

Esercizi

Programmazione Lineare

1) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min z = -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } +x_1 + x_2 + 2x_3 \leq +4 \\ \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq +2 \\ \quad -x_1 + x_2 + x_3 \geq -2 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplex Primale.

Tableau Iniziale!						
0.000	2.000	1.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
4.000	1.000	1.000	2.000	1.000	0.000	0.000
2.000	-1.000	2.000	1.000	0.000	1.000	0.000
2.000	1.000	-1.000	-1.000	-0.000	-0.000	1.000

Tableau dopo aver pivotato su (3,1)						
-4.000	0.000	3.000	1.000	0.000	0.000	-2.000
2.000	0.000	2.000	3.000	1.000	0.000	-1.000
4.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.000	1.000
2.000	1.000	-1.000	-1.000	-0.000	-0.000	1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,2)						
-7.000	0.000	0.000	-3.500	-1.500	0.000	-0.500
1.000	0.000	1.000	1.500	0.500	0.000	-0.500
3.000	0.000	0.000	-1.500	-0.500	1.000	1.500
3.000	1.000	0.000	0.500	0.500	0.000	0.500

Numero Iterazioni: 2

Tableau Ottimo						
-7.000	0.000	0.000	-3.500	-1.500	0.000	-0.500
1.000	0.000	1.000	1.500	0.500	0.000	-0.500
3.000	0.000	0.000	-1.500	-0.500	1.000	1.500
3.000	1.000	0.000	0.500	0.500	0.000	0.500

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: -7.0000

X(1): 3.0000
X(2): 1.0000

b) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplex Duale.

Tableau Iniziale!						
0.000	2.000	1.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
4.000	1.000	1.000	2.000	1.000	0.000	0.000
2.000	-1.000	2.000	1.000	0.000	1.000	0.000
-2.000	-1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	-1.000

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!						
-20000.000	0.000	-1.000	-3.000	0.000	0.000	0.000
-9996.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000
10002.000	0.000	3.000	2.000	0.000	1.000	0.000
-9998.000	0.000	-2.000	-2.000	-0.000	-0.000	1.000
10000.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000

Tableau dopo aver pivotato su (3,2)							
-15001.000	0.000	0.000	-2.000	0.000	0.000	-0.500	-1.500
-9996.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000	0.000	-1.000
-4995.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	1.000	1.500	-0.500
4999.000	-0.000	1.000	1.000	0.000	0.000	-0.500	0.500
5001.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.500	0.500

Tableau dopo aver pivotato su (1,7)							
-7.000	0.000	0.000	-3.500	-1.500	0.000	-0.500	0.000
9996.000	-0.000	-0.000	-1.000	-1.000	-0.000	-0.000	1.000
3.000	0.000	0.000	-1.500	-0.500	1.000	1.500	0.000
1.000	0.000	1.000	1.500	0.500	0.000	-0.500	0.000
3.000	1.000	0.000	0.500	0.500	0.000	0.500	0.000

Tableau ottimo?							
-7.000	0.000	0.000	-3.500	-1.500	0.000	-0.500	0.000
9996.000	-0.000	-0.000	-1.000	-1.000	-0.000	-0.000	1.000
3.000	0.000	0.000	-1.500	-0.500	1.000	1.500	0.000
1.000	0.000	1.000	1.500	0.500	0.000	-0.500	0.000
3.000	1.000	0.000	0.500	0.500	0.000	0.500	0.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: -7.0000

X(1): 3.0000
X(2): 1.0000

c) Scrivere il duale di P.

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 4w_1 + 2w_2 - 2w_3 \\ \text{s.t. } +w_1 - w_2 - w_3 \leq -2 \\ \quad +w_1 + 2w_2 + w_3 \leq -1 \\ \quad +2w_1 + w_2 + w_3 \leq +1 \\ \quad w_1, w_2 \leq 0, w_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

d) Verificare l'ottimalità della soluzione trovata con le condizioni di complementarietà.

La soluzione trovata è $\mathbf{x} = (3, 1, 0)$. Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione:

$$\begin{cases} +x_1 + x_2 + 2x_3 \leq +4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq +2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 1 = 4 \\ -3 + 2 < 2 \\ -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile. Inoltre, il secondo vincolo non è saturo, quindi per gli scarti complementari $w_2 = 0$.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$, allora i primi due vincoli del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} +w_1 - w_2 - w_3 = -2 \\ +w_1 + 2w_2 + w_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +w_1 - w_3 = -2 \\ +w_1 + w_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +w_1 = w_3 - 2 \\ w_3 - 2 + w_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +w_1 = w_3 - 2 \\ 2w_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -\frac{3}{2} \\ w_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale rispetta i vincoli di segno e anche il terzo vincolo duale, allora la soluzione $\mathbf{x} = (3, 1, 0)$ è ottima.

2) Si consideri il seguente problema P:

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } +x_1 + x_2 - 2x_3 \geq +1 \\ \quad +x_1 + x_2 - x_3 \leq +3 \\ \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -2 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema P utilizzando il metodo del Simplex Primale.

Tableau Iniziale!							
0.000	2.000	-2.000	-2.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.000	1.000	1.000	-2.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
3.000	1.000	1.000	-1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
2.000	1.000	1.000	-3.000	-0.000	-0.000	1.000	0.000

Tableau Fase 1							
1.000	1.000	1.000	-2.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
1.000	1.000	1.000	-2.000	-1.000	0.000	0.000	1.000
3.000	1.000	1.000	-1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
2.000	1.000	1.000	-3.000	-0.000	-0.000	1.000	0.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)							
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
1.000	1.000	1.000	-2.000	-1.000	0.000	0.000	1.000
2.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	-1.000
1.000	0.000	0.000	-1.000	1.000	-0.000	1.000	-1.000

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1							
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
1.000	1.000	1.000	-2.000	-1.000	0.000	0.000	1.000
2.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	-1.000
1.000	0.000	0.000	-1.000	1.000	-0.000	1.000	-1.000

Tableau Fase 2							
-2.000	0.000	-4.000	2.000	2.000	-0.000	-0.000	
1.000	1.000	1.000	-2.000	-1.000	0.000	0.000	
2.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	
1.000	0.000	0.000	-1.000	1.000	-0.000	1.000	

Tableau dopo aver pivotato su (2,3)							
-6.000	0.000	-4.000	0.000	0.000	-2.000	-0.000	
5.000	1.000	1.000	0.000	1.000	2.000	0.000	
2.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	
3.000	0.000	0.000	0.000	2.000	1.000	1.000	

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 2							
-6.000	0.000	-4.000	0.000	0.000	-2.000	-0.000	
5.000	1.000	1.000	0.000	1.000	2.000	0.000	
2.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	
3.000	0.000	0.000	0.000	2.000	1.000	1.000	

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: -6.0000

X(1): 5.0000
X(3): 2.0000

b) Risolvere il problema P utilizzando il metodo del Simplex Duale.

Tableau Iniziale!							
0.000	2.000	-2.000	-2.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.000	1.000	1.000	-2.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
3.000	1.000	1.000	-1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
-2.000	-1.000	-1.000	3.000	0.000	0.000	-1.000	

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!							
-20000.000	0.000	-4.000	-4.000	0.000	0.000	0.000	-2.000

9999.000	0.000	0.000	3.000	1.000	0.000	0.000	1.000
-9997.000	0.000	0.000	-2.000	0.000	1.000	0.000	-1.000
-9998.000	0.000	0.000	-4.000	-0.000	-0.000	1.000	-1.000
10000.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
Tableau dopo aver pivotato su (3,3)							
-10002.000	0.000	-4.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1.000

2500.500	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.750	0.250
-4998.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	-0.500	-0.500
2499.500	-0.000	-0.000	1.000	0.000	0.000	-0.250	0.250
7500.500	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.250	0.750
Tableau dopo aver pivotato su (2,6)							
-6.000	0.000	-4.000	0.000	0.000	-2.000	0.000	0.000

-4996.500	0.000	0.000	0.000	1.000	1.500	0.000	-0.500
9996.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-2.000	1.000	1.000
4998.500	-0.000	-0.000	1.000	0.000	-0.500	0.000	0.500
5001.500	1.000	1.000	0.000	0.000	0.500	0.000	0.500
Tableau dopo aver pivotato su (1,7)							
-6.000	0.000	-4.000	0.000	0.000	-2.000	0.000	0.000

9993.000	-0.000	-0.000	-0.000	-2.000	-3.000	-0.000	1.000
3.000	0.000	0.000	0.000	2.000	1.000	1.000	0.000
2.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000
5.000	1.000	1.000	0.000	1.000	2.000	0.000	0.000
Tableau ottimo?							
-6.000	0.000	-4.000	0.000	0.000	-2.000	0.000	0.000

9993.000	-0.000	-0.000	-0.000	-2.000	-3.000	-0.000	1.000
3.000	0.000	0.000	0.000	2.000	1.000	1.000	0.000
2.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000
5.000	1.000	1.000	0.000	1.000	2.000	0.000	0.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: -6.0000

X(1): 5.0000
X(3): 2.0000

c) Scrivere il duale di P.

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max z = w_1 + 3w_2 - 2w_3 \\ \text{s.t. } +w_1 + w_2 - w_3 \leq -2 \\ \quad +w_1 + w_2 - w_3 \leq +2 \\ \quad -2w_1 - w_2 + 3w_3 \leq +2 \\ \quad w_1, w_3 \geq 0, w_2 \leq 0 \end{array} \right.$$

d) Verificare l'ottimalità delle soluzioni trovate con le condizioni di complementarietà.

La soluzione trovata è $\mathbf{x} = (5, 0, 2)$. Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione:

$$\begin{cases} +x_1 + x_2 - 2x_3 \geq +1 \\ +x_1 + x_2 - x_3 \leq +3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - 4 = 1 \\ 5 - 2 = 3 \\ -5 + 6 > -2 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile. Inoltre, il terzo vincolo non è saturo, quindi per gli scarti complementari $w_3 = 0$.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 5$ e $x_3 = 2$, allora il primo e il terzo vincolo del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} +w_1 + w_2 - w_3 = -2 \\ -2w_1 - w_2 + 3w_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +w_1 + w_2 = -2 \\ -2w_1 - w_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -w_2 - 2 \\ 2w_2 + 4 - w_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = -w_2 - 2 \\ w_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = -2 \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale rispetta i vincoli di segno e anche il secondo vincolo duale, allora la soluzione $\mathbf{x} = (5, 0, 2)$ è ottima.

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } +2x_1 + x_2 - x_3 \geq +1 \\ \quad +x_1 + x_2 + 3x_3 \leq +4 \\ \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 \geq +1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$ è ottima per il problema P.

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$:

$$\begin{cases} +2x_1 + x_2 - x_3 \geq +1 \\ +x_1 + x_2 + 3x_3 \leq +4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \geq +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{5} - \frac{3}{5} = 1 \\ \frac{4}{5} + \frac{9}{5} < 4 \\ -\frac{4}{5} + \frac{9}{5} = 1 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammssibile.

Il duale del problema **P** è il seguente:

$$(D) \quad \begin{cases} \max z = w_1 + 4w_2 + w_3 \\ \text{s.t. } +2w_1 + w_2 - w_3 \leq -2 \\ \quad +w_1 + w_2 - w_3 \leq +2 \\ \quad -w_1 + 3w_2 + 3w_3 \leq +2 \\ \quad w_1, w_2 \geq 0, w_3 \leq 0 \end{cases}$$

Il secondo vincolo del primale non è saturo, quindi per gli scarti complementari $w_2 = 0$.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = \frac{4}{5}$ e $x_3 = \frac{3}{5}$, allora il primo e il terzo vincolo del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} +2w_1 + w_2 - w_3 = -2 \\ -w_1 + 3w_2 + 3w_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +2w_1 - w_3 = -2 \\ -w_1 + 3w_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = 2w_1 + 2 \\ -w_1 + 6w_1 + 6 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 = 2w_1 + 2 \\ 5w_1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = -\frac{8}{5} + 2 = \frac{2}{5} \\ w_1 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale NON rispetta i vincoli di segno, allora la soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$ NON è ottima.

4) Si consideri il seguente problema P:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = +5x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{s.t. } +2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq +2 \\ \quad \quad \quad +4x_1 + 4x_2 + x_3 \leq +4 \\ \quad \quad \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \geq +1 \\ \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

a) Risolvere il problema P utilizzando il metodo del Simplex Primale.

Tableau Iniziale!

0.000	-5.000	-4.000	1.000	0.000	0.000	0.000
2.000	2.000	1.000	-3.000	1.000	0.000	0.000
4.000	4.000	4.000	1.000	0.000	1.000	0.000
1.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	0.000	-1.000

Tableau Fase 1

1.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	0.000	-1.000	0.000
2.000	2.000	1.000	-3.000	1.000	0.000	0.000	0.000
4.000	4.000	4.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
1.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	0.000	-1.000	1.000

Tableau dopo aver pivotato su (3,1)

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
1.000	0.000	2.000	-4.000	1.000	0.000	1.000	-1.000
2.000	0.000	6.000	-1.000	0.000	1.000	2.000	-2.000
0.500	1.000	-0.500	0.500	0.000	0.000	-0.500	0.500

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
1.000	0.000	2.000	-4.000	1.000	0.000	1.000	-1.000
2.000	0.000	6.000	-1.000	0.000	1.000	2.000	-2.000
0.500	1.000	-0.500	0.500	0.000	0.000	-0.500	0.500

Tableau Fase 2

2.500	0.000	-6.500	3.500	0.000	0.000	-2.500
1.000	0.000	2.000	-4.000	1.000	0.000	1.000
2.000	0.000	6.000	-1.000	0.000	1.000	2.000
0.500	1.000	-0.500	0.500	0.000	0.000	-0.500

Tableau dopo aver pivotato su (3,3)

-1.000	-7.000	-3.000	0.000	0.000	0.000	1.000
5.000	8.000	-2.000	0.000	1.000	0.000	-3.000
3.000	2.000	5.000	0.000	0.000	1.000	1.000
1.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	0.000	-1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,6)

-4.000	-9.000	-8.000	0.000	0.000	-1.000	0.000
14.000	14.000	13.000	0.000	1.000	3.000	0.000
3.000	2.000	5.000	0.000	0.000	1.000	1.000
4.000	4.000	4.000	1.000	0.000	1.000	0.000

Numero Iterazioni: 2

Tableau Ottimo Fase 2

-4.000	-9.000	-8.000	0.000	0.000	-1.000	0.000
14.000	14.000	13.000	0.000	1.000	3.000	0.000
3.000	2.000	5.000	0.000	0.000	1.000	1.000
4.000	4.000	4.000	1.000	0.000	1.000	0.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: -4.0000

X(3): 4.0000

b) Risolvere il problema P utilizzando il metodo del Simplex Duale.

Tableau Iniziale!							
0.000	-5.000	-4.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.000	2.000	1.000	-3.000	1.000	0.000	0.000	0.000
4.000	4.000	4.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
1.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	0.000	-1.000	
Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!							
-10000.000	-6.000	-5.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
30002.000	5.000	4.000	0.000	1.000	0.000	0.000	3.000
-9996.000	3.000	3.000	0.000	0.000	1.000	0.000	-1.000
9999.000	-1.000	2.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000
10000.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
Tableau dopo aver pivotato su (2,7)							
-4.000	-9.000	-8.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000
14.000	14.000	13.000	0.000	1.000	3.000	0.000	0.000
9996.000	-3.000	-3.000	-0.000	-0.000	-1.000	-0.000	1.000
3.000	2.000	5.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000
4.000	4.000	4.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
Tableau ottimo?							
-4.000	-9.000	-8.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000
14.000	14.000	13.000	0.000	1.000	3.000	0.000	0.000
9996.000	-3.000	-3.000	-0.000	-0.000	-1.000	-0.000	1.000
3.000	2.000	5.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000
4.000	4.000	4.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: -4.0000

$x(3) = 4.0000$

c) Indicare nel tableau finale le variabili duali ottime, motivando adeguatamente la risposta.

Le variabili duali si possono trovare nelle colonne delle variabili di scarto. In particolare:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}\mathbf{a}_4 - c_4 &= \mathbf{w}\mathbf{a}_4 = [w_1 \ w_2 \ w_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = w_1 = 0 \\ \mathbf{w}\mathbf{a}_5 - c_5 &= \mathbf{w}\mathbf{a}_5 = [w_1 \ w_2 \ w_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = w_2 = -1 \\ \mathbf{w}\mathbf{a}_6 - c_6 &= \mathbf{w}\mathbf{a}_6 = [w_1 \ w_2 \ w_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -w_3 = 0 \end{aligned}$$

d) Scrivere il duale di P.

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max z = 2w_1 + 4w_2 + w_3 \\ \text{s.t. } +2w_1 + 4w_2 + 2w_3 \leq +5 \\ \quad +w_1 + 4w_2 - w_3 \leq +4 \\ \quad -3w_1 + w_2 + w_3 \leq -1 \\ \quad w_1, w_2 \leq 0, w_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

e) Verificare l'ottimalità delle soluzioni trovate con le condizioni di complementarietà.

La soluzione trovata è $\mathbf{x} = (0, 0, 4)$. Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione:

$$\begin{cases} +2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq +2 \\ +4x_1 + 4x_2 + x_3 \leq +4 \\ +2x_1 - x_2 + x_3 \geq +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12 < 2 \\ 4 = 4 \\ 4 > 1 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile. Inoltre, il primo e il terzo vincolo non sono saturi, quindi per gli scarti complementari $w_1 = 0$ e $w_3 = 0$.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_3 = 4$, allora il terzo vincolo del duale deve essere saturo:

$$-3w_1 + w_2 + w_3 = -1 \Rightarrow w_2 = -1$$

Visto che la soluzione duale rispetta i vincoli di segno e anche il primo e il secondo vincolo duale, allora la soluzione $\mathbf{x} = (0,0,4)$ è ottima.

5) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } +x_1 + 2x_2 - x_3 \leq +2 \\ \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \leq +3 \\ \quad +x_1 - x_2 + 2x_3 \geq +3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplex Primale.

Tableau Iniziale!							
0.000	1.000	-1.000	-2.000	0.000	0.000	0.000	
-----+-----							
2.000	1.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	0.000	
3.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	1.000	0.000	
3.000	1.000	-1.000	2.000	0.000	0.000	-1.000	
-----+-----							
Tableau Fase 1							
3.000	1.000	-1.000	2.000	0.000	0.000	-1.000	0.000
-----+-----							
2.000	1.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	0.000	0.000
3.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
3.000	1.000	-1.000	2.000	0.000	0.000	-1.000	1.000
-----+-----							
Tableau dopo aver pivotato su (3,3)							
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
-----+-----							
3.500	1.500	1.500	0.000	1.000	0.000	-0.500	0.500
1.500	1.500	-0.500	0.000	0.000	1.000	0.500	-0.500
1.500	0.500	-0.500	1.000	0.000	0.000	-0.500	0.500
-----+-----							
Numero Iterazioni: 1							
Tableau Ottimo Fase 1							
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
-----+-----							
3.500	1.500	1.500	0.000	1.000	0.000	-0.500	0.500
1.500	1.500	-0.500	0.000	0.000	1.000	0.500	-0.500
1.500	0.500	-0.500	1.000	0.000	0.000	-0.500	0.500
-----+-----							
Tableau Fase 2							
3.000	2.000	-2.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	
-----+-----							
3.500	1.500	1.500	0.000	1.000	0.000	-0.500	
1.500	1.500	-0.500	0.000	0.000	1.000	0.500	
1.500	0.500	-0.500	1.000	0.000	0.000	-0.500	
-----+-----							
Tableau dopo aver pivotato su (2,1)							
1.000	0.000	-1.333	0.000	0.000	-1.333	-1.667	
-----+-----							
2.000	0.000	2.000	0.000	1.000	-1.000	-1.000	
1.000	1.000	-0.333	0.000	0.000	0.667	0.333	
1.000	0.000	-0.333	1.000	0.000	-0.333	-0.667	
-----+-----							
Numero Iterazioni: 1							
Tableau Ottimo Fase 2							
1.000	0.000	-1.333	0.000	0.000	-1.333	-1.667	
-----+-----							
2.000	0.000	2.000	0.000	1.000	-1.000	-1.000	
1.000	1.000	-0.333	0.000	0.000	0.667	0.333	
1.000	0.000	-0.333	1.000	0.000	-0.333	-0.667	

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: 1.0000

$x(1) = 1.0000$
 $x(3) = 1.0000$

b) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplex Duale.

Tableau Iniziale!

0.000	1.000	-1.000	-2.000	0.000	0.000	0.000
2.000	1.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	0.000
3.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	1.000	0.000
3.000	1.000	-1.000	2.000	0.000	0.000	-1.000

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!

-10000.000	0.000	-2.000	-3.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
-9998.000	0.000	1.000	-2.000	1.000	0.000	0.000	-1.000
-19997.000	0.000	-3.000	-1.000	0.000	1.000	0.000	-2.000
9997.000	0.000	2.000	-1.000	0.000	0.000	1.000	1.000
10000.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,7)

-1.500	0.000	-0.500	-2.500	0.000	-0.500	0.000	0.000
0.500	0.000	2.500	-1.500	1.000	-0.500	0.000	0.000
9998.500	-0.000	1.500	0.500	-0.000	-0.500	-0.000	1.000
-1.500	0.000	0.500	-1.500	0.000	0.500	1.000	0.000
1.500	1.000	-0.500	0.500	0.000	0.500	0.000	0.000

Tableau dopo aver pivotato su (3,3)

1.000	0.000	-1.333	0.000	0.000	-1.333	-1.667	0.000
2.000	0.000	2.000	0.000	1.000	-1.000	-1.000	0.000
9998.000	0.000	1.667	0.000	0.000	-0.333	0.333	1.000
1.000	-0.000	-0.333	1.000	-0.000	-0.333	-0.667	-0.000
1.000	1.000	-0.333	0.000	0.000	0.667	0.333	0.000

Tableau ottimo?

1.000	0.000	-1.333	0.000	0.000	-1.333	-1.667	0.000
2.000	0.000	2.000	0.000	1.000	-1.000	-1.000	0.000
9998.000	0.000	1.667	0.000	0.000	-0.333	0.333	1.000
1.000	-0.000	-0.333	1.000	-0.000	-0.333	-0.667	-0.000
1.000	1.000	-0.333	0.000	0.000	0.667	0.333	0.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: 1.0000

$x(1) = 1.0000$
 $x(3) = 1.0000$

c) Scrivere il duale di **P**.

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 2w_1 + 3w_2 + 3w_3 \\ \text{s.t. } +w_1 + 2w_2 + w_3 \leq -1 \\ \quad +2w_1 - w_2 - w_3 \leq +1 \\ \quad -w_1 + w_2 + 2w_3 \leq +2 \\ \quad w_1, w_2 \leq 0, w_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

d) Verificare l'ottimalità delle soluzioni trovate con le condizioni di complementarietà.

La soluzione trovata è $\mathbf{x} = (1,0,1)$. Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione:

$$\begin{cases} +x_1 + 2x_2 - x_3 \leq +2 \\ +2x_1 - x_2 + x_3 \leq +3 \\ +x_1 - x_2 + 2x_3 \geq +3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 1 < 2 \\ 2 + 1 = 3 \\ 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile. Inoltre, il primo vincolo non è saturo, quindi per gli scarti complementari $w_1 = 0$.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 1$ e $x_3 = 1$, allora il primo e il terzo vincolo del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} +w_1 + 2w_2 + w_3 = -1 \\ -w_1 + w_2 + 2w_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2w_2 + w_3 = -1 \\ w_2 + 2w_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 4w_3 + w_3 = -1 \\ w_2 = 2 - 2w_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3w_3 = 5 \\ w_2 = 2 - 2w_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = \frac{5}{3} \\ w_2 = 2 - \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = \frac{5}{3} \\ w_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale rispetta i vincoli di segno e anche il secondo vincolo duale, allora la soluzione $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ è ottima.

6) Si consideri il seguente problema P:

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } +x_1 + 2x_2 - x_3 \leq +1 \\ \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \leq +2 \\ \quad +2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq +3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$ è ottima per il problema P.

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$:

$$\begin{cases} +x_1 + 2x_2 - x_3 \leq +1 \\ +2x_1 - x_2 + x_3 \leq +2 \\ +2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq +3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{5} + \frac{6}{5} - 1 = 1 \\ \frac{8}{5} - \frac{3}{5} + 1 = 2 \\ \frac{8}{5} - \frac{3}{5} + 2 = 3 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il duale del problema P è il seguente:

$$(D) \quad \begin{cases} \max z = w_1 + 2w_2 + 3w_3 \\ \text{s.t. } +w_1 + 2w_2 + 2w_3 \leq -1 \\ \quad +2w_1 - w_2 - w_3 \leq +1 \\ \quad -w_1 + w_2 + 2w_3 \leq +2 \\ \quad w_1, w_2 \leq 0, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

I vincoli del primale sono tutti saturi, quindi per gli scarti complementari le variabili duali possono essere anche non nulle.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$ e $x_3 = 1$, allora tutti i vincoli del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} +w_1 + 2w_2 + 2w_3 = -1 \\ +2w_1 - w_2 - w_3 = +1 \\ -w_1 + w_2 + 2w_3 = +2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 + 6/5 \\ 0 & 1 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 + 9/5 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 14/5 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 - 14/5 \\ 0 & 0 & 1 & 14/5 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -17/5 \\ 0 & 0 & 1 & 14/5 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 1/5 \\ w_2 = -17/5 \\ w_3 = 14/5 \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale NON rispetta i vincoli di segno, allora la soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right)$ NON è ottima.

7) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = -2x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t. } +x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq +2 \\ \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \leq -3 \\ \quad +4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq +3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplex Primale.

Tableau Iniziale!								
0.000	2.000	-1.000	4.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
2.000	1.000	2.000	-3.000	-1.000	0.000	0.000		
3.000	-2.000	1.000	-1.000	-0.000	-1.000	-0.000		
3.000	4.000	-5.000	3.000	0.000	0.000	1.000		

Tableau Fase 1								
5.000	-1.000	3.000	-4.000	-1.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
2.000	1.000	2.000	-3.000	-1.000	0.000	0.000	1.000	0.000
3.000	-2.000	1.000	-1.000	-0.000	-1.000	-0.000	0.000	1.000
3.000	4.000	-5.000	3.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,2)								
2.000	-2.500	0.000	0.500	0.500	-1.000	0.000	-1.500	0.000
1.000	0.500	1.000	-1.500	-0.500	0.000	0.000	0.500	0.000
2.000	-2.500	0.000	0.500	0.500	-1.000	-0.000	-0.500	1.000
8.000	6.500	0.000	-4.500	-2.500	0.000	1.000	2.500	0.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,3)								
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1.000
7.000	-7.000	1.000	0.000	1.000	-3.000	0.000	-1.000	3.000
4.000	-5.000	0.000	1.000	1.000	-2.000	-0.000	-1.000	2.000
26.000	-16.000	0.000	0.000	2.000	-9.000	1.000	-2.000	9.000

Numero Iterazioni: 2

Tableau Ottimo Fase 1								
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	-1.000
7.000	-7.000	1.000	0.000	1.000	-3.000	0.000	-1.000	3.000
4.000	-5.000	0.000	1.000	1.000	-2.000	-0.000	-1.000	2.000
26.000	-16.000	0.000	0.000	2.000	-9.000	1.000	-2.000	9.000

Tableau Fase 2						
-9.000	15.000	0.000	0.000	-3.000	5.000	0.000
7.000	-7.000	1.000	0.000	1.000	-3.000	0.000
4.000	-5.000	0.000	1.000	1.000	-2.000	-0.000
26.000	-16.000	0.000	0.000	2.000	-9.000	1.000

Numero Iterazioni: 0

Tableau Ottimo Fase 2						
-9.000	15.000	0.000	0.000	-3.000	5.000	0.000
7.000	-7.000	1.000	0.000	1.000	-3.000	0.000
4.000	-5.000	0.000	1.000	1.000	-2.000	-0.000
26.000	-16.000	0.000	0.000	2.000	-9.000	1.000

Soluzione Illimitata!

b) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplex Duale.

Tableau Iniziale!							
0.000	2.000	-1.000	4.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.000	1.000	2.000	-3.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
-3.000	2.000	-1.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
3.000	4.000	-5.000	3.000	0.000	0.000	1.000	0.000
Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!							
-40000.000	-2.000	-5.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-4.000
-30002.000	-4.000	-5.000	0.000	1.000	-0.000	-0.000	-3.000
-10003.000	1.000	-2.000	0.000	0.000	1.000	0.000	-1.000
-29997.000	1.000	-8.000	0.000	0.000	0.000	1.000	-3.000
10000.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
Tableau dopo aver pivotato su (1,1)							
-24999.000	0.000	-2.500	0.000	-0.500	0.000	0.000	-2.500
7500.500	1.000	1.250	-0.000	-0.250	0.000	0.000	0.750
-17503.500	0.000	-3.250	0.000	0.250	1.000	0.000	-1.750
-37497.500	0.000	-9.250	0.000	0.250	0.000	1.000	-3.750
2499.500	0.000	-0.250	1.000	0.250	0.000	0.000	0.250
Tableau dopo aver pivotato su (3,2)							
-14864.541	0.000	0.000	0.000	-0.568	0.000	-0.270	-1.486
2433.270	1.000	0.000	0.000	-0.216	0.000	0.135	0.243
-4328.703	0.000	0.000	0.000	0.162	1.000	-0.351	-0.432
4053.784	-0.000	1.000	-0.000	-0.027	-0.000	-0.108	0.405
3512.946	0.000	0.000	1.000	0.243	0.000	-0.027	0.351
Tableau dopo aver pivotato su (2,6)							
-11534.769	0.000	0.000	0.000	-0.692	-0.769	0.000	-1.154
768.385	1.000	0.000	0.000	-0.154	0.385	0.000	0.077
12320.154	-0.000	-0.000	-0.000	-0.462	-2.846	1.000	1.231
5385.692	-0.000	1.000	-0.000	-0.077	-0.308	0.000	0.538
3845.923	0.000	0.000	1.000	0.231	-0.077	0.000	0.385
Tableau ottimo?							
-11534.769	0.000	0.000	0.000	-0.692	-0.769	0.000	-1.154
768.385	1.000	0.000	0.000	-0.154	0.385	0.000	0.077
12320.154	-0.000	-0.000	-0.000	-0.462	-2.846	1.000	1.231
5385.692	-0.000	1.000	-0.000	-0.077	-0.308	0.000	0.538
3845.923	0.000	0.000	1.000	0.231	-0.077	0.000	0.385

Soluzione Illimitata! (La variabile di scarto del vincolo artificiale non è in base)

c) Scrivere il duale di P.

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max z = 2w_1 - 3w_2 + 3w_3 \\ \text{s.t. } +w_1 + 2w_2 + 4w_3 \leq -2 \\ \quad \quad \quad +2w_1 - w_2 - 5w_3 \leq +1 \\ \quad \quad \quad -3w_1 + w_2 + 3w_3 \leq -4 \\ \quad \quad \quad w_2, w_3 \leq 0, w_1 \geq 0 \end{array} \right.$$

8) Si consideri il seguente problema P:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min z = -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } +x_1 - x_2 - 2x_3 \geq +1 \\ \quad \quad \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq +3 \\ \quad \quad \quad +2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq +4 \\ \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

- a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $x = (5,4,0)$ è ottima per il problema P.

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $x = (5,4,0)$:

$$\begin{cases} +x_1 - x_2 - 2x_3 \geq +1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq +3 \\ +2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq +4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - 4 = 1 \\ -5 + 8 = 3 \\ 10 - 8 < 4 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il duale del problema **P** è il seguente:

$$(D) \quad \begin{cases} \max z = w_1 + 3w_2 + 4w_3 \\ \text{s.t. } +w_1 - w_2 + 2w_3 \leq -2 \\ \quad -w_1 + 2w_2 - 2w_3 \leq -2 \\ \quad -2w_1 + w_2 + 2w_3 \leq +2 \\ \quad w_2, w_3 \leq 0, w_1 \geq 0 \end{cases}$$

Il terzo vincolo del primale non è saturo, quindi per gli scarti complementari $w_3 = 0$. Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 5$ e $x_2 = 4$, allora il primo e il secondo vincolo del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} +w_1 - w_2 + 2w_3 = -2 \\ -w_1 + 2w_2 - 2w_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +w_1 - w_2 = -2 \\ -w_1 + 2w_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = w_2 - 2 \\ -w_2 + 2 + 2w_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = w_2 - 2 \\ w_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -6 \\ w_2 = -4 \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale NON rispetta i vincoli di segno, allora la soluzione $\mathbf{x} = (5, 4, 0)$ NON è ottima.

9) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t. } +4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq +2 \\ \quad +2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq +3 \\ \quad -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplex Primale.

Tableau Iniziale!							
0.000	2.000	-5.000	-4.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
2.000	4.000	1.000	-2.000	1.000	0.000	0.000	0.000
3.000	2.000	-2.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
1.000	1.000	-1.000	2.000	-0.000	-0.000	-1.000	0.000

Tableau Fase 1							
1.000	1.000	-1.000	2.000	0.000	0.000	-1.000	0.000
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
2.000	4.000	1.000	-2.000	1.000	0.000	0.000	0.000
3.000	2.000	-2.000	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000
1.000	1.000	-1.000	2.000	-0.000	-0.000	-1.000	1.000

Tableau dopo aver pivotato su (3,3)							
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3.000	5.000	0.000	0.000	1.000	0.000	-1.000	1.000
2.500	1.500	-1.500	0.000	0.000	1.000	0.500	-0.500
0.500	0.500	-0.500	1.000	-0.000	-0.000	-0.500	0.500

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1							
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
3.000	5.000	0.000	0.000	1.000	0.000	-1.000	1.000
2.500	1.500	-1.500	0.000	0.000	1.000	0.500	-0.500
0.500	0.500	-0.500	1.000	-0.000	-0.000	-0.500	0.500

Tableau Fase 2							
	2.000	4.000	-7.000	0.000	-0.000	-0.000	-2.000
	3.000	5.000	0.000	0.000	1.000	0.000	-1.000
	2.500	1.500	-1.500	0.000	0.000	1.000	0.500
	0.500	0.500	-0.500	1.000	-0.000	-0.000	-0.500

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)							
	-0.400	0.000	-7.000	0.000	-0.800	-0.000	-1.200
	0.600	1.000	0.000	0.000	0.200	0.000	-0.200
	1.600	0.000	-1.500	0.000	-0.300	1.000	0.800
	0.200	0.000	-0.500	1.000	-0.100	-0.000	-0.400

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 2							
	-0.400	0.000	-7.000	0.000	-0.800	-0.000	-1.200
	0.600	1.000	0.000	0.000	0.200	0.000	-0.200
	1.600	0.000	-1.500	0.000	-0.300	1.000	0.800
	0.200	0.000	-0.500	1.000	-0.100	-0.000	-0.400

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: -0.4000

X(1): 0.6000
X(3): 0.2000

b) Risolvere il problema P utilizzando il metodo del Simplex Duale.

Tableau Iniziale!							
	0.000	2.000	-5.000	-4.000	0.000	0.000	0.000
	2.000	4.000	1.000	-2.000	1.000	0.000	0.000
	3.000	2.000	-2.000	1.000	0.000	1.000	0.000
	-1.000	-1.000	1.000	-2.000	0.000	0.000	1.000

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!							
	-20000.000	0.000	-7.000	-6.000	0.000	0.000	-2.000
	-39998.000	0.000	-3.000	-6.000	1.000	0.000	0.000
	-19997.000	0.000	-4.000	-1.000	0.000	1.000	0.000
	9999.000	0.000	2.000	-1.000	0.000	0.000	1.000
	10000.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,7)							
	-1.000	0.000	-5.500	-3.000	-0.500	0.000	0.000
	9999.500	-0.000	0.750	1.500	-0.250	-0.000	-0.000
	2.000	0.000	-2.500	2.000	-0.500	1.000	0.000
	-0.500	0.000	1.250	-2.500	0.250	0.000	1.000
	0.500	1.000	0.250	-0.500	0.250	0.000	0.000

Tableau dopo aver pivotato su (3,3)							
	-0.400	0.000	-7.000	0.000	-0.800	0.000	-1.200
	9999.200	0.000	1.500	0.000	-0.100	0.000	0.600
	1.600	0.000	-1.500	0.000	-0.300	1.000	0.800
	0.200	-0.000	-0.500	1.000	-0.100	-0.000	-0.400
	0.600	1.000	0.000	0.000	0.200	0.000	-0.200

Tableau ottimo?							
	-0.400	0.000	-7.000	0.000	-0.800	0.000	-1.200
	9999.200	0.000	1.500	0.000	-0.100	0.000	0.600
	1.600	0.000	-1.500	0.000	-0.300	1.000	0.800
	0.200	-0.000	-0.500	1.000	-0.100	-0.000	-0.400
	0.600	1.000	0.000	0.000	0.200	0.000	-0.200

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: -0.4000

X(1): 0.6000
X(3): 0.2000

c) Indicare nel tableau finale dove possono essere individuati i valori delle variabili duali ottime, motivando adeguatamente la risposta.

Le variabili duali si possono trovare nelle colonne delle variabili di scarto. In particolare:

$$\mathbf{w}\mathbf{a}_4 - c_4 = \mathbf{w}\mathbf{a}_4 = [w_1 \ w_2 \ w_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = w_1 = -0.8$$

$$\mathbf{w}\mathbf{a}_5 - c_5 = \mathbf{w}\mathbf{a}_5 = [w_1 \ w_2 \ w_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = w_2 = 0$$

$$\mathbf{w}\mathbf{a}_6 - c_6 = \mathbf{w}\mathbf{a}_6 = [w_1 \ w_2 \ w_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = w_3 = -1.2$$

d) Scrivere il duale di **P**.

$$(D) \quad \begin{cases} \max z = 2w_1 + 3w_2 - w_3 \\ \text{s.t. } +4w_1 + 2w_2 - w_3 \leq -2 \\ \quad +w_1 - 2w_2 + w_3 \leq +5 \\ \quad -2w_1 + w_2 - 2w_3 \leq +4 \\ \quad w_1, w_2, w_3 \leq 0 \end{cases}$$

e) Verificare l'ottimalità delle soluzioni trovate con le condizioni di complementarietà.

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$:

$$\begin{cases} +4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq +2 \\ +2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq +3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12}{5} - \frac{2}{5} = 2 \\ \frac{6}{5} + \frac{1}{5} < 3 \\ -\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = -1 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il secondo vincolo del primale non è saturo, quindi per gli scarti complementari $w_2 = 0$.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = \frac{3}{5}$ e $x_3 = \frac{1}{5}$, allora il primo e il terzo vincolo del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} +4w_1 + 2w_2 - w_3 = -2 \\ -2w_1 + w_2 - 2w_3 = +4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +4w_1 - w_3 = -2 \\ -2w_1 - 2w_3 = +4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = 4w_1 + 2 \\ -w_1 - w_3 = +2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 = 4w_1 + 2 \\ w_1 + 4w_1 + 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = 4w_1 + 2 \\ 5w_1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = -\frac{16}{5} + 2 = -\frac{6}{5} \\ w_1 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale rispetta i vincoli di segno e anche il secondo vincolo duale, allora la soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$ è ottima.

10) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = +2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t. } +2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq -3 \\ \quad -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq +5 \\ \quad -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplex Primale.

Tableau Iniziale!							
0.000	-2.000	-5.000	-4.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.000	-2.000	-3.000	1.000	-1.000	-0.000	-0.000	
5.000	-2.000	2.000	5.000	0.000	1.000	0.000	
1.000	1.000	-1.000	2.000	-0.000	-0.000	1.000	
Tableau Fase 1							
3.000	-2.000	-3.000	1.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
3.000	-2.000	-3.000	1.000	-1.000	-0.000	-0.000	1.000
5.000	-2.000	2.000	5.000	0.000	1.000	0.000	0.000
1.000	1.000	-1.000	2.000	-0.000	-0.000	1.000	0.000
Tableau dopo aver pivotato su (3,3)							
2.500	-2.500	-2.500	0.000	-1.000	0.000	-0.500	0.000
2.500	-2.500	-2.500	0.000	-1.000	0.000	-0.500	1.000
2.500	-4.500	4.500	0.000	0.000	1.000	-2.500	0.000
0.500	0.500	-0.500	1.000	-0.000	-0.000	0.500	0.000
Numero Iterazioni: 1							
Tableau Ottimo Fase 1							
2.500	-2.500	-2.500	0.000	-1.000	0.000	-0.500	0.000
2.500	-2.500	-2.500	0.000	-1.000	0.000	-0.500	1.000
2.500	-4.500	4.500	0.000	0.000	1.000	-2.500	0.000
0.500	0.500	-0.500	1.000	-0.000	-0.000	0.500	0.000
Tableau Fase 2							
2.500	-2.500	-2.500	0.000	-1.000	0.000	-0.500	0.000
2.500	-2.500	-2.500	0.000	-1.000	0.000	-0.500	1.000
2.500	-4.500	4.500	0.000	0.000	1.000	-2.500	0.000
0.500	0.500	-0.500	1.000	-0.000	-0.000	0.500	0.000
Tableau Ottimo Fase 2							
2.500	-2.500	-2.500	0.000	-1.000	0.000	-0.500	0.000
2.500	-2.500	-2.500	0.000	-1.000	0.000	-0.500	1.000
2.500	-4.500	4.500	0.000	0.000	1.000	-2.500	0.000
0.500	0.500	-0.500	1.000	-0.000	-0.000	0.500	0.000

Non esiste soluzione! (La Fase 2 Termina con la funzione obiettivo positiva)

b) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplex Duale.

Tableau Iniziale!							
0.000	-2.000	-5.000	-4.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-3.000	2.000	3.000	-1.000	1.000	0.000	0.000	
5.000	-2.000	2.000	5.000	0.000	1.000	0.000	
-1.000	-1.000	1.000	-2.000	0.000	0.000	-1.000	
Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!							
0.000	-2.000	-5.000	-4.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-3.000	2.000	3.000	-1.000	1.000	0.000	0.000	
5.000	-2.000	2.000	5.000	0.000	1.000	0.000	
1.000	1.000	-1.000	2.000	-0.000	-0.000	1.000	
Tableau dopo aver pivotato su (1,3)							
12.000	-10.000	-17.000	0.000	-4.000	0.000	0.000	0.000
3.000	-2.000	-3.000	1.000	-1.000	-0.000	-0.000	
-10.000	8.000	17.000	0.000	5.000	1.000	0.000	
-5.000	5.000	5.000	0.000	2.000	0.000	1.000	

Non esiste soluzione! (La Fase 2 Termina con la funzione obiettivo positiva)

c) Scrivere il duale di **P**.

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max z = -3w_1 + 5w_2 - w_3 \\ \text{s.t. } +2w_1 - 2w_2 - w_3 \leq +2 \\ \quad +3w_1 + 2w_2 + w_3 \leq +5 \\ \quad -w_1 + 5w_2 - 2w_3 \leq +4 \\ \quad w_1, w_2 \leq 0, w_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

11) Si consideri il seguente problema P:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = +2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t. } +4x_1 + x_2 - x_3 \leq +3 \\ \quad +x_1 - 2x_2 + x_3 \leq +3 \\ \quad +2x_1 - x_2 - x_3 \geq +1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

- d) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = (1,0,1)$ è ottima per il problema P.

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = (1,0,1)$:

$$\begin{cases} +4x_1 + x_2 - x_3 \leq +3 \\ +x_1 - 2x_2 + x_3 \leq +3 \\ +2x_1 - x_2 - x_3 \geq +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 1 = 3 \\ 1 + 1 < 3 \\ 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il duale del problema P è il seguente:

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max z = 3w_1 + 3w_2 + w_3 \\ \text{s.t. } +4w_1 + w_2 + 2w_3 \leq +2 \\ \quad +w_1 - 2w_2 - w_3 \leq +1 \\ \quad -w_1 + w_2 - w_3 \leq -2 \\ \quad w_1, w_2 \leq 0, w_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Il secondo vincolo del primale non è saturo, quindi per gli scarti complementari $w_2 = 0$. Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 1$ e $x_3 = 1$, allora il primo e il terzo vincolo del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} +4w_1 + w_2 + 2w_3 = +2 \\ -w_1 + w_2 - w_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +4w_1 + 2w_3 = +2 \\ -w_1 - w_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2w_1 + w_3 = 1 \\ w_1 + w_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 = 1 - 2w_1 \\ w_1 + 1 - 2w_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = 1 - 2w_1 \\ -w_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = 1 + 2 \\ w_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_3 = 3 \\ w_1 = -1 \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale rispetta i vincoli di segno e anche il secondo vincolo del duale, allora la soluzione $\mathbf{x} = (1,0,1)$ è ottima.

12) Si consideri il seguente problema P:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = +2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } +2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq +3 \\ \quad +x_1 - 5x_2 + x_3 \geq +4 \\ \quad +2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq +3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

- a) Risolvere il problema P utilizzando il metodo del Simplex Primale.

Tableau Iniziale!						
0.0001	-2.000	-1.000	-3.000	0.000	0.000	0.000
3.0001	2.000	1.000	-2.000	1.000	0.000	0.000
4.0001	1.000	-5.000	1.000	0.000	-1.000	0.000
3.0001	2.000	-2.000	-2.000	0.000	0.000	-1.000

Tableau Fase 1								
7.000	3.000	-7.000	-1.000	0.000	-1.000	-1.000	0.000	0.000
3.000	2.000	1.000	-2.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.000	1.000	-5.000	1.000	0.000	-1.000	0.000	1.000	0.000
3.000	2.000	-2.000	-2.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)								
2.500	0.000	-8.500	2.000	-1.500	-1.000	-1.000	0.000	0.000
1.500	1.000	0.500	-1.000	0.500	0.000	0.000	0.000	0.000
2.500	0.000	-5.500	2.000	-0.500	-1.000	0.000	1.000	0.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,3)								
0.000	0.000	-3.000	0.000	-1.000	0.000	-1.000	-1.000	0.000
2.750	1.000	-2.250	0.000	0.250	-0.500	0.000	0.500	0.000
1.250	0.000	-2.750	1.000	-0.250	-0.500	0.000	0.500	0.000

Numero Iterazioni: 2

Tableau Ottimo Fase 1								
0.000	0.000	-3.000	0.000	-1.000	0.000	-1.000	-1.000	0.000
2.750	1.000	-2.250	0.000	0.250	-0.500	0.000	0.500	0.000
1.250	0.000	-2.750	1.000	-0.250	-0.500	0.000	0.500	0.000

Tableau Fase 2

9.250	0.000	0.000	0.000	4.333	-2.500	4.583		
2.750	1.000	0.000	0.000	1.000	-0.500	0.750		
1.250	0.000	0.000	1.000	0.667	-0.500	0.917		
-0.000	-0.000	1.000	-0.000	0.333	-0.000	0.333		

Tableau dopo aver pivotato su (3,6)

9.250	0.000	-13.750	0.000	-0.250	-2.500	0.000		
2.750	1.000	-2.250	0.000	0.250	-0.500	0.000		
1.250	0.000	-2.750	1.000	-0.250	-0.500	0.000		
-0.000	-0.000	3.000	-0.000	1.000	-0.000	1.000		

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 2								
9.250	0.000	-13.750	0.000	-0.250	-2.500	0.000		
2.750	1.000	-2.250	0.000	0.250	-0.500	0.000		
1.250	0.000	-2.750	1.000	-0.250	-0.500	0.000		

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: 9.2500

X(1): 2.7500
X(3): 1.2500

b) Risolvere il problema P utilizzando il metodo del Simplex Duale.

Tableau Iniziale!								
0.000	-2.000	-1.000	-3.000	0.000	0.000	0.000		
3.000	2.000	1.000	-2.000	1.000	0.000	0.000		
4.000	1.000	-5.000	1.000	0.000	-1.000	0.000		
3.000	2.000	-2.000	-2.000	0.000	0.000	-1.000		

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!								
0.000	-2.000	-1.000	-3.000	0.000	0.000	0.000		
3.000	2.000	1.000	-2.000	1.000	0.000	0.000		
-4.000	-1.000	5.000	-1.000	-0.000	1.000	-0.000		

Tableau dopo aver pivotato su (2,1)								
8.000	0.000	-11.000	-1.000	0.000	-2.000	0.000		
-5.000	0.000	11.000	-4.000	1.000	2.000	0.000		

Tableau dopo aver pivotato su (1,3)						
9.250	0.000	-13.750	0.000	-0.250	-2.500	0.000
-----+-----						
1.250	-0.000	-2.750	1.000	-0.250	-0.500	-0.000
2.750	1.000	-2.250	0.000	0.250	-0.500	0.000
0.000	0.000	3.000	0.000	1.000	0.000	1.000

Tableau ottimo?						
9.250	0.000	-13.750	0.000	-0.250	-2.500	0.000
-----+-----						
1.250	-0.000	-2.750	1.000	-0.250	-0.500	-0.000
2.750	1.000	-2.250	0.000	0.250	-0.500	0.000
0.000	0.000	3.000	0.000	1.000	0.000	1.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo: 9.2500

$x(1) = 2.7500$
 $x(3) = 1.2500$

c) Scrivere il duale di P.

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 3w_1 + 4w_2 + 3w_3 \\ \text{s.t. } +2w_1 + w_2 + 2w_3 \leq +2 \\ \quad +w_1 - 5w_2 - 2w_3 \leq +1 \\ \quad -2w_1 + w_2 - 2w_3 \leq +3 \\ \quad w_2, w_3 \geq 0, w_1 \leq 0 \end{array} \right.$$

d) Verificare l'ottimalità delle soluzioni trovate con le condizioni di complementarietà.

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{11}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$:

$$\begin{cases} +2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq +3 \\ +x_1 - 5x_2 + x_3 \geq +4 \\ +2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq +3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{22}{4} - \frac{10}{4} = 3 \\ \frac{11}{4} + \frac{5}{4} = 4 \\ \frac{22}{4} - \frac{10}{4} = 3 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Tutti i vincoli sono saturi, quindi non possiamo vincolare qualche variabile duale con gli scarti complementari. Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = \frac{11}{4}$ e $x_3 = \frac{5}{4}$, allora il primo e il terzo vincolo del duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} +2w_1 + w_2 + 2w_3 = +2 \\ -2w_1 + w_2 - 2w_3 = +3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 - \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} w_1 + w_3 = -\frac{1}{4} \\ w_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = -\frac{1}{4} - w_3 \\ w_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Se fissiamo $w_3 = 0$, allora la soluzione duale rispetta i vincoli di segno e anche il secondo vincolo, allora la soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{11}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$ è ottima.