Esame Ricerca Operativa

30 maggio 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____Matricola:______________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti. Inoltre, non può usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri un insieme di n depositi che hanno una capacità di Q_i unità di merce a settimana, $i = 1, \dots, n$, e un insieme di m punti vendita che richiedono q_j unità di merce a settimana, $j = 1, \dots, m$.

Ogni punto vendita deve essere servito da un unico deposito e ogni deposito può servire solo un insieme di punti vendita in cui la somma delle richieste non supera la sua capacità. Per trasportare "tutta" la merce dal deposito i al punto vendita j si deve sostenere un costo c_{ij} (i.e., se il punto vendita j è servito dal deposito i si paga complessivamente un costo c_{ij}). Si vuole assegnare ciascun punto vendita ad esattamente un deposito minimizzando il costo complessivo.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

Per formulare matematicamente il problema definiamo le variabili decisionali binarie x_{ij} che hanno valore 1 se il deposito i è assegnato al punto vendita j, altrimenti hanno valore 0.

Un possibile modello matematico è il seguente:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j x_{ij} \le Q_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 1, \dots, n \;\text{ e }\; j = 1, \dots, m$$

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \;\; 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|      1.000     -2.000      0.000      0.000
-----------+--------------------------------------------
      3.000|      2.000     -2.000      1.000      0.000
      6.000|      1.000      2.000      0.000     -1.000

Tableau Fase 1: iniziale
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      3.000|      2.000     -2.000      1.000      0.000      0.000
      6.000|      1.000      2.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau Fase 1: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      6.000|      1.000      2.000      0.000     -1.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      3.000|      2.000     -2.000      1.000      0.000      0.000
      6.000|      1.000      2.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      9.000|      3.000      0.000      1.000     -1.000      1.000
      3.000|      0.500      1.000      0.000     -0.500      0.500

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1
      0.000|      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      9.000|      3.000      0.000      1.000     -1.000      1.000
      3.000|      0.500      1.000      0.000     -0.500      0.500

Tableau Fase 2: iniziale
      0.000|      1.000     -2.000     -0.000     -0.000
-----------+--------------------------------------------
      9.000|      3.000      0.000      1.000     -1.000
      3.000|      0.500      1.000      0.000     -0.500

Tableau Fase 2: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      6.000|      2.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+--------------------------------------------
      9.000|      3.000      0.000      1.000     -1.000
      3.000|      0.500      1.000      0.000     -0.500

Tableau dopo aver pivotato su (1,1)
      0.000|      0.000      0.000     -0.667     -0.333
-----------+--------------------------------------------
      3.000|      1.000      0.000      0.333     -0.333
      1.500|      0.000      1.000     -0.167     -0.333

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 2
      0.000|      0.000      0.000     -0.667     -0.333
-----------+--------------------------------------------
      3.000|      1.000      0.000      0.333     -0.333
      1.500|      0.000      1.000     -0.167     -0.333

Soluzione ottima trovata!

Costo ottimo:     0.0000

X(   1):     3.0000
X(   2):     1.5000
```

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

Il duale **D** del problema **P** è il seguente:

$$
(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} \max z = 3w_1 + 6w_2 \\ \quad \text{s.t.} \;\; 2w_1 + w_2 \le -1 \\ \qquad\quad -2w_1 + 2w_2 \le 2 \\ \qquad\quad w_1 \le 0, w_2 \ge 0 \end{cases}
$$

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \quad \text{s.t.} \;\; 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 3 \\ \qquad\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 3 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

a) Utilizzando le relazioni di complementarietà verificare se la soluzione $\mathbf{x} = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$ è ottima per il problema **P**. (6 punti)

Verifichiamo l'ammissibilità della soluzione $\mathbf{x} = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$:

$$
\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 1 = 3 \\ 2 + 1 = 3 \end{cases}
$$

Siccome sono rispettati anche i vincoli di non negatività, allora è ammissibile.

Il duale del problema **P** è il seguente:

$$
(\mathbf{D}) \quad \begin{cases} \max z = 3w_1 + 3w_2 \\ \quad \text{s.t.} \;\; 2w_1 + w_2 \le -1 \\ \qquad\quad -2w_1 + 2w_2 \le +1 \\ \qquad\quad 3w_1 + 3w_2 \le +2 \\ \qquad\quad w_1 \le 0, w_2 \ge 0 \end{cases}
$$

I vincoli del primale sono tutti saturi, quindi per gli scarti complementari le variabili duali possono anche non essere nulle.

Sempre per gli scarti complementari, dato che $x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{1}{2}$, allora tutti i primi due vincoli duali devono essere saturi:

$$
\begin{cases} 2w_1 + w_2 = -1 \\ -2w_1 + 2w_2 = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = -1 - 2w_1 \\ -2w_1 + 2(-1 - 2w_1) = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = -1 - 2w_1 \\ -2w_1 - 2 - 4w_1 = +1 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} w_2 = -1 - 2w_1 \\ -6w_1 = +3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = -1 + 1 \\ w_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = 0 \\ w_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}
$$

Visto che <u>la soluzione duale rispetta il terzo vincolo e i vincoli di segno</u>, allora la soluzione $\mathbf{x} = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$ è ottima.

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \text{Min } z = +2x_1 - 1x_2 + 3x_3 \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \qquad (1) \\ \qquad\qquad +x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

a) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali: (6 punti)

i. $\lambda_1 = 0$;

ii. $\lambda_1 = 2$.

Come primo passo scriviamo il problema Lagrangiano. Si noti che nel testo il vincolo (1) è della forma "≥", quindi le penalità λ devono essere non-negative:

$$
(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(\lambda) = \text{Min } (2-\lambda)x_1 + (-1-\lambda)x_2 + (3-\lambda)x_3 + 2\lambda \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

Ora consideriamo i due casi proposti:

i. $\lambda_1 = 0$;

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$
(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(0) = \text{Min } (2)x_1 + (-1)x_2 + (3)x_3 + 0 \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

Per cui la soluzione sarà $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(0) = 2$. Si noti che nonostante il costo penalizzato di x_2 sia negativo, non possiamo fissare $x_2 = 1$. Infatti, se avessimo fissato $x_2 = 1$ il vincolo (2) avrebbe imposto $x_1 = x_3 = 1$.

Il subgradiente sarà $s = 2 - x_1 - x_2 - x_3 = 1$. Dopodiché, si aggiorna la penalità Lagrangiana:

$$
\lambda = \max\{0, \lambda + \theta s\} = \max\{0, 0 + \theta\}
$$

Si scelga un θ a piacere.

ii. $\lambda_1 = 2$.

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$
(\mathbf{LR}) \quad \begin{cases} z_{LR}(2) = \text{Min } (0)x_1 + (-3)x_2 + (1)x_3 + 4 \\ \quad \text{s.t.} \quad +x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}
$$

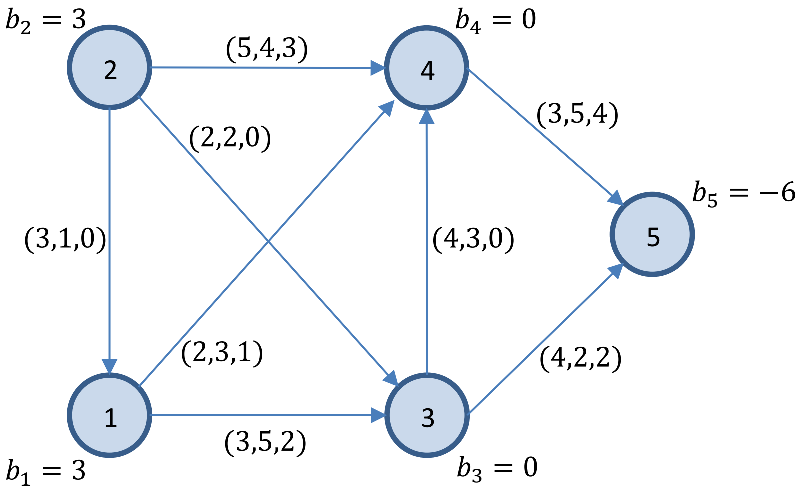
Per cui la soluzione sarà $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$, mentre $z_{LR}(2) = 2$. Si noti che il costo penalizzato di x_2 è ancora negativo, ma in questo caso conviene fissare a $x_1 = 1$, nonostante il vincolo (2) imponga anche $x_1 = x_3 = 1$, perché complessivamente "conviene".

Il subgradiente sarà $s = 2 - x_1 - x_2 - x_3 = -1$. Dopodiché, si aggiorna la penalità Lagrangiana:

$$
\lambda = \max\{0, \lambda + \theta s\} = \max\{0, 2 - \theta\}
$$

Si scelga un θ a piacere.

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente. (6 punti)

```
Algoritmo Flusso di Costo Minimo

Soluzione Ammissibile Iniziale
Nodo 1: x(1,3)=2 x(1,4)=1
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,3)=0 x(2,4)=3
Nodo 3: x(3,4)=0 x(3,5)=2
Nodo 4: x(4,5)=4

Cerca Cicli di Costo Negativo

Ciclo: C(1,4)=2 C(4,2)=-5 C(2,3)=2 C(3,1)=-3
Aumento flusso di: 2

Flusso Costo Minimo Trovato!

Numero Iterazioni: 2

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,3)=0 x(1,4)=3
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,3)=2 x(2,4)=1
Nodo 3: x(3,4)=0 x(3,5)=2
Nodo 4: x(4,5)=4

Costo Soluzione = 35
```

Potevano esserci anche altri cicli di costo negativo che potevano essere scelti, richiedendo un numero diverso di iterazioni, per raggiungere la stessa soluzione.

6) Si considerino il Lemma della Dualità Debole e il Teorema della Dualità Forte.

a) Scrivere gli enunciati dei due teoremi. (3 punti)

Lemma 1 (Dualità Debole).
Se $\tilde{\mathbf{x}} \in X = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ e $\tilde{\mathbf{w}} \in W = \{\mathbf{w} : \mathbf{wA} \leq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$ allora $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$.

Teorema 1 (Dualità Forte). Se $X \neq \emptyset$ e $W \neq \emptyset$, allora esiste una soluzione $\mathbf{x}^*$ ottima per il primale e una soluzione $\mathbf{w}^*$ ottima per il duale. Inoltre, $\mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$.