Esame Ricerca Operativa

12 Luglio 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____**Matricola:**____________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri una rete logistica per trasportare delle merci da dei depositi a dei punti di vendita con dei trasporti diretti (un viaggio diretto dal deposito al punto di vendita senza soste intermedie in altri depositi o punti di vendita).

La rete logistica è rappresentata da un grafo $G(V, A)$ bipartito in cui l'insieme dei vertici V è partizionato nell'insieme dei depositi V_D e in quello dei punti di vendita V_P ($V = V_D \cup V_P$ e $V_D \cap V_P = \emptyset$), mentre gli archi $(i, j) \in A$ rappresentano i canali disponibili per trasportare le merci da un deposito a un punto di vendita (dato un arco $(i, j) \in A$, $i \in V_D$ e $j \in V_P$).

Per ogni deposito $i \in V_D$ abbiamo una quantità di merce a_i disponibile, per ogni punto vendita $j \in V_P$ abbiamo una quantità b_j richiesta e ad ogni arco $(i, j) \in A$ è associato un costo c_{ij} per trasportare una unità di merce dal deposito i al punto vendita j.

Si vuole determinare come trasportare le merci nella rete logistica per soddisfare tutte le richieste dei punti di vendita utilizzando le merci disponibili nei depositi minimizzando il costo complessivo.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = +x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{s.t. } -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ \quad -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 4 \\ \qquad\quad 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Duale. (6 punti)

4) Si consideri il seguente problema **P**:

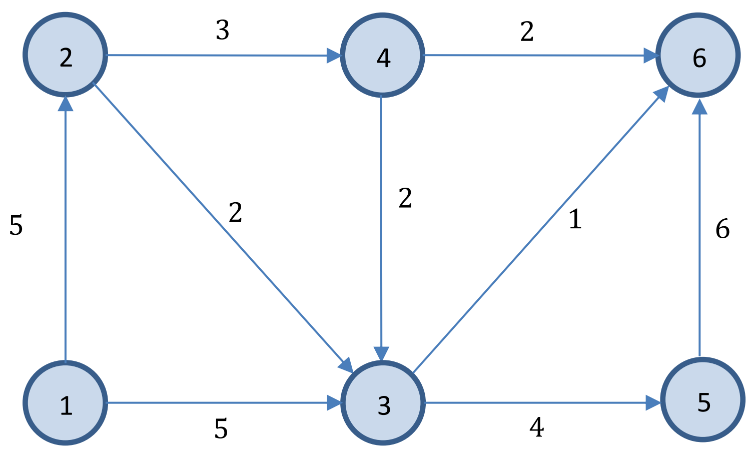
$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = +2x_1 + 4x_2 + x_3 & \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 & (1) \\ \qquad\quad +2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 & (2) \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (3) \end{cases}$$

a) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali: (6 punti)

i. $\lambda_1 = 0$;

ii. $\lambda_1 = 4$.

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la capacità u_{ij}.

a) Determinare il flusso massimo dal vertice $s = 1$ al vertice $t = 6$. (4 punti)

b) Data la soluzione ottima calcolata al punto (a), determinare il "*Taglio s-t di capacità minima*" e indicare il metodo impiegato per determinarlo. (2 punti)

6) Si consideri il Knapsack Problem 0-1.

a) Scrivere il modello di programmazione lineare intera. (1 punti)

b) Scrivere l'algoritmo esatto di Programmazione Dinamica. (2 punti)