Esame Ricerca Operativa

(Simulazione)

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____**Matricola:**______________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti. Inoltre, non può usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri un insieme di m risorse disponibili nelle quantità $q_j, j = 1, \dots, m$, e un insieme di n prodotti che forniscono un profitto $p_i, i = 1, \dots, n$, per ogni unità prodotta. Per ogni unità prodotta ciascun prodotto i consuma a_{ij} unità di ciascuna risorsa j. Si vuole decidere quante unità produrre di ciascun prodotto massimizzando il profitto e rispettando le quantità di risorse disponibili. Per ciascun prodotto non è possibile produrre quantità frazionarie.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

Per formulare matematicamente il problema definiamo le variabili decisionali intere x_i che indicano la quantità di prodotto i che si intende produrre.

Un possibile modello matematico è il seguente:

$$\begin{aligned} \max z = & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le q_j, \qquad j = 1, \dots, m \\ & x_i \ge 0 \ \text{ intere}, \qquad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \quad \text{s.t.} \ + 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2 \\ \qquad -x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Duale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      1.000     -2.000     -2.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|      3.000      3.000      1.000      1.000      0.000
      1.000|     -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!
 -10000.000|      0.000     -3.000     -3.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
 -29998.000|      0.000      0.000     -2.000      1.000      0.000     -3.000
 -10001.000|      0.000     -2.000     -2.000     -0.000      1.000     -1.000
  10000.000|      1.000      1.000      1.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (1,6)
     -0.667|      0.000     -3.000     -2.333     -0.333      0.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
   9999.333|     -0.000     -0.000      0.667     -0.333     -0.000      1.000
     -1.667|      0.000     -2.000     -1.333     -0.333      1.000      0.000
      0.667|      1.000      1.000      0.333      0.333      0.000      0.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,4)
      1.000|      0.000     -1.000     -1.000      0.000     -1.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
  10001.000|     -0.000      2.000      2.000      0.000     -1.000      1.000
      5.000|     -0.000      6.000      4.000      1.000     -3.000     -0.000
     -1.000|      1.000     -1.000     -1.000      0.000      1.000      0.000

Tableau dopo aver pivotato su (3,2)
      2.000|     -1.000      0.000      0.000      0.000     -2.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
   9999.000|      2.000      0.000      0.000      0.000      1.000      1.000
     -1.000|      6.000      0.000     -2.000      1.000      3.000      0.000
      1.000|     -1.000      1.000      1.000     -0.000     -1.000     -0.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,3)
      2.000|     -1.000      0.000      0.000      0.000     -2.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
   9999.000|      2.000      0.000      0.000      0.000      1.000      1.000
      0.500|     -3.000     -0.000      1.000     -0.500     -1.500     -0.000
      0.500|      2.000      1.000      0.000      0.500      0.500      0.000

Tableau ottimo
      2.000|     -1.000      0.000      0.000      0.000     -2.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
   9999.000|      2.000      0.000      0.000      0.000      1.000      1.000
      0.500|     -3.000     -0.000      1.000     -0.500     -1.500     -0.000
      0.500|      2.000      1.000      0.000      0.500      0.500      0.000

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     2.0000

X(   2):     0.5000
X(   3):     0.5000
```

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

Il duale **D** del problema **P** è il seguente:

$$(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} \max z = 2w_1 + w_2 \\ \quad \text{s.t.} \;\; 3w_1 - w_2 \le -1 \\ \qquad\quad 3w_1 + w_2 \le 2 \\ \qquad\quad w_1 + w_2 \le 2 \\ \qquad\quad w_1 \le 0, w_2 \ge 0 \end{cases}$$

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -2x_1 + 2x_2 \\ \quad \text{s.t.} \; -x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ \qquad\quad +3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ \qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = (1,1)$ è ottima per il problema **P.** (6 punti)

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = (1,1)$:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ +3x_1 + 2x_2 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 3 = 2 \\ 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il duale del problema **P** è il seguente:

$$(\mathbf{D}) \begin{cases} \max z = 2w_1 + 5w_2 \\ \quad \text{s.t.} \; -w_1 + 3w_2 \leq -2 \\ \qquad\quad +3w_1 + 2w_2 \leq +2 \\ \qquad\quad w_1 \geq 0, w_2 \leq 0 \end{cases}$$

I vincoli del primale sono tutti saturi, quindi per gli scarti complementari le variabili duali possono anche non essere nulle.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, allora tutti i vincoli duali devono essere saturi:

$$\begin{cases} -w_1 + 3w_2 = -2 \\ +3w_1 + 2w_2 = +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2 + 3w_2 \\ +3(2 + 3w_2) + 2w_2 = +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2 + 3w_2 \\ 6 + 9w_2 + 2w_2 = +2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = 2 + 3w_2 \\ 11w_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 2 - \frac{12}{11} \\ w_2 = -\frac{4}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = \frac{10}{11} \\ w_2 = -\frac{4}{11} \end{cases}$$

Visto che la soluzione duale rispetta i vincoli di segno, allora la soluzione $\mathbf{x} = (1,1)$ è ottima.

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \text{Min } z = +x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 - x_2 - x_3 \leq +1 & (1) \\ \qquad\qquad +x_1 - x_2 + x_3 \geq +1 & (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} & (3) \end{cases}$$

a) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali: (6 punti)

i. $\lambda_1 = 0$;
ii. $\lambda_1 = -2$.

Come primo passo scriviamo il problema Lagrangiano. Si noti che nel testo il vincolo (1) è della forma "$\leq$", quindi le penalità λ devono essere non-positive (in alternativa ci si potrebbe riportare al caso "$-x_1 + x_2 + x_3 \geq -1$"):

$$
\textbf{(LR)} \quad \begin{cases} z_{LR}(\lambda) = \text{Min } (1-\lambda)x_1 + (1+\lambda)x_2 + (3+\lambda)x_3 + \lambda \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 - x_2 + x_3 \geq +1 \qquad (2) \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

Ora consideriamo i due casi proposti:

i. $\lambda_1 = 0$;

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$
\textbf{(LR)} \quad \begin{cases} z_{LR}(0) = \text{Min } (1)x_1 + (1)x_2 + (3)x_3 - 0 \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 - x_2 + x_3 \geq +1 \qquad (2) \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(0) = 1$. Il subgradiente sarà $s = 1 - x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Si noti che la soluzione è ammissibile e che $\lambda(b - Ax) = \lambda s = 0$, quindi la soluzione è ottima.

ii. $\lambda_1 = -2$.

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$
\textbf{(LR)} \quad \begin{cases} z_{LR}(-2) = \text{Min } (3)x_1 + (-1)x_2 + (1)x_3 - 2 \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 - x_2 + x_3 \geq +1 \qquad (2) \\ \quad\quad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

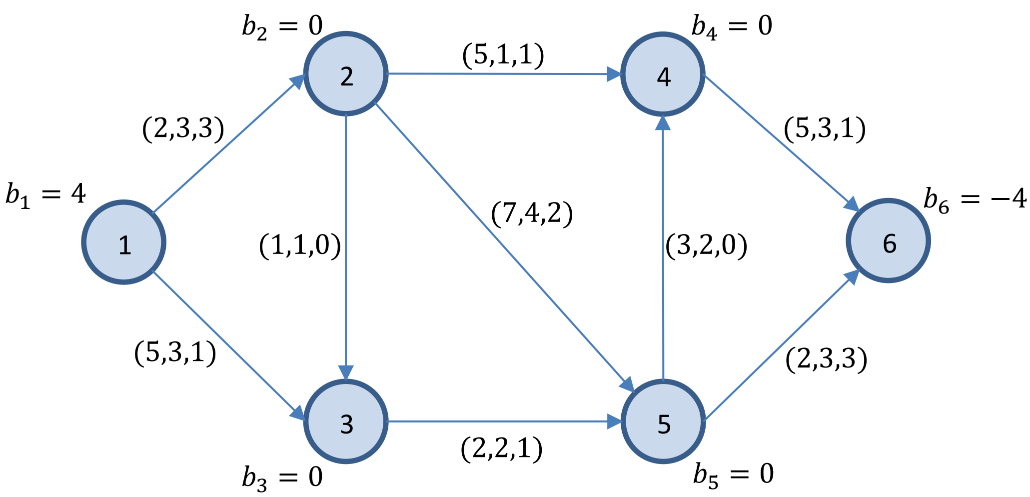
Per cui la soluzione sarà $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, mentre $z_{LR}(-2) = -1$. Si noti che in questo caso il costo penalizzato di x_2 è negativo, ma se avessimo scelto di impostare $x_2 = 1$ allora il vincolo (2) ci avrebbe imposto $x_1 = x_3 = 1$, che avrebbe fornito un valore della soluzione maggiore.

Il subgradiente sarà $s = 1 - x_1 + x_2 + x_3 = 2$. Dopodiché, si aggiorna la penalità Lagrangiana:

$$
\lambda = \min\{0, \lambda + \theta s\} = \min\{0, -2 + \theta 2\}
$$

Si scelga un θ a piacere.

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente. (6 punti)

```
Algoritmo Flusso di Costo Minimo

Soluzione Ammissibile Iniziale
Nodo 1: x(1,2)=3 x(1,3)=1
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,4)=1 x(2,5)=2
Nodo 3: x(3,5)=1
Nodo 4: x(4,6)=1
Nodo 5: x(5,4)=0 x(5,6)=3

Cerca Cicli di Costo Negativo

Ciclo: C(4,1)=-7 C(2,4)=2 C(1,2)=1
Aumento flusso di: 1

Flusso Costo Minimo Trovato!

Numero Iterazioni: 2

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,2)=3 x(1,3)=1
Nodo 2: x(2,3)=1 x(2,4)=1 x(2,5)=1
Nodo 3: x(3,5)=2
Nodo 4: x(4,6)=1
Nodo 5: x(5,4)=0 x(5,6)=3

Costo Soluzione = 39
```

6) Si consideri il Teorema della Rappresentazione.

a) Scrivere l'enunciato. (3 punti)

Vedi le slide…

Teorema della Rappresentazione.

Sia dato un insieme poliedrico convesso $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.
Sia $P = \{\mathbf{x}_i\colon\ i = 1, \ldots, np\}$ l'insieme di tutti i punti estremi di X e sia $D = \{\mathbf{d}_j\colon j = 1, \ldots, nd\ \}$ l'insieme di tutte le direzione estreme di X.
Ogni punto di X può essere rappresentato come:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{np} \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{nd} \mu_j \mathbf{d}_j$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{np} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, np$$

$$\mu_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, nd$$