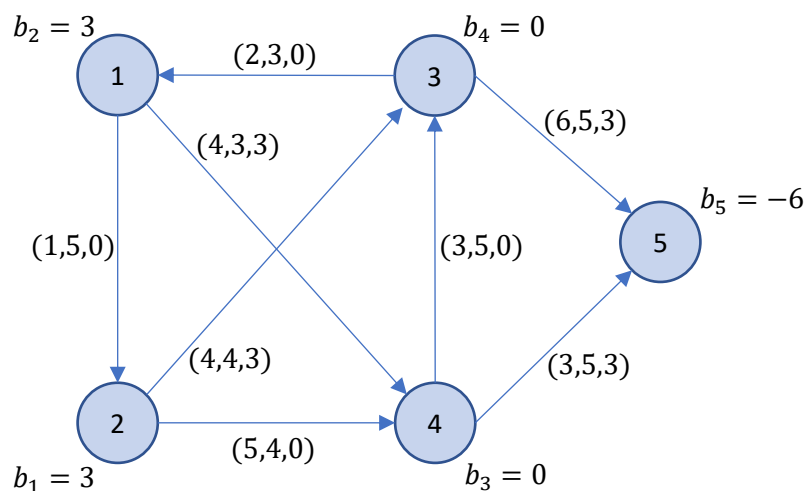


Teoria dei Grafi – Parti 1 e 2

Esercizi

Gli esercizi presentati qui di seguito hanno lo svolgimento completo, però all'esame potrebbe essere richiesto di svolgere solo uno o due iterazioni, partendo dall'inizio oppure da una soluzione intermedia fornita nel testo. Nello svolgimento sono stati inseriti dei commenti che suggeriscono le possibili varianti delle domande proposte nell'esame scritto.

1) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}) , dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente (a seconda delle domande che seguono potranno essere usati anche solo alcuni dei dati forniti).

a) Determinare il flusso massimo partendo dal flusso nullo (i.e., $x_{ij} = 0$, per ogni arco (i, j)).

Algoritmo Flusso Massimo

Grafo Iniziale Flusso Massimo

Nodo 1: $x(1,2)=0$ $x(1,4)=0$

Nodo 2: $x(2,3)=0$ $x(2,4)=0$

Nodo 3: $x(3,1)=0$ $x(3,5)=0$

Nodo 4: $x(4,3)=0$ $x(4,5)=0$

Etichetta nodo 1: $[1, 1000]$

Etichetta nodo 2: $[1, 5]$

Etichetta nodo 4: $[1, 3]$

Etichetta nodo 3: $[2, 4]$

Etichetta nodo 5: $[3, 4]$

Aumenta il flusso di 4 nel cammino: $(1, 2)$ $(2, 3)$ $(3, 5)$

Etichetta nodo 1: $[1, 1000]$

Etichetta nodo 2: $[1, 1]$

Etichetta nodo 4: $[1, 3]$

Etichetta nodo 3: $[4, 3]$

Etichetta nodo 5: $[4, 3]$

Aumenta il flusso di 3 nel cammino: $(1, 4)$ $(4, 5)$

Etichetta nodo 1: $[1, 1000]$

Etichetta nodo 2: $[1, 1]$

Etichetta nodo 4: $[2, 1]$

Etichetta nodo 3: $[4, 1]$

Etichetta nodo 5: $[4, 1]$

Aumenta il flusso di 1 nel cammino: $(1, 2)$ $(2, 4)$ $(4, 5)$

Etichetta nodo 1: [1,1000]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 4

Risultato Flusso Massimo

Nodo 1: $x(1,2)=5$ $x(1,4)=3$

Nodo 2: $x(2,3)=4$ $x(2,4)=1$

Nodo 3: $x(3,1)=0$ $x(3,5)=4$

Nodo 4: $x(4,3)=0$ $x(4,5)=4$

Flusso Massimo = 8

- b) Determinare il flusso di costo minimo con l'algoritmo Cycle Cancelling generando una soluzione ammissibile (e non utilizzando i flussi x_{ij} forniti nel testo). [Nota: in questo caso all'esame potremo chiedere di generare solo la soluzione ammissibile, oppure svolgere solo la prima iterazione oppure le prime due]

Algoritmo Flusso di Costo Minimo: senza soluzione ammissibile

Cerca Flusso Ammissibile

Etichetta nodo 6: [6,1000]

Etichetta nodo 1: [6,3]

Etichetta nodo 2: [6,3]

Etichetta nodo 4: [1,3]

Etichetta nodo 3: [2,3]

Etichetta nodo 5: [3,3]

Etichetta nodo 7: [5,3]

Aumenta il flusso di 3 nel cammino: (6,2) (2,3) (3,5) (5,7)

Etichetta nodo 6: [6,1000]

Etichetta nodo 1: [6,3]

Etichetta nodo 2: [1,3]

Etichetta nodo 4: [1,3]

Etichetta nodo 3: [2,1]

Etichetta nodo 5: [3,1]

Etichetta nodo 7: [5,1]

Aumenta il flusso di 1 nel cammino: (6,1) (1,2) (2,3) (3,5) (5,7)

Etichetta nodo 6: [6,1000]

Etichetta nodo 1: [6,2]

Etichetta nodo 2: [1,2]

Etichetta nodo 4: [1,2]

Etichetta nodo 3: [4,2]

Etichetta nodo 5: [4,2]

Etichetta nodo 7: [5,2]

Aumenta il flusso di 2 nel cammino: (6,1) (1,4) (4,5) (5,7)

Etichetta nodo 6: [6,1000]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 4

Soluzione Ammissibile Iniziale

Nodo 1: $x(1,2)=1$ $x(1,4)=2$

Nodo 2: $x(2,3)=4$ $x(2,4)=0$

Nodo 3: $x(3,1)=0$ $x(3,5)=4$

Nodo 4: $x(4,3)=0$ $x(4,5)=2$

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione: 1

Ciclo: $C(1,4)=4$ $C(4,5)=3$ $C(5,3)=-6$ $C(3,2)=-4$ $C(2,1)=-1$

Aumento flusso di: 1

Iterazione: 2

Ciclo: $C(2,4)=5$ $C(4,5)=3$ $C(5,3)=-6$ $C(3,2)=-4$

Aumento flusso di: 2

Iterazione: 3

Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 3

Risultato Flusso di Costo Minimo

Nodo 1: $x(1,2)=0$ $x(1,4)=3$

Nodo 2: $x(2,3)=1$ $x(2,4)=2$

Nodo 3: $x(3,1)=0$ $x(3,5)=1$

Nodo 4: $x(4,3)=0$ $x(4,5)=5$

Costo Soluzione = 47

- c) Determinare il flusso di costo minimo con l'algoritmo Cycle Cancelling partendo dai flussi x_{ij} forniti nel testo. [Nota: in questo caso all'esame potremo chiedere svolgere solo la prima iterazione oppure le prime due]

Algoritmo Flusso di Costo Minimo: con soluzione ammissibile

Soluzione Ammissibile Iniziale

Nodo 1: $x(1,2)=0$ $x(1,4)=3$

Nodo 2: $x(2,3)=3$ $x(2,4)=0$

Nodo 3: $x(3,1)=0$ $x(3,5)=3$

Nodo 4: $x(4,3)=0$ $x(4,5)=3$

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione: 1

Ciclo: $C(2,4)=5$ $C(4,5)=3$ $C(5,3)=-6$ $C(3,2)=-4$

Aumento flusso di: 2

Iterazione: 2

Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 2

Risultato Flusso di Costo Minimo

Nodo 1: $x(1,2)=0$ $x(1,4)=3$

Nodo 2: $x(2,3)=1$ $x(2,4)=2$

Nodo 3: $x(3,1)=0$ $x(3,5)=1$

Nodo 4: $x(4,3)=0$ $x(4,5)=5$

Costo Soluzione = 47

- d) Determinare il flusso di costo minimo con l'algoritmo Successive Shortest Path partendo dai flussi x_{ij} nulli e potenziali π_i nulli. [Nota: in questo caso all'esame potremo chiedere svolgere solo la prima iterazione oppure le prime due. In alternativa potremo fornire il flusso e i potenziali e chiedere di svolgere una o due iterazioni]

Algoritmo Flusso di Costo Minimo: Successive Shortest Path

Soluzione Iniziale

Nodo 1: $x(1,2)=0$ $x(1,4)=0$

Nodo 2: $x(2,3)=0$ $x(2,4)=0$

Nodo 3: $x(3,1)=0$ $x(3,5)=0$

Nodo 4: $x(4,3)=0$ $x(4,5)=0$

Iterazione: 1

Vertice 1 con eccesso 3

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:

Aggiornamento etichetta vertice 2: label=1, pred=1

Aggiornamento etichetta vertice 4: label=4, pred=1

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:

Aggiornamento etichetta vertice 3: label=5, pred=2

Vertice 4 non viene aggiornato

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 3 non viene aggiornato
Aggiornamento etichetta vertice 5: label=7, pred=4

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 1 non viene aggiornato
Vertice 5 non viene aggiornato

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:

Riepilogo Cammini Minimi:
Cammino da 1 a 1 (costo=0): 1
Cammino da 1 a 2 (costo=1): 1 2
Cammino da 1 a 3 (costo=5): 1 2 3
Cammino da 1 a 4 (costo=4): 1 4
Cammino da 1 a 5 (costo=7): 1 4 5

Potenziali:
pi(1) = 0
pi(2) = -1
pi(3) = -5
pi(4) = -4
pi(5) = -7

Aumenta il flusso di delta=3

Iterazione: 2

Vertice 2 con eccesso 3

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 3: label=0, pred=2
Aggiornamento etichetta vertice 4: label=2, pred=2

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 1: label=7, pred=3
Aggiornamento etichetta vertice 5: label=4, pred=3

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 1: label=2, pred=4
Vertice 3 non viene aggiornato
Aggiornamento etichetta vertice 5: label=2, pred=4

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 2 non viene aggiornato
Vertice 4 non viene aggiornato

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 4 non viene aggiornato

Riepilogo Cammini Minimi:
Cammino da 2 a 1 (costo=2): 2 4 1
Cammino da 2 a 2 (costo=0): 2
Cammino da 2 a 3 (costo=0): 2 3
Cammino da 2 a 4 (costo=2): 2 4
Cammino da 2 a 5 (costo=2): 2 4 5

Potenziali:
pi(1) = -2
pi(2) = -1
pi(3) = -5
pi(4) = -6
pi(5) = -9

Aumenta il flusso di delta=2

Iterazione: 3

Vertice 2 con eccesso 1

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 3: label=0, pred=2
Aggiornamento etichetta vertice 4: label=0, pred=2

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
 Aggiornamento etichetta vertice 1: label=5, pred=3
 Aggiornamento etichetta vertice 5: label=2, pred=3

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:
 Aggiornamento etichetta vertice 1: label=0, pred=4
 Vertice 2 non viene aggiornato
 Vertice 3 non viene aggiornato
 Vertice 5 non viene aggiornato

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:
 Vertice 2 non viene aggiornato
 Vertice 4 non viene aggiornato

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:
 Vertice 4 non viene aggiornato

Riepilogo Cammini Minimi:
 Cammino da 2 a 1 (costo=0): 2 4 1
 Cammino da 2 a 2 (costo=0): 2
 Cammino da 2 a 3 (costo=0): 2 3
 Cammino da 2 a 4 (costo=0): 2 4
 Cammino da 2 a 5 (costo=2): 2 3 5

Potenziali:
 $\pi(1) = -2$
 $\pi(2) = -1$
 $\pi(3) = -5$
 $\pi(4) = -6$
 $\pi(5) = -11$

Aumenta il flusso di $\Delta=1$

Numero Iterazioni: 3

Risultato Flusso di Costo Minimo
 Nodo 1: $x(1,2)=0$ $x(1,4)=3$
 Nodo 2: $x(2,3)=1$ $x(2,4)=2$
 Nodo 3: $x(3,1)=0$ $x(3,5)=1$
 Nodo 4: $x(4,3)=0$ $x(4,5)=5$

Costo Soluzione = 47

- e) Determinare i cammini di costo minimo dal vertice 1 a tutti gli altri vertici utilizzando l'algoritmo di Dijkstra e i costi c_{ij} .

Algoritmo Cammini di Costo Minimo: Dijkstra

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:
 Aggiornamento etichetta vertice 2: label=1, pred=1
 Aggiornamento etichetta vertice 4: label=4, pred=1

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:
 Aggiornamento etichetta vertice 3: label=5, pred=2
 Vertice 4 non viene aggiornato

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:
 Vertice 3 non viene aggiornato
 Aggiornamento etichetta vertice 5: label=7, pred=4

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
 Vertice 1 non viene aggiornato
 Vertice 5 non viene aggiornato

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:
 Non ha successori

Riepilogo Cammini Minimi:
 Cammino da 1 a 2 (costo=1): 1 2
 Cammino da 1 a 3 (costo=5): 1 2 3
 Cammino da 1 a 4 (costo=4): 1 4
 Cammino da 1 a 5 (costo=7): 1 4 5

- f) Determinare i cammini di costo minimo dal vertice 1 a tutti gli altri vertici utilizzando l'algoritmo di Bellman-Ford e i costi c_{ij} .

Algoritmo Cammini di Costo Minimo: Bellman-Ford

Iterazione 1:

L'arco (1,2) viola la condizione: $\text{Label}[2]=1000 > \text{Label}[1]=0 + \text{Costo}(1,2)=1$
 $\Rightarrow \text{Label}[2]=1$ e $\text{pred}[2]=0$
 L'arco (2,3) viola la condizione: $\text{Label}[3]=1000 > \text{Label}[2]=1 + \text{Costo}(2,3)=4$
 $\Rightarrow \text{Label}[3]=5$ e $\text{pred}[3]=1$
 L'arco (1,4) viola la condizione: $\text{Label}[4]=1000 > \text{Label}[1]=0 + \text{Costo}(1,4)=4$
 $\Rightarrow \text{Label}[4]=4$ e $\text{pred}[4]=0$
 L'arco (3,5) viola la condizione: $\text{Label}[5]=1000 > \text{Label}[3]=5 + \text{Costo}(3,5)=6$
 $\Rightarrow \text{Label}[5]=11$ e $\text{pred}[5]=2$
 L'arco (4,5) viola la condizione: $\text{Label}[5]=11 > \text{Label}[4]=4 + \text{Costo}(4,5)=3$
 $\Rightarrow \text{Label}[5]=7$ e $\text{pred}[5]=3$

Iterazione 2:

Non ci sono violazioni

Riepilogo Cammini Minimi:

Cammino da 1 a 2 (costo=1): 1 2
 Cammino da 1 a 3 (costo=5): 1 2 3
 Cammino da 1 a 4 (costo=4): 1 4
 Cammino da 1 a 5 (costo=7): 1 4 5

- g) Determinare i cammini di costo minimo per tutte le coppie di vertici utilizzando i costi c_{ij} .
[Nota: in questo caso all'esame potremo chiedere svolgere solo la prima iterazione oppure le prime due.]

Algoritmo Cammini di Costo Minimo: Floyd-Warshall

Iterazione 0:

Matrice u_{ij} :

0	1	1000	4	1000
1000	0	4	5	1000
2	3	0	6	6
1000	1000	3	0	3
1000	1000	1000	1000	0

Matrice Pred_{ij} :

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	1	3	1	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5

Iterazione 1:

Matrice u_{ij} :

0	1	5	4	1000
1000	0	4	5	1000
2	3	0	6	6
1000	1000	3	0	3
1000	1000	1000	1000	0

Matrice Pred_{ij} :

1	1	2	1	1
2	2	2	2	2
3	1	3	1	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5

Iterazione 2:

Matrice u_{ij} :

0	1	5	4	11
6	0	4	5	10
2	3	0	6	6
5	6	3	0	3
1000	1000	1000	1000	0

Matrice Pred_{ij}:

1	1	2	1	3
3	2	2	2	3
3	1	3	1	3
3	1	4	4	4
5	5	5	5	5

Iterazione 3:

Matrice u_{ij}:

0	1	5	4	7
6	0	4	5	8
2	3	0	6	6
5	6	3	0	3
1000	1000	1000	1000	0

Matrice Pred_{ij}:

1	1	2	1	4
3	2	2	2	4
3	1	3	1	3
3	1	4	4	4
5	5	5	5	5

Iterazione 4:

Matrice u_{ij}:

0	1	5	4	7
6	0	4	5	8
2	3	0	6	6
5	6	3	0	3
1000	1000	1000	1000	0

Matrice Pred_{ij}:

1	1	2	1	4
3	2	2	2	4
3	1	3	1	3
3	1	4	4	4
5	5	5	5	5

- h) Determinare l'albero di copertura di costo minimo sostituendo gli archi (i, j) con i lati $\{i, j\}$ e utilizzando i costi c_{ij} .

Alberi di Copertura di Costo Minimo: Algoritmo Kruskal

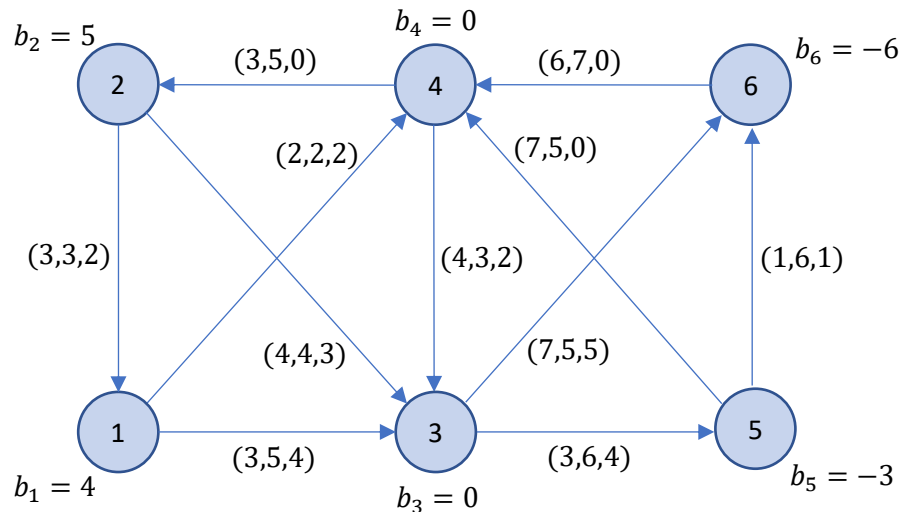
Selezione dei lati:

- 1) Inserimento del lato $\{1, 2\}$
 - 2) Inserimento del lato $\{3, 1\}$
 - 3) Inserimento del lato $\{4, 3\}$
 - 4) Inserimento del lato $\{4, 5\}$
- Costo = 9

Alberi di Copertura di Costo Minimo: Algoritmo Prim

- 1) Inserimento del lato $\{1, 2\}$
 - 2) Inserimento del lato $\{1, 3\}$
 - 3) Inserimento del lato $\{3, 4\}$
 - 4) Inserimento del lato $\{4, 5\}$
- Costo = 9

2) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}) , dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso massimo partendo dal flusso nullo (i.e., $x_{ij} = 0$, per ogni arco (i,j)).

Algoritmo Flusso Massimo

Grafo Iniziale Flusso Massimo

Nodo 1: $x(1,3)=0$ $x(1,4)=0$

Nodo 2: $x(2,1)=0$ $x(2,3)=0$

Nodo 3: $x(3,5)=0$ $x(3,6)=0$

Nodo 4: $x(4,2)=0$ $x(4,3)=0$

Nodo 5: $x(5,4)=0$ $x(5,6)=0$

Etichetta nodo 1: [1,1000]

Etichetta nodo 3: [1,5]

Etichetta nodo 4: [1,2]

Etichetta nodo 5: [3,5]

Etichetta nodo 6: [3,5]

Etichetta nodo 2: [4,2]

Aumenta il flusso di 5 nel cammino: (1,3) (3,6)

Etichetta nodo 1: [1,1000]

Etichetta nodo 4: [1,2]

Etichetta nodo 2: [4,2]

Etichetta nodo 3: [4,2]

Etichetta nodo 5: [3,2]

Etichetta nodo 6: [5,2]

Aumenta il flusso di 2 nel cammino: (1,4) (4,3) (3,5) (5,6)

Etichetta nodo 1: [1,1000]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 3

Risultato Flusso Massimo

Nodo 1: $x(1,3)=5$ $x(1,4)=2$

Nodo 2: $x(2,1)=0$ $x(2,3)=0$

Nodo 3: $x(3,5)=2$ $x(3,6)=5$

Nodo 4: $x(4,2)=0$ $x(4,3)=2$

Nodo 5: $x(5,4)=0$ $x(5,6)=2$

Flusso Massimo = 7

b) Determinare il flusso di costo minimo con l'algoritmo Cycle Cancelling generando una soluzione ammissibile (e non utilizzando i flussi x_{ij} forniti nel testo). [Nota: in questo caso

all'esame potremo chiedere di generare solo la soluzione ammissibile, oppure svolgere solo la prima iterazione oppure le prime due]

Algoritmo Flusso di Costo Minimo: senza soluzione ammissibile

Cerca Flusso Ammissibile

Etichetta nodo 7: [7,1000]

Etichetta nodo 1: [7,4]

Etichetta nodo 2: [7,5]

Etichetta nodo 3: [1,4]

Etichetta nodo 4: [1,2]

Etichetta nodo 5: [3,4]

Etichetta nodo 6: [3,4]

Etichetta nodo 8: [5,3]

Aumenta il flusso di 3 nel cammino: (7,1) (1,3) (3,5) (5,8)

Etichetta nodo 7: [7,1000]

Etichetta nodo 1: [7,1]

Etichetta nodo 2: [7,5]

Etichetta nodo 3: [1,1]

Etichetta nodo 4: [1,1]

Etichetta nodo 5: [3,1]

Etichetta nodo 6: [3,1]

Etichetta nodo 8: [6,1]

Aumenta il flusso di 1 nel cammino: (7,1) (1,3) (3,6) (6,8)

Etichetta nodo 7: [7,1000]

Etichetta nodo 2: [7,5]

Etichetta nodo 1: [2,3]

Etichetta nodo 3: [2,4]

Etichetta nodo 4: [1,2]

Etichetta nodo 5: [3,3]

Etichetta nodo 6: [3,4]

Etichetta nodo 8: [6,4]

Aumenta il flusso di 4 nel cammino: (7,2) (2,3) (3,6) (6,8)

Etichetta nodo 7: [7,1000]

Etichetta nodo 2: [7,1]

Etichetta nodo 1: [2,1]

Etichetta nodo 3: [1,1]

Etichetta nodo 4: [1,1]

Etichetta nodo 5: [3,1]

Etichetta nodo 6: [5,1]

Etichetta nodo 8: [6,1]

Aumenta il flusso di 1 nel cammino: (7,2) (2,1) (1,3) (3,5) (5,6) (6,8)

Etichetta nodo 7: [7,1000]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 5

Soluzione Ammissibile Iniziale

Nodo 1: $x(1,3)=5$ $x(1,4)=0$

Nodo 2: $x(2,1)=1$ $x(2,3)=4$

Nodo 3: $x(3,5)=4$ $x(3,6)=5$

Nodo 4: $x(4,2)=0$ $x(4,3)=0$

Nodo 5: $x(5,4)=0$ $x(5,6)=1$

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione: 1

Ciclo: $C(3,5)=3$ $C(5,6)=1$ $C(6,3)=-7$

Aumento flusso di: 2

Iterazione: 2

Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 2

Risultato Flusso di Costo Minimo

Nodo 1: $x(1,3)=5$ $x(1,4)=0$

Nodo 2: $x(2,1)=1$ $x(2,3)=4$

Nodo 3: $x(3,5)=6$ $x(3,6)=3$

Nodo 4: $x(4,2)=0$ $x(4,3)=0$

Nodo 5: $x(5,4)=0$ $x(5,6)=3$

Costo Soluzione = 76

- c) Determinare il flusso di costo minimo con l'algoritmo Cycle Cancelling partendo dai flussi x_{ij} forniti nel testo. [Nota: in questo caso all'esame potremo chiedere svolgere solo la prima iterazione oppure le prime due]

Algoritmo Flusso di Costo Minimo: con soluzione ammissibile

Soluzione Ammissibile Iniziale

Nodo 1: $x(1,3)=4$ $x(1,4)=2$

Nodo 2: $x(2,1)=2$ $x(2,3)=3$

Nodo 3: $x(3,5)=4$ $x(3,6)=5$

Nodo 4: $x(4,2)=0$ $x(4,3)=2$

Nodo 5: $x(5,4)=0$ $x(5,6)=1$

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione: 1

Ciclo: $C(1,2)=-3$ $C(2,3)=4$ $C(3,1)=-3$

Aumento flusso di: 1

Iterazione: 2

Ciclo: $C(1,3)=3$ $C(3,4)=-4$ $C(4,1)=-2$

Aumento flusso di: 2

Iterazione: 3

Ciclo: $C(3,5)=3$ $C(5,6)=1$ $C(6,3)=-7$

Aumento flusso di: 2

Iterazione: 4

Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 4

Risultato Flusso di Costo Minimo

Nodo 1: $x(1,3)=5$ $x(1,4)=0$

Nodo 2: $x(2,1)=1$ $x(2,3)=4$

Nodo 3: $x(3,5)=6$ $x(3,6)=3$

Nodo 4: $x(4,2)=0$ $x(4,3)=0$

Nodo 5: $x(5,4)=0$ $x(5,6)=3$

Costo Soluzione = 76

- d) Determinare il flusso di costo minimo con l'algoritmo Successive Shortest Path partendo dai flussi x_{ij} nulli e potenziali π_i nulli. [Nota: in questo caso all'esame potremo chiedere svolgere solo la prima iterazione oppure le prime due. In alternativa potremo fornire il flusso e i potenziali e chiedere di svolgere una o due iterazioni]

Algoritmo Flusso di Costo Minimo: Successive Shortest Path

Soluzione Iniziale

Nodo 1: $x(1,3)=0$ $x(1,4)=0$

Nodo 2: $x(2,1)=0$ $x(2,3)=0$

Nodo 3: $x(3,5)=0$ $x(3,6)=0$

Nodo 4: $x(4,2)=0$ $x(4,3)=0$

Nodo 5: $x(5,4)=0$ $x(5,6)=0$

Iterazione: 1

Vertice 1 con eccesso 4

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:

Aggiornamento etichetta vertice 3: label=3, pred=1

Aggiornamento etichetta vertice 4: label=2, pred=1

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:

Aggiornamento etichetta vertice 2: label=5, pred=4

Vertice 3 non viene aggiornato

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 5: label=6, pred=3
Aggiornamento etichetta vertice 6: label=10, pred=3

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 1 non viene aggiornato
Vertice 3 non viene aggiornato

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 4 non viene aggiornato
Aggiornamento etichetta vertice 6: label=7, pred=5

Il vertice 6 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 4 non viene aggiornato

Riepilogo Cammini Minimi:
Cammino da 1 a 1 (costo=0): 1
Cammino da 1 a 2 (costo=5): 1 4 2
Cammino da 1 a 3 (costo=3): 1 3
Cammino da 1 a 4 (costo=2): 1 4
Cammino da 1 a 5 (costo=6): 1 3 5
Cammino da 1 a 6 (costo=7): 1 3 5 6

Potenziali:
pi(1) = 0
pi(2) = -5
pi(3) = -3
pi(4) = -2
pi(5) = -6
pi(6) = -7

Aumenta il flusso di delta=3

Iterazione: 2

Vertice 1 con eccesso 1

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 3: label=0, pred=1
Aggiornamento etichetta vertice 4: label=0, pred=1

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 1 non viene aggiornato
Aggiornamento etichetta vertice 5: label=0, pred=3
Aggiornamento etichetta vertice 6: label=3, pred=3

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 2: label=0, pred=4
Vertice 3 non viene aggiornato

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 1 non viene aggiornato
Vertice 3 non viene aggiornato

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 3 non viene aggiornato
Vertice 4 non viene aggiornato
Aggiornamento etichetta vertice 6: label=0, pred=5

Il vertice 6 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 4 non viene aggiornato

Riepilogo Cammini Minimi:
Cammino da 1 a 1 (costo=0): 1
Cammino da 1 a 2 (costo=0): 1 4 2
Cammino da 1 a 3 (costo=0): 1 3
Cammino da 1 a 4 (costo=0): 1 4
Cammino da 1 a 5 (costo=0): 1 3 5
Cammino da 1 a 6 (costo=0): 1 3 5 6

Potenziali:
pi(1) = 0
pi(2) = -5
pi(3) = -3

pi(4) = -2
pi(5) = -6
pi(6) = -7

Aumenta il flusso di delta=1

Iterazione: 3

Vertice 2 con eccesso 5

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 1: label=8, pred=2
Aggiornamento etichetta vertice 3: label=6, pred=2

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 1: label=6, pred=3
Aggiornamento etichetta vertice 5: label=6, pred=3
Aggiornamento etichetta vertice 6: label=9, pred=3

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 3 non viene aggiornato
Aggiornamento etichetta vertice 4: label=6, pred=1

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 2 non viene aggiornato
Vertice 3 non viene aggiornato

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 3 non viene aggiornato
Vertice 4 non viene aggiornato
Aggiornamento etichetta vertice 6: label=6, pred=5

Il vertice 6 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 4 non viene aggiornato
Vertice 5 non viene aggiornato

Riepilogo Cammini Minimi:

Cammino da 2 a 1 (costo=6): 2 3 1
Cammino da 2 a 2 (costo=0): 2
Cammino da 2 a 3 (costo=6): 2 3
Cammino da 2 a 4 (costo=6): 2 3 1 4
Cammino da 2 a 5 (costo=6): 2 3 5
Cammino da 2 a 6 (costo=6): 2 3 5 6

Potenenziali:

pi(1) = -6
pi(2) = -5
pi(3) = -9
pi(4) = -8
pi(5) = -12
pi(6) = -13

Aumenta il flusso di delta=2

Iterazione: 4

Vertice 2 con eccesso 3

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 1: label=2, pred=2
Aggiornamento etichetta vertice 3: label=0, pred=2

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
Aggiornamento etichetta vertice 1: label=0, pred=3
Vertice 2 non viene aggiornato
Aggiornamento etichetta vertice 5: label=1000, pred=3
Aggiornamento etichetta vertice 6: label=3, pred=3

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 3 non viene aggiornato
Aggiornamento etichetta vertice 4: label=0, pred=1

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:
Vertice 2 non viene aggiornato

```

Vertice 3 non viene aggiornato

Il vertice 6 diventa permanente e viene espanso:
  Vertice 4 non viene aggiornato
  Aggiornamento etichetta vertice 5: label=3, pred=6

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:
  Vertice 3 non viene aggiornato
  Vertice 4 non viene aggiornato
  Vertice 6 non viene aggiornato

Riepilogo Cammini Minimi:
  Cammino da 2 a 1 (costo=0):  2  3  1
  Cammino da 2 a 2 (costo=0):  2
  Cammino da 2 a 3 (costo=0):  2  3
  Cammino da 2 a 4 (costo=0):  2  3  1  4
  Cammino da 2 a 5 (costo=3):  2  3  6  5
  Cammino da 2 a 6 (costo=3):  2  3  6

Potenziali:
pi(1) = -6
pi(2) = -5
pi(3) = -9
pi(4) = -8
pi(5) = -15
pi(6) = -16

Aumenta il flusso di delta=2

Iterazione: 5

Vertice 2 con eccesso 1

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:
  Aggiornamento etichetta vertice 1: label=2, pred=2
  Aggiornamento etichetta vertice 3: label=1000, pred=2

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:
  Aggiornamento etichetta vertice 3: label=2, pred=1
  Aggiornamento etichetta vertice 4: label=2, pred=1

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
  Vertice 1 non viene aggiornato
  Vertice 2 non viene aggiornato
  Aggiornamento etichetta vertice 5: label=1002, pred=3
  Aggiornamento etichetta vertice 6: label=2, pred=3

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:
  Vertice 2 non viene aggiornato
  Vertice 3 non viene aggiornato

Il vertice 6 diventa permanente e viene espanso:
  Vertice 3 non viene aggiornato
  Vertice 4 non viene aggiornato
  Aggiornamento etichetta vertice 5: label=2, pred=6

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:
  Vertice 3 non viene aggiornato
  Vertice 4 non viene aggiornato
  Vertice 6 non viene aggiornato

Riepilogo Cammini Minimi:
  Cammino da 2 a 1 (costo=2):  2  1
  Cammino da 2 a 2 (costo=0):  2
  Cammino da 2 a 3 (costo=2):  2  1  3
  Cammino da 2 a 4 (costo=2):  2  1  4
  Cammino da 2 a 5 (costo=2):  2  1  3  6  5
  Cammino da 2 a 6 (costo=2):  2  1  3  6

Potenziali:
pi(1) = -8
pi(2) = -5
pi(3) = -11
pi(4) = -10

```

```

pi(5) = -17
pi(6) = -18

Aumenta il flusso di delta=1

Numero Iterazioni: 5

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,3)=5 x(1,4)=0
Nodo 2: x(2,1)=1 x(2,3)=4
Nodo 3: x(3,5)=6 x(3,6)=3
Nodo 4: x(4,2)=0 x(4,3)=0
Nodo 5: x(5,4)=0 x(5,6)=3

Costo Soluzione = 76

```

- e) Determinare i cammini di costo minimo dal vertice 1 a tutti gli altri vertici utilizzando l'algoritmo di Dijkstra e i costi c_{ij} .

```

Algoritmo Cammini di Costo Minimo: Dijkstra

Il vertice 1 diventa permanente e viene espanso:
  Aggiornamento etichetta vertice 3: label=3, pred=1
  Aggiornamento etichetta vertice 4: label=2, pred=1

Il vertice 4 diventa permanente e viene espanso:
  Aggiornamento etichetta vertice 2: label=5, pred=4
  Vertice 3 non viene aggiornato

Il vertice 3 diventa permanente e viene espanso:
  Aggiornamento etichetta vertice 5: label=6, pred=3
  Aggiornamento etichetta vertice 6: label=10, pred=3

Il vertice 2 diventa permanente e viene espanso:
  Vertice 1 non viene aggiornato
  Vertice 3 non viene aggiornato

Il vertice 5 diventa permanente e viene espanso:
  Vertice 4 non viene aggiornato
  Aggiornamento etichetta vertice 6: label=7, pred=5

Il vertice 6 diventa permanente e viene espanso:
  Vertice 4 non viene aggiornato

Riepilogo Cammini Minimi:
Cammino da 1 a 2 (costo=5):  1  4  2
Cammino da 1 a 3 (costo=3):  1  3
Cammino da 1 a 4 (costo=2):  1  4
Cammino da 1 a 5 (costo=6):  1  3  5
Cammino da 1 a 6 (costo=7):  1  3  5  6

```

- f) Determinare i cammini di costo minimo dal vertice 1 a tutti gli altri vertici utilizzando l'algoritmo di Bellman-Ford e i costi c_{ij} .

```

Algoritmo Cammini di Costo Minimo: Bellman-Ford

Iterazione 1:
  L'arco (1,3) viola la condizione: Label[3]=1000 > Label[1]=0 + Costo(1,3)=3
    ==> Label[3]=3 e pred[3]=0
  L'arco (1,4) viola la condizione: Label[4]=1000 > Label[1]=0 + Costo(1,4)=2
    ==> Label[4]=2 e pred[4]=0
  L'arco (3,5) viola la condizione: Label[5]=1000 > Label[3]=3 + Costo(3,5)=3
    ==> Label[5]=6 e pred[5]=2
  L'arco (3,6) viola la condizione: Label[6]=1000 > Label[3]=3 + Costo(3,6)=7
    ==> Label[6]=10 e pred[6]=2
  L'arco (5,6) viola la condizione: Label[6]=10 > Label[5]=6 + Costo(5,6)=1
    ==> Label[6]=7 e pred[6]=4

Iterazione 2:
  L'arco (4,2) viola la condizione: Label[2]=1000 > Label[4]=2 + Costo(4,2)=3
    ==> Label[2]=5 e pred[2]=3

```

```

Iterazione 3:
.. Non ci sono violazioni
Riepilogo Cammini Minimi:
  Cammino da 1 a 2 (costo=5):  1  4  2
  Cammino da 1 a 3 (costo=3):  1  3
  Cammino da 1 a 4 (costo=2):  1  4
  Cammino da 1 a 5 (costo=6):  1  3  5
  Cammino da 1 a 6 (costo=7):  1  3  5  6

```

- g) Determinare i cammini di costo minimo per tutte le coppie di vertici utilizzando i costi c_{ij} .
[Nota: in questo caso all'esame potremo chiedere svolgere solo la prima iterazione oppure le prime due.]

Algoritmo Cammini di Costo Minimo: Floyd-Warshall

Iterazione 0:

Matrice u_{ij} :

0	1000	3	2	1000	1000
3	0	4	5	1000	1000
1000	1000	0	1000	3	7
1000	3	4	0	1000	1000
1000	1000	1000	7	0	1
1000	1000	1000	6	1000	0

Matrice $Pred_{ij}$:

1	1	1	1	1	1
2	2	2	1	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6

Iterazione 1:

Matrice u_{ij} :

0	1000	3	2	1000	1000
3	0	4	5	1000	1000
1000	1000	0	1000	3	7
6	3	4	0	1000	1000
1000	1000	1000	7	0	1
1000	1000	1000	6	1000	0

Matrice $Pred_{ij}$:

1	1	1	1	1	1
2	2	2	1	2	2
3	3	3	3	3	3
2	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6

Iterazione 2:

Matrice u_{ij} :

0	1000	3	2	6	10
3	0	4	5	7	11
1000	1000	0	1000	3	7
6	3	4	0	7	11
1000	1000	1000	7	0	1
1000	1000	1000	6	1000	0

Matrice $Pred_{ij}$:

1	1	1	1	3	3
2	2	2	1	3	3
3	3	3	3	3	3
2	4	4	4	3	3
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6

Iterazione 3:

Matrice u_{ij} :

0	5	3	2	6	10
3	0	4	5	7	11
1000	1000	0	1000	3	7
6	3	4	0	7	11
13	10	11	7	0	1
12	9	10	6	13	0

Matrice $Pred_{ij}$:

1	4	1	1	3	3
2	2	2	1	3	3
3	3	3	3	3	3
2	4	4	4	3	3
2	4	4	5	5	5
2	4	4	6	3	6

Iterazione 4:

Matrice u_{ij} :

0	5	3	2	6	7
3	0	4	5	7	8
16	13	0	10	3	4
6	3	4	0	7	8
13	10	11	7	0	1
12	9	10	6	13	0

Matrice $Pred_{ij}$:

1	4	1	1	3	5
2	2	2	1	3	5
2	4	3	5	3	5
2	4	4	4	3	5
2	4	4	5	5	5
2	4	4	6	3	6

Iterazione 5:

Matrice u_{ij} :

0	5	3	2	6	7
3	0	4	5	7	8
16	13	0	10	3	4
6	3	4	0	7	8
13	10	11	7	0	1
12	9	10	6	13	0

Matrice $Pred_{ij}$:

1	4	1	1	3	5
2	2	2	1	3	5
2	4	3	5	3	5
2	4	4	4	3	5
2	4	4	5	5	5
2	4	4	6	3	6

- h) Determinare l'albero di copertura di costo minimo sostituendo gli archi (i, j) con i lati $\{i, j\}$ e utilizzando i costi c_{ij} .

Alberi di Copertura di Costo Minimo: Algoritmo Kruskal

Selezione dei lati:

- 1) Inserimento del lato $\{5, 6\}$
- 2) Inserimento del lato $\{1, 4\}$
- 3) Inserimento del lato $\{1, 3\}$
- 4) Inserimento del lato $\{2, 1\}$
- 5) Inserimento del lato $\{3, 5\}$

Costo = 12

Alberi di Copertura di Costo Minimo: Algoritmo Prim

- 1) Inserimento del lato $\{1, 4\}$
- 2) Inserimento del lato $\{1, 2\}$
- 3) Inserimento del lato $\{1, 3\}$
- 4) Inserimento del lato $\{3, 5\}$
- 5) Inserimento del lato $\{5, 6\}$

Costo = 12