Esercizi

Programmazione Lineare Intera

1) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \text{Min } z = -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad +4x_1 + x_2 - 2x_3 \le +2 \\ \qquad\qquad +2x_1 - 2x_2 + x_3 \le +3 \\ \qquad\qquad -x_1 + x_2 - 2x_3 \le -1 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \;\text{ intere} \end{cases}$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso Primale abbiamo ottenuto il seguente tableau ottimo:

```
Tableau Ottimo Fase 2
     -0.400|      0.000     -7.000      0.000     -0.800     -0.000     -1.200
-----------+--------------------------------------------------------------------
      0.600|      1.000      0.000      0.000      0.200      0.000     -0.200
      1.600|      0.000     -1.500      0.000     -0.300      1.000      0.800
      0.200|      0.000     -0.500      1.000     -0.100     -0.000     -0.400

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -0.4000

X(   1):     0.6000
X(   3):     0.2000
```

a) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo (i.e., il tableau dato), svolgere una ulteriore iterazione dell'algoritmo branch and bound:

- definire i nodi figli e i problemi corrispondenti;

  Le variabili in base con valori frazionari sono $x_1 = 0.6 = \frac{3}{5}$ e $x_3 = 0.2 = \frac{1}{5}$. Per esempio, consideriamo il branching rispetto alla variabile x_1. In questo caso i nodi figli sono i seguenti: $P_1 = P(x_1 \le 0)$ e $P_2 = P(x_1 \ge 1)$.

- selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto).

  Se selezioniamo il nodo figlio $P_1 = P(x_1 \le 0)$, in questo caso dobbiamo aggiungere il vincolo $x_1 \le 0$, che aggiungendo la variabile di scarto è della seguente forma:

  $$x_1 + x_7 = 0$$

  Una volta aggiunto il nuovo vincolo al tableau, dobbiamo ripristinare una base pivotando sulla colonna di x_1 per annullare il coefficiente "1" nella riga del nuovo vincolo e riottimizzare.

  Qui di seguito i passaggi:

```
Tableau Ottimo Fase 2
     -0.400|      0.000     -7.000      0.000     -0.800     -0.000     -1.200      0.000
-----------+--------------------------------------------------------------------------------
      0.600|      1.000      0.000      0.000      0.200      0.000     -0.200      0.000
      1.600|      0.000     -1.500      0.000     -0.300      1.000      0.800      0.000
      0.200|      0.000     -0.500      1.000     -0.100     -0.000     -0.400      0.000
     -0.600|      0.000      0.000      0.000     -0.200      0.000      0.200      1.000

Tableau dopo aver aggiunto vincolo.
     -0.400|      0.000     -7.000      0.000     -0.800      0.000     -1.200      0.000
-----------+--------------------------------------------------------------------------------
      0.600|      1.000      0.000      0.000      0.200      0.000     -0.200      0.000
      1.600|      0.000     -1.500      0.000     -0.300      1.000      0.800      0.000
      0.200|     -0.000     -0.500      1.000     -0.100     -0.000     -0.400      0.000
      0.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver ripristinato la base.
     -0.400|      0.000     -7.000      0.000     -0.800      0.000     -1.200      0.000
-----------+--------------------------------------------------------------------------------
      0.600|      1.000      0.000      0.000      0.200      0.000     -0.200      0.000
      1.600|      0.000     -1.500      0.000     -0.300      1.000      0.800      0.000
      0.200|     -0.000     -0.500      1.000     -0.100     -0.000     -0.400      0.000
     -0.600|      0.000      0.000      0.000     -0.200      0.000      0.200      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (4,4)
      2.000|      0.000     -7.000      0.000      0.000      0.000     -2.000     -4.000
-----------+--------------------------------------------------------------------------------
      0.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      1.000
      2.500|      0.000     -1.500      0.000      0.000      1.000      0.500     -1.500
      0.500|     -0.000     -0.500      1.000      0.000     -0.000     -0.500     -0.500
      3.000|     -0.000     -0.000     -0.000      1.000     -0.000     -1.000     -5.000

Tableau ottimo
      2.000|      0.000     -7.000      0.000      0.000      0.000     -2.000     -4.000
-----------+--------------------------------------------------------------------------------
      0.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      1.000
      2.500|      0.000     -1.500      0.000      0.000      1.000      0.500     -1.500
      0.500|     -0.000     -0.500      1.000      0.000     -0.000     -0.500     -0.500
      3.000|     -0.000     -0.000     -0.000      1.000     -0.000     -1.000     -5.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    2.000

X(   1):     0.0000
X(   3):     0.5000
```

b) Aggiungere un taglio di Gomory relativo alla variabile x_1 (i.e., riga 1 del tableau) e riottimizzare (i.e., aggiungere il Taglio di Gomory al tableau e trovare la nuova soluzione ottima).

Il Taglio di Gomory relativo alla riga 1 del tableau è il seguente:

$$-\frac{1}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_6 \leq -\frac{3}{5}$$

Quindi, possiamo aggiungere al tableau la seguente riga:

$$-\frac{1}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_6 + x_7 = -\frac{3}{5}$$

Dopodiché, basta riottimizzare con il duale:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo.
     -0.400|      0.000     -7.000      0.000     -0.800      0.000     -1.200      0.000
-----------+--------------------------------------------------------------------------------
      0.600|      1.000      0.000      0.000      0.200      0.000     -0.200      0.000
      1.600|      0.000     -1.500      0.000     -0.300      1.000      0.800      0.000
      0.200|     -0.000     -0.500      1.000     -0.100     -0.000     -0.400      0.000
     -0.600|     -0.000     -0.000     -0.000     -0.200     -0.000     -0.800      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (4,6)
      0.500|      0.000     -7.000      0.000     -0.500      0.000      0.000     -1.500
-----------+--------------------------------------------------------------------------------
      0.750|      1.000      0.000      0.000      0.250      0.000      0.000     -0.250
      1.000|      0.000     -1.500      0.000     -0.500      1.000      0.000      1.000
      0.500|      0.000     -0.500      1.000      0.000      0.000      0.000     -0.500
      0.750|      0.000      0.000      0.000      0.250      0.000      1.000     -1.250
```

```
Tableau ottimo?
      0.500|      0.000     -7.000      0.000     -0.500      0.000      0.000     -1.500
-----------+--------------------------------------------------------------------------------
      0.750|      1.000      0.000      0.000      0.250      0.000      0.000     -0.250
      1.000|      0.000     -1.500      0.000     -0.500      1.000      0.000      1.000
      0.500|      0.000     -0.500      1.000      0.000      0.000      0.000     -0.500
      0.750|      0.000      0.000      0.000      0.250      0.000      1.000     -1.250

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    0.500

X(   1):     0.7500
X(   3):     0.5000
```

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = +2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad +2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq +3 \\ \qquad\quad +x_1 - 5x_2 + x_3 \geq +4 \\ \qquad\quad +2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq +3 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ intere} \end{cases}
$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso Primale abbiamo ottenuto il seguente tableau ottimo:

```
Tableau Ottimo Fase 2
      9.250|      0.000    -13.750      0.000     -0.250     -2.500      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      2.750|      1.000     -2.250      0.000      0.250     -0.500      0.000
      1.250|      0.000     -2.750      1.000     -0.250     -0.500      0.000
     -0.000|     -0.000      3.000     -0.000      1.000     -0.000      1.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     9.2500

X(   1):     2.7500
X(   3):     1.2500
```

a) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo (i.e., il tableau dato), svolgere una ulteriore iterazione dell'algoritmo branch and bound:

- definire i nodi figli e i problemi corrispondenti;

  Le variabili in base con valori frazionari sono $x_1 = 2.75 = \frac{11}{4}$ e $x_3 = 1.25 = \frac{5}{4}$. Per esempio, consideriamo il branching rispetto alla variabile x_1. In questo caso i nodi figli sono i seguenti: $P_1 = P(x_1 \leq 2)$ e $P_2 = P(x_1 \geq 3)$.

- selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto).

  Se selezioniamo il nodo figlio $P_1 = P(x_1 \leq 2)$, in questo caso dobbiamo aggiungere il vincolo $x_1 \leq 2$, che aggiungendo la variabile di scarto è della seguente forma:

$$x_1 + x_7 = 2$$

Una volta aggiunto il nuovo vincolo al tableau, dobbiamo ripristinare una base pivotando sulla colonna di x_1 per annullare il coefficiente “1” nella riga del nuovo vincolo e riottimizzare. Qui di seguito i passaggi:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo.
      9.250|     0.000    -13.750      0.000     -0.250     -2.500      0.000      0.000
-----------+---------------------------------------------------------------------------
      2.750|     1.000     -2.250      0.000      0.250     -0.500      0.000      0.000
      1.250|    -0.000     -2.750      1.000     -0.250     -0.500     -0.000      0.000
      0.000|     0.000      3.000      0.000      1.000      0.000      1.000      0.000
      2.000|     1.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver ripristinato la base.
      9.250|     0.000    -13.750      0.000     -0.250     -2.500      0.000      0.000
-----------+---------------------------------------------------------------------------
      2.750|     1.000     -2.250      0.000      0.250     -0.500      0.000      0.000
      1.250|    -0.000     -2.750      1.000     -0.250     -0.500     -0.000      0.000
      0.000|     0.000      3.000      0.000      1.000      0.000      1.000      0.000
     -0.750|     0.000      2.250      0.000     -0.250      0.500      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (4,4)
     10.000|     0.000    -16.000      0.000      0.000     -3.000      0.000     -1.000
-----------+---------------------------------------------------------------------------
      2.000|     1.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      1.000
      2.000|    -0.000     -5.000      1.000      0.000     -1.000     -0.000     -1.000
     -3.000|     0.000     12.000      0.000      0.000      2.000      1.000      4.000
      3.000|    -0.000     -9.000     -0.000      1.000     -2.000     -0.000     -4.000

Non Esiste Soluzione!
```

b) Aggiungere un taglio di Gomory relativo alla variabile x_3 (i.e., riga 2 del tableau) e riottimizzare (i.e., aggiungere il Taglio di Gomory al tableau e trovare la nuova soluzione ottima).

Il Taglio di Gomory relativo alla riga 2 del tableau è il seguente:

$$-\frac{1}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \leq -\frac{1}{4}$$

Quindi, possiamo aggiungere al tableau la seguente riga:

$$-\frac{1}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_7 = -\frac{1}{4}$$

Dopodiché, basta riottimizzare con il duale:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo.
      9.250|     0.000    -13.750      0.000     -0.250     -2.500      0.000      0.000
-----------+---------------------------------------------------------------------------
      2.750|     1.000     -2.250      0.000      0.250     -0.500      0.000      0.000
      1.250|    -0.000     -2.750      1.000     -0.250     -0.500     -0.000      0.000
      0.000|     0.000      3.000      0.000      1.000      0.000      1.000      0.000
     -0.250|    -0.000     -0.250     -0.000     -0.750     -0.500     -0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (4,4)
      9.333|     0.000    -13.667      0.000      0.000     -2.333      0.000     -0.333
-----------+---------------------------------------------------------------------------
      2.667|     1.000     -2.333      0.000      0.000     -0.667      0.000      0.333
      1.333|     0.000     -2.667      1.000      0.000     -0.333      0.000     -0.333
     -0.333|     0.000      2.667      0.000      0.000     -0.667      1.000      1.333
      0.333|     0.000      0.333      0.000      1.000      0.667      0.000     -1.333

Tableau dopo aver pivotato su (3,5)
     10.500|     0.000    -23.000      0.000      0.000      0.000     -3.500     -5.000
-----------+---------------------------------------------------------------------------
      3.000|     1.000     -5.000      0.000      0.000      0.000     -1.000     -1.000
      1.500|     0.000     -4.000      1.000      0.000      0.000     -0.500     -1.000
      0.500|    -0.000     -4.000     -0.000     -0.000      1.000     -1.500     -2.000
      0.000|     0.000      3.000      0.000      1.000      0.000      1.000      0.000
```

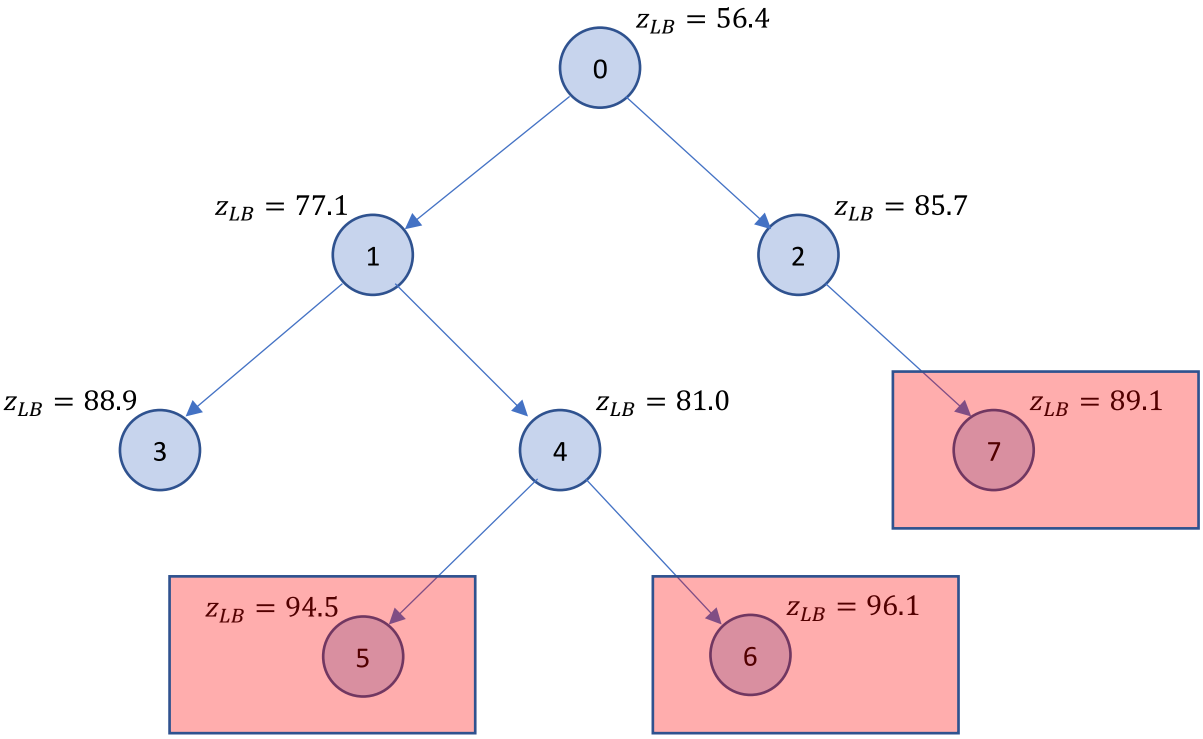
```
Tableau ottimo?
     10.500|       0.000     -23.000       0.000       0.000       0.000      -3.500      -5.000
-----------+--------------------------------------------------------------------------------------
      3.000|       1.000      -5.000       0.000       0.000       0.000      -1.000      -1.000
      1.500|       0.000      -4.000       1.000       0.000       0.000      -0.500      -1.000
      0.500|      -0.000      -4.000      -0.000      -0.000       1.000      -1.500      -2.000
      0.000|       0.000       3.000       0.000       1.000       0.000       1.000       0.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:      10.5000

X(   1):      3.0000
X(   3):      1.5000
```

3) Dato un problema di programmazione lineare intera di minimo, in figura è riportato l'albero di ricerca ottenuto fino a una certa iterazione di un algoritmo Branch and Bound. Per ogni nodo è fornito il corrispondente lower bound. Se l'upper bound viene aggiornato al valore $z_{UB} = 89.1$, quali nodi possono essere eliminati?

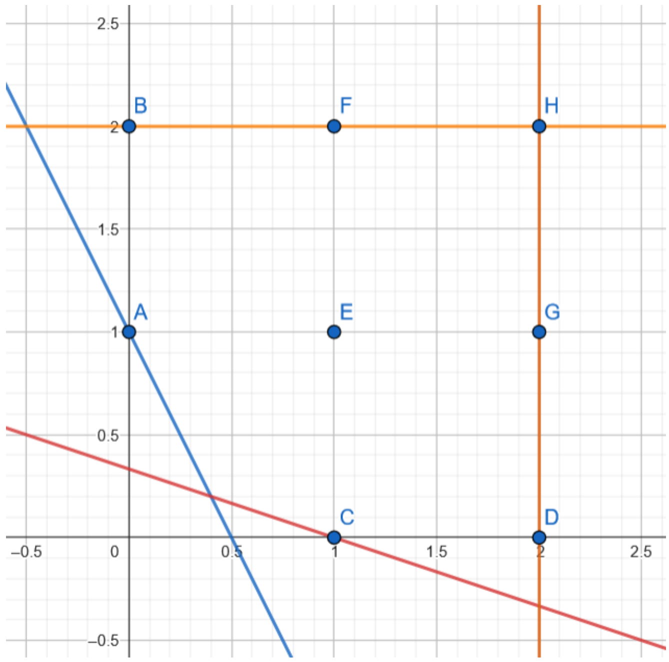


I nodi che possono essere eliminati sono il 5, 6 e 7, perché scuramente non possono generare soluzioni migliori di quella finora trovata.

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
\textbf{(P)} \quad \begin{cases} \text{Min } z = 2x_1 + 3x_2 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +2x_1 + x_2 \geq +1 & (1) \\ \qquad\qquad +x_1 + 3x_2 \geq +1 & (2) \\ \qquad\qquad 0 \leq x_1 \leq 2 \ \text{ intero} & (3) \\ \qquad\qquad 0 \leq x_2 \leq 2 \ \text{ intero} & (4) \end{cases}
$$

a) Risolvere graficamente il problema P.



I punti interi ammissibili sono quelli evidenziati in figura (A-H). Per determinare l'ottimo, è sufficiente osservare che il gradiente è $\nabla z = (-2, -3)$, per cui la soluzione ottima è sicuramente nel punto C (provate anche a sostituire i valori nella funzione obiettivo).

b) Risolvere il rilassamento lineare del problema P (i.e., il problema ottenuto rilassando i vincoli di interezza) con il metodo del simplesso primale.

```
Tableau Iniziale!
      0.000|     -2.000     -3.000      0.000      0.000      0.000      0.000
-----------+-----------------------------------------------------------------
      1.000|      2.000      1.000     -1.000      0.000      0.000      0.000
      1.000|      1.000      3.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
      2.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000
      2.000|      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000

Tableau Fase 1: iniziale
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000     -1.000
-----------+---------------------------------------------------------------------------------------
      1.000|      2.000      1.000     -1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000
      1.000|      1.000      3.000      0.000     -1.000      0.000      0.000      0.000      1.000
      2.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000
      2.000|      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000      0.000

Tableau Fase 1: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      2.000|      3.000      4.000     -1.000     -1.000      0.000      0.000      0.000      0.000
-----------+---------------------------------------------------------------------------------------
      1.000|      2.000      1.000     -1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000
      1.000|      1.000      3.000      0.000     -1.000      0.000      0.000      0.000      1.000
      2.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000
      2.000|      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000      0.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
      0.667|      1.667      0.000     -1.000      0.333      0.000      0.000      0.000     -1.333
-----------+---------------------------------------------------------------------------------------
      0.667|      1.667      0.000     -1.000      0.333      0.000      0.000      1.000     -0.333
      0.333|      0.333      1.000      0.000     -0.333      0.000      0.000      0.000      0.333
      2.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000
      1.667|     -0.333      0.000      0.000      0.333      0.000      1.000      0.000     -0.333

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)
      0.000|      0.000      0.000      0.000     -0.000      0.000      0.000     -1.000     -1.000
-----------+---------------------------------------------------------------------------------------
      0.400|      1.000      0.000     -0.600      0.200      0.000      0.000      0.600     -0.200
      0.200|      0.000      1.000      0.200     -0.400      0.000      0.000     -0.200      0.400
      1.600|      0.000      0.000      0.600     -0.200      1.000      0.000     -0.600      0.200
      1.800|      0.000      0.000     -0.200      0.400      0.000      1.000      0.200     -0.400

Numero Iterazioni: 2
```

```
Tableau Ottimo Fase 1
      0.000|      0.000      0.000      0.000     -0.000      0.000      0.000     -1.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------------------------------------------
      0.400|      1.000      0.000     -0.600      0.200      0.000      0.000      0.600     -0.200
      0.200|      0.000      1.000      0.200     -0.400      0.000      0.000     -0.200      0.400
      1.600|      0.000      0.000      0.600     -0.200      1.000      0.000     -0.600      0.200
      1.800|      0.000      0.000     -0.200      0.400      0.000      1.000      0.200     -0.400

Tableau Fase 2: iniziale
      0.000|     -2.000     -3.000     -0.000     -0.000     -0.000     -0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.400|      1.000      0.000     -0.600      0.200      0.000      0.000
      0.200|      0.000      1.000      0.200     -0.400      0.000      0.000
      1.600|      0.000      0.000      0.600     -0.200      1.000      0.000
      1.800|      0.000      0.000     -0.200      0.400      0.000      1.000

Tableau Fase 2: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      1.400|      0.000      0.000     -0.600     -0.800      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.400|      1.000      0.000     -0.600      0.200      0.000      0.000
      0.200|      0.000      1.000      0.200     -0.400      0.000      0.000
      1.600|      0.000      0.000      0.600     -0.200      1.000      0.000
      1.800|      0.000      0.000     -0.200      0.400      0.000      1.000

Numero Iterazioni: 0

Tableau Ottimo Fase 2
      1.400|      0.000      0.000     -0.600     -0.800      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.400|      1.000      0.000     -0.600      0.200      0.000      0.000
      0.200|      0.000      1.000      0.200     -0.400      0.000      0.000
      1.600|      0.000      0.000      0.600     -0.200      1.000      0.000
      1.800|      0.000      0.000     -0.200      0.400      0.000      1.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     1.4000

X(   1):     0.4000
X(   2):     0.2000
```

c) Risolvere il rilassamento lineare del problema P con il metodo del simplesso duale.

```
Tableau Iniziale!
      0.000|     -2.000     -3.000      0.000      0.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      1.000|      2.000      1.000     -1.000      0.000      0.000      0.000
      1.000|      1.000      3.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
      2.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000
      2.000|      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!
      0.000|     -2.000     -3.000      0.000      0.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
     -1.000|     -2.000     -1.000      1.000     -0.000     -0.000     -0.000
     -1.000|     -1.000     -3.000     -0.000      1.000     -0.000     -0.000
      2.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000      0.000
      2.000|      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)
      1.000|      0.000     -2.000     -1.000      0.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.500|      1.000      0.500     -0.500      0.000      0.000      0.000
     -0.500|      0.000     -2.500     -0.500      1.000      0.000      0.000
      1.500|      0.000     -0.500      0.500      0.000      1.000      0.000
      2.000|      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
      1.400|      0.000      0.000     -0.600     -0.800      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.400|      1.000      0.000     -0.600      0.200      0.000      0.000
      0.200|     -0.000      1.000      0.200     -0.400     -0.000     -0.000
      1.600|      0.000      0.000      0.600     -0.200      1.000      0.000
      1.800|      0.000      0.000     -0.200      0.400      0.000      1.000

Tableau ottimo
      1.400|      0.000      0.000     -0.600     -0.800      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.400|      1.000      0.000     -0.600      0.200      0.000      0.000
      0.200|     -0.000      1.000      0.200     -0.400     -0.000     -0.000
      1.600|      0.000      0.000      0.600     -0.200      1.000      0.000
      1.800|      0.000      0.000     -0.200      0.400      0.000      1.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     1.4000

X(   1):     0.4000
X(   2):     0.2000
```

d) Rilassare in modo Lagrangiano i vincoli (1) e (2) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

   i. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$;

   ii. $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$.

Come primo passo scriviamo il problema Lagrangiano, in cui $\lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_2 \geq 0$:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(\lambda) = \text{Min } (2 - 2\lambda_1 - \lambda_2)x_1 + (3 - \lambda_1 - 3\lambda_2)x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ \qquad \text{s.t.} \qquad 0 \leq x_1 \leq 2 \text{ intero} \qquad (3) \\ \qquad\qquad\qquad 0 \leq x_2 \leq 2 \text{ intero} \qquad (4) \end{cases}$$

Ora consideriamo i due casi proposti:

i. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$;

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(0{,}0) = \text{Min } (2)x_1 + (3)x_2 + 0 + 0 \\ \qquad \text{s.t.} \qquad 0 \leq x_1 \leq 2 \text{ intero} \qquad (3) \\ \qquad\qquad\qquad 0 \leq x_2 \leq 2 \text{ intero} \qquad (4) \end{cases}$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, mentre $z_{LR}(0{,}0) = 0$.

Il subgradiente avrà componenti $s_1 = 1 - 2x_1 - x_2 = 1$ e $s_2 = 1 - x_1 - 3x_2 = 1$.

Dopodiché, si aggiornano le penalità Lagrangiane:

$$\lambda_1 = \max\{0, \lambda_1 + \theta s_1\} = \max\{0{,}0 + \theta 1\}$$

$$\lambda_2 = \max\{0, \lambda_2 + \theta s_2\} = \max\{0{,}0 + \theta 1\}$$

Si scelga un θ a piacere.

ii. $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$.

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(1{,}1) = \text{Min } (-1)x_1 + (-1)x_2 + 1 + 1 \\ \qquad \text{s.t.} \qquad 0 \leq x_1 \leq 2 \text{ intero} \qquad (3) \\ \qquad\qquad\qquad 0 \leq x_2 \leq 2 \text{ intero} \qquad (4) \end{cases}$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$, mentre $z_{LR}(1{,}1) = -2$.

Il subgradiente avrà componenti $s_1 = 1 - 2x_1 - x_2 = -5$ e $s_2 = 1 - x_1 - 3x_2 = -7$.

Dopodiché, si aggiornano le penalità Lagrangiane:

$$\lambda_1 = \max\{0, \lambda_1 + \theta s_1\} = \max\{0{,}1 + \theta(-5)\}$$

$$\lambda_2 = \max\{0, \lambda_2 + \theta s_2\} = \max\{0{,}1 + \theta(-7)\}$$

Si scelga un θ a piacere.

5) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad +2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq +2 & (1) \\ \qquad\qquad +x_1 + x_2 + x_3 \leq +2 & (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \text{intere} & (3) \end{cases}$$

a) Risolvere il rilassamento lineare del problema P (i.e., il problema ottenuto rilassando i vincoli di interezza) con il metodo del simplesso primale.

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      2.000      1.000      1.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|      2.000     -2.000      1.000      1.000      0.000
      2.000|      1.000      1.000      1.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)
     -2.000|      0.000      3.000      0.000     -1.000     -0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      1.000|      1.000     -1.000      0.500      0.500      0.000
      1.000|      0.000      2.000      0.500     -0.500      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
     -3.500|      0.000      0.000     -0.750     -0.250     -1.500
-----------+-------------------------------------------------------
      1.500|      1.000      0.000      0.750      0.250      0.500
      0.500|      0.000      1.000      0.250     -0.250      0.500

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -3.5000

X(   1):     1.5000
X(   2):     0.5000
```

b) Risolvere il rilassamento lineare del problema P con il metodo del simplesso duale.

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      2.000      1.000      1.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|      2.000     -2.000      1.000      1.000      0.000
      2.000|      1.000      1.000      1.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!
 -20000.000|      0.000     -1.000     -1.000      0.000      0.000     -2.000
-----------+------------------------------------------------------------------
 -19998.000|      0.000     -4.000     -1.000      1.000      0.000     -2.000
  -9998.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      1.000     -1.000
  10000.000|      1.000      1.000      1.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,2)
 -15000.500|      0.000      0.000     -0.750     -0.250      0.000     -1.500
-----------+------------------------------------------------------------------
   4999.500|     -0.000      1.000      0.250     -0.250     -0.000      0.500
  -9998.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      1.000     -1.000
   5000.500|      1.000      0.000      0.750      0.250      0.000      0.500

Tableau dopo aver pivotato su (2,6)
     -3.500|      0.000      0.000     -0.750     -0.250     -1.500      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.500|      0.000      1.000      0.250     -0.250      0.500      0.000
   9998.000|     -0.000     -0.000     -0.000     -0.000     -1.000      1.000
      1.500|      1.000      0.000      0.750      0.250      0.500      0.000

Tableau ottimo
     -3.500|      0.000      0.000     -0.750     -0.250     -1.500      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      0.500|      0.000      1.000      0.250     -0.250      0.500      0.000
   9998.000|     -0.000     -0.000     -0.000     -0.000     -1.000      1.000
      1.500|      1.000      0.000      0.750      0.250      0.500      0.000

Soluzione ottima trovata!
```

```
Costo ottimo:    -3.5000

X(   1):      1.5000
X(   2):      0.5000
```

c) Se la soluzione ottima del rilassamento lineare ha almeno una variabile frazionaria, aggiungere un Taglio di Gomory (scelta della variabile a discrezione dello studente).

Consideriamo il tableau ottimo del Simplesso Primale. Nella soluzione ottima vi sono due variabili frazionarie: $x_1 = 1.5 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = 0.5 = \frac{1}{2}$.

Scegliamo di aggiungere il Taglio di Gomory relativo alla variabile x_1 (riga 1 del tableau ottimo del Simplesso Primale), che è il seguente:

$$-\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \leq -\frac{1}{2}$$

Quindi, possiamo aggiungere al tableau la seguente riga:

$$-\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

Dopodiché, basta riottimizzare con il duale:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo.
     -3.500|      0.000      0.000     -0.750     -0.250     -1.500      0.000
-----------+---------------------------------------------------------------------
      1.500|      1.000      0.000      0.750      0.250      0.500      0.000
      0.500|      0.000      1.000      0.250     -0.250      0.500      0.000
     -0.500|     -0.000     -0.000     -0.750     -0.250     -0.500      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (3,3)
     -3.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000     -1.000
-----------+---------------------------------------------------------------------
      1.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      0.000      1.000
      0.333|      0.000      1.000      0.000     -0.333      0.333      0.333
      0.667|      0.000      0.000      1.000      0.333      0.667     -1.333

Tableau ottimo
     -3.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000     -1.000
-----------+---------------------------------------------------------------------
      1.000|      1.000      0.000      0.000      0.000      0.000      1.000
      0.333|      0.000      1.000      0.000     -0.333      0.333      0.333
      0.667|      0.000      0.000      1.000      0.333      0.667     -1.333

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -3.0000

X(   1):      1.0000
X(   2):      0.3333
X(   3):      0.6667
```

d) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema P (i.e., nodo radice), svolgere una iterazione dell'algoritmo branch and bound:

- definire i nodi figli e i problemi corrispondenti;

  Se consideriamo il tableau ottimo del Simplesso Primale, le variabili in base con valori frazionari sono $x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Per esempio, se consideriamo il branching rispetto alla variabile x_2 i nodi figli sono i seguenti: $P_1 = P(x_2 \leq 0)$ e $P_2 = P(x_2 \geq 1)$.

- selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto).

  Se selezioniamo il nodo figlio $P_1 = P(x_2 \leq 0)$, in questo caso dobbiamo aggiungere il vincolo $x_2 \leq 0$, che aggiungendo la variabile di scarto è della seguente forma:

  $$x_2 + x_7 = 0$$

  Una volta aggiunto il nuovo vincolo al tableau, dobbiamo ripristinare una base pivotando sulla colonna di x_2 per annullare il coefficiente "1" nella riga del nuovo vincolo e riottimizzare.

  Qui di seguito i passaggi:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo.
     -3.500|      0.000      0.000     -0.750     -0.250     -1.500      0.000
-----------+-------------------------------------------------------------------
      1.500|      1.000      0.000      0.750      0.250      0.500      0.000
      0.500|      0.000      1.000      0.250     -0.250      0.500      0.000
      0.000|      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver ripristinato la base.
     -3.500|      0.000      0.000     -0.750     -0.250     -1.500      0.000
-----------+-------------------------------------------------------------------
      1.500|      1.000      0.000      0.750      0.250      0.500      0.000
      0.500|      0.000      1.000      0.250     -0.250      0.500      0.000
     -0.500|      0.000      0.000     -0.250      0.250     -0.500      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (3,3)
     -2.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000     -3.000
-----------+-------------------------------------------------------------------
      0.000|      1.000      0.000      0.000      1.000     -1.000      3.000
      0.000|      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000
      2.000|     -0.000     -0.000      1.000     -1.000      2.000     -4.000

Tableau ottimo
     -2.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000     -3.000
-----------+-------------------------------------------------------------------
      0.000|      1.000      0.000      0.000      1.000     -1.000      3.000
      0.000|      0.000      1.000      0.000      0.000      0.000      1.000
      2.000|     -0.000     -0.000      1.000     -1.000      2.000     -4.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -2.0000

X(   1):     0.0000
X(   2):     0.0000
X(   3):     2.0000
```

e) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

   i. $\lambda_1 = 0$;

   ii. $\lambda_1 = -2$.

   Come primo passo scriviamo il problema Lagrangiano. Si noti che nel testo il vincolo (1) è della forma "$\leq$", quindi le penalità λ devono essere non-positive (in alternativa ci si potrebbe riportare al caso "$-2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -2$"):

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(\lambda) = \text{Min } (-2-2\lambda)x_1 + (-1+2\lambda)x_2 + (-1-\lambda)x_3 + 2\lambda \\ \qquad\quad \text{s.t.} \quad +x_1 + x_2 + x_3 \leq +2 \qquad (2) \\ \qquad\qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \;\; \text{intere} \qquad (3) \end{cases}$$

Ora consideriamo i due casi proposti:

i. $\lambda_1 = 0;$

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(0) = \text{Min } (-2)x_1 + (-1)x_2 + (-1)x_3 - 0 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 + x_2 + x_3 \leq +2 & (2) \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ \text{ intere} & (3) \end{cases}$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(0) = -4$.

Il subgradiente sarà $s = 2 - 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$. Dopodiché, si aggiorna la penalità Lagrangiana:

$$\lambda = \min\{0, \lambda + \theta s\} = \min\{0, 0 - \theta 2\}$$

Si scelga un θ a piacere.

ii. $\lambda_1 = -2.$

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(-2) = \text{Min } (2)x_1 + (-5)x_2 + (1)x_3 - 4 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 + x_2 + x_3 \leq +2 & (2) \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ \text{ intere} & (3) \end{cases}$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(-2) = -14$.

Il subgradiente sarà $s = 2 - 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$. Dopodiché, si aggiorna la penalità Lagrangiana:

$$\lambda = \min\{0, \lambda + \theta s\} = \min\{0, -2 + \theta 6\}$$

Si scelga un θ a piacere.

6) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = +x_1 + x_2 + 3x_3 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 - x_2 - x_3 \leq +1 & (1) \\ \quad\quad +x_1 + x_2 + x_3 \geq +1 & (2) \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (3) \end{cases}$$

a) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

i. $\lambda_1 = 0;$

ii. $\lambda_1 = -2.$

Come primo passo scriviamo il problema Lagrangiano. Si noti che nel testo il vincolo (1) è della forma "$\leq$", quindi le penalità λ devono essere non-positive (in alternativa ci si potrebbe riportare al caso "$-x_1 + x_2 + x_3 \geq -1$"):

$$
(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(\lambda) = \text{Min } (1-\lambda)x_1 + (1+\lambda)x_2 + (3+\lambda)x_3 + \lambda \\ \qquad\qquad \text{s.t.} \qquad +x_1 + x_2 + x_3 \geq +1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

Ora consideriamo i due casi proposti:

i. $\lambda_1 = 0$;

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$
(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(0) = \text{Min } (1)x_1 + (1)x_2 + (3)x_3 + 0 \\ \qquad\qquad \text{s.t.} \qquad +x_1 + x_2 + x_3 \geq +1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(0) = 1$ (si noti che poteva essere scelta anche la soluzione $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$).

Il subgradiente sarà $s = 1 - x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Si noti che la soluzione è ammissibile e che $\lambda(b - Ax) = \lambda s = 0$, quindi la soluzione è ottima.

ii. $\lambda_1 = -2$.

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$
(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(-2) = \text{Min } (3)x_1 + (-1)x_2 + (1)x_3 - 2 \\ \qquad\qquad \text{s.t.} \qquad +x_1 + x_2 + x_3 \geq +1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(-2) = -3$.

Il subgradiente sarà $s = 1 - x_1 + x_2 + x_3 = 2$. Dopodiché, si aggiorna la penalità Lagrangiana:

$$
\lambda = \min\{0, \lambda + \theta s\} = \min\{0, -2 + \theta 2\}
$$

Si scelga un θ a piacere.

b) Rilassare in modo Lagrangiano i vincoli (1) e (2) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

i. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$;

ii. $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = +1$.

Come primo passo scriviamo il problema Lagrangiano, in cui $\lambda_1 \leq 0$ e $\lambda_2 \geq 0$:

$$
(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(\lambda) = \text{Min } (1-\lambda_1-\lambda_2)x_1 + (1+\lambda_1-\lambda_2)x_2 + (3+\lambda_1-\lambda_2)x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ \qquad\qquad \text{s.t.} \qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

Ora consideriamo i due casi proposti:

i. $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$;

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(0{,}0) = \text{Min } (1)x_1 + (1)x_2 + (3)x_3 + 0 \\ \quad\quad \text{s.t.} \quad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0{,}1\} \quad\quad (3) \end{cases}$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(0{,}0) = 0$. Il subgradiente avrà componenti $s_1 = 1 - x_1 + x_2 + x_3 = 1$ e $s_2 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 = 1$. Dopodiché, si aggiornano le penalità Lagrangiane:

$$\lambda_1 = \min\{0, \lambda_1 + \theta s_1\} = \min\{0{,}0 + \theta 1\}$$
$$\lambda_2 = \max\{0, \lambda_2 + \theta s_2\} = \max\{0{,}0 + \theta 1\}$$

Si scelga un θ a piacere.

ii. $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = +1$.

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(-1, +1) = \text{Min } (1)x_1 + (-1)x_2 + (1)x_3 - 1 + 1 \\ \quad\quad \text{s.t.} \quad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0{,}1\} \quad\quad (3) \end{cases}$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(-1, +1) = -1$.

Il subgradiente avrà componenti $s_1 = 1 - x_1 + x_2 + x_3 = 2$ e $s_2 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Dopodiché, si aggiornano le penalità Lagrangiane:

$$\lambda_1 = \min\{0, \lambda_1 + \theta s_1\} = \min\{0, -1 + \theta 2\}$$
$$\lambda_2 = \max\{0, \lambda_2 + \theta s_2\} = \max\{0, +1 + \theta 0\} = 1$$

Si scelga un θ a piacere.

7) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Max } z = +9x_1 + 4x_2 + 15x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad +3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq +5 \quad\quad (1) \\ \quad\quad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0{,}1\} \quad\quad (2) \end{cases}$$

Si noti che si vuole massimizzare la funzione obiettivo.

a) Risolvere il rilassamento lineare del problema P (i.e., il problema ottenuto rilassando i vincoli di interezza).

In questo caso potremo usare un qualsiasi metodo per risolvere un problema di programmazione lineare, però il problema **P** corrisponde al knapsack problem per cui è sufficiente calcolare i seguenti rapporti: $r_1 = \frac{9}{3} = 3$, $r_2 = \frac{4}{2} = 2$ e $r_3 = \frac{15}{4} = 3.75$, per cui possiamo definire la seguente soluzione: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$ (abbiamo preso tutto x_3

occupando 4 unità del knapsack lasciando solo una unità libera, che può essere occupata da $\frac{1}{3}$ di x_1). Il valore della soluzione ottima del rilassamento continuo sarà $z_{LP} = 18$.

b) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali:

   i. $\lambda_1 = 0$;
   ii. $\lambda_1 = -2$;
   iii. $\lambda_1 = -3$.

   Come primo passo scriviamo il problema Lagrangiano. Si noti che il vincolo (1) è della forma "$\leq$", quindi le penalità λ devono essere non-positive (in alternativa ci si potrebbe riportare al caso "$-3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \geq -5$"), inoltre la funzione obiettivo è di massimo. Nella soluzione abbiamo trasformato la funzione obiettivo in un minimo (cambiando i segni):

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(\lambda) = \text{Min } (-9-3\lambda)x_1 + (-4-2\lambda)x_2 + (-15-4\lambda)x_3 + 5\lambda \\ \qquad \text{s.t.} \qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (2) \end{cases}$$

   Ora consideriamo i due casi proposti:

   i. $\lambda_1 = 0$;

   Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(0) = \text{Min } (-9)x_1 + (-4)x_2 + (-15)x_3 + 0 \\ \qquad \text{s.t.} \qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (2) \end{cases}$$

   Per cui la soluzione sarà $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$, mentre $z_{LR}(0) = -28$. Il subgradiente sarà $s = 5 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4$. Dopodiché, si aggiornano le penalità Lagrangiane:

$$\lambda = \min\{0, \lambda + \theta s\} = \min\{0, 0 + \theta(-4)\}$$

   Si scelga un θ a piacere.

   ii. $\lambda_1 = -2$.

   Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(-2) = \text{Min } (-3)x_1 + (0)x_2 + (-7)x_3 - 10 \\ \qquad \text{s.t.} \qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (2) \end{cases}$$

   Per cui la soluzione sarà $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, mentre $z_{LR}(-2) = -20$ (si noti che poteva essere scelta anche la soluzione $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$). Il subgradiente sarà $s = 5 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -2$. Dopodiché, si aggiornano le penalità Lagrangiane:

$$\lambda = \min\{0, \lambda + \theta s\} = \min\{0, -2 + \theta(-2)\}$$

   Si scelga un θ a piacere.

iii. $\lambda_1 = -3.$

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(-3) = \text{Min } (0)x_1 + (2)x_2 + (-3)x_3 - 15 \\ \quad\text{s.t.} \quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \quad (2) \end{cases}$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, mentre $z_{LR}(-3) = -18$ (si noti che poteva essere scelta anche la soluzione $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$). Il subgradiente sarà $s = 5 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1$. Dopodiché, si aggiornano le penalità Lagrangiane:

$$\lambda = \min\{0, \lambda + \theta s\} = \min\{0, -3 + \theta(1)\}$$

Si scelga un θ a piacere.