Esame Ricerca Operativa

6 giugno 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____Matricola:______________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri un insieme di n oggetti di peso w_i quintali e di volume v_i metri cubi, $i = 1, \dots, n$. Ad ogni oggetto i è associato un indice di urgenza u_i. Gli oggetti devono essere caricati in un insieme di m container che hanno una capacità in peso di W_j quintali e in volume di V_j metri cubi, $j = 1, \dots, m$.
I container disponibili potrebbero non essere sufficienti per contenere tutti gli oggetti, per cui si vuole decidere quali oggetti caricare, specificando in quali container, in modo da massimizzare la somma degli indici di urgenza u_i degli oggetti caricati e rispettare i vincoli di capacità in peso e volume di ciascun container.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)
Per formulare matematicamente il problema definiamo le variabili decisionali binarie x_{ij}, ciascuna delle quali avrà valore 1 se l'oggetto i è caricato nel container j, altrimenti avrà valore 0. Un possibile modello matematico è il seguente:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_i x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le 1, \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} \le W_j, \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij} \le V_j, \qquad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m$$

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \;\; x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4 \\ \quad\;\; x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6 \\ \quad\;\; x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      1.000     -2.000     -4.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      4.000|      1.000      1.000      3.000      1.000      0.000
      6.000|      1.000      2.000     -1.000      0.000     -1.000

Tableau Fase 1: iniziale
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      4.000|      1.000      1.000      3.000      1.000      0.000      0.000
      6.000|      1.000      2.000     -1.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau Fase 1: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      6.000|      1.000      2.000     -1.000      0.000     -1.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      4.000|      1.000      1.000      3.000      1.000      0.000      0.000
      6.000|      1.000      2.000     -1.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      1.000|      0.500      0.000      3.500      1.000      0.500     -0.500
      3.000|      0.500      1.000     -0.500      0.000     -0.500      0.500

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      1.000|      0.500      0.000      3.500      1.000      0.500     -0.500
      3.000|      0.500      1.000     -0.500      0.000     -0.500      0.500

Tableau Fase 2: iniziale
      0.000|      1.000     -2.000     -4.000     -0.000     -0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      1.000|      0.500      0.000      3.500      1.000      0.500
      3.000|      0.500      1.000     -0.500      0.000     -0.500

Tableau Fase 2: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      6.000|      2.000      0.000     -5.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      1.000|      0.500      0.000      3.500      1.000      0.500
      3.000|      0.500      1.000     -0.500      0.000     -0.500

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)
      2.000|      0.000      0.000    -19.000     -4.000     -3.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|      1.000      0.000      7.000      2.000      1.000
      2.000|      0.000      1.000     -4.000     -1.000     -1.000

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 2
      2.000|      0.000      0.000    -19.000     -4.000     -3.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|      1.000      0.000      7.000      2.000      1.000
      2.000|      0.000      1.000     -4.000     -1.000     -1.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     2.0000

X(   1):     2.0000
X(   2):     2.0000
```

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

Il duale **D** del problema **P** è il seguente:

$$
(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} \max z = 4w_1 + 6w_2 \\ \quad \text{s.t.} \;\; w_1 + w_2 \le -1 \\ \qquad\quad w_1 + 2w_2 \le 2 \\ \qquad\quad 3w_1 - w_2 \le 4 \\ \qquad\quad w_1 \le 0, w_2 \ge 0 \end{cases}
$$

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 - x_2 + x_3 \\ \quad \text{s.t.} \;\; x_1 - x_2 - x_3 \ge 2 \\ \qquad\quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 1 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = (3,0,1)$ è ottima per il problema **P**. (6 punti)

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = (3,0,1)$:

$$
\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 1 = 2 \\ 3 - 2 = 1 \end{cases}
$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il duale del problema **P** è il seguente:

$$
(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} \max z = 2w_1 + w_2 \\ \quad \text{s.t.} \;\; w_1 + w_2 \le -1 \\ \qquad\quad -w_1 + 2w_2 \le -1 \\ \qquad\quad -w_1 - 2w_2 \le +1 \\ \qquad\quad w_1 \ge 0, w_2 \le 0 \end{cases}
$$

I vincoli del primale sono tutti saturi, quindi per gli scarti complementari le variabili duali possono anche non essere nulle.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 3$ e $x_3 = 1$, allora il primo e il terzo vincolo duale devono essere saturi:

$$
\begin{cases} w_1 + w_2 = -1 \\ -w_1 - 2w_2 = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = -1 - w_1 \\ -w_1 - 2(-1 - w_1) = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = -1 - w_1 \\ -w_1 + 2 + 2w_1 = +1 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} w_2 = -1 - w_1 \\ w_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = -1 + 1 \\ w_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = 0 \\ w_1 = -1 \end{cases}
$$

Visto che <u>la soluzione duale NON rispetta il vincolo di segno</u> per la variabile duale w_1, allora la soluzione $\mathbf{x} = (3,0,1)$ NON è ottima.

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \quad \text{s.t.} \;\; 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 3 \\ \qquad\quad x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \;\text{ intere} \end{cases}
$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso abbiamo ottenuto il seguente tableau ottimo:

```
Tableau ottimo
      1.200|      0.000      0.000     -7.000     -0.800     -0.600
-----------+------------------------------------------------------
      1.800|      0.000      1.000     -1.000     -0.200     -0.400
      2.400|      1.000      0.000      1.000      0.400     -0.200
```

```
Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:      1.2000

X(   1):      2.4000
X(   2):      1.8000
```

a) Definire il taglio di Gomory relativo alla variabile x_1 e dopo averlo aggiunto al Tableau riottimizzare (cioè, dopo aver aggiunto il Taglio di Gomory al tableau si chiede di trovare la nuova soluzione ottima). (6 punti).

Il Taglio di Gomory relativo alla variabile x_1 deve essere calcolato rispetto alla riga 2 del tableau, ed è il seguente:

$$-\frac{2}{5}x_4-\frac{4}{5}x_5\leq-\frac{2}{5}$$

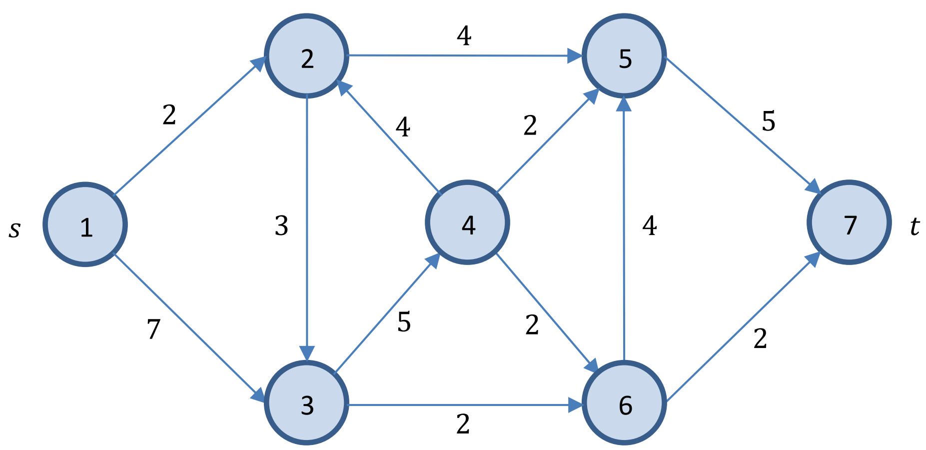
Quindi, possiamo aggiungere al tableau la seguente riga:

$$-\frac{2}{5}x_4-\frac{4}{5}x_5+x_6=-\frac{2}{5}$$

Dopodiché, basta riottimizzare con il duale:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo.
      1.200|      0.000      0.000     -7.000     -0.800     -0.600      0.000
-----------+-------------------------------------------------------------------
      1.800|     -0.000      1.000     -1.000     -0.200     -0.400      0.000
      2.400|      1.000      0.000      1.000      0.400     -0.200      0.000
     -0.400|     -0.000     -0.000     -0.000     -0.400     -0.800      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (4,5)
      1.500|      0.000      0.000     -7.000     -0.500      0.000     -0.750
-----------+-------------------------------------------------------------------
      2.000|      0.000      1.000     -1.000      0.000      0.000     -0.500
      2.500|      1.000      0.000      1.000      0.500      0.000     -0.250
      0.500|      0.000      0.000      0.000      0.500      1.000     -1.250

Tableau ottimo?
      1.500|      0.000      0.000     -7.000     -0.500      0.000     -0.750
-----------+-------------------------------------------------------------------
      2.000|      0.000      1.000     -1.000      0.000      0.000     -0.500
      2.500|      1.000      0.000      1.000      0.500      0.000     -0.250
      0.500|      0.000      0.000      0.000      0.500      1.000     -1.250
Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:      1.5000

X(   1):      2.5000
X(   2):      2.0000
```

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la sua capacità u_{ij}.

a) Determinare il flusso massimo dal vertice $s = 1$ al vertice $t = 7$. (4 punti)

```
Algoritmo Flusso Massimo

Grafo Iniziale Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=0 x(1,3)=0
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,5)=0
Nodo 3: x(3,4)=0 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,2)=0 x(4,5)=0 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,7)=0
Nodo 6: x(6,5)=0 x(6,7)=0

Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,2]
Etichetta nodo 3: [1,7]
Etichetta nodo 5: [2,2]
Etichetta nodo 4: [3,5]
Etichetta nodo 6: [3,2]
Etichetta nodo 7: [5,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,2) (2,5) (5,7)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,7]
Etichetta nodo 4: [3,5]
Etichetta nodo 6: [3,2]
Etichetta nodo 2: [4,4]
Etichetta nodo 5: [4,2]
Etichetta nodo 7: [5,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,3) (3,4) (4,5) (5,7)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,5]
Etichetta nodo 4: [3,3]
Etichetta nodo 6: [3,2]
Etichetta nodo 2: [4,3]
Etichetta nodo 5: [2,2]
Etichetta nodo 7: [5,1]
Aumenta il flusso di 1 nel cammino:(1,3) (3,4) (4,2) (2,5) (5,7)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,4]
Etichetta nodo 4: [3,2]
Etichetta nodo 6: [3,2]
Etichetta nodo 2: [4,2]
Etichetta nodo 5: [2,1]
Etichetta nodo 7: [6,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,3) (3,6) (6,7)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,2]
Etichetta nodo 4: [3,2]
Etichetta nodo 2: [4,2]
Etichetta nodo 6: [4,2]
Etichetta nodo 5: [2,1]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 5

Risultato Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=2 x(1,3)=5
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,5)=3
Nodo 3: x(3,4)=3 x(3,6)=2
Nodo 4: x(4,2)=1 x(4,5)=2 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,7)=5
Nodo 6: x(6,5)=0 x(6,7)=2

Flusso Massimo = 7
```

b) Data la soluzione ottima calcolata al punto (a), determinare il "*Taglio s-t di capacità minima*" e indicare il metodo impiegato per determinarlo. (2 punti)

Il taglio s-t di capacità minima si può determinare includendo nell'insieme S tutti i vertici etichettati e in $\bar{S}$ quelli non etichettati nell'ultima iterazione dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson. Nel caso dell'esercizio abbiamo che $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $\bar{S} = \{7\}$.

6) Si consideri il Teorema della Dualità Lagrangiana Debole.

a) Scrivere l'enunciato e fornire la dimostrazione del teorema. (3 punti)

Dato il problema:

$$
\begin{aligned}
z_P = \min\ & \mathbf{cx} \\
s.t.\ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{Bx} \geq \mathbf{d} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ and integer}
\end{aligned}
$$

e il rilassamento Lagrangiano:

$$
\begin{aligned}
z_{LR}(\lambda) = \min\ & \mathbf{cx} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \\
s.t.\ & \mathbf{Bx} \geq \mathbf{d} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ and integer}
\end{aligned}
$$

il teorema della Dualità Lagrangiana Debole si può enunciare e dimostrare come segue:

Teorema (Dualità Lagrangiana Debole)

$z_{LR}(\lambda)$ è un valido lower bound al valore della soluzione ottima di P, i.e, $z_{LR}(\lambda) \leq z_P$, per ogni $\lambda \geq \mathbf{0}$.

Dimostrazione

- *Sia $\mathbf{x}^*$ la soluzione ottima di P.*
- *Siccome $\mathbf{x}^*$ è una soluzione ammissibile anche per $LR(\lambda)$, per ogni $\lambda \geq \mathbf{0}$, si ha che:*

$$z_{LR}(\lambda, \mathbf{x}^*) = \mathbf{cx}^* + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^*) \geq z_{LR}(\lambda)$$

- *Però $\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^*) \leq 0$, perché $\lambda \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{Ax}^* \geq \mathbf{b}$, quindi:*

$$z_{LR}(\lambda) \leq z_{LR}(\lambda, \mathbf{x}^*) \leq z_P, \quad \forall \lambda \geq \mathbf{0}.$$