Esame Ricerca Operativa

(Simulazione)

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____Matricola:______________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti. Inoltre, non può usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri un insieme di n oggetti di peso $w_i, i = 1, \dots, n$, e un insieme di contenitori di capacità W. Si vuole minimizzare il numero di contenitori necessari per contenere tutti gli n oggetti. Ciascun oggetto deve essere caricato tutto in un unico contenitore.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

Per formulare matematicamente il problema definiamo le seguenti variabili decisionali:

- Le variabili binarie y_j, che hanno valore 1 se il contenitore j è utilizzato, altrimenti hanno valore 0.
- Le variabili binarie x_{ij}, che hanno valore 1 se l'oggetto i è caricato nel contenitore j, altrimenti hanno valore 0.

Assumiamo che tutti gli oggetti abbiano peso $w_i \leq W$ (quindi riescono ad essere inseriti in un contenitore).

Nel caso peggiore serviranno n contenitori (i.e., uno per ogni oggetto), per cui possiamo fissare il numero di contenitori utilizzabili pari a n.

Se si disponesse di una stima per eccesso del numero di contenitori necessari nella soluzione ottima, per esempio m, la si potrebbe usare al posto di n.

Un possibile modello matematico è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{j=1}^{n} y_j \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} \le W y_j, \quad j = 1, \dots, n \\
& y_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1, \dots, n \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i, j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \; +3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      1.000     -2.000     -2.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|      3.000      3.000      1.000      1.000      0.000
      1.000|     -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000

Tableau Fase 1: iniziale
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      2.000|      3.000      3.000      1.000      1.000      0.000      0.000
      1.000|     -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau Fase 1: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      1.000|     -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      2.000|      3.000      3.000      1.000      1.000      0.000      0.000
      1.000|     -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,2)
      0.333|     -2.000      0.000      0.667     -0.333     -1.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.667|      1.000      1.000      0.333      0.333      0.000      0.000
      0.333|     -2.000      0.000      0.667     -0.333     -1.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,3)
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.500|      2.000      1.000      0.000      0.500      0.500     -0.500
      0.500|     -3.000      0.000      1.000     -0.500     -1.500      1.500

Numero Iterazioni: 2

Tableau Ottimo Fase 1
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.500|      2.000      1.000      0.000      0.500      0.500     -0.500
      0.500|     -3.000      0.000      1.000     -0.500     -1.500      1.500

Tableau Fase 2: iniziale
      0.000|      1.000     -2.000     -2.000     -0.000     -0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      0.500|      2.000      1.000      0.000      0.500      0.500
      0.500|     -3.000      0.000      1.000     -0.500     -1.500

Tableau Fase 2: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      2.000|     -1.000      0.000      0.000      0.000     -2.000
-----------+-------------------------------------------------------
      0.500|      2.000      1.000      0.000      0.500      0.500
      0.500|     -3.000      0.000      1.000     -0.500     -1.500
```

```
Numero Iterazioni: 0

Tableau Ottimo Fase 2
      2.000|     -1.000      0.000      0.000      0.000     -2.000
-----------+-------------------------------------------------------
      0.500|      2.000      1.000      0.000      0.500      0.500
      0.500|     -3.000      0.000      1.000     -0.500     -1.500

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     2.0000

X(   2):     0.5000
X(   3):     0.5000
```

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

Il duale **D** del problema **P** è il seguente:

$$(\mathbf{D})\quad \begin{cases} \max z = 2w_1 + w_2 \\ \quad \text{s.t.}\ \ 3w_1 - w_2 \leq -1 \\ \qquad\quad 3w_1 + w_2 \leq 2 \\ \qquad\quad w_1 + w_2 \leq 2 \\ \qquad\quad w_1 \leq 0, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \min z = -2x_1 - x_2 \\ \quad \text{s.t.}\ \ +2x_1 - 3x_2 \geq -4 \\ \qquad\quad +3x_1 + 2x_2 \leq +7 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = (1,2)$ è ottima per il problema **P**. (6 punti)

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = (1,2)$:

$$\begin{cases} +2x_1 - 3x_2 \geq -4 \\ +3x_1 + 2x_2 \leq +7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 6 = -4 \\ 3 + 4 = 7 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il duale del problema **P** è il seguente:

$$(\mathbf{D})\quad \begin{cases} \max z = -4w_1 + 7w_2 \\ \quad \text{s.t.}\ \ 2w_1 + 3w_2 \leq -2 \\ \qquad\quad -3w_1 + 2w_2 \leq -1 \\ \qquad\quad w_1 \geq 0, w_2 \leq 0 \end{cases}$$

I vincoli del primale sono tutti saturi, quindi per gli scarti complementari le variabili duale possono essere sia nulle che diverse da zero.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, allora entrambi i vincoli del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} 2w_1 + 3w_2 = -2 \\ -3w_1 + 2w_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2w_1 = -2 - 3w_2 \\ -3w_1 + 2w_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -1 - \frac{3}{2}w_2 \\ -3(-1 - \frac{3}{2}w_2) + 2w_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = -1 - \frac{3}{2}w_2 \\ +3 + \frac{9}{2}w_2 + 2w_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -1 - \frac{3}{2}w_2 \\ \frac{13}{2}w_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -1 + \frac{24}{26} \\ w_2 = -\frac{8}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -\frac{1}{13} \\ w_2 = -\frac{8}{13} \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale NON rispetta i vincoli di segno delle variabili duali, allora la soluzione $\mathbf{x} = (1,2)$ NON è ottima.

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad +3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq +2 \\ \qquad\qquad -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq +3 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ intere} \end{cases}$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso Primale abbiamo ottenuto il seguente Tableau ottimo:

```
Tableau Ottimo Fase 2
    -7.000|     -4.000      0.000      0.000     -2.000     -1.000
----------+-------------------------------------------------------
     2.500|      1.000      0.000      1.000      0.500      0.500
     0.250|     -1.000      1.000      0.000     -0.250      0.250

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -7.0000

X(   2):     0.2500
X(   3):     2.5000
```

a) Aggiungere un taglio di Gomory relativo alla variabile x_3 (i.e., riga 1 del Tableau) e riottimizzare (i.e., aggiungere il Taglio di Gomory al tableau e trovare la nuova soluzione ottima). (6 punti)

Il Taglio di Gomory relativo alla riga 1 del tableau è il seguente:

$$-\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \leq -\frac{1}{2}$$

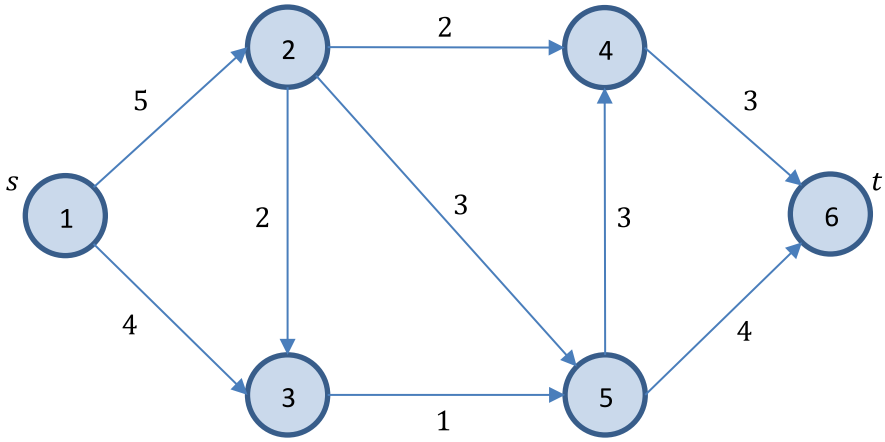
Quindi, possiamo aggiungere al tableau la seguente riga:

$$-\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

Dopodiché, basta riottimizzare con il duale:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo
    -7.000|     -4.000      0.000      0.000     -2.000     -1.000      0.000
----------+------------------------------------------------------------------
     2.500|      1.000      0.000      1.000      0.500      0.500      0.000
     0.250|     -1.000      1.000      0.000     -0.250      0.250      0.000
    -0.500|      0.000      0.000      0.000     -0.500     -0.500      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (4,5)
    -6.000|     -4.000      0.000      0.000     -1.000      0.000     -2.000
----------+------------------------------------------------------------------
     2.000|      1.000      0.000      1.000      0.000      0.000      1.000
     0.000|     -1.000      1.000      0.000     -0.500      0.000      0.500
     1.000|     -0.000     -0.000     -0.000      1.000      1.000     -2.000

Tableau ottimo
    -6.000|     -4.000      0.000      0.000     -1.000      0.000     -2.000
----------+------------------------------------------------------------------
     2.000|      1.000      0.000      1.000      0.000      0.000      1.000
     0.000|     -1.000      1.000      0.000     -0.500      0.000      0.500
     1.000|     -0.000     -0.000     -0.000      1.000      1.000     -2.000

Costo ottimo:    -6.000

X(   2):     0.0000
X(   3):     2.0000
```

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la capacità u_{ij}.

a) Determinare il flusso massimo dal vertice 1 al vertice 6 utilizzando le capacità riportate sul grafo (ovviamente ignorando i costi e i b_i). (6 punti)

```
Algoritmo Flusso Massimo

Grafo Iniziale Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=0 x(1,3)=0
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,4)=0 x(2,5)=0
Nodo 3: x(3,5)=0
Nodo 4: x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,4)=0 x(5,6)=0

Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,5]
Etichetta nodo 3: [1,4]
Etichetta nodo 4: [2,2]
Etichetta nodo 5: [2,3]
Etichetta nodo 6: [4,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,2) (2,4) (4,6)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,3]
Etichetta nodo 3: [1,4]
Etichetta nodo 5: [2,3]
Etichetta nodo 4: [5,3]
Etichetta nodo 6: [5,3]
Aumenta il flusso di 3 nel cammino:(1,2) (2,5) (5,6)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,4]
Etichetta nodo 5: [3,1]
Etichetta nodo 4: [5,1]
Etichetta nodo 6: [5,1]
Etichetta nodo 2: [-5,1]
Aumenta il flusso di 1 nel cammino:(1,3) (3,5) (5,6)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,3]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 4

Risultato Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=5 x(1,3)=1
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,4)=2 x(2,5)=3
Nodo 3: x(3,5)=1
Nodo 4: x(4,6)=2
Nodo 5: x(5,4)=0 x(5,6)=4

Flusso Massimo = 6
```

6) Si consideri il Teorema della Dualità Debole.

a) Scrivere l'enunciato e fornire la dimostrazione. (3 punti)

Vedi Slide…

Lemma 1 (Dualità Debole).
Se $\tilde{\mathbf{x}} \in X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ e $\tilde{\mathbf{w}} \in W = \{\mathbf{w} : \mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$ allora $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$.

Dimostrazione.
Siccome $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ allora $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}$. Poichè $\tilde{\mathbf{w}} \geq \mathbf{0}$, si ha:

$$\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \geq \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \tag{1}$$

Siccome $\tilde{\mathbf{w}} \in W$ allora $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}$. Poichè $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, si ha:

$$\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} \tag{2}$$

Dalle espressioni (1) e (2) si ottiene $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$.$\square$