Esame Ricerca Operativa

20 giugno 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:__________________________________**Matricola:**____________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- **Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati.** Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri una rete logistica per trasportare delle merci da dei punti di produzione a dei punti di vendita utilizzando anche dei punti di transito.
La rete logistica è rappresentata da un grafo $G(V, A)$ in cui l'insieme dei vertici V rappresenta i punti di produzione, di vendita e di transito, mentre gli archi $(i, j) \in A$ rappresentano i canali disponibili per trasportare le merci. Per ciascun vertice $i \in V$ abbiamo che $b_i > 0$ unità di merce sono "disponibili" se i è un punto di produzione, oppure $b_i < 0$ unità di merce sono "richieste" se i è un punto di vendita, mentre $b_i = 0$ se i è un punto di transito. Trasportare una unità di merce dal vertice i al vertice j utilizzando l'arco $(i, j) \in A$ prevede un costo pari a c_{ij}, mentre la quantità massima di merce trasportata da i a j non può superare la quantità u_{ij}.
Si vuole determinare come trasportare le merci nella rete logistica per soddisfare tutte le richieste dei punti di vendita utilizzando le merci disponibili nei punti di produzione minimizzando il costo complessivo.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = +2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ \qquad +4x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ \qquad x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = (0,1,2)$ è ottima per il problema **P**. (6 punti)

4) Si consideri il seguente problema **P**:

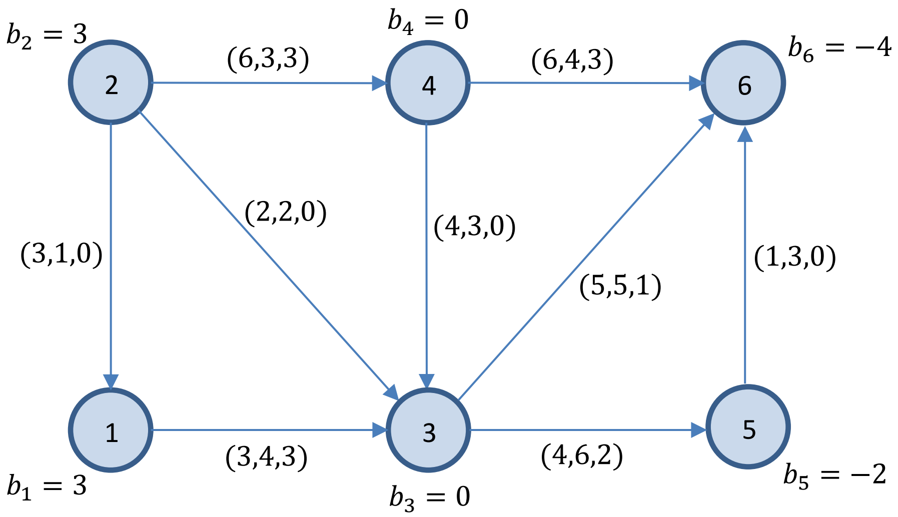
$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.}\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ \text{intere} \end{cases}$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) con il metodo del Simplesso abbiamo ottenuto il seguente tableau ottimo:

```
Tableau ottimo
      3.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000
-----------+-----------------------------------------------------
      7.000|      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000
      5.500|      1.500      0.000      1.000     -0.500      1.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:      3.0000

X(   2):      7.0000
X(   3):      5.5000
```

a) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema **P** (i.e., nodo radice), svolgere una iterazione dell'algoritmo branch and bound, in particolare:
- definire i nodi figli e i problemi corrispondenti; (1 punto)
- selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto). (5 punti)

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente. (6 punti)

6) Dato il problema $z_P = \min\{\mathbf{cx} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, rilassando i vincoli $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ in modo Lagrangiano si ottiene la Funzione Langragiana $z_{LR}(\boldsymbol{\lambda}) = \min\{\mathbf{cx} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})\}$.

a) Dimostrare che la Funzione Langragiana $z_{LR}(\boldsymbol{\lambda})$ è concava. (3 punti)