Esame Ricerca Operativa

14 Settembre 2023

durata prevista: 2 ore

Cognome e Nome:____**Matricola:**______________________

Istruzioni

- Ogni foglio protocollo deve essere numerato e riportare Nome, Cognome e Matricola (scritti in stampatello e leggibili).
- Le soluzioni dovranno riportare tutti i passaggi necessari opportunamente commentati. **Risultati corretti senza i passaggi intermedi non verranno valutati**. Le soluzioni dovranno essere chiaramente individuabili usando la numerazione presente sul testo. Lo studente dovrà segnalare eventuali parti errate, che non dovranno essere corrette dal docente, e l'eventuale pagina dove l'esercizio è completato.
- Lo studente potrà usare una calcolatrice scientifica non grafica e non programmabile, ma non potrà usare altri dispositivi come telefoni e smartphone, che dovranno essere spenti, e non potrà usare i propri appunti, le note del docente, i libri di testo oppure altri materiali.

Testo

1) Si consideri il problema di trasportare in una rete logistica una sola merce. La rete logistica ha un insieme di nodi N, che rappresentano i magazzini dove la merce può essere caricata e/o scaricata, e un insieme di archi A, che rappresentano i "canali" per trasportare la merce tra due nodi.

Per ogni nodo $i \in N$ la quantità b_i indica quanta merce viene spedita (se $b_i > 0$) oppure ricevuta (se $b_i < 0$). Se $b_i = 0$ la merce transita solo.

Per ogni arco $(i,j) \in A$ le quantità u_{ij} e c_{ij} indicano la quantità massima di merce che può essere trasportata con l'arco (i,j) e il costo per trasportare ogni unità di merce con l'arco (i,j), rispettivamente.

Si vuole determinare come trasportare la merce nella rete logistica per minimizzare il costo complessivo rispettando i vincoli sopra descritti.

a) Scrivere un modello matematico di programmazione lineare intera. (4 punti)

Per formulare matematicamente il problema è sufficiente un solo insieme di variabili decisionali x_{ij}, che indicano quanta merce è trasportata nell'arco $(i,j) \in A$.

Un possibile modello matematico è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} & \sum_{(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{(k,i)\in A} x_{ki} = b_i, \qquad i \in N \\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \qquad (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

2) Si consideri il seguente problema **P**:

$$
(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} \min z = +x_1 + 5x_2 + 1x_3 \\ \text{s.t. } +x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Primale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|    -1.000     -5.000     -1.000      0.000      0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      4.000|     1.000      1.000     -2.000      1.000      0.000
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000

Tableau Fase 1: iniziale
      0.000|     0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      4.000|     1.000      1.000     -2.000      1.000      0.000      0.000
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau Fase 1: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000      0.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      4.000|     1.000      1.000     -2.000      1.000      0.000      0.000
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
      0.000|     0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      2.000|     2.000      0.000     -3.000      1.000      1.000     -1.000
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 1
      0.000|     0.000      0.000      0.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+------------------------------------------------------------------
      2.000|     2.000      0.000     -3.000      1.000      1.000     -1.000
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000      1.000

Tableau Fase 2: iniziale
      0.000|    -1.000     -5.000     -1.000     -0.000     -0.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|     2.000      0.000     -3.000      1.000      1.000
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000

Tableau Fase 2: dopo annullamento riga 0 per variabili in base
     10.000|    -6.000      0.000      4.000      0.000     -5.000
-----------+-------------------------------------------------------
      2.000|     2.000      0.000     -3.000      1.000      1.000
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,3)
      2.000|    -2.000     -4.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      8.000|    -1.000      3.000      0.000      1.000     -2.000
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000

Numero Iterazioni: 1

Tableau Ottimo Fase 2
      2.000|    -2.000     -4.000      0.000      0.000     -1.000
-----------+-------------------------------------------------------
      8.000|    -1.000      3.000      0.000      1.000     -2.000
      2.000|    -1.000      1.000      1.000      0.000     -1.000

Costo ottimo:     2.0000

X(   1):     0.0000
X(   1):     0.0000
X(   3):     2.0000
```

b) Scrivere il duale di **P**. (2 punti)

Il duale **D** del problema **P** è il seguente:

$$(\mathbf{D})\quad \begin{cases} \max z = 4w_1 + 2w_2 \\ \quad \text{s.t.}\ \ +w_1 - w_2 \leq 1 \\ \qquad w_1 + w_2 \leq 5 \\ \qquad -2w_1 + w_2 \leq 1 \\ \qquad w_1 \leq 0,\ w_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \min z = +3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \quad \text{s.t.}\ +2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ \qquad +2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Risolvere il problema **P** utilizzando il metodo del Simplesso Duale. (6 punti)

```
Tableau Iniziale!
      0.000|     -3.000      1.000      2.000      0.000      0.000
-----------+-----------------------------------------------------
      6.000|      2.000      2.000      1.000      1.000      0.000
      3.000|      2.000      2.000     -2.000      0.000     -1.000

Tableau dopo aver calcolato la Base iniziale!
 -20000.000|     -5.000     -1.000      0.000      0.000      0.000     -2.000
-----------+----------------------------------------------------------------
  -9994.000|      1.000      1.000      0.000      1.000      0.000     -1.000
 -20003.000|     -4.000     -4.000      0.000     -0.000      1.000     -2.000
  10000.000|      1.000      1.000      1.000      0.000      0.000      1.000

Tableau dopo aver pivotato su (2,2)
 -14999.250|     -4.000      0.000      0.000      0.000     -0.250     -1.500
-----------+----------------------------------------------------------------
 -14994.750|      0.000      0.000      0.000      1.000      0.250     -1.500
   5000.750|      1.000      1.000     -0.000      0.000     -0.250      0.500
   4999.250|      0.000      0.000      1.000      0.000      0.250      0.500

Tableau dopo aver pivotato su (1,6)
     -4.500|     -4.000      0.000      0.000     -1.000     -0.500      0.000
-----------+----------------------------------------------------------------
   9996.500|     -0.000     -0.000     -0.000     -0.667     -0.167      1.000
      2.500|      1.000      1.000      0.000      0.333     -0.167      0.000
      1.000|      0.000      0.000      1.000      0.333      0.333      0.000

Tableau ottimo!
     -4.500|     -4.000      0.000      0.000     -1.000     -0.500      0.000
-----------+----------------------------------------------------------------
   9996.500|     -0.000     -0.000     -0.000     -0.667     -0.167      1.000
      2.500|      1.000      1.000      0.000      0.333     -0.167      0.000
      1.000|      0.000      0.000      1.000      0.333      0.333      0.000

Costo ottimo:    -4.5000

X(   1):     0.0000
X(   2):     2.5000
X(   3):     1.0000
```

4) Si consideri il seguente problema **P**:

$$(\mathbf{P})\quad \begin{cases} \text{Min } z = +2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \quad \text{s.t.}\quad -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \qquad (1) \\ \qquad +2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \qquad (2) \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}$$

a) Rilassare in modo Lagrangiano il vincolo (1) e svolgere la prima iterazione completa del metodo del subgradiente partendo dalle seguenti penalità iniziali: (6 punti)

   i. $\lambda_1 = 0$;

   ii. $\lambda_1 = 3$.

Come primo passo scriviamo il problema Lagrangiano. Si noti che nel testo il vincolo (1) è della forma "$\geq$", quindi le penalità λ devono essere non-negative ($\lambda \geq 0$):

$$\textbf{(LR)} \quad \begin{cases} z_{LR}(\lambda) = \text{Min } (2+\lambda)x_1 + (-2-\lambda)x_2 + (1-2\lambda)x_3 + 2\lambda \\ \qquad \text{s.t.} \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}$$

Ora consideriamo i due casi proposti:

i. $\lambda_1 = 0$;

Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$\textbf{(LR)} \quad \begin{cases} z_{LR}(0) = \text{Min } (2)x_1 + (-2)x_2 + (1)x_3 + 0 \\ \qquad \text{s.t.} \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}$$

Siccome si deve trovare la soluzione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ che minimizza la funzione obiettivo e soddisfa i vincoli (2) e (3), la soluzione sarà $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, mentre $z_{LR}(0) = 0$.

Il subgradiente sarà $s = 2 + x_1 - x_2 - 2x_3 = 2$. Dopodiché, si aggiorna la penalità Lagrangiana:

$$\lambda = \max\{0, \lambda + \theta s\} = \max\{0, 0 + 2\theta\}$$

Si scelga un θ a piacere.

ii. $\lambda_1 = 3$.

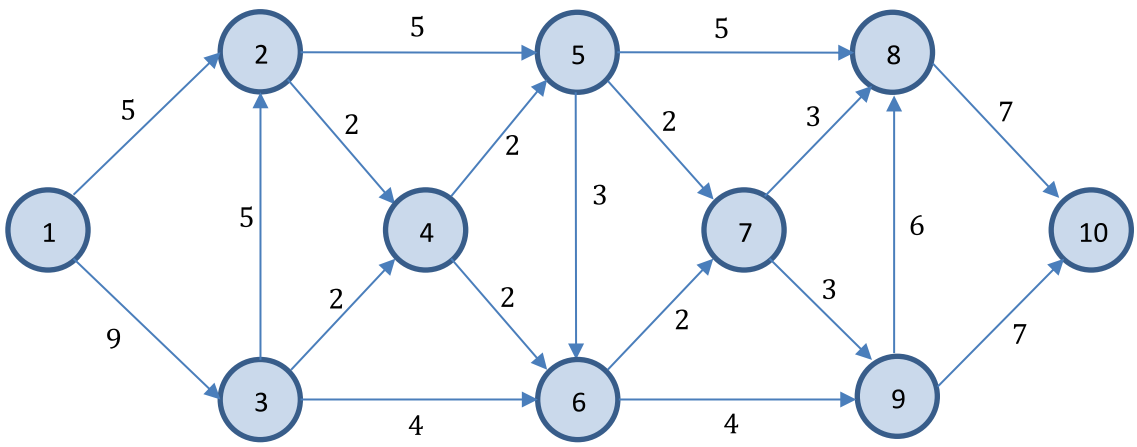
Il problema Lagrangiano da risolvere sarà:

$$\textbf{(LR)} \quad \begin{cases} z_{LR}(2) = \text{Min } (5)x_1 + (-5)x_2 + (-5)x_3 + 6 \\ \qquad \text{s.t.} \quad +2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \qquad (2) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \qquad (3) \end{cases}$$

In questo caso la soluzione $= (x_1, x_2, x_3)$ che minimizza la funzione obiettivo e soddisfa i vincoli (2) e (3) sarà $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, mentre $z_{LR}(0) = 1$.

Per la soluzione $\mathbf{x} = (0,0,1)$ il subgradiente è $s = 2 + x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, per cui si può notare che la soluzione è ammissibile e che $\lambda s = 0$, quindi per il Teorema della Dualità Lagrangiana Forte possiamo dire che la soluzione $\mathbf{x} = (0,0,1)$ è ottima.

5) Si consideri il seguente grafo G:



Su ogni arco (i, j) è riportata la capacità u_{ij}.

a) Determinare il flusso massimo dal vertice $s = 1$ al vertice $t = 10$. (4 punti)

```
Algoritmo Flusso Massimo

Grafo Iniziale Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=0 x(1,3)=0
Nodo 2: x(2,4)=0 x(2,5)=0
Nodo 3: x(3,2)=0 x(3,4)=0 x(3,6)=0
Nodo 4: x(4,5)=0 x(4,6)=0
Nodo 5: x(5,6)=0 x(5,7)=0 x(5,8)=0
Nodo 6: x(6,7)=0 x(6,9)=0
Nodo 7: x(7,8)=0 x(7,9)=0
Nodo 8: x(8,10)=0
Nodo 9: x(9,8)=0 x(9,10)=0

Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 2: [1,5]
Etichetta nodo 3: [1,9]
Etichetta nodo 4: [2,2]
Etichetta nodo 5: [2,5]
Etichetta nodo 6: [3,4]
Etichetta nodo 7: [5,2]
Etichetta nodo 8: [5,5]
Etichetta nodo 9: [6,4]
Etichetta nodo 10: [8,5]
Aumenta il flusso di 5 nel cammino:(1,2) (2,5) (5,8) (8,10)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,9]
Etichetta nodo 2: [3,5]
Etichetta nodo 4: [3,2]
Etichetta nodo 6: [3,4]
Etichetta nodo 5: [4,2]
Etichetta nodo 7: [5,2]
Etichetta nodo 9: [6,4]
Etichetta nodo 8: [7,2]
Etichetta nodo 10: [8,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,3) (3,4) (4,5) (5,7) (7,8) (8,10)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,7]
Etichetta nodo 2: [3,5]
Etichetta nodo 6: [3,4]
Etichetta nodo 4: [2,2]
Etichetta nodo 7: [6,2]
Etichetta nodo 9: [6,4]
Etichetta nodo 8: [7,1]
Etichetta nodo 5: [-8,1]
```

```
Etichetta nodo 10: [9,4]
Aumenta il flusso di 4 nel cammino:(1,3) (3,6) (6,9) (9,10)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,3]
Etichetta nodo 2: [3,3]
Etichetta nodo 4: [2,2]
Etichetta nodo 6: [4,2]
Etichetta nodo 7: [6,2]
Etichetta nodo 8: [7,1]
Etichetta nodo 9: [7,2]
Etichetta nodo 5: [-8,1]
Etichetta nodo 10: [9,2]
Aumenta il flusso di 2 nel cammino:(1,3) (3,2) (2,4) (4,6) (6,7) (7,9) (9,10)
Etichetta nodo 1: [1,100000000]
Etichetta nodo 3: [1,1]
Etichetta nodo 2: [3,1]

Flusso Massimo Trovato!

Numero Iterazioni: 5

Risultato Flusso Massimo
Nodo 1: x(1,2)=5 x(1,3)=8
Nodo 2: x(2,4)=2 x(2,5)=5
Nodo 3: x(3,2)=2 x(3,4)=2 x(3,6)=4
Nodo 4: x(4,5)=2 x(4,6)=2
Nodo 5: x(5,6)=0 x(5,7)=2 x(5,8)=5
Nodo 6: x(6,7)=2 x(6,9)=4
Nodo 7: x(7,8)=2 x(7,9)=2
Nodo 8: x(8,10)=7
Nodo 9: x(9,8)=0 x(9,10)=6

Flusso Massimo = 13
```

b) Data la soluzione ottima calcolata al punto (a), determinare il "*Taglio s-t di capacità minima*" e indicare il metodo impiegato per determinarlo. (2 punti)

Il taglio s-t di capacità minima si può determinare includendo nell'insieme S tutti i vertici etichettati e in $\bar{S}$ quelli non etichettati nell'ultima iterazione dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson. Nel caso dell'esercizio abbiamo che $S = \{1,2,3\}$ e $\bar{S} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$.

6) Si considerino il Lemma della Dualità Debole e il Teorema della Dualità Forte.

a) Scrivere gli enunciati dei due teoremi. (3 punti)

Lemma 1 (Dualità Debole).
Se $\tilde{\mathbf{x}} \in X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ e $\tilde{\mathbf{w}} \in W = \{\mathbf{w} : \mathbf{w}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$ allora $\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{b} \leq \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}$.

Teorema 1 (Dualità Forte). Se $X \neq \emptyset$ e $W \neq \emptyset$, allora esiste una soluzione $\mathbf{x}^*$ ottima per il primale e una soluzione $\mathbf{w}^*$ ottima per il duale. Inoltre, $\mathbf{w}^*\mathbf{b} = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$.