Esame Ricerca Operativa

30 maggio 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____**Matricola:**______________________

<u>Istruzioni</u>

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- <u>Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati</u>. **<u>Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati</u>**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti. Inoltre, non può usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

<u>Testo</u>

1) Si consideri un insieme di n depositi che hanno una capacità di Q_i unità di merce a settimana, $i = 1, \dots, n$, e un insieme di m punti vendita che richiedono q_j unità di merce a settimana, $j = 1, \dots, m$.
Ogni punto vendita deve essere servito da un unico deposito e ogni deposito può servire solo un insieme di punti vendita in cui la somma delle richieste non supera la sua capacità. Per trasportare "tutta" la merce dal deposito i al punto vendita j si deve sostenere un costo c_{ij} (i.e., se il punto vendita j è servito dal deposito i si paga complessivamente un costo c_{ij}). Si vuole assegnare ciascun punto vendita ad esattamente un deposito minimizzando il costo complessivo.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 \\ \quad \text{s.t.} \;\; 2x_1 - 2x_2 \le 3 \\ \qquad\quad x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ \qquad\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 3 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$ è ottima per il problema **P**. (6 punti)

4) Si consideri il seguente problema **P**:

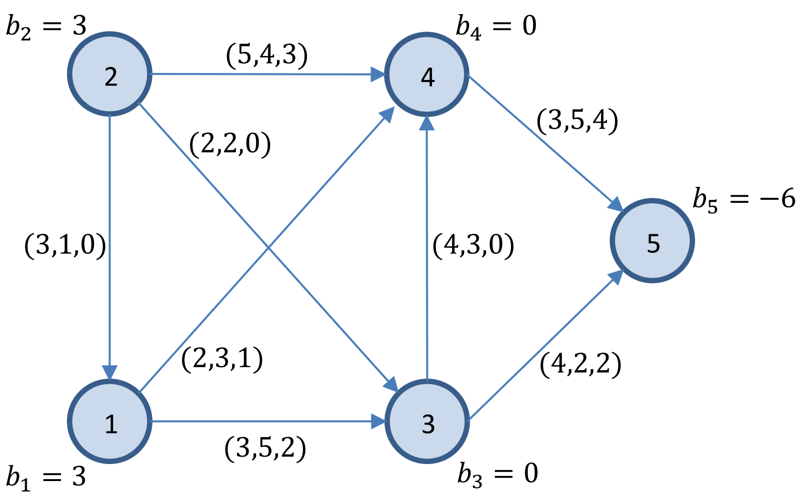
$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = +2x_1 - 1x_2 + 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \qquad (1) \\ \qquad\quad +x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \qquad (2) \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

a) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali: (6 punti)

i. $\lambda_1 = 0$;

ii. $\lambda_1 = 2$.

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente. (6 punti)

6) Si considerino il Lemma della Dualità Debole e il Teorema della Dualità Forte.

a) Scrivere gli enunciati dei due teoremi. (3 punti)