifichiamo che $\mathbf{wa}_2 - c_2 \leq 0$ e $\mathbf{wa}_3 - c_3 \leq 0$:

$$\mathbf{wa}_2 - c_2 = [-3, 0]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = -6 - 1 = -7$$

$$\mathbf{wa}_3 - c_3 = [-3, 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -3 - 0 = -3$$

Quindi la soluzione è ottima.

Esempio n. 2

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare continua:

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\min\ z = & - & x_1 & - & 3x_2 & & & \\
s.t. & & x_1 & - & 2x_2 & \leq & +4 & (a) \\
 & - & x_1 & + & x_2 & \leq & +3 & (b) \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Il problema si può riscrivere in forma standard:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
\min\ z = & - & x_1 & - & 3x_2 & & & & & & & \\
s.t. & & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & +4 & (a) \\
 & - & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & +3 & (b) \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

dove x_3 e x_4 sono le variabili di slack (scarto).

Esempio n. 2

Data la base $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2]$, la corrispondente soluzione base $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = \left[\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}\right]$ è la seguente:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

siccome i vincoli di non-negatività sono rispettati la soluzione base è ammissibile.

La funzione obiettivo è pari a $z = \mathbf{c_B}\mathbf{x_B} = [0, -3] \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} = -9$.

La soluzione è ottima?

Per saperlo dobbiamo verificare se $\mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j \leq 0$ per ogni variabile non base x_j, dove $\mathbf{w} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$.

Esempio n. 2

Calcoliamo $\mathbf{w} = \mathbf{c_B B}^{-1}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{c_B B}^{-1} = [0, -3] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, -3]$$

Per cui verifichiamo che $\mathbf{wa}_4 - c_4 \leq 0$ e $\mathbf{wa}_1 - c_1 \leq 0$:

$$\mathbf{wa}_4 - c_4 = [0, -3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -3 - 0 = -3$$

$$\mathbf{wa}_1 - c_1 = [0, -3] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 = +3 + 1 = +4$$

Quindi la soluzione non è ottima e la variabile x_1 è candidata a entrare in base.

Esempio n. 2

Quando una variabile x_k non base aumenta le variabili in base vengono modificate come segue:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k x_k = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}^1 x_1$$

dove $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ e $\mathbf{y}^k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$.

Nel nostro caso

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

quindi:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}^1 x_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 10 + x_1 \\ 3 + x_1 \end{bmatrix}$$

Esempio n. 2

Come si può notare la variabile x_1 può aumentare illimitatamente senza rendere la soluzione non ammissibile, perché a loro volta le variabili in base x_2 e x_3 aumentano. Infatti la soluzione è la seguente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3 + x_1 \\ 10 + x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1$$

che equivale a

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{d}x_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}x_1$$

dove $\mathbf{d}$ è una direzione.

Pertanto la soluzione è illimitata.

Esempio n. 3

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare continua:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} \min z = & - & x_1 & - & 3x_2 & & & \\ s.t. & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & +6 & (a) \\ & - & x_1 & + & x_2 & \leq & +1 & (b) \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Il problema si può riscrivere in forma standard:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} \min z = & - & x_1 & - & 3x_2 & & & & & & & \\ s.t. & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & +6 & (a) \\ & - & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & +1 & (b) \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 & \end{array}$$

dove x_3 e x_4 sono le variabili di slack (scarto).

Esempio n. 3

I parametri del problema sono i vettori dei termini noti **b** e dei costi **c**:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e la matrice dei vincoli **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual è una base **B** della matrice **A**?

$$\mathbf{A} = [\mathbf{N}, \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \ \mathbf{B} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio n. 3

Iterazione n. 1

Data la base $\mathbf{B} = \mathbf{I} = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$, la corrispondente soluzione base $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}] = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}]$ è la seguente:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

siccome i vincoli di non-negatività sono rispettati la soluzione base è ammissibile.

La funzione obiettivo è pari a $z = \mathbf{c_B x_B} = [0,0] \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$.

Per sapere se la soluzione corrente è ottima oppure se può essere migliorata dobbiamo verificare se $\mathbf{wa}_j - c_j \leq 0$ per ogni variabile non base x_j, dove $\mathbf{w} = \mathbf{c_B B}^{-1}$.

Esempio n. 3

Calcoliamo $\mathbf{w} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1} = [0,0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0,0]$$

Per cui verifichiamo che $\mathbf{wa}_1 - c_1 \leq 0$ e $\mathbf{wa}_2 - c_2 \leq 0$:

$$\mathbf{wa}_1 - c_1 = [0,0]\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - (-1) = 0 + 1 = +1$$

$$\mathbf{wa}_2 - c_2 = [0,0]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - (-3) = 0 + 3 = +3$$

Quindi la soluzione non è ottima e la variabile x_2 è candidata a entrare in base, perché:

$$\mathbf{wa}_2 - c_2 = \max\{\mathbf{wa}_1 - c_1, \mathbf{wa}_2 - c_2\}$$

Esempio n. 3

Quando una variabile x_k non base aumenta le variabili in base vengono modificate come segue:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k x_k = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}^2 x_2$$

dove $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ e $\mathbf{y}^k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$.

Nel nostro caso

$$\mathbf{y}^2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

quindi:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}^2 x_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 6 - 3x_2 \\ 1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 - y_1^2 x_2 \\ \bar{b}_2 - y_2^2 x_2 \end{bmatrix}$$

Esempio n. 3

Per calcolare il valore da assegnare a x_2 si applica il criterio del rapporto minimo:

$$x_2 = \frac{\bar{b}_r}{y_r^k} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_i^k} : y_i^k > 0, i = 1, \dots, m\right\}$$

che nel nostro caso:

$$x_2 = \min\left\{\frac{\bar{b}_1}{y_1^2} = \frac{6}{3}, \frac{\bar{b}_2}{y_2^2} = \frac{1}{1}\right\} = \frac{\bar{b}_2}{y_2^2} = 1$$

La variabile x_4 si annulla, quindi esce dalla base e x_2 entra al suo posto con il valore 1. La soluzione base corrente diventa:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 3x_2 \\ 1 - x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{b}}$$

Il nuovo valore della funzione obiettivo è:

$$z_1 = z_0 - (\mathbf{wa}_2 - c_2)x_2 = 0 - 3x_2 = -3$$

Esempio n. 3

Iterazione n. 2

Calcoliamo $\mathbf{w} = \mathbf{c_B B}^{-1}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{c_B B}^{-1} = [0, -3] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [0, -3] \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, -3]$$

Per cui verifichiamo che $\mathbf{wa}_1 - c_1 \leq 0$ e $\mathbf{wa}_4 - c_4 \leq 0$:

$$\mathbf{wa}_1 - c_1 = [0, -3] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - (-1) = 3 + 1 = +4$$

$$\mathbf{wa}_4 - c_4 = [0, -3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -3 + 0 = -3$$

Quindi la soluzione non è ottima e la variabile x_1 è candidata a entrare in base, perché:

$$\mathbf{wa}_1 - c_1 = \max\left\{\mathbf{wa}_1 - c_1, \mathbf{wa}_4 - c_4\right\}$$

Esempio n. 3

Quando la variabile x_1 aumenta le variabili in base vengono modificate come segue:

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k x_k = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}^1 x_1$$

dove $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ e $\mathbf{y}^k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$.

Nel nostro caso

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

quindi:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}^1 x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 3 - 5x_1 \\ 1 + x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 - y_1^1 x_1 \\ \bar{b}_2 - y_2^1 x_1 \end{bmatrix}$$

Esempio n. 3

Per calcolare il valore da assegnare a x_1 si applica il criterio del rapporto minimo:

$$x_1 = \frac{\bar{b}_r}{y_r^1} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_i^1} : y_i^1 > 0, i = 1, \ldots, m\right\}$$

che nel nostro caso:

$$x_1 = \min\left\{\frac{\bar{b}_1}{y_1^1} = \frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5}$$

La variabile che si annulla è x_3, quindi esce dalla base e x_1 entra al suo posto con il valore $\frac{3}{5}$. La soluzione base corrente diventa:

$$\mathbf{x_B} = \left[\begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 3 - 5x_1 \\ 1 + x_1 \end{array}\right] \;\Rightarrow\; \mathbf{x_B} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 3/5 \\ 8/5 \end{array}\right] = \bar{\mathbf{b}}$$

Il nuovo valore della funzione obiettivo è:

$$z_2 = z_1 - (\mathbf{w}\mathbf{a}_1 - c_1)x_1 = -3 - 4\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{27}{5}$$

Esempio n. 3

Iterazione n. 3

Calcoliamo $\mathbf{w} = \mathbf{c_B B}^{-1}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{c_B B}^{-1} = [-1, -3] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [-1, -3] \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

da cui $\mathbf{w} = [-4/5, -3/5]$.

Per cui verifichiamo che $\mathbf{wa}_3 - c_3 \leq 0$ e $\mathbf{wa}_4 - c_4 \leq 0$:

$$\mathbf{wa}_3 - c_3 = [-4/5, -3/5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -4/5 + 0 = -4/5$$

$$\mathbf{wa}_4 - c_4 = [-4/5, -3/5] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -3/5 + 0 = -3/5$$

La soluzione è ottima!

Esempio n. 4

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare continua:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
\min z = & - & x_1 & + & 3x_2 & & \\
s.t. & - & x_1 & + & x_2 & \geq & +3 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & +6 \\
 & & & + & x_2 & \leq & +5 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Si vuole verificare se la soluzione $\mathbf{x} = [x_1, x_2] = [0, 3]$ è ottima.

Come si può verificare?

Possiamo considerare due possibilità:

- risolvere il problema;
- applicare le condizioni di complementarietà.

Esempio n. 4

Partendo dal problema primale:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\min z = & - & x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
s.t. & - & x_1 & + & x_2 & \geq & +3 & : & \color{red}{w_1} \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & +6 & : & \color{red}{w_2} \\
 & & & + & x_2 & \leq & +5 & : & \color{red}{w_3} \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

Si definisce il suo problema duale:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\max z = & + & 3w_1 & + & 6w_2 & + & 5w_3 & & & & \\
s.t. & - & w_1 & + & 3w_2 & & & \leq & -1 & : & \color{red}{x_1} \\
 & & w_1 & + & w_2 & + & w_3 & \leq & +3 & : & \color{red}{x_2} \\
 & & w_1 & & & & & \geq & 0 & & \\
 & & & & w_2 & & & \leq & 0 & & \\
 & & & & & & w_3 & \leq & 0 & &
\end{array}$$

Esempio n. 4

Si verifica la *saturazione* dei vincoli del problema primale per la soluzione $\mathbf{x} = [x_1, x_2] = [0, 3]$:

- $-x_1 + x_2 \geq +3$: è saturo $\Rightarrow w_1 \geq 0$;
- $3x_1 + x_2 \leq +6$: non è saturo $\Rightarrow w_2 = 0$;
- $x_2 \leq +5$: non è saturo $\Rightarrow w_3 = 0$.

Mentre la soluzione $\mathbf{x} = [x_1, x_2] = [0, 3]$ implica che il vincolo duale associato alla variabile x_2 deve essere saturo:

$$w_1 + w_2 + w_3 = +3 \quad \Rightarrow \quad w_1 = +3$$

Per cui, applicando le condizioni di complementarietà si ha $w_1 = +3$, che rispetta tutti i vincoli del problema duale (compreso $w_1 \geq 0$).
Quindi partendo dalla soluzione primale $\mathbf{x}$ si è ottenuta una soluzione duale ammissibile $\mathbf{w}$ che soddisfa le condizioni di complementarietà, per cui la soluzione $\mathbf{x} = [x_1, x_2] = [0, 3]$ è ottima.

Il Metodo del Simplesso Formato Tableau

- Il "*simplesso primale in formato tableau*" permette di semplificare le operazioni di aggiornamento della base, della corrispondente soluzione e dei costi ridotti $\mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$ ad ogni iterazione:

$$\begin{array}{llcrcrcl} \min & z & = & \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B & + & \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N & & \\ & & & \mathbf{B}\mathbf{x}_B & + & \mathbf{N}\mathbf{x}_N & = & \mathbf{b} \\ & & & \mathbf{x}_B & , & \mathbf{x}_N & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

che si può riscrivere come:

$$\begin{array}{llcrcrcr} \min & z & & & & & & \\ & z & - & \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B & - & \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N & = & 0 \\ & & & \mathbf{x}_B & + & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ & & & \mathbf{x}_B & , & \mathbf{x}_N & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

Il Metodo del Simplesso Formato Tableau (2)

Moltiplicando la seconda equazione per $\mathbf{c}_B$ e sommandola per la prima si ottiene:

$$\begin{array}{llcccccc}
\min & z & & & & & & \\
 & z & + & \mathbf{0}\mathbf{x}_B & + & (\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N)\mathbf{x}_N & = & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\
 & & & \mathbf{x}_B & + & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\
 & & & \mathbf{x}_B & , & \mathbf{x}_N & \geq & \mathbf{0}
\end{array}$$

- Il risultato può essere inserito in un "*tableau*" come segue:

	z	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{x_N}$	RHS	
z	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\leftarrow$ Riga 0
$\mathbf{x_B}$	0	$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	

dove il Right Hand Side (RHS) contiene il valore della funzione obiettivo e delle variabili base.

Il Metodo del Simplesso Formato Tableau (3)

In una versione di maggiore dettaglio il “*tableau*” è il seguente:

	z			$\mathbf{x_B}$					$\mathbf{x_N}$			RHS
z	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\mathbf{wa}_{m+1} - c_{m+1}$	$\dots$	$\mathbf{wa}_{m+j} - c_{m+j}$	$\dots$	$\mathbf{wa}_n - c_n$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	y_1^{m+1}	$\dots$	y_1^j	$\dots$	y_1^n	$\bar{b}_1$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathbf{x_B}$	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	y_i^{m+1}	$\dots$	y_i^j	$\dots$	y_i^n	$\bar{b}_i$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	y_m^{m+1}	$\dots$	y_m^j	$\dots$	y_m^n	$\bar{b}_m$

- Come si può notare il tableau contiene tutte le informazioni necessarie per l’esecuzione dell’algoritmo del simplesso.
- L’operazione base è il *pivoting*. Che permette a una nuova variabile di entrare in base e di aggiornare *correttamente* tutte le informazioni nel tableau (costi ridotti, valore variabili base, etc.)
- Si illustra l’utilizzo del tableau con un esempio.

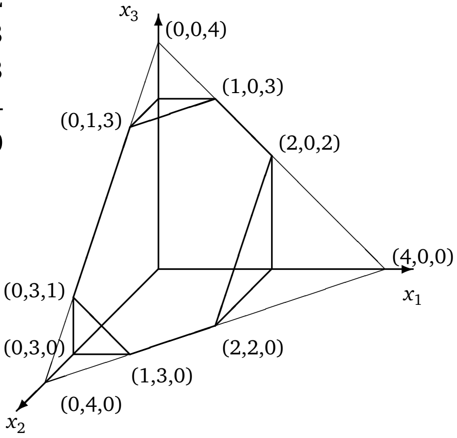
L'operazione di Pivoting

- Ad ogni iterazione si seleziona la variabile non base candidata ad entrare in base e si definisce con il criterio del rapporto minimo la variabile base che uscirà:
  - La variable entrante si seleziona scegliendo la colonna che massimizza il *costo ridotto* $\mathbf{wa}_k - c_k$ presente nella riga 0.
  - La variable uscente si seleziona scegliendo la riga che minimizza il rapporto $\frac{\bar{b}_i}{y_i^k}$ con $y_i^k > 0$.
- Si divide la riga i per y_i^k (che sicuramente è positivo).
- Ad ogni riga $i' \neq i$ si aggiunge la riga i moltiplicata per $-y_{i'}^k$.
- Alla riga 0 si aggiunge la riga i moltiplicata per $-(\mathbf{wa}_k - c_k)$.

Simplesso Primale in Formato Tableau by Examples

Si consideri il problema:

$$
\begin{array}{llrrrl}
\min & z= & x_1 & -2x_2 & -6x_3 & \\
\text{s.t.} & & x_1 & & & \leq 2 \\
& & & x_2 & & \leq 3 \\
& & & & x_3 & \leq 3 \\
& & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 4 \\
& & x_1 & ,\ x_2 & ,\ x_3 & \geq 0
\end{array}
$$



Simplesso Primale in Formato Tableau by Examples

In forma standard il problema è il seguente:

$$
\begin{array}{llrrrrrrrcl}
\min & z= & x_1 & -2x_2 & -6x_3 & & & & & & \\
\text{s.t.} & & x_1 & & & +x_4 & & & & = & 2 \\
 & & & x_2 & & & +x_5 & & & = & 3 \\
 & & & & x_3 & & & +x_6 & & = & 3 \\
 & & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & +x_7 & = & 4 \\
 & & x_1 & ,\ x_2 & ,\ x_3 & ,\ x_4 & ,\ x_5 & ,\ x_6 & ,\ x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

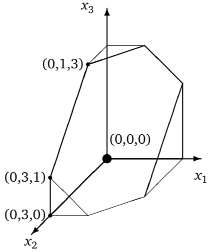
Per cui il primo tableau è il seguente:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-1	+2	+6	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	2
0	1	0	0	1	0	0	3
0	0	1	0	0	1	0	3
1	1	1	0	0	0	1	4

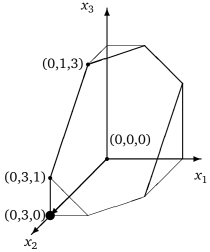
Simplesso Primale in Formato Tableau by Examples

Cosa succede se scegliamo $k = 2$ invece di $k = 3$?

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
-1	+2	+6	0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	0	2	
0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	3	(0,0,0)
0	0	1	0	0	1	0	3	
1	1	1	0	0	0	1	4	

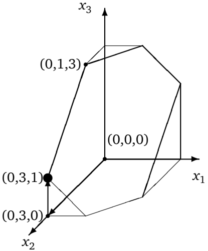


x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
-1	0	+6	0	-2	0	0	-6	
1	0	0	1	0	0	0	2	
0	1	0	0	1	0	0	3	(0,3,0)
0	0	1	0	0	1	0	3	
1	0	$\boxed{1}$	0	-1	0	1	1	

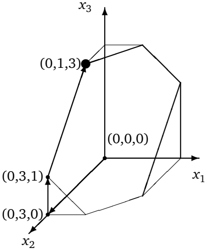


Simplesso Primale in Formato Tableau by Examples

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
-7	0	0	0	+4	0	-6	-12	
1	0	0	1	0	0	0	2	
0	1	0	0	1	0	0	3	(0,3,1)
-1	0	0	0	$\boxed{1}$	1	-1	2	
1	0	1	0	-1	0	1	1	



x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
-3	0	0	0	0	-4	-2	-20	
1	0	0	1	0	0	0	2	
1	1	0	0	0	-1	1	1	(0,1,3)
-1	0	0	0	1	1	-1	2	
0	0	1	0	0	1	0	3	

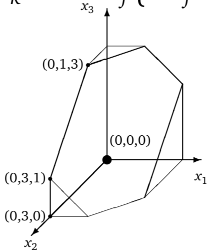


La soluzione è ottima!

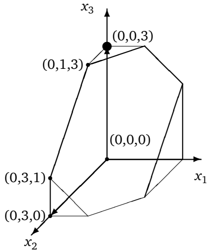
Simplesso Primale in Formato Tableau by Examples

Cosa sarebbe successo se avessimo scelto $\mathbf{wa}_k - c_k = \max_j \{\mathbf{wa}_j - c_j\}$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
-1	+2	+6	0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	0	2	
0	1	0	0	1	0	0	3	(0,0,0)
0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	3	
1	1	1	0	0	0	1	4	

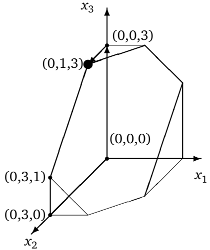


x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
-1	+2	0	0	0	-6	0	-18	
1	0	0	1	0	0	0	2	
0	1	0	0	1	0	0	3	(0,0,3)
0	0	1	0	0	1	0	3	
1	$\boxed{1}$	0	0	0	-1	1	1	



Simplesso Primale in Formato Tableau by Examples

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
-3	0	0	0	0	-4	-2	-20	
1	0	0	1	0	0	0	2	
-1	0	0	0	1	1	-1	2	(0,1,3)
0	0	1	0	0	1	0	3	
1	1	0	0	0	-1	1	1	



La soluzione è ottima!

In questo caso abbiamo fatto una iterazione in meno.

Scegliendo $\mathbf{wa}_k - c_k = \max_j \left\{ \mathbf{wa}_j - c_j \right\}$ non si hanno garanzie di una più rapida convergenza, ma in media le iterazioni diminuiscono.

Come determinare una base iniziale: caso facile

- Se il problema di n variabili e m vincoli ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} z_P = \min\ & \mathbf{cx} \\ s.t.\ & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- quando si aggiungono le m variabili $\mathbf{x_S}$ di *slack* alle n variabili originarie, il primale in forma standard è il seguente:

$$\begin{aligned} z_P = \min\ & \mathbf{cx} \\ s.t.\ & \mathbf{Ax} + \mathbf{Ix_S} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{x_S} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

dove $\mathbf{I} = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m]$ è la matrice identità di ordine m, che senz'altro può essere una base $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, la quale è anche ammissibile se $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Come determinare una base iniziale: Metodo Big-M

- Se il problema ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} z_P = \min \ & \mathbf{cx} \\ s.t. \ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

  non è detto che sia facile individuare una base $\mathbf{B}$ tra le colonne di $\mathbf{A}$.

- Nell'ipotesi che $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, si possono aggiungere m variabili $\mathbf{x_A}$, dette *artificiali*, alle n variabili originarie, e risolvere il seguente problema:

$$\begin{aligned} z_{P(M)} = \min \ & \mathbf{cx} + \mathbf{Mx_A} \\ s.t. \ & \mathbf{Ax} + \mathbf{Ix_A} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{x_A} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

  dove $\mathbf{I}$ è la matrice identità di ordine m e $\mathbf{M} = M\mathbf{I}$, con $M > 0$ scelto *sufficientemente grande*.

Come determinare una base iniziale: Metodo Big-M (2)

- Se risolviamo il problema $P(M)$ con le variabili artificiali, possiamo avere i seguenti casi:
  - Il problema $P(M)$ ha una soluzione ottima $(\mathbf{x}^*, \mathbf{x_A}^*)$:
    - Se $\mathbf{x_A}^* = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{x}^*$ è la soluzione ottima del problema P;
    - Se $\mathbf{x_A}^* \neq \mathbf{0}$, allora il problema P non ha soluzione.
  - Il problema $P(M)$ ha soluzione illimitata. Data la soluzione base ammissibile $(\mathbf{x}, \mathbf{x_A})$ corrispondente all'iterazione in cui il simplesso è terminato:
    - Se $\mathbf{x_A} = \mathbf{0}$, allora il problema P ha soluzione illimitata;
    - Se $\mathbf{x_A} \neq \mathbf{0}$, allora il problema P non ha soluzione.

Omettiamo la dimostrazione.

Come determinare una base iniziale: Metodo 2-Fasi

- Sia dato un problema della seguente forma:

$$\begin{aligned} (P) \quad z_P = \min \ & \mathbf{cx} \\ s.t. \ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Nell'ipotesi che $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, si possono aggiungere m variabili $\mathbf{x_A}$, dette *artificiali*, alle n variabili originarie, e risolvere il seguente problema:

$$\begin{aligned} (P') \quad z_{P'} = \min \ & \mathbf{1x_A} \\ s.t. \ & \mathbf{Ax} + \mathbf{Ix_A} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{x_A} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

dove $\mathbf{I}$ è la matrice identità di ordine m e $\mathbf{1} = \{1, 1, \ldots, 1\}$, è un vettore di m componenti tutte pari a 1.

Come determinare una base iniziale: Metodo 2-Fasi (2)

- In questo caso i problemi P e P' non sono equivalenti.
- Risolvere il problema P' serve solo a determinare una soluzione base ammissibile per il problema P.
- Sia $(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*_{\mathbf{A}})$ la soluzione ottima del problema P' di valore $z_{P'}$. Si possono presentare tre casi:
  - $z_{P'} > 0$
    $\Rightarrow$ il problema P non ha una base ammissibile;
  - $z_{P'} = 0$ e nessuna variabile artificiale è in base
    $\Rightarrow$ il problema P ha una base ammissibile;
  - $z_{P'} = 0$ e almeno una variabile artificiale è in base
    $\Rightarrow$ il problema P ha una base ammissibile, ma bisogna *estrarla*.

Come determinare una base iniziale: Metodo 2-Fasi (3)

- Se $z_{P'} = 0$ e una variabile artificiale è in base, per generare una base senza variabili artificiali è necessario farla uscire.

- Questo caso si verifica quando la soluzione è *degenere*, ossia una variabile in base ha valore nullo:

x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	x_1^A	$\dots$	x_h^A	$\dots$	x_m^A		
						$\dots$	0	$\dots$		0	
							0				
y_i^1	$\dots$	y_i^j	$\dots$	y_i^n			1			0	$\leftarrow$ Riga i
							0				

- Se esiste un $y_i^j \neq 0$, allora possiamo *pivotare* su questo coefficiente e la variabile x_j entra in base al posto della variabile artificiale x_h^A.

- Se $y_i^j = 0$, per ogni $j = 1, \dots, n$, allora possiamo eliminare dal tableau sia la riga i che la colonna della variabile artificiale x_h^A.

Come determinare una base iniziale: Esempio 1

Si consideri il problema:

$$
\begin{array}{rrrrcr}
\min z_P = & -4x_1 & +x_2 & -3x_3 & & \\
\text{s.t.} & +2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & +10 \\
 & +6x_1 & -3x_2 & & = & +8 \\
 & x_1 & , \; x_2 & , \; x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Il problema per la fase 1 è il seguente:

$$
\begin{array}{rrrrrrcr}
\min z_{P'} = & & & & +x_4 & +x_5 & & \\
\text{s.t.} & +2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & & = & +10 \\
 & +6x_1 & -3x_2 & & & +x_5 & = & +8 \\
 & x_1 & , \; x_2 & , \; x_3 & , \; x_4 & , \; x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Come determinare una base iniziale: Esempio 1

Il primo tableau è il seguente:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	0	-1	-1	0
2	1	2	1	0	10
6	-3	0	0	1	8

Prima di partire è necessario sistemare la riga 0, azzerando i costi ridotti $\mathbf{wa}_j - c_j$ delle variabili in base:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
+8	-2	+2	0	0	+18
2	1	2	1	0	10
6	-3	0	0	1	8

Come determinare una base iniziale: Esempio 1

Risolviamo la fase 1:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
+8	-2	+2	0	0	+18
2	1	2	1	0	10
$\boxed{6}$	-3	0	0	1	8

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	+2	+2	0	-4/3	+22/3
0	$\boxed{2}$	2	1	-1/3	22/3
1	-1/2	0	0	1/6	4/3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	0	-1	-1	0
0	1	1	1/2	-1/6	11/3
1	0	1/2	1/4	1/12	19/6

Come determinare una base iniziale: Esempio 1

Siccome la fase 1 è terminata con $z_{P'} = 0$ e le variabili artificiali sono fuori dalla base, abbiamo individuato la base per P.

Eliminiamo le variabili artificiali e ripristinando la funzione obiettivo originale nella riga 0, otteniamo il seguente tableau per la fase 2:

x_1	x_2	x_3	
+4	-1	+3	0
0	1	1	11/3
1	0	1/2	19/6

Anche per la fase 2, prima di partire è necessario sistemare la riga 0, azzerando i costi ridotti $\mathbf{wa}_j - c_j$ delle variabili in base:

x_1	x_2	x_3	
0	0	+2	-9
0	1	1	11/3
1	0	1/2	19/6

Come determinare una base iniziale: Esempio 1 (2)

Dopo aver azzerando i costi ridotti delle variabili in base, abbiamo:

x_1	x_2	x_3	
0	0	+2	-9
0	1	$\boxed{1}$	11/3
1	0	1/2	19/6

Una volta eseguita l'operazione di pivoting:

x_1	x_2	x_3		
0	-2	0	-49/3	← ottimo!
0	1	1	11/3	
1	-1/2	0	4/3	

Come determinare una base iniziale: Esempio 2

Si consideri il problema:

$$
\begin{array}{rrrcr}
\min z_P = & -2x_1 & +x_2 & & \\
\text{s.t.} & +x_1 & -2x_2 & \geq & +5 \\
 & +2x_1 & +5x_2 & = & +6 \\
 & x_1 & , \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Il problema per la fase 1, aggiungendo le variabili di slack e artificiali, è il seguente:

$$
\begin{array}{rrrrrrcr}
\min z_{P'} = & & & & +x_4 & +x_5 & & \\
\text{s.t.} & +x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & +5 \\
 & +2x_1 & +5x_2 & & & +x_5 & = & +6 \\
 & x_1 & , \quad x_2 & , \quad x_3 & , \quad x_4 & , \quad x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Come determinare una base iniziale: Esempio 2

Il primo tableau è il seguente:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	0	-1	-1	0
1	-2	-1	1	0	5
2	5	0	0	1	6

Prima di partire è necessario sistemare la riga 0, azzerando i costi ridotti $\mathbf{wa}_j - c_j$ delle variabili in base:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
+3	+3	-1	0	0	+11
1	-2	-1	1	0	5
2	5	0	0	1	6

Come determinare una base iniziale: Esempio 2

Risolviamo la fase 1:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
+3	+3	-1	0	0	+11
1	-2	-1	1	0	5
$\boxed{2}$	5	0	0	1	6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	-9/2	-1	0	-3/2	+2
0	-9/2	-1	1	-1/2	2
1	5/2	0	0	1/2	3

Purtroppo la fase 1 termina con $z_{P'} > 0$, quindi il problema originale non ha una soluzione ammissibile.

Come determinare una base iniziale: Esempio 3

Si consideri il problema:

$$
\begin{array}{rrrcr}
\min z_P = & -3x_1 & -2x_2 & & \\
\text{s.t.} & +x_1 & -2x_2 & \geq & +8 \\
 & +3x_1 & +2x_2 & \geq & +5 \\
 & x_1 & , \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Il problema per la fase 1, aggiungendo le variabili di slack e artificiali, è il seguente:

$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
\min z_{P'} = & & & & & +x_5 & +x_6 & & \\
\text{s.t.} & +x_1 & -2x_2 & -x_3 & & +x_5 & & = & +8 \\
 & +3x_1 & +2x_2 & & -x_4 & & +x_6 & = & +5 \\
 & x_1 & , \quad x_2 & , \quad x_3 & , \quad x_4 & , \quad x_5 & , \quad x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Come determinare una base iniziale: Esempio 3

Il primo tableau è il seguente:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	0	0	-1	-1	0
1	-2	-1	0	1	0	8
3	2	0	-1	0	1	5

Prima di partire è necessario sistemare la riga 0, azzerando i costi ridotti $\mathbf{wa}_j - c_j$ delle variabili in base:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
+4	0	-1	-1	0	0	+13
1	-2	-1	0	1	0	8
3	2	0	-1	0	1	5

Come determinare una base iniziale: Esempio 3

Risolviamo la fase 1:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
+4	0	-1	-1	0	0	+13
1	-2	-1	0	1	0	8
$\boxed{3}$	2	0	-1	0	1	5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	-8/3	-1	+1/3	0	-4/3	+19/3
0	-8/3	-1	$\boxed{1/3}$	1	-1/3	19/3
1	2/3	0	-1/3	0	1/3	5/3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	0	0	-1	-1	0
0	-8	-3	1	3	-1	19
1	-2	-1	0	1	0	8

Come determinare una base iniziale: Esempio 3

Siccome la fase 1 è terminata con $z_{P'} = 0$ e le variabili artificiali sono fuori dalla base, abbiamo individuato la base per P.

Eliminiamo le variabili artificiali e ripristinando la funzione obiettivo originale nella riga 0, otteniamo il seguente tableau per la fase 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	
+3	+2	0	0	0
0	-8	-3	1	19
1	-2	-1	0	8

Anche per la fase 2, prima di partire è necessario sistemare la riga 0, azzerando i costi ridotti $\mathbf{wa}_j - c_j$ delle variabili in base:

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	+8	+3	0	-24
0	-8	-3	1	19
1	-2	-1	0	8

Come determinare una base iniziale: Esempio 3 (2)

Purtroppo se si sceglie la variable entrante x_2 si scopre che $\mathbf{y}^2 < \mathbf{0}$, quindi il problema ha soluzione *illimitata*.

In questo caso si presentava una situazione analoga anche se avessimo scelto la variabile entrante x_3.

Metodo del Simplesso: Degenerazione e Convergenza

- La *degenerazione* si presenta quando alcuni $\bar{b}_i$ sono nulli.
- In caso di degenerazione, quando si applica il rapporto minimo, il valore da assegnare alla variabile entrante è sempre nullo:

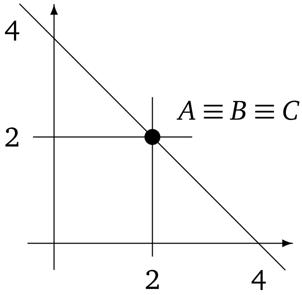
$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_r^k} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_i^k} : y_i^k > 0, i = 1, \ldots, m\right\} = 0$$

- Per cui cambia la base, ma non il punto estremo che coincide con il precedente.
- Il rischio è che il metodo torni a *spostarsi* su una base già considerata nelle precedenti iterazioni.

Metodo del Simplesso: Degenerazione e Convergenza (2)

- Si consideri il seguente esempio:

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 4
\end{array}
$$



Il metodo potrebbe avere un *ciclo* che coinvolge le basi associate ai tre punti estremi A, B e C che corrispondono a tre diverse soluzioni base, ma coincidono.

Metodo del Simplesso: Degenerazione e Convergenza (3)

- La *Regola di Bland* stabilisce che per evitare la degenerazione ciclante è sufficiente scegliere tra le variabili candidate a entrare in base (i.e., $\mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j$ positivi) e quelle candidate a uscire dalla base (i.e., che soddisfano il criterio del rapporto minimo) quelle di indice minimo.

- Esistono metodo più complessi, ma più efficienti (i.e., mediamente richiedono un numero più ridotto di iterazioni), rispetto alla Regola di Blend, come la *Regola Lessicografica*.

- Il metodo del simplesso, se implementa un metodo per evitare la degenerazione ciclante, nel caso peggiore deve generare tutte le possibili basi che sono un numero finito:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Il Metodo del Simplesso Duale

- Il Simplesso Primale, ad ogni iterazione, soddisfa:
  - L'ammissibilità primale della soluzione: $\bar{b}_r \geq 0$ per ogni r;
  - Le Condizioni di Complementarietà.
- Il Metodo del Simplesso Duale, ad ogni iterazione, soddisfa:
  - L'ammissibilità duale della soluzione: $\mathbf{wa}_j - c_j \leq 0$ per ogni j;
  - Le Condizioni di Complementarietà.
- Le Condizioni di Complementarietà sono soddisfatte perché le variabili x_j che sono in base hanno $\mathbf{wa}_j - c_j = 0$, mentre quelle non in base hanno valore nullo ($x_j = 0$).

	z			$\mathbf{x_B}$					$\mathbf{x_N}$			RHS
z	1	0	…	0	…	0	$\mathbf{wa}_{m+1} - c_{m+1}$	…	$\mathbf{wa}_{m+j} - c_{m+j}$	…	$\mathbf{wa}_n - c_n$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
	0	1	…	0	…	0	y_1^{m+1}	…	y_1^j	…	y_1^n	$\bar{b}_1$
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$\mathbf{x_B}$	0	0	…	1	…	0	y_i^{m+1}	…	y_i^j	…	y_i^n	$\bar{b}_i$
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	0	0	…	0	…	1	y_m^{m+1}	…	y_m^j	…	y_m^n	$\bar{b}_m$

Il Metodo del Simplesso Duale (2)

- Quando applichiamo il Simplesso Duale dobbiamo avere che tutti vincoli duali siano soddisfatti, quindi che $\mathbf{wa}_j - c_j \leq 0$ per ogni j.
- Se tutte le variabili sono non negative la soluzione è OTTIMA.
- Se invece almeno una variabile in base ha valore negativo (i.e., esiste almeno un r tale che $\bar{b}_r < 0$) allora dobbiamo farla diventare maggiore o uguale a zero.
- Se effettuiamo una operazione di pivoting sulla riga r e su una qualche colonna k tale che $y_r^k < 0$ allora nel nuovo tableau avremo $\bar{b}_r > 0$, perché $\bar{b}_r = \bar{b}_r / y_r^k > 0$).
- La colonna k deve essere scelta in modo da conservare l'ammissibilità duale: $\mathbf{wa}_j - c_j \leq 0$ per ogni j.

Il Metodo del Simplesso Duale (3)

- Quando pivoteremo sulla riga r e la colonna k la riga 0 del tableau verrà aggiornata come segue:

$$(\mathbf{wa}_j - c_j) = (\mathbf{wa}_j - c_j) - \frac{y_r^j}{y_r^k}(\mathbf{wa}_k - c_k)$$

- Per conservare l'ammissibilità duale abbiamo bisogno che:

$$(\mathbf{wa}_j - c_j) - \frac{y_r^j}{y_r^k}(\mathbf{wa}_k - c_k) \leq 0$$

Siccome $\frac{\mathbf{wa}_k - c_k}{y_r^k} \geq 0$, se $y_r^j > 0$ avremo che il valore aggionato di $\mathbf{wa}_j - c_j$ sarà sicuramente non positivo.

Il Metodo del Simplesso Duale (4)

- Invece se $y_r^j < 0$ avremo bisogno di soddisfare il seguente vincolo:

$$\frac{\mathbf{wa}_k - c_k}{y_r^k} \leq \frac{\mathbf{wa}_j - c_j}{y_r^j}$$

- Quindi per sceglire la colonna k su cui pivotare dobbiamo usare il seguente criterio del rapporto minimo:

$$\frac{\mathbf{wa}_k - c_k}{y_r^k} = \min \left\{ \frac{\mathbf{wa}_j - c_j}{y_r^j} : y_r^j < 0, j = 1, \ldots, n \right\}$$

Algoritmo del Simplesso Duale

*Step*1. Inizializzazione:
Sia $\mathbf{B}$ una base duale ammissibile: $\mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j \leq 0$.

*Step*3. Determinazione riga r:
$\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i : i = 1, \dots, m\}$.
Se $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$, allora STOP perché la soluzione è primale ammissibile e quindi *ottima*.

*Step*4. Determinazione colonna k:
Applica il rapporto minimo:

$$\frac{\mathbf{w}\mathbf{a}_k - c_k}{y_r^k} = \min\left\{\frac{\mathbf{w}\mathbf{a}_j - c_j}{y_r^j} : y_r^j < 0, j = 1, \dots, n\right\}$$

Se $y_r^j \geq 0$, per ogni $j = 1, \dots, n$, allora STOP perché il duale è illimitato e la soluzione ammissibile del primale non esiste.

Algoritmo del Simplesso Duale (2)

*Step*3. Pivoting:
Svolgi un operazione di pivoting sull'elemento (r,k).
Ritorna allo Step 2.

NOTE:

- Il valore della funzione obiettivo $z = \mathbf{c_B x_B} = \mathbf{c_B B^{-1} b}$ è un lower bound.
- Durante l'esecuzione del simplesso duale il valore della funzione obiettivo cresce in modo monotonico non decrescente, perchè: $\mathbf{c_B \bar{b}} = \mathbf{c_B \bar{b}} - \frac{\bar{b}_r}{y_r^k}(\mathbf{wa}_k - c_k)$.

Algoritmo del Simplesso Duale (3)

- Come possiamo gestire il caso in cui la base non sia duale ammissibile (i.e., esiste almeno un j per cui $\mathbf{wa}_j - c_j > 0$)?
- Possiamo aggiungere il seguente vincolo artificiale:

$$\sum_{j \in N} x_j \leq M \Longrightarrow \sum_{j \in N} x_j + x_{n+1} = M$$

  dove N è l'insieme delle variabili non base ed M è un valore positivo sufficientemente grande.
- Dopodiché si deve pivotare sulla colonna k tale che:

$$\mathbf{wa}_k - c_k = \max\{\mathbf{wa}_j - c_j : j \in N\}$$

- Se al termine del simplesso duale $x_{n+1} > 0$ la soluzione è ottima, altrimenti se $x_{n+1} = 0$ la soluzione è illimitata.

Simplesso Duale: Esempio 1

Si consideri il problema:

$$
\begin{array}{rrrrcr}
\min z_P = & 2x_1 & +3x_2 & 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & +x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq & +3 \\
 & +2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \geq & +4 \\
 & x_1 & ,\ x_2 & ,\ x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Aggiungendo le variabili di slack il problema è seguente:

$$
\begin{array}{rrrrrrcr}
\min z_P = & 2x_1 & +3x_2 & 4x_3 & & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & -3 \\
 & -2x_1 & +x_2 & -3x_3 & & +x_5 & = & -4 \\
 & x_1 & ,\ x_2 & ,\ x_3 & ,\ x_4 & ,\ x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Simplesso Duale: Esempio 1

Il primo tableau è il seguente:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-2	-3	-4	0	0	0
-1	-2	-1	1	0	-3
-2	1	-3	0	1	-4

La riga 0 contiene tutti valori $\mathbf{wa}_j - c_j \leq 0$, quindi la base corrispondente alle colonne di x_4 e x_5 è duale ammissibile e si può procedere:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-2	-3	-4	0	0	0
-1	-2	-1	1	0	-3
$\boxed{-2}$	1	-3	0	1	-4

Simplesso Duale: Esempio 1

Dopo la prima iterazione abbiamo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	-4	-1	0	-1	4
0	$\boxed{-5/2}$	1/2	1	-1/2	-1
1	-1/2	3/2	0	-1/2	2

Dopo la seconda iterazione:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	-9/5	-8/5	-1/5	28/5
0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
1	0	7/5	-1/5	-2/5	11/5

La soluzione ottima è $\mathbf{x}^* = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$ e il suo costo $z_P^* = \frac{28}{5}$.

Simplesso Duale: Esempio 2

Si consideri il problema:

$$
\begin{array}{rrrcr}
\min z_P = & -x_1 & -6x_2 & & \\
\text{s.t.} & +x_1 & +x_2 & \geq & 2 \\
 & +x_1 & +3x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & , \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Aggiungendo le variabili di slack il problema è seguente:

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
\min z_P = & -x_1 & -6x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & -2 \\
 & +x_1 & +3x_2 & & +x_4 & = & 3 \\
 & x_1 & , \quad x_2 & , \quad x_3 & , \quad x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Simplesso Duale: Esempio 2

Il primo tableau è il seguente:

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	6	0	0	0
-1	-1	1	0	-2
1	3	0	1	3

La riga 0 contiene anche valori positivi, per cui la base corrispondente alle colonne di x_3 e x_4 non è duale ammissibile e si deve aggiungere il vincolo artificiale e pivotare su $(3, 2)$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	6	0	0	0	0
-1	-1	1	0	0	-2
1	3	0	1	0	3
1	$\boxed{1}$	0	0	1	M

Simplesso Duale: Esempio 2

Il pivotaggio permette di avere una base duale ammissibile:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-5	0	0	0	-6	-6M
0	0	1	0	1	-2+M
-2	0	0	1	$\boxed{-3}$	3-3M
1	1	0	0	1	M

Dopo il pivotaggio su $(2,5)$ perché $3-3M<0$:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	0	0	-2	0	-6
$\boxed{-2/3}$	0	1	1/3	0	-1
2/3	0	0	-1/3	1	M-1
1/3	1	0	1/3	0	1

Simplesso Duale: Esempio 2

Dopo la seconda iterazione:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	-3/2	-5/2	0	-9/2
1	0	-3/2	-1/2	0	3/2
0	0	1	0	1	M-2
0	1	1/2	1/2	0	1/2

La soluzione ottima è $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e il suo costo è $z_P^* = -\frac{9}{2}$.

Si noti che la variabile di scarto del vincolo artificiale è $x_5 = M - 2$.

Riferimenti bibliografici

- M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, H.D. Sherali, "Linear Programming and Network Flows", Wiley.
- V. Chvátal, "Linear Programming", Freeman.
- L.A. Wolsey, "Integer Programming", Wiley.
- G. Cornuejols & R. Tütüncü, "Optimization Methods in Finance", Cambridge University Press.
- "AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming", scaricabile dal sito **www.ampl.com**.
- AMPL, versione limitata gratuita per studenti, scaricabile dal sito **www.ampl.com**.