Esame Ricerca Operativa

25 Luglio 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____________________________________Matricola:____________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri un'azienda che produce un insieme di prodotti P utilizzando i reparti di produzione R. I prodotti sono dispositivi elettronici.

Ogni unità del prodotto $i \in P$ genera un profitto p_i e richiede per ciascun reparto $j \in R$ un numero di ore di lavorazione pari a q_{ij}. Il numero di unità prodotte per ciascun prodotto $i \in P$ non deve superare la soglia M_i.

Ciascun reparto $j \in R$ ha a disposizione un numero di ore di lavorazione pari a Q_j.

Si vuole determinare le quantità da produrre per ciascun prodotto per massimizzare il profitto complessivo rispettando i vincoli sopra descritti.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

Per formulare matematicamente il problema definiamo le variabili decisionali intere x_i che indicheranno quante unità di prodotto $i \in P$ produrre.

Un possibile modello matematico è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\max z = & \sum_{i \in P} p_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in P} q_{ij} x_i \leq Q_j, && j \in R \\
& x_i \leq M_i, && i \in P \\
& x_i \geq 0 \ \text{intero}, && i \in P
\end{aligned}
$$

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \; +x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ \quad\quad -2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 3 \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      4.000      1.000     -3.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      6.000|      1.000      1.000      3.000      1.000      0.000
      3.000|     -2.000      1.000     -4.000      0.000     -1.000

Tableau Fase 1: iniziale
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      6.000|      1.000      1.000      3.000      1.000      0.000      0.000
      3.000|     -2.000      1.000     -4.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau Fase 1: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      3.000|     -2.000      1.000     -4.000      0.000     -1.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      6.000|      1.000      1.000      3.000      1.000      0.000      0.000
      3.000|     -2.000      1.000     -4.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      3.000|      3.000      0.000      7.000      1.000      1.000     -1.000
      3.000|     -2.000      1.000     -4.000      0.000     -1.000      1.000

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      3.000|      3.000      0.000      7.000      1.000      1.000     -1.000
      3.000|     -2.000      1.000     -4.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau Fase 2: iniziale
      0.000|      4.000      1.000     -3.000     -0.000     -0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      3.000|      3.000      0.000      7.000      1.000      1.000
      3.000|     -2.000      1.000     -4.000      0.000     -1.000

Tableau Fase 2: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
     -3.000|      6.000      0.000      1.000     -0.000      1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      3.000|      3.000      0.000      7.000      1.000      1.000
      3.000|     -2.000      1.000     -4.000      0.000     -1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)
     -9.000|      0.000      0.000    -13.000     -2.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      1.000|      1.000      0.000      2.333      0.333      0.333
      5.000|      0.000      1.000      0.667      0.667     -0.333

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 2
     -9.000|      0.000      0.000    -13.000     -2.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      1.000|      1.000      0.000      2.333      0.333      0.333
      5.000|      0.000      1.000      0.667      0.667     -0.333

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -9.0000

X(   1):     1.0000
X(   2):     5.0000
X(   3):     0.0000
```

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

Il duale **D** del problema **P** è il seguente:

$$(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} \max z = 6w_1 + 3w_2 \\ \quad \text{s.t.} \;\; w_1 - 2w_2 \le -4 \\ \quad\quad\quad w_1 + w_2 \le -1 \\ \quad\quad\quad 3w_1 - 4w_2 \le 3 \\ \quad\quad\quad w_1 \le 0, \;\; w_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \;\; x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6 \\ \quad\quad\quad -2x_1 + x_2 \ge 3 \\ \quad\quad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Duale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      4.000      1.000     -3.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      6.000|      1.000      1.000      3.000      1.000      0.000
      3.000|     -2.000      1.000      0.000      0.000     -1.000

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!
 -40000.000|      0.000     -3.000     -7.000      0.000      0.000     -4.000
-----------+------------------------------------------------------------------
  -9994.000|      0.000      0.000      2.000      1.000      0.000     -1.000
 -20003.000|      0.000     -3.000     -2.000     -0.000      1.000     -2.000
  10000.000|      1.000      1.000      1.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
 -19997.000|      0.000      0.000     -5.000      0.000     -1.000     -2.000
-----------+------------------------------------------------------------------
  -9994.000|      0.000      0.000      2.000      1.000      0.000     -1.000
   6667.667|     -0.000      1.000      0.667      0.000     -0.333      0.667
   3332.333|      1.000      0.000      0.333      0.000      0.333      0.333

Tableau dopo aver pivotato su (1,6)
     -9.000|      0.000      0.000     -9.000     -2.000     -1.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
   9994.000|     -0.000     -0.000     -2.000     -1.000     -0.000      1.000
      5.000|      0.000      1.000      2.000      0.667     -0.333      0.000
      1.000|      1.000      0.000      1.000      0.333      0.333      0.000

Tableau ottimo?
     -9.000|      0.000      0.000     -9.000     -2.000     -1.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
   9994.000|     -0.000     -0.000     -2.000     -1.000     -0.000      1.000
      5.000|      0.000      1.000      2.000      0.667     -0.333      0.000
      1.000|      1.000      0.000      1.000      0.333      0.333      0.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -9.0000

X(   1):     1.0000
X(   2):     5.0000
X(   3):     0.0000
```

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \quad \text{s.t.} \;\; x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4 \\ \quad\quad\quad -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\ \quad\quad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \;\; \text{intere} \end{cases}$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso abbiamo ottenuto il seguente tableau ottimo:

```
Tableau ottimo
     -2.600|      0.000      0.000     -4.600     -0.800     -0.600
-----------+-------------------------------------------------------
      1.800|      0.000      1.000      1.800      0.400     -0.200
      0.400|      1.000      0.000      0.400      0.200      0.400

Costo ottimo:    -2.6000

X(   1):     0.4000
X(   2):     1.8000
X(   3):     0.0000
```

a) Definire il taglio di Gomory relativo alla variabile x_2 e dopo averlo aggiunto al Tableau riottimizzare (cioè, dopo aver aggiunto il Taglio di Gomory al tableau si chiede di trovare la nuova soluzione ottima). (6 punti).

Il Taglio di Gomory relativo alla variabile x_2 deve essere calcolato rispetto alla riga 1 del tableau, ed è il seguente:

$$-\frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_5 \leq -\frac{4}{5}$$

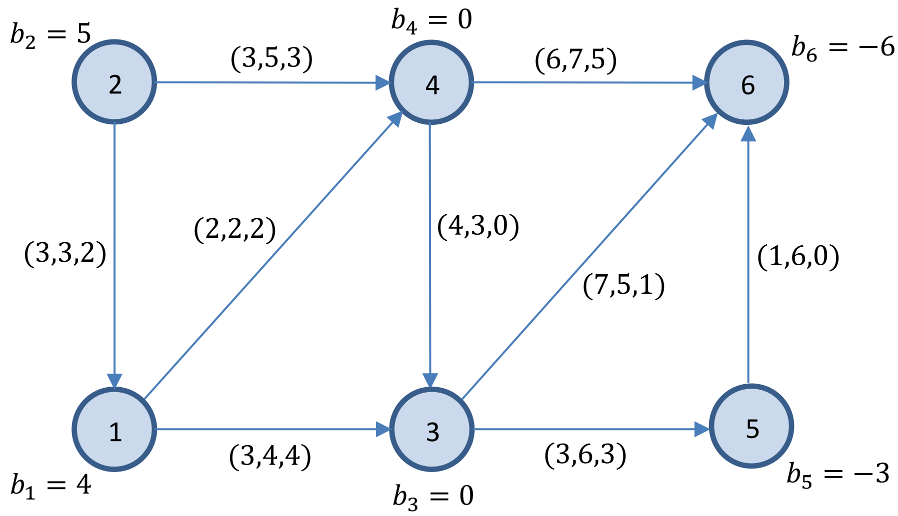
Quindi, possiamo aggiungere al tableau la seguente riga:

$$-\frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_5 + x_6 = -\frac{4}{5}$$

Dopodiché, basta riottimizzare con il duale:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo
     -2.600|      0.000      0.000     -4.600     -0.800     -0.600      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      1.800|      0.000      1.000      1.800      0.400     -0.200      0.000
      0.400|      1.000      0.000      0.400      0.200      0.400      0.000
     -0.800|      0.000      0.000     -0.800     -0.400     -0.800      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (4,5)
     -2.000|      0.000      0.000     -4.000     -0.500      0.000     -0.750
-----------+------------------------------------------------------------------
      2.000|      0.000      1.000      2.000      0.500      0.000     -0.250
     -0.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.500
      1.000|     -0.000     -0.000      1.000      0.500      1.000     -1.250

Tableau ottimo?
     -2.000|      0.000      0.000     -4.000     -0.500      0.000     -0.750
-----------+------------------------------------------------------------------
      2.000|      0.000      1.000      2.000      0.500      0.000     -0.250
     -0.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.500
      1.000|     -0.000     -0.000      1.000      0.500      1.000     -1.250

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     -2.0000

X(   1):     0.0000
X(   2):     2.0000
X(   3):     0.0000
```

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente. (6 punti)

```
Algoritmo Flusso di Costo Minimo

Soluzione Ammissibile Iniziale
Nodo 1: x(1,3)=4 x(1,4)=2
Nodo 2: x(2,1)=2 x(2,4)=3
Nodo 3: x(3,5)=3 x(3,6)=1
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=5
Nodo 5: x(5,6)=0

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione: 1
Ciclo: C(1,2)=-3 C(2,4)=3 C(4,1)=-2
Aumento flusso di: 2

Iterazione: 2
Ciclo: C(3,5)=3 C(5,6)=1 C(6,3)=-7
Aumento flusso di: 1

Iterazione: 3
Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 3

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,3)=4 x(1,4)=0
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,4)=5
Nodo 3: x(3,5)=4 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=5
Nodo 5: x(5,6)=1

Costo Soluzione = 70
```

Potevano esserci anche altri cicli di costo negativo che potevano essere scelti, richiedendo un numero diverso di iterazioni, per raggiungere la stessa soluzione.

6) Si consideri il Corollario delle Relazioni di Complementarietà.

a) Scrivere l'enunciato e fornire la dimostrazione del teorema. (3 punti)

Dato il problema:

$$\begin{aligned} z_P = \min \ & \mathbf{cx} \\ s.t. \ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

e definiti i due insiemi:

$X = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

e

$W = \{\mathbf{w} : \mathbf{wA} \leq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$

il Corollario delle Relazioni di Complementarietà si può enunciare e dimostrare come segue:

Corollario 2 (Complementarietà). Le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ del primale e $\tilde{\mathbf{w}} \in W$ del duale sono ottime se e solo se

$$\begin{aligned} (a) \quad \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) &= 0 \\ (b) \quad (\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}} &= 0 \end{aligned}$$

Dimostrazione.

Si vuole dimostrare che:

- Se (a) e (b) sono soddisfatte, allora le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime.
- Se le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime, allora le condizioni (a) e (b) devono essere soddisfatte.

- (a) e (b) sono soddisfatte le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime.

  Dal lemma della dualità debole si ha che per ogni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$:

$$\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \leq \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$$

  Ma se (a) e (b) sono soddisfatte si ha anche:

$$\begin{aligned} (a) \quad \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} &= \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \\ (b) \quad \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} &= \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

  Per cui $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$ e, per il corollario 1, $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime.

- Se le soluzioni $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ sono ottime allora le condizioni (a) e (b) devono essere soddisfatte.

  Se una delle due condizioni di complementarietà non è soddisfatta allora almeno una delle due soluzioni non è ottima.

  Infatti, se ad esempio $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) > 0$ allora ne consegue che $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} < \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$.

Per cui il corollario è dimostrato. $\square$