Esame Ricerca Operativa

29 Agosto 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____**Matricola:**______________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri il problema di caricare un insieme di prodotti P in dei contenitori di capacità in peso pari a W. I contenitori possono contenere al massimo un numero di prodotti pari a K. Ciascun prodotto $i \in P$ ha un peso complessivo pari a w_i e deve essere caricato interamente in un solo contenitore (quindi si ipotizza che $w_i \leq W$).

Si vuole determinare come caricare tutti i prodotti nel minor numero di contenitori rispettando i vincoli sopra descritti.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

Per formulare matematicamente il problema possiamo assumere di avere a disposizione un insieme C di contenitori (per garantirsi di caricare tutti i prodotti basterà ipotizzare di avere a disposizione un numero di contenitori pari al numero dei prodotti) e definire due insiemi di variabili decisionali:

- le variabili binarie x_{ij} che saranno uguali a 1 se il prodotto $i \in P$ è caricato nel contenitore $j \in C$, 0 altrimenti.
- le variabili binarie y_j che saranno uguali a 1 se il contenitore $j \in C$ è utilizzato, 0 altrimenti.

Un possibile modello matematico è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\min z = \sum_{i \in C} y_j \\
\text{s.t.} \sum_{i \in P} w_i x_{ij} \leq W y_j, \quad & j \in C \\
\sum_{i \in P} x_{ij} \leq K y_j, \quad & j \in C \\
x_{ij} \geq 0 \ \text{intero}, \quad & i \in P, j \in C \\
y_j \geq 0 \ \text{intero}, \quad & j \in C
\end{aligned}
$$

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \ -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ \quad -3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      4.000     -1.000     -3.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      4.000|     -1.000      1.000      3.000      1.000      0.000
      3.000|     -3.000      1.000     -2.000      0.000     -1.000

Tableau Fase 1: iniziale
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      4.000|     -1.000      1.000      3.000      1.000      0.000      0.000
      3.000|     -3.000      1.000     -2.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau Fase 1: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      3.000|     -3.000      1.000     -2.000      0.000     -1.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      4.000|     -1.000      1.000      3.000      1.000      0.000      0.000
      3.000|     -3.000      1.000     -2.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      1.000|      2.000      0.000      5.000      1.000      1.000     -1.000
      3.000|     -3.000      1.000     -2.000      0.000     -1.000      1.000

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      1.000|      2.000      0.000      5.000      1.000      1.000     -1.000
      3.000|     -3.000      1.000     -2.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau Fase 2: iniziale
      0.000|      4.000     -1.000     -3.000     -0.000     -0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      1.000|      2.000      0.000      5.000      1.000      1.000
      3.000|     -3.000      1.000     -2.000      0.000     -1.000

Tableau Fase 2: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      3.000|      1.000      0.000     -5.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      1.000|      2.000      0.000      5.000      1.000      1.000
      3.000|     -3.000      1.000     -2.000      0.000     -1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)
      2.500|      0.000      0.000     -7.500     -0.500     -1.500
-----------+-------------------------------------------------------
      0.500|      1.000      0.000      2.500      0.500      0.500
      4.500|      0.000      1.000      5.500      1.500      0.500

Numero Iterazioni: 1
```

```
Tableau Ottimo Fase 2
      2.500|      0.000      0.000     -7.500     -0.500     -1.500
-----------+-------------------------------------------------------
      0.500|      1.000      0.000      2.500      0.500      0.500
      4.500|      0.000      1.000      5.500      1.500      0.500

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     2.5000

X(   1):     0.5000
X(   2):     4.5000
X(   3):     0.0000
```

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

Il duale **D** del problema **P** è il seguente:

$$(\mathbf{D})\quad \begin{cases} \max z = 4w_1 + 3w_2 \\ \text{s.t.}\ \ -w_1 - 3w_2 \le -4 \\ \quad w_1 + w_2 \le 1 \\ \quad 3w_1 - 2w_2 \le 3 \\ \quad w_1 \le 0,\ w_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \min z = -4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.}\ \ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6 \\ \quad -2x_1 + x_2 \ge 3 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = (1,5,0)$ è ottima per il problema **P**. (6 punti)

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = (1,5,0)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6 \\ -2x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 5 + 0 = 6 \\ -2 + 5 = 3 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il duale del problema **P** è il seguente:

$$(\mathbf{D})\quad \begin{cases} \max z = 6w_1 + 3w_2 \\ \text{s.t.}\ \ w_1 - 2w_2 \le -4 \\ \quad w_1 + w_2 \le -1 \\ \quad 3w_1 \le 3 \\ \quad w_1 \le 0,\ w_2 \ge 0 \end{cases}$$

I vincoli del primale sono tutti saturi, quindi per gli scarti complementari le variabili duali possono anche non essere nulle.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$, allora il primo e il secondo vincolo duale devono essere saturi:

$$\begin{cases} w_1 - 2w_2 = -4 \\ w_1 + w_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2w_2 - 4 \\ (2w_2 - 4) + w_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2w_2 - 4 \\ 3w_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = -2 \\ w_2 = 1 \end{cases}$$

La soluzione duale rispetta i vincoli di segno delle variabili duali e anche il terzo vincolo:

$$3w_1 \le 3 \ \Rightarrow -6 \le 3$$

quindi la soluzione $\mathbf{x} = (1,5,0)$ è ottima.

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = +3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \;\; 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ \quad\;\; 3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ \quad\;\; x_1, x_2, x_3 \geq 0 \;\text{ intere} \end{cases}
$$

Risolvendo il rilassamento continuo del problema **P** (ottenuto rilassando i vincoli di interezza) utilizzando il metodo del Simplesso abbiamo ottenuto il seguente tableau ottimo:

```
     -3.600|     -4.400      0.000      0.000     -0.800     -0.600
-----------+-------------------------------------------------------
      2.800|      2.200      1.000      0.000      0.400     -0.200
      0.400|     -0.400      0.000      1.000      0.200      0.400

Costo ottimo:    -3.6000

X(   1):     0.0000
X(   2):     2.8000
X(   3):     0.4000
```

a) Partendo dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema **P** (i.e., nodo radice), svolgere una iterazione dell'algoritmo branch and bound, in particolare:

- definire i nodi figli e i problemi corrispondenti; (1 punto)
  Se consideriamo il tableau ottimo del Simplesso, tra le variabili in base con valori frazionari abbiamo le variabili $x_2 = \frac{14}{5}$ e $x_3 = \frac{2}{5}$. Quindi, in questo caso, possiamo considerare il branching rispetto alla variabile x_2, che prevede i seguenti nodi figli: $P_1 = P(x_2 \leq 2)$ e $P_2 = P(x_2 \geq 3)$, oppure alla variabile x_3, che prevede i seguenti nodi figli: $P_1 = P(x_3 \leq 0)$ e $P_2 = P(x_3 \geq 1)$.
- selezionare uno dei due nodi figli e risolvere il corrispondente problema (trovare la soluzione ottima del problema corrispondente al nodo figlio scelto). (5 punti)
  Se decidiamo di fare il branching rispetto alla variabile x_3 e selezioniamo il nodo figlio $P_1 = P(x_3 \leq 0)$, in questo caso dobbiamo aggiungere il vincolo $x_3 \leq 0$, che aggiungendo la variabile di scarto è della seguente forma:

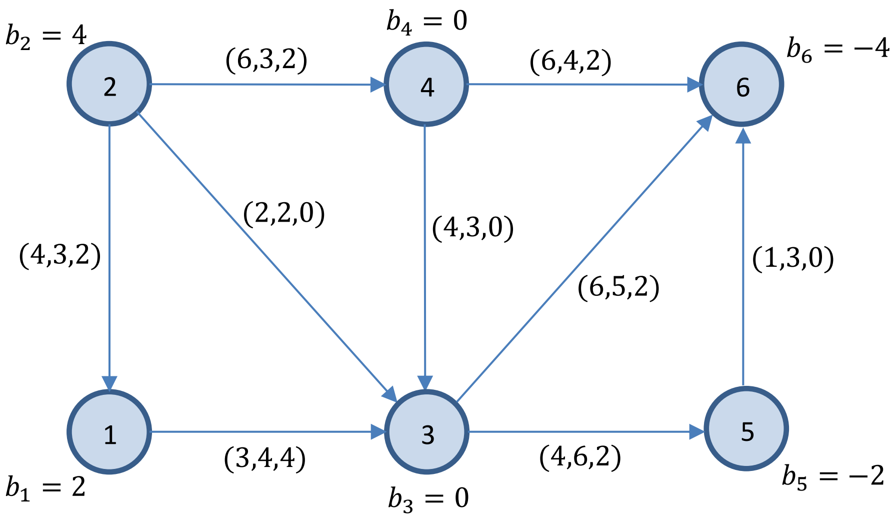
  $$x_3 + x_6 = 0$$

  Una volta aggiunto il nuovo vincolo al tableau, dobbiamo ripristinare una base pivotando sulla colonna di x_3 per annullare il coefficiente "1" nella riga del nuovo vincolo e riottimizzare. Qui di seguito i passaggi:

```
Tableau dopo aver aggiunto vincolo.
     -3.600|     -4.400      0.000      0.000     -0.800     -0.600      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      2.800|      2.200      1.000      0.000      0.400     -0.200      0.000
      0.400|     -0.400      0.000      1.000      0.200      0.400      0.000
      0.000|      0.000      0.000      1.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver ripristinato la base.
     -3.600|     -4.400      0.000      0.000     -0.800     -0.600      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      2.800|      2.200      1.000      0.000      0.400     -0.200      0.000
      0.400|     -0.400      0.000      1.000      0.200      0.400      0.000
     -0.400|      0.400      0.000      0.000     -0.200     -0.400      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (4,5)
     -3.000|     -5.000      0.000      0.000     -0.500      0.000     -1.500
-----------+------------------------------------------------------------------
      3.000|      2.000      1.000      0.000      0.500      0.000     -0.500
      0.000|      0.000      0.000      1.000     -0.000      0.000      1.000
      1.000|     -1.000     -0.000     -0.000      0.500      1.000     -2.500

Tableau ottimo
     -3.000|     -5.000      0.000      0.000     -0.500      0.000     -1.500
-----------+------------------------------------------------------------------
      3.000|      2.000      1.000      0.000      0.500      0.000     -0.500
      0.000|      0.000      0.000      1.000     -0.000      0.000      1.000
      1.000|     -1.000     -0.000     -0.000      0.500      1.000     -2.500
```

```
Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:    -3.0000

X(   1):     0.0000
X(   2):     3.0000
X(   3):     0.0000
```

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente. (6 punti)

```
Algoritmo Flusso di Costo Minimo

Soluzione Ammissibile Iniziale
Soluzione Ammissibile Iniziale
Nodo 1: x(1,3)=4
Nodo 2: x(2,1)=2 x(2,3)=0 x(2,4)=2
Nodo 3: x(3,5)=2 x(3,6)=2
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=2
Nodo 5: x(5,6)=0

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione: 1
Ciclo: C(1,2)=-4 C(2,3)=2 C(3,1)=-3
Aumento flusso di: 2

Iterazione: 2
Ciclo: C(3,5)=4 C(5,6)=1 C(6,3)=-6
Aumento flusso di: 2

Iterazione: 3
Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 3

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,3)=2
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,3)=2 x(2,4)=2
Nodo 3: x(3,5)=4 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=2
Nodo 5: x(5,6)=2

Costo Soluzione = 52
```

Potevano esserci anche altri cicli di costo negativo che potevano essere scelti, richiedendo un numero diverso di iterazioni, per raggiungere la stessa soluzione.

6) Si consideri il Teorema della Dualità Lagrangiana Debole.

a) Scrivere l'enunciato e fornire la dimostrazione del teorema. (3 punti)

Dato il problema:

$$
\begin{aligned}
z_P = \min\ & \mathbf{cx} \\
s.t.\ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{Bx} \geq \mathbf{d} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ and integer}
\end{aligned}
$$

e il rilassamento Lagrangiano:

$$
\begin{aligned}
z_{LR}(\lambda) = \min\ & \mathbf{cx} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \\
s.t.\ & \mathbf{Bx} \geq \mathbf{d} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ and integer}
\end{aligned}
$$

il teorema della Dualità Lagrangiana Debole si può enunciare e dimostrare come segue:

Teorema (Dualità Lagrangiana Debole)

$z_{LR}(\lambda)$ è un valido lower bound al valore della soluzione ottima di P, i.e, $z_{LR}(\lambda) \leq z_P$, per ogni $\lambda \geq \mathbf{0}$.

Dimostrazione

- *Sia $\mathbf{x}^*$ la soluzione ottima di P.*
- *Siccome $\mathbf{x}^*$ è una soluzione ammissibile anche per $LR(\lambda)$, per ogni $\lambda \geq \mathbf{0}$, si ha che:*

$$z_{LR}(\lambda, \mathbf{x}^*) = \mathbf{cx}^* + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^*) \geq z_{LR}(\lambda)$$

- *Però $\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^*) \leq 0$, perché $\lambda \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{Ax}^* \geq \mathbf{b}$, quindi:*

$$z_{LR}(\lambda) \leq z_{LR}(\lambda, \mathbf{x}^*) \leq z_P, \quad \forall \lambda \geq \mathbf{0}.$$