Esame Ricerca Operativa

14 Settembre 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____**Matricola:**______________________

<u>Istruzioni</u>

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- <u>Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati</u>. **<u>Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati</u>**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

<u>Testo</u>

1) Si consideri il problema di trasportare in una rete logistica una sola merce. La rete logistica ha un insieme di nodi N, che rappresentano i magazzini dove la merce può essere caricata e/o scaricata, e un insieme di archi A, che rappresentano i "canali" per trasportare la merce tra due nodi.

Per ogni nodo $i \in N$ la quantità b_i indica quanta merce viene spedita (se $b_i > 0$) oppure ricevuta (se $b_i < 0$). Se $b_i = 0$ la merce transita solo.

Per ogni arco $(i, j) \in A$ le quantità u_{ij} e c_{ij} indicano la quantità massima di merce che può essere trasportata con l'arco (i, j) e il costo per trasportare ogni unità di merce con l'arco (i, j), rispettivamente.

Si vuole determinare come trasportare la merce nella rete logistica per minimizzare il costo complessivo rispettando i vincoli sopra descritti.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = +x_1 + 5x_2 + 1x_3 \\ \text{s.t. } +x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \min z = +3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \quad \text{s.t. } +2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ \qquad\quad +2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

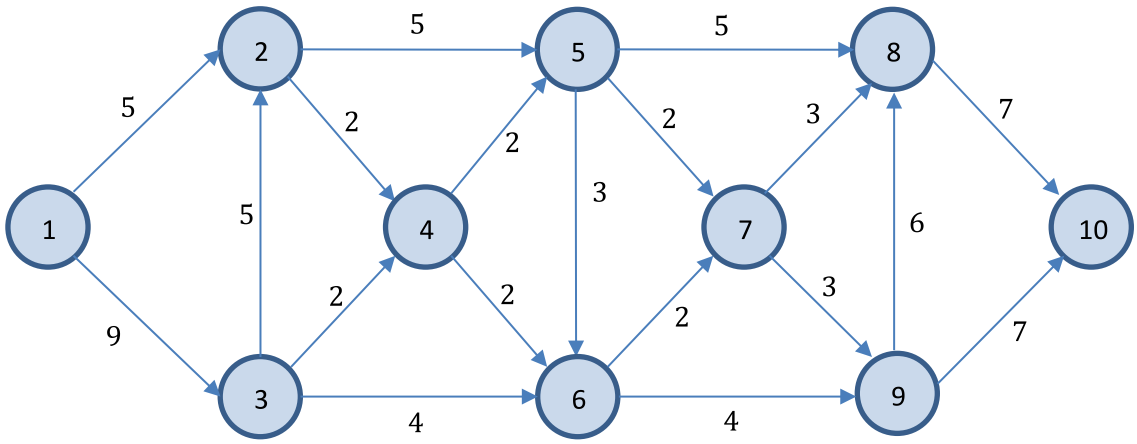
a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Duale. (6 punti)

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \text{Min } z = +2x_1 - 2x_2 + x_3 & \\ \quad \text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 & (1) \\ \qquad\quad +2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 & (2) \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (3) \end{cases}$$

a) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali: (6 punti)
   i. $\lambda_1 = 0$;
   ii. $\lambda_1 = 3$.

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la capacità u_{ij}.

a) Determinare il flusso massimo dal vertice $s = 1$ al vertice $t = 10$. (4 punti)

b) Data la soluzione ottima calcolata al punto (a), determinare il "*Taglio s-t di capacità minima*" e indicare il metodo impiegato per determinarlo. (2 punti)

6) Si considerino il Lemma della Dualità Debole e il Teorema della Dualità Forte.

a) Scrivere gli enunciati dei due teoremi. (3 punti)