Esame Ricerca Operativa

6 giugno 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____**Matricola:**_____________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri un insieme di n oggetti di peso w_i quintali e di volume v_i metri cubi, $i = 1, \dots, n$. Ad ogni oggetto i è associato un indice di urgenza u_i. Gli oggetti devono essere caricati in un insieme di m container che hanno una capacità in peso di W_j quintali e in volume di V_j metri cubi, $j = 1, \dots, m$.
I container disponibili potrebbero non essere sufficienti per contenere tutti gli oggetti, per cui si vuole decidere quali oggetti caricare, specificando in quali container, in modo da massimizzare la somma degli indici di urgenza u_i degli oggetti caricati e rispettare i vincoli di capacità in peso e volume di ciascun container.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \quad \text{s.t.} \;\; x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ \qquad\quad x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 - x_2 + x_3 \\ \quad \text{s.t.} \;\; x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\ \qquad\quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = (3,0,1)$ è ottima per il problema **P**. (6 punti)

4) Si consideri il seguente problema **P**:

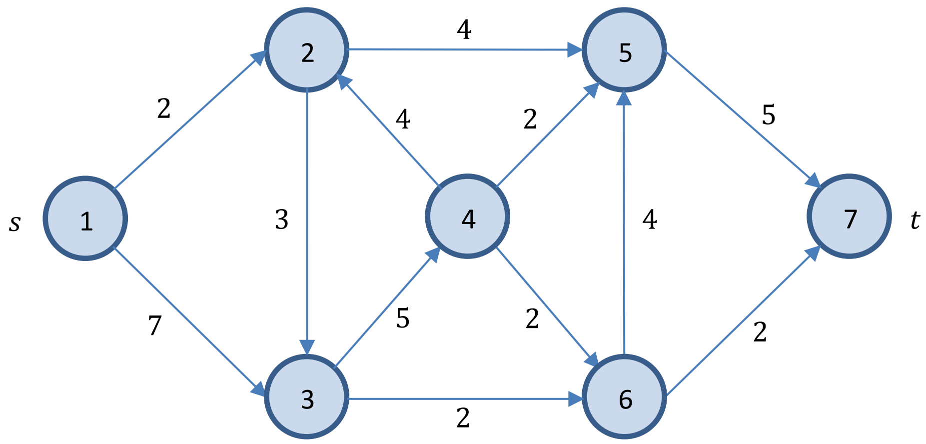
$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ intere} \end{cases}
$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso abbiamo ottenuto il seguente tableau ottimo:

```
Tableau ottimo
      1.200|      0.000      0.000     -7.000     -0.800     -0.600
-----------+-------------------------------------------------------
      1.800|      0.000      1.000     -1.000     -0.200     -0.400
      2.400|      1.000      0.000      1.000      0.400     -0.200

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     1.2000

X(   1):      2.4000
X(   2):      1.8000
```

a) Definire il taglio di Gomory relativo alla variabile x_1 e dopo averlo aggiunto al Tableau riottimizzare (cioè, dopo aver aggiunto il Taglio di Gomory al tableau si chiede di trovare la nuova soluzione ottima). (6 punti).

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la sua capacità u_{ij}.

a) Determinare il flusso massimo dal vertice $s = 1$ al vertice $t = 7$. (4 punti)

b) Data la soluzione ottima calcolata al punto (a), determinare il "*Taglio s-t di capacità minima*" e indicare il metodo impiegato per determinarlo. (2 punti)

6) Si consideri il Teorema della Dualità Lagrangiana Debole.

a) Scrivere l'enunciato e fornire la dimostrazione del teorema. (3 punti)