Esame Ricerca Operativa

12 Luglio 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____Matricola:______________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri una rete logistica per trasportare delle merci da dei depositi a dei punti di vendita con dei trasporti diretti (un viaggio diretto dal deposito al punto di vendita senza soste intermedie in altri depositi o punti di vendita).

La rete logistica è rappresentata da un grafo $G(V, A)$ bipartito in cui l'insieme dei vertici V è partizionato nell'insieme dei depositi V_D e in quello dei punti di vendita V_P ($V = V_D \cup V_P$ e $V_D \cap V_P = \emptyset$), mentre gli archi $(i, j) \in A$ rappresentano i canali disponibili per trasportare le merci da un deposito a un punto di vendita (dato un arco $(i, j) \in A$, $i \in V_D$ e $j \in V_P$).

Per ogni deposito $i \in V_D$ abbiamo una quantità di merce a_i disponibile, per ogni punto vendita $j \in V_P$ abbiamo una quantità b_j richiesta e ad ogni arco $(i, j) \in A$ è associato un costo c_{ij} per trasportare una unità di merce dal deposito i al punto vendita j.

Si vuole determinare come trasportare le merci nella rete logistica per soddisfare tutte le richieste dei punti di vendita utilizzando le merci disponibili nei depositi minimizzando il costo complessivo.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

Per formulare matematicamente il problema definiamo le variabili decisionali binarie x_{ij}, ciascuna delle quali indicherà quante unità di merce sono trasportate dal deposito i al punto di vendita j.

Un possibile modello matematico è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = a_i, \qquad i \in V_D \\
& \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = b_j, \qquad j \in V_P \\
& x_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = +x_1 - x_2 - x_3 \\ \quad \text{s.t. } -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ \quad\quad -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|     -1.000      1.000      1.000      0.000
-----------+--------------------------------------------
      2.000|     -1.000      2.000     -1.000      1.000
      1.000|      2.000     -3.000      1.000     -0.000

Tableau Fase 1: iniziale
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|     -1.000      2.000     -1.000      1.000      0.000
      1.000|      2.000     -3.000      1.000     -0.000      1.000

Tableau Fase 1: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      1.000|      2.000     -3.000      1.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|     -1.000      2.000     -1.000      1.000      0.000
      1.000|      2.000     -3.000      1.000     -0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,1)
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.500|      0.000      0.500     -0.500      1.000      0.500
      0.500|      1.000     -1.500      0.500     -0.000      0.500

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.500|      0.000      0.500     -0.500      1.000      0.500
      0.500|      1.000     -1.500      0.500     -0.000      0.500

Tableau Fase 2: iniziale
      0.000|     -1.000      1.000      1.000     -0.000
-----------+--------------------------------------------
      2.500|      0.000      0.500     -0.500      1.000
      0.500|      1.000     -1.500      0.500     -0.000

Tableau Fase 2: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      0.500|      0.000     -0.500      1.500     -0.000
-----------+--------------------------------------------
      2.500|      0.000      0.500     -0.500      1.000
      0.500|      1.000     -1.500      0.500     -0.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,3)
     -1.000|     -3.000      4.000      0.000      0.000
-----------+--------------------------------------------
      3.000|      1.000     -1.000      0.000      1.000
      1.000|      2.000     -3.000      1.000     -0.000

Numero Iterazioni: 1
```

```
Tableau Ottimo Fase 2
     -1.000|     -3.000      4.000      0.000      0.000
-----------+--------------------------------------------
      3.000|      1.000     -1.000      0.000      1.000
      1.000|      2.000     -3.000      1.000     -0.000

Soluzione Illimitata!
```

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

Il duale **D** del problema **P** è il seguente:

$$(\mathbf{D})\quad \begin{cases} \max z = 2w_1 - 1w_2 \\ \quad \text{s.t.}\;\; -w_1 - 2w_2 \le 1 \\ \qquad\quad 2w_1 + 3w_2 \le -1 \\ \qquad\quad -w_1 - w_2 \le -1 \\ \qquad\quad w_1 \le 0,\; w_2 \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \quad \text{s.t.}\;\; -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \ge 4 \\ \qquad\quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Duale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      1.000     -2.000      2.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      4.000|     -1.000      2.000     -2.000     -1.000      0.000
      4.000|      2.000     -1.000      2.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!
 -20000.000|     -1.000     -4.000      0.000      0.000      0.000     -2.000
-----------+------------------------------------------------------------------
 -20004.000|     -1.000     -4.000      0.000      1.000     -0.000     -2.000
 -19996.000|      0.000     -3.000      0.000      0.000      1.000     -2.000
  10000.000|      1.000      1.000      1.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)
      4.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
  20004.000|      1.000      4.000     -0.000     -1.000      0.000      2.000
 -19996.000|      0.000     -3.000      0.000      0.000      1.000     -2.000
 -10004.000|      0.000     -3.000      1.000      1.000      0.000     -1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
      4.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
  -6657.333|      1.000      0.000      0.000     -1.000      1.333     -0.667
   6665.333|     -0.000      1.000     -0.000     -0.000     -0.333      0.667
   9992.000|      0.000      0.000      1.000      1.000     -1.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,6)
      4.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
   9986.000|     -1.500     -0.000     -0.000      1.500     -2.000      1.000
      8.000|      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000      0.000
      6.000|      1.500      0.000      1.000     -0.500      1.000      0.000

Tableau ottimo?
      4.000|      0.000      0.000      0.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
   9986.000|     -1.500     -0.000     -0.000      1.500     -2.000      1.000
      8.000|      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000      0.000
      6.000|      1.500      0.000      1.000     -0.500      1.000      0.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     4.0000

X(   2):     8.0000
X(   3):     6.0000
```

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \text{Min } z = +2x_1 + 4x_2 + x_3 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 & (1) \\ \qquad\qquad +2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 & (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (3) \end{cases}
$$

a) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali: (6 punti)
   i. $\lambda_1 = 0$;
   ii. $\lambda_1 = 4$.

Come primo passo scriviamo il problema Lagrangiano. Si noti che nel testo il vincolo (1) è della forma "≥", quindi le penalità λ devono essere non-negative ($\lambda \geq 0$):

$$
(\mathbf{LR})\quad \begin{cases} z_{LR}(\lambda) = \text{Min } (2-\lambda)x_1 + (4-\lambda)x_2 + (1-\lambda)x_3 + 2\lambda & \\ \qquad \text{s.t.} \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 & (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (3) \end{cases}
$$

Ora consideriamo i due casi proposti:

i. $\lambda_1 = 0$;

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$
(\mathbf{LR})\quad \begin{cases} z_{LR}(0) = \text{Min } (2)x_1 + (4)x_2 + (1)x_3 + 0 & \\ \qquad \text{s.t.} \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 & (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (3) \end{cases}
$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(0) = 0$.

Il subgradiente sarà $s = 2 - x_1 - x_2 - x_3 = 2$. Dopodiché, si aggiorna la penalità Lagrangiana:

$$\lambda = \max\{0, \lambda + \theta s\} = \max\{0, 0 + 2\theta\}$$

Si scelga un θ a piacere.

ii. $\lambda_1 = 4$.

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

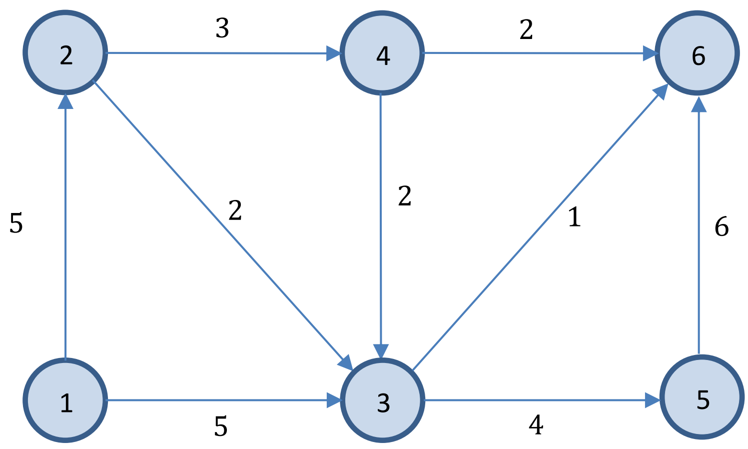
$$
(\mathbf{LR})\quad \begin{cases} z_{LR}(2) = \text{Min } (-2)x_1 + (0)x_2 + (-3)x_3 + 8 & \\ \qquad \text{s.t.} \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 & (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (3) \end{cases}
$$

Si noti che il vincolo (2) impone che per scegliere $x_1 = 1$ si è costretti a fissare $x_2 = 1$; inoltre, sempre per il vincolo (2), se $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, allora $x_3 = 0$. In questo caso la soluzione $\mathbf{x} = (1,1,0)$ è meno conveniente della soluzione $\mathbf{x} = (0,0,1)$. Tra le rimanenti, la soluzione $\mathbf{x} = (0,1,1)$ è equivalente a $\mathbf{x} = (0,0,1)$.

Per cui, abbiamo due soluzioni equivalenti $\mathbf{x} = (0,0,1)$ e $\mathbf{x} = (0,1,1)$, entrambe con $z_{LR}(2) = +5$:

- Per la soluzione $\mathbf{x} = (0,0,1)$ il subgradiente è $s = 2 - x_1 - x_2 - x_3 = 1$. Dopodiché, si aggiorna la penalità Lagrangiana:
$$\lambda = \max\{0, \lambda + \theta s\} = \max\{0{,}4 + \theta\}$$
Il passo θ può essere scelto a piacere.
- Per la soluzione $\mathbf{x} = (0,1,1)$ il subgradiente è $s = 2 - x_1 - x_2 - x_3 = 0$, per cui si può notare che la soluzione è ammissibile e che $\lambda s = 0$, quindi per il Teorema della Dualità Lagrangiana Forte possiamo dire che la soluzione $\mathbf{x} = (0,1,1)$ è ottima.

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la capacità u_{ij}.

a) Determinare il flusso massimo dal vertice $s = 1$ al vertice $t = 6$. (4 punti)

```
Algoritmo Flusso Massimo

Grafo Iniziale Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=0 x(1,3)=0
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,4)=0
Nodo 3: x(3,5)=0 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,6)=0

Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,5]
Etichetta nodo 3: [1,5]
Etichetta nodo 4: [2,3]
Etichetta nodo 5: [3,4]
Etichetta nodo 6: [3,1]
Aumenta il flusso di 1 nel cammino:(1,3) (3,6)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,5]
Etichetta nodo 3: [1,4]
Etichetta nodo 4: [2,3]
Etichetta nodo 5: [3,4]
Etichetta nodo 6: [4,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,2) (2,4) (4,6)
```

```
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,3]
Etichetta nodo 3: [1,4]
Etichetta nodo 4: [2,1]
Etichetta nodo 5: [3,4]
Etichetta nodo 6: [5,4]
Aumenta il flusso di 4 nel cammino:(1,3) (3,5) (5,6)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,3]
Etichetta nodo 3: [2,2]
Etichetta nodo 4: [2,1]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 4

Risultato Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=2 x(1,3)=5
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,4)=2
Nodo 3: x(3,5)=4 x(3,6)=1
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=2
Nodo 5: x(5,6)=4

Flusso Massimo = 7
```

b) Data la soluzione ottima calcolata al punto (a), determinare il "*Taglio s-t di capacità minima*" e indicare il metodo impiegato per determinarlo. (2 punti)
Il taglio s-t di capacità minima si può determinare includendo nell'insieme S tutti i vertici etichettati e in $\bar{S}$ quelli non etichettati nell'ultima iterazione dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson. Nel caso dell'esercizio abbiamo che $S = \{1,2,3,4\}$ e $\bar{S} = \{5,6\}$.

6) Si consideri il Knapsack Problem 0-1.

a) Scrivere il modello di programmazione lineare intera. (1 punti)

- Il modello matematico classico per il problema del knapsack (0–1) è il seguente:

$$(KP) \qquad z_{KP} = \max \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$s.t. \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W$$
$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

b) Scrivere l'algoritmo esatto di Programmazione Dinamica. (2 punti)

- La Programmazione Dinamica per risolve il problema del knapsack (0–1) prevede $n+1$ stadi (il numero di oggetti + 1) e ad ogni stadio un numero di stati pari a $W+1$ (la capacità del knapsack + 1).
- Ad ogni stadio $j \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni stato $w \in \{0, \ldots, W\}$ si risolve il seguente sottoproblema:

$$(KP_j(w)) \qquad z_j(w) = \max \sum_{i=1}^{j} p_i x_i$$
$$s.t. \sum_{i=1}^{j} w_i x_i \leq w$$
$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, j$$

- Risolvere per ogni stato w dello stadio j i problemi $KP_j(w)$ equivale a utilizzare la seguente recursione:
  (a) Inizializza $KP_0(w) = 0$, per ogni $w \in \{0, \dots, W\}$;
  (b) Ad ogni stadio $j \in \{1, \dots, n\}$ e per ogni stato $w \in \{0, \dots, W\}$, calcola la seguente recursione:

$$z_j(w) = \begin{cases} z_{j-1}(w), & \text{if } w < w_j \\ \max\left\{z_{j-1}(w), z_{j-1}(w - w_j) + p_j\right\}, & \text{if } w \geq w_j \end{cases}$$