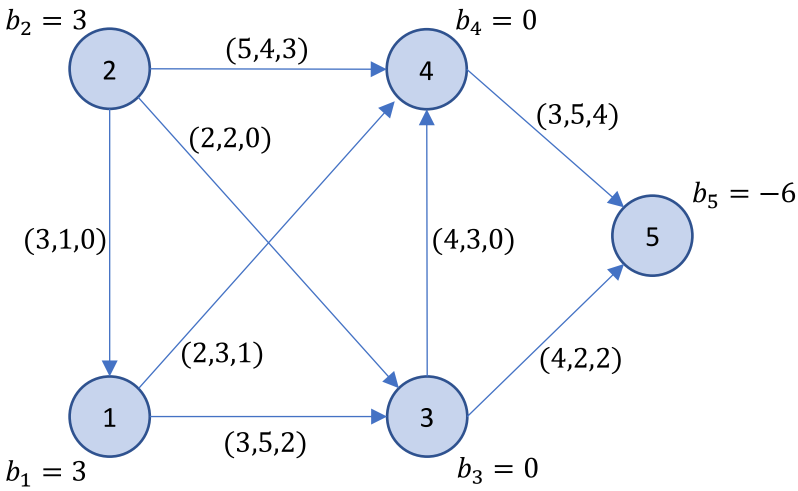
Teoria dei Grafi - Parte 2

Esercizi

1) Si consideri il seguente grafo G:



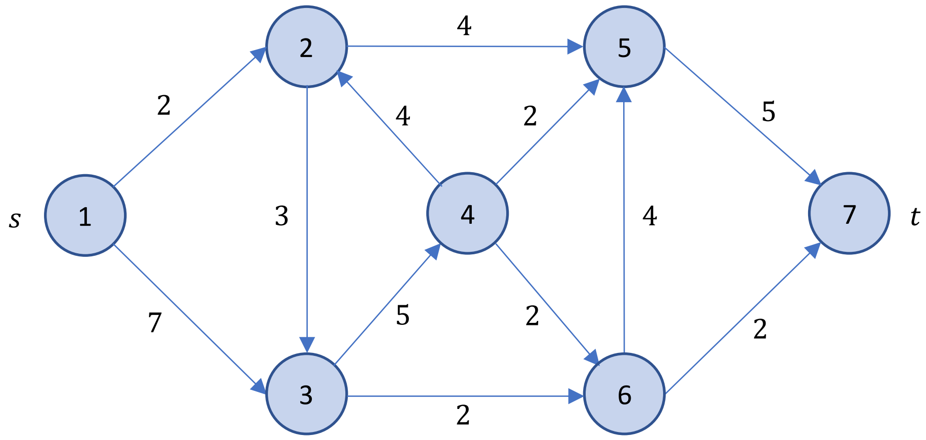
Su ogni arco (i,j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente.

```
Algoritmo Flusso di Costo Minimo

Soluzione Ammissibile Iniziale
Nodo 1: x(1,3)=2 x(1,4)=1
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,3)=0 x(2,4)=3
Nodo 3: x(3,4)=0 x(3,5)=2
Nodo 4: x(4,5)=4

Cerca Cicli di Costo Negativo

Ciclo: C(1,4)=2 C(4,2)=-5 C(2,3)=2 C(3,1)=-3
Aumento flusso di: 2

Flusso Costo Minimo Trovato!

Numero Iterazioni: 2

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,3)=0 x(1,4)=3
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,3)=2 x(2,4)=1
Nodo 3: x(3,4)=0 x(3,5)=2
Nodo 4: x(4,5)=4

Costo Soluzione = 35
```

Potevano esserci anche altri cicli di costo negativo che potevano essere scelti, richiedendo un numero diverso di iterazioni, per raggiungere la stessa soluzione.

2) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la sua capacità u_{ij}.

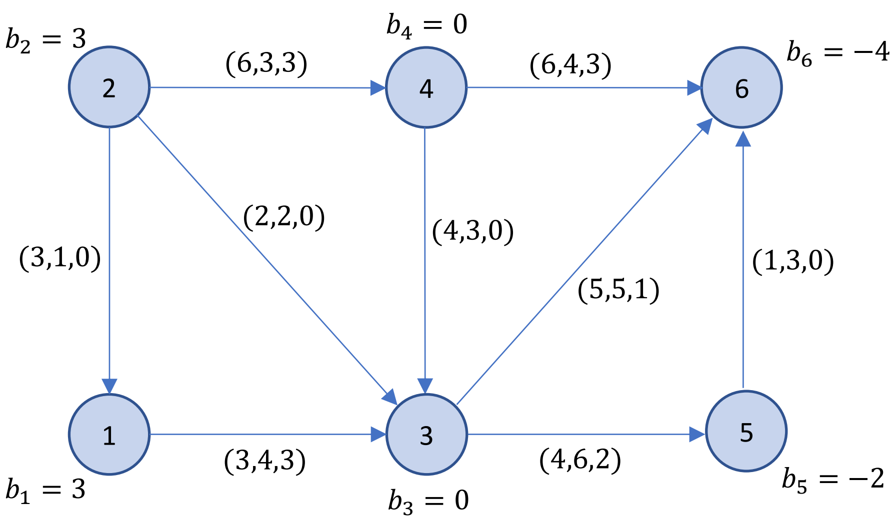
a) Determinare il flusso massimo dal vertice $s = 1$ al vertice $t = 7$.

```
Algoritmo Flusso Massimo

Grafo Iniziale Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=0 x(1,3)=0
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,5)=0
Nodo 3: x(3,4)=0 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,2)=0 x(4,5)=0 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,7)=0
Nodo 6: x(6,5)=0 x(6,7)=0

Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,2]
Etichetta nodo 3: [1,7]
Etichetta nodo 5: [2,2]
Etichetta nodo 4: [3,5]
Etichetta nodo 6: [3,2]
Etichetta nodo 7: [5,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,2) (2,5) (5,7)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,7]
Etichetta nodo 4: [3,5]
Etichetta nodo 6: [3,2]
Etichetta nodo 2: [4,4]
Etichetta nodo 5: [4,2]
Etichetta nodo 7: [5,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,3) (3,4) (4,5) (5,7)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,5]
Etichetta nodo 4: [3,3]
Etichetta nodo 6: [3,2]
Etichetta nodo 2: [4,3]
Etichetta nodo 5: [2,2]
Etichetta nodo 7: [5,1]
Aumenta il flusso di 1 nel cammino:(1,3) (3,4) (4,2) (2,5) (5,7)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,4]
Etichetta nodo 4: [3,2]
Etichetta nodo 6: [3,2]
Etichetta nodo 2: [4,2]
Etichetta nodo 5: [2,1]
Etichetta nodo 7: [6,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,3) (3,6) (6,7)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,2]
Etichetta nodo 4: [3,2]
Etichetta nodo 2: [4,2]
Etichetta nodo 6: [4,2]
Etichetta nodo 5: [2,1]
```

```
Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 5

Risultato Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=2 x(1,3)=5
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,5)=3
Nodo 3: x(3,4)=3 x(3,6)=2
Nodo 4: x(4,2)=1 x(4,5)=2 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,7)=5
Nodo 6: x(6,5)=0 x(6,7)=2

Flusso Massimo = 7
```

b) Data la soluzione ottima calcolata al punto (a), determinare il "*Taglio s-t di capacità minima*" e indicare il metodo impiegato per determinarlo.
Il taglio s-t di capacità minima si può determinare includendo nell'insieme S tutti i vertici etichettati e in $\bar{S}$ quelli non etichettati nell'ultima iterazione dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson. Nel caso dell'esercizio abbiamo che $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $\bar{S} = \{7\}$.

3) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

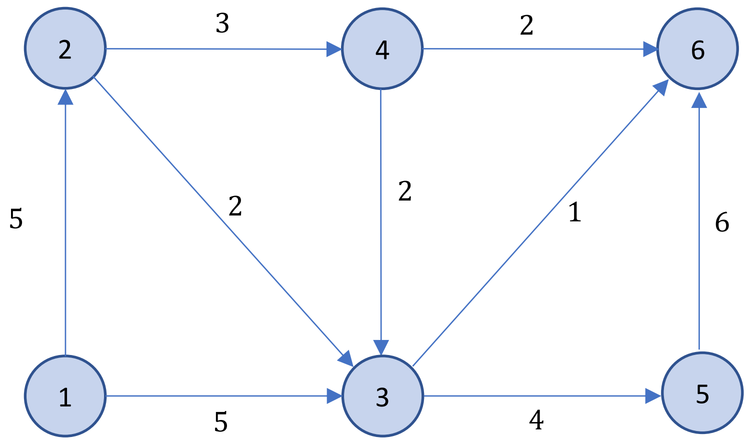
a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente.

```
Algoritmo Flusso di Costo Minimo

Soluzione Ammissibile Iniziale
Nodo 1: x(1,3)=3
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,3)=0 x(2,4)=3
Nodo 3: x(3,5)=2 x(3,6)=1
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=3
Nodo 5: x(5,6)=0

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione 1
Ciclo: C(2,3)=2 C(3,6)=5 C(6,4)=-6 C(4,2)=-6
Aumento flusso di: 2

Iterazione 2
Ciclo: C(1,3)=3 C(3,6)=5 C(6,4)=-6 C(4,2)=-6 C(2,1)=3
Aumento flusso di: 1
```

```
Iterazione 3
Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 3

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,3)=4
Nodo 2: x(2,1)=1 x(2,3)=2 x(2,4)=0
Nodo 3: x(3,5)=2 x(3,6)=4
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,6)=0

Costo Soluzione = 47
```

Potevano esserci anche altri cicli di costo negativo che potevano essere scelti, richiedendo un numero diverso di iterazioni, per raggiungere la stessa soluzione.

4) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la capacità u_{ij}.

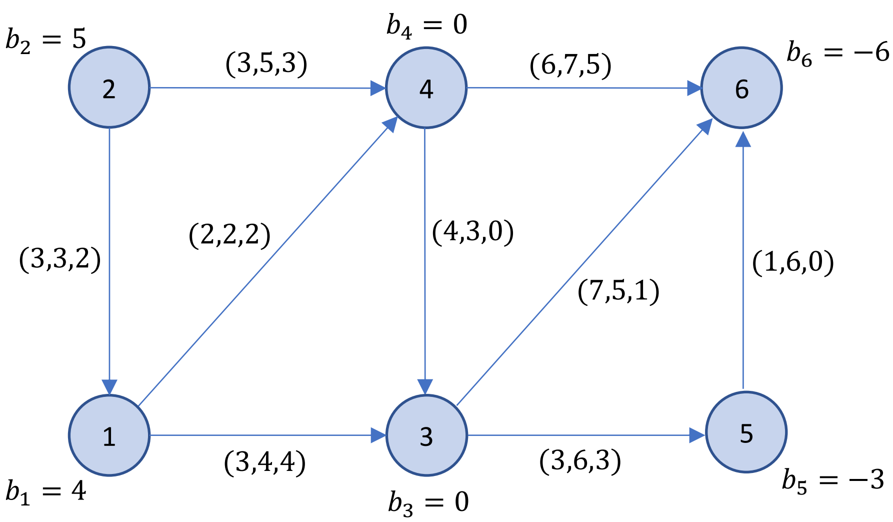
a) Determinare il flusso massimo dal vertice $s = 1$ al vertice $t = 6$.

```
Algoritmo Flusso Massimo

Grafo Iniziale Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=0 x(1,3)=0
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,4)=0
Nodo 3: x(3,5)=0 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,6)=0

Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,5]
Etichetta nodo 3: [1,5]
Etichetta nodo 4: [2,3]
Etichetta nodo 5: [3,4]
Etichetta nodo 6: [3,1]
Aumenta il flusso di 1 nel cammino:(1,3) (3,6)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,5]
Etichetta nodo 3: [1,4]
Etichetta nodo 4: [2,3]
Etichetta nodo 5: [3,4]
Etichetta nodo 6: [4,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,2) (2,4) (4,6)
```

```
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,3]
Etichetta nodo 3: [1,4]
Etichetta nodo 4: [2,1]
Etichetta nodo 5: [3,4]
Etichetta nodo 6: [5,4]
Aumenta il flusso di 4 nel cammino:(1,3) (3,5) (5,6)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,3]
Etichetta nodo 3: [2,2]
Etichetta nodo 4: [2,1]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 4

Risultato Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=2 x(1,3)=5
Nodo 2: x(2,3)=0 x(2,4)=2
Nodo 3: x(3,5)=4 x(3,6)=1
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=2
Nodo 5: x(5,6)=4

Flusso Massimo = 7
```

b) Data la soluzione ottima calcolata al punto (a), determinare il "*Taglio s-t di capacità minima*" e indicare il metodo impiegato per determinarlo.
Il taglio s-t di capacità minima si può determinare includendo nell'insieme S tutti i vertici etichettati e in $\bar{S}$ quelli non etichettati nell'ultima iterazione dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson. Nel caso dell'esercizio abbiamo che $S = \{1,2,3,4\}$ e $\bar{S} = \{5,6\}$.

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

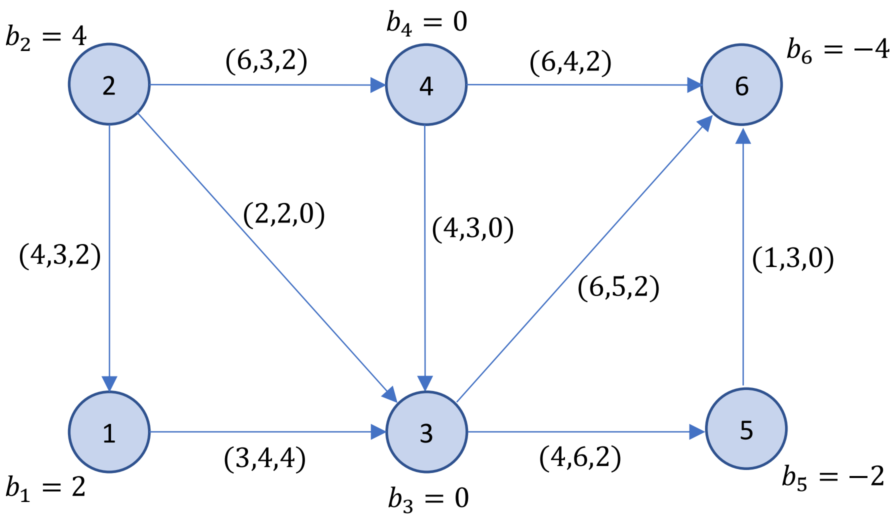
a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente.

```
Algoritmo Flusso di Costo Minimo

Soluzione Ammissibile Iniziale
Nodo 1: x(1,3)=4 x(1,4)=2
Nodo 2: x(2,1)=2 x(2,4)=3
```

```
Nodo 3: x(3,5)=3 x(3,6)=1
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=5
Nodo 5: x(5,6)=0

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione: 1
Ciclo: C(1,2)=-3 C(2,4)=3 C(4,1)=-2
Aumento flusso di: 2

Iterazione: 2
Ciclo: C(3,5)=3 C(5,6)=1 C(6,3)=-7
Aumento flusso di: 1

Iterazione: 3
Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 3

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,3)=4 x(1,4)=0
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,4)=5
Nodo 3: x(3,5)=4 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=5
Nodo 5: x(5,6)=1

Costo Soluzione = 70
```

Potevano esserci anche altri cicli di costo negativo che potevano essere scelti, richiedendo un numero diverso di iterazioni, per raggiungere la stessa soluzione.

6) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i,j) è riportata la tripletta (c_{ij}, u_{ij}, x_{ij}), dove c_{ij} è il costo per trasportare una unità di flusso, u_{ij} è la capacità e x_{ij} è il flusso corrente.

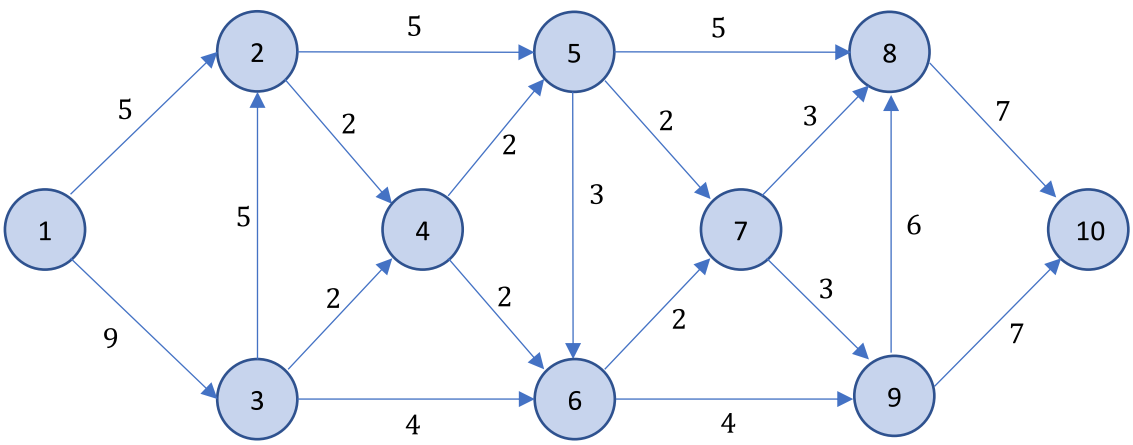
a) Determinare il flusso di costo minimo partendo dal flusso corrente.

```
Algoritmo Flusso di Costo Minimo

Soluzione Ammissibile Iniziale
Nodo 1: x(1,3)=4
Nodo 2: x(2,1)=2 x(2,3)=0 x(2,4)=2
```

```
Nodo 3: x(3,5)=2 x(3,6)=2
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=2
Nodo 5: x(5,6)=0

Cerca Cicli di Costo Negativo

Iterazione: 1
Ciclo: C(1,2)=-4 C(2,3)=2 C(3,1)=-3
Aumento flusso di: 2

Iterazione: 2
Ciclo: C(3,5)=4 C(5,6)=1 C(6,3)=-6
Aumento flusso di: 2

Iterazione: 3
Ciclo non trovato: Flusso Costo Minimo Trovato

Numero Iterazioni: 3

Risultato Flusso di Costo Minimo
Nodo 1: x(1,3)=2
Nodo 2: x(2,1)=0 x(2,3)=2 x(2,4)=2
Nodo 3: x(3,5)=4 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,3)=0 x(4,6)=2
Nodo 5: x(5,6)=2

Costo Soluzione = 52
```

Potevano esserci anche altri cicli di costo negativo che potevano essere scelti, richiedendo un numero diverso di iterazioni, per raggiungere la stessa soluzione.

7) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la capacità u_{ij}.

a) Determinare il flusso massimo dal vertice $s = 1$ al vertice $t = 10$.

```
Algoritmo Flusso Massimo

Grafo Iniziale Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=0 x(1,3)=0
Nodo 2: x(2,4)=0 x(2,5)=0
Nodo 3: x(3,2)=0 x(3,4)=0 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,5)=0 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,6)=0 x(5,7)=0 x(5,8)=0
Nodo 6: x(6,7)=0 x(6,9)=0
Nodo 7: x(7,8)=0 x(7,9)=0
Nodo 8: x(8,10)=0
Nodo 9: x(9,8)=0 x(9,10)=0
```

```
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,5]
Etichetta nodo 3: [1,9]
Etichetta nodo 4: [2,2]
Etichetta nodo 5: [2,5]
Etichetta nodo 6: [3,4]
Etichetta nodo 7: [5,2]
Etichetta nodo 8: [5,5]
Etichetta nodo 9: [6,4]
Etichetta nodo 10: [8,5]
Aumenta il flusso di 5 nel cammino:(1,2) (2,5) (5,8) (8,10)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,9]
Etichetta nodo 2: [3,5]
Etichetta nodo 4: [3,2]
Etichetta nodo 6: [3,4]
Etichetta nodo 5: [4,2]
Etichetta nodo 7: [5,2]
Etichetta nodo 9: [6,4]
Etichetta nodo 8: [7,2]
Etichetta nodo 10: [8,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,3) (3,4) (4,5) (5,7) (7,8) (8,10)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,7]
Etichetta nodo 2: [3,5]
Etichetta nodo 6: [3,4]
Etichetta nodo 4: [2,2]
Etichetta nodo 7: [6,2]
Etichetta nodo 9: [6,4]
Etichetta nodo 8: [7,1]
Etichetta nodo 5: [-8,1]
Etichetta nodo 10: [9,4]
Aumenta il flusso di 4 nel cammino:(1,3) (3,6) (6,9) (9,10)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,3]
Etichetta nodo 2: [3,3]
Etichetta nodo 4: [2,2]
Etichetta nodo 6: [4,2]
Etichetta nodo 7: [6,2]
Etichetta nodo 8: [7,1]
Etichetta nodo 9: [7,2]
Etichetta nodo 5: [-8,1]
Etichetta nodo 10: [9,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,3) (3,2) (2,4) (4,6) (6,7) (7,9) (9,10)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,1]
Etichetta nodo 2: [3,1]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 5

Risultato Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=5 x(1,3)=8
Nodo 2: x(2,4)=2 x(2,5)=5
Nodo 3: x(3,2)=2 x(3,4)=2 x(3,6)=4
Nodo 4: x(4,5)=2 x(4,6)=2
Nodo 5: x(5,6)=0 x(5,7)=2 x(5,8)=5
Nodo 6: x(6,7)=2 x(6,9)=4
Nodo 7: x(7,8)=2 x(7,9)=2
Nodo 8: x(8,10)=7
Nodo 9: x(9,8)=0 x(9,10)=6

Flusso Massimo = 13
```

b) Data la soluzione ottima calcolata al punto (a), determinare il "*Taglio s-t di capacità minima*" e indicare il metodo impiegato per determinarlo.
Il taglio s-t di capacità minima si può determinare includendo nell'insieme S tutti i vertici etichettati e in $\bar{S}$ quelli non etichettati nell'ultima iterazione dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson. Nel caso dell'esercizio abbiamo che $S = \{1,2,3\}$ e $\bar{S} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$.