Universidade de São Paulo (USP)

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade (FEA)

Tópicos Avançados de Finanças

Prof. Leandro Maciel

AULA 9: Composição de Carteiras

Agenda

1. Risco e Retorno

- Diversos ativos estão disponíveis para aplicação;
- Seleção dos potenciais investimentos: análise fundamentalista ou técnica;
- Quanto investir do meu capital em cada alternativa selecionada?
- **Risco e retorno** $\rightarrow$ base na tomada de decisão;
- Como mensurar essas duas variáveis?

- Decisões são tomadas em um ambiente de incerteza (riscos);
- Eventos futuros $\rightarrow$ quantificar via distribuições de probabilidades;
- **Risco** $\rightarrow$ variabilidade de resultados em torno de um valor esperado;
- Como mensurar o risco?
- **Variância** ou **desvio-padrão** como *proxy* do risco;
- Variabilidade (ou risco) é conhecida com o conceito de **volatilidade**.

- Investidores estão interessados nos **retornos** dos ativos;
- O nível de preço não é variável chave nas decisões;
- Como calcular então os retornos?
- Retorno de um ativo financeiro:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

- O preço de uma ação cai de R$ 34,50 para R$ 29,80. Qual o retorno?
- E se o preço aumentasse de R$ 34,50 para R$ 37,20?

- Retorno e risco de uma posição $\rightarrow$ variáveis fundamentais;
- *Trade-off* positivo entre risco e retorno;
- Como então mensurar o risco e o retorno?
- Calculamos anteriormente o retorno realizado;
- Futuro desconhecido $\rightarrow$ medida de retorno esperado;
- Valor esperado associado à uma probabilidade.

- **Retorno esperado** - esperança estatística - retorno médio:

$$E(R) = \bar{R} = \sum_{i=1}^{T} P_i \times R_i$$

- Supondo mesma probabilidade para retornos realizados:

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{T} R_i$$

- $\bar{R} = (2\% + 1\% - 1,5\%)/3 = 0,5\%.$

- Mensurar o risco $\rightarrow$ incerteza;
- **Desvio-padrão** ou **Variância** $\rightarrow$ medida de dispersão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(R_i - \bar{R})^2} \qquad VAR = \sigma^2$$

- $\sigma = \sqrt{\frac{1}{3-1}\left[(2\% - 0,5\%)^2 + (1\% - 0,5\%)^2 + (-1.5\% - 0,5\%)^2\right]}$;
- $\sigma = 1,80\%$ ou $\sigma^2 = 3,25\%^2$;
- Menor DP $\rightarrow$ menor variabilidade $\rightarrow$ menor risco.

- Como avaliar conjuntamente risco e retorno?
- **Coeficiente de variação**:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{R}}$$

- Unidade de risco por unidade de retorno esperado;
- Permite comparar mais precisamente alternativas de investimento;
- $CV = 1.80/0.5 = 3,60$.

- Qual dos investimentos abaixo selecionar?

Investimento	Ret. Esperado	Desvio padrão	CV
C	24%	20%	0,833
D	30%	29%	0,967

- Decisão → preferências pelo risco;
- Investidor **avesso ao risco**, **neutro ao risco** e **propenso ao risco**;
- Preferência definem a **escolha ótima**.

2. Teoria do Portfólio

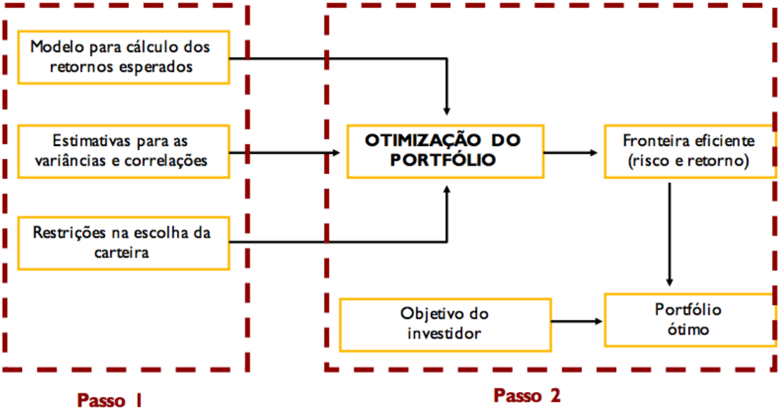
- **Moderna Teoria do Portfólio** → Proposta por Harry Markowitz;
- Nobel economia 1990 (+ Sharpe e Miller);
- Principal ideia: **diversificação**.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. **Journal of Finance**, Vol. 7, p. 77-91, 1952

Hipóteses da Teoria de Portfólio de Markowitz:

1. Decisão tomada em um ambiente de risco (incerteza);
2. Retornos de diferentes ativos não são independentes (correlação);
3. Racionalidade e aversão ao risco;
4. Horizonte de decisão para um período no tempo;
5. Ativos são completamente divisíveis;
6. Escolha baseada no risco e no retorno;
7. Não há custos de transação e impostos.

- Etapas em um processo de investimento:



- Objetivo $\rightarrow$ compor uma carteira **ótima** de ativos;
- Definimos o peso w (% do capital total) de cada ativo na carteira;
- Para uma carteira composta por n ativos, o retorno esperado é:

$$\bar{R}_p = (\bar{R}_1 \times w_1) + (\bar{R}_2 \times w_2) + \ldots + (\bar{R}_n \times w_n) = \sum_{j=1}^{n} \bar{R}_j \times w_j$$

- Se $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \rightarrow$ carteira totalmente investida.

- **Exemplo 1.** Calcule o retorno esperado da seguinte carteira:

Ativos	**Retorno Esperado** $\bar{R}$	**Participação na Carteira** w
A	20%	15%
B	16%	20%
C	14%	40%
D	17%	25%

- Precisamos agora definir o risco de uma carteira...
- Medida mais complexa do que o retorno esperado;
- Risco mensurado como variância (desvio-padrão);
- Em uma carteira com dois ativos (A e B):

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(\bar{R}_p) = \text{Var}(w_A \bar{R}_A + w_B \bar{R}_B)$$

- Propriedade: $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{COV}(X, Y)$.

- Risco, desvio-padrão, da carteira:

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2 \times \sigma_A^2 + w_B^2 \times \sigma_B^2 + 2 \times w_A \times w_B \times COV(A,B)}$$

- $COV(A,B) \rightarrow$ covariância (interrelação) entre os ativos A e B;
- $COV(A,B) > 0$ ou $COV(A,B) < 0 \rightarrow$ relação linear;
- Lembrando que:

$$COV(A,B) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(R_{A,i} - \bar{R}_A)(R_{B,i} - \bar{R}_B)$$

- Utilizamos o conceito de **correlação** (mais intuitivo);
- **Coeficiente de correlação linear**:

$$\rho_{A,B} = \frac{COV(A,B)}{\sigma_A \times \sigma_B}, \quad -1 \leq \rho_{A,B} \leq +1$$

- $\rho = +1$ ($\rho = -1$) $\rightarrow$ correlação perfeitamente positiva (negativa);
- $\rho = 0 \rightarrow$ variáveis independentes ou não correlacionadas.

- O risco (desvio-padrão) do portfolio pode ser escrito como:

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2 \times \sigma_A^2 + w_B^2 \times \sigma_B^2 + 2 \times w_A \times w_B \times \rho_{A,B} \times \sigma_A \times \sigma_B}$$

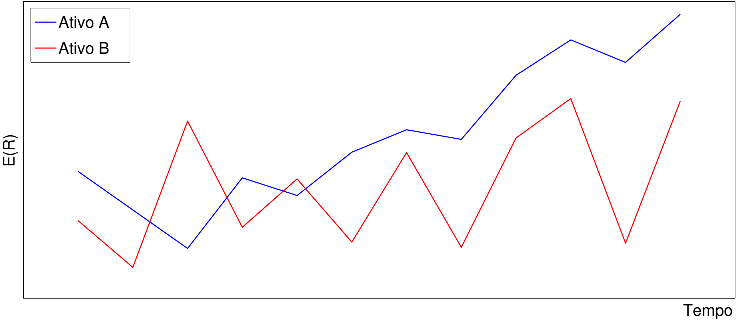
$$COV(A,B) = \rho_{A,B} \times \sigma_A \times \sigma_B$$

- **Risco da carteira depende**:
  - risco de cada ativo (desvio-padrão - σ);
  - percentual do capital aplicado em cada ativo (w);
  - correlação entre os ativos (ρ).
- Para uma carteira com n ativos:

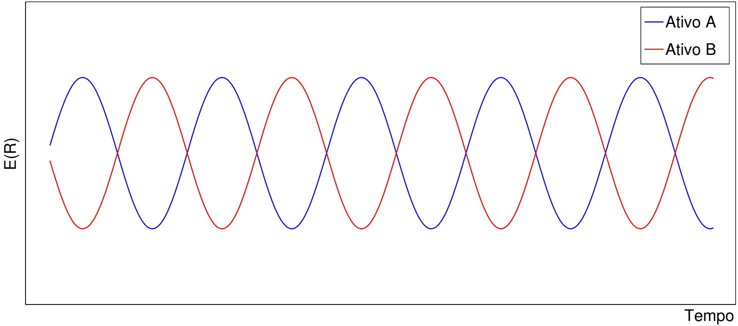
$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} w_j \times w_l \times \rho_{j,l} \times \sigma_j \times \sigma_l}$$

- Risco da carteira não é a soma dos riscos individuais;
- Risco reduz quando inserimos ativos com diferentes comportamentos;
- **Correlação** $\rightarrow$ mecanismo que permite diversificação;
- A correlação pode reduzir o risco da carteira;
- Quão mais negativa a correlação, maior a redução no risco da carteira.

- Correlação perfeitamente positiva:

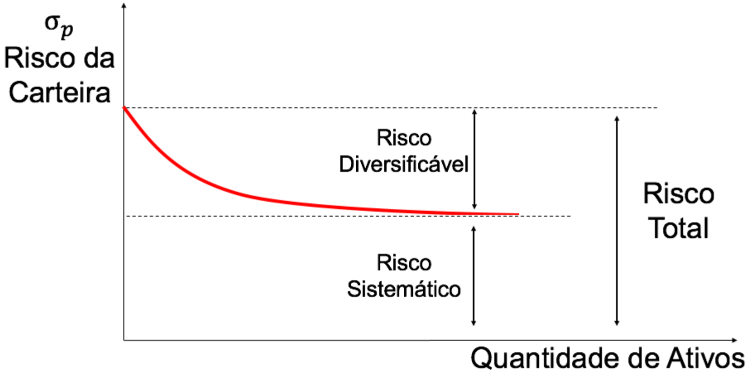


- Correlação perfeitamente negativa:



- Combinação de ativos permite a redução do risco;
- Há sempre redução do risco (exceto correl. perfeitamente positiva);
- Não há ativos perfeitamente correlacionados de forma negativa;
- Redução ocorre até certo limite;
- Risco diversificável $\times$ risco não diversificável.

- Processo de diversificação:



- **Exemplo 2.** Considere uma carteira com os ativos A e B:

  $\bar{R}_A = 10\%$, $\bar{R}_B = 16\%$, $\sigma_A = 5\%$ e $\sigma_B = 8\%$;

  $\rho_{A,B} = -0,35$;

- Use $w_A = 0\%$ e varie essa composição em 1% até $w_A = 100\%$;
- Calcule o retorno e o risco da carteira nas diferentes combinações;
- Quais os padrões observados?

- **Conjunto de combinações** $\rightarrow$ todas são racionais?
- **Fronteira Eficiente (FE)** $\rightarrow$ alternativas racionais;
- Decisão se encontra na fronteira eficiente;
- Na fronteira eficiente temos uma carteira que apresenta menor risco;
- **Carteira de Variância Mínima** (CVM) $\rightarrow$ risco mínimo.

- Fronteira eficiente $\rightarrow$ todas combinações acima da CVM;
- Hipótese de racionalidade dos investidores;
- Qual a melhor decisão? Na fronteira eficiente todas são racionais;
- **Carteira ótima** depende das preferências pelo risco do investidor...

- **Exemplo 3.** Considere os preços e retornos da CVC e da DrogaRaia:
- Calcule o retorno e o risco da carteira em diferentes combinações;
- Quais os padrões observados?

- Mais de dois ativos $\rightarrow$ matriz de correlação;
- Posições vendidas $\rightarrow$ pesos negativos;
- Custos de transação?
- A posição determinada é mantida por quanto tempo?
- Como rebalancear?
- Como inserir mais restrições na hora da seleção da escolha ótima?

3. Otimização de carteiras

- Carteira com dois ativos (A e B):
  - variamos os pesos nas possíveis combinações (w_A e w_B);
  - determinamos a fronteira eficiente;
  - retorno e risco calculados como...

$$\bar{R}_p = w_A \bar{R}_A + w_B \bar{R}_B$$

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2 \times \sigma_A^2 + w_B^2 \times \sigma_B^2 + 2 \times w_A \times w_B \times \rho_{A,B} \times \sigma_A \times \sigma_B}$$

$$\text{s.a.} \quad w_A + w_B = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq w_A, w_B \leq 1$$

- Carteira com n ativos:
  - possíveis combinações crescem exponencialmente com n;
  - como construir a fronteira eficiente?
  - FE $\rightarrow$ CVM $+$ carteiras com maior retorno (e risco);
  - formulamos um problema de **otimização**.
- Vamos escrever o retorno e risco da carteira em termos matriciais...

- Retorno da carteira com n ativos:

$$\bar{R}_p = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}_{1\times n} \times \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \vdots \\ \bar{R}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \mathbf{w} \times \bar{\mathbf{R}}$$

- Risco da carteira com n ativos:

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}_{1\times n} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w} \times \Sigma \times \mathbf{w}^T}$$

- Problema de otimização para obter CVM (minimiza risco):

$$\min_{\mathbf{w}} \sqrt{\mathbf{w} \times \Sigma \times \mathbf{w}^T}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad \text{e} \quad 0 \leq w_j \leq 1, \ \forall \ j$$

- Solução é obtida por meio de métodos baseados em gradiente;
- A CVM resulta em um determinado nível de retorno $\bar{R}_{CVM}$.

- FE → resolvemos o mesmo problema de otimização;

- Incrementamos agora o nível de retorno em um fator δ...

$$\min_{\mathbf{w}} \sqrt{\mathbf{w} \times \Sigma \times \mathbf{w}^T}$$

$$\text{s.a.} \quad \bar{R}_p = \bar{R}_{CVM} + \delta, \quad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad \text{e} \quad 0 \leq w_j \leq 1, \ \forall\, j$$

- Pacote "*Portfolio Analytics*" → desenvolve otimização de carteiras no R.

Abordagem Computacional...

- Próxima aula...
  - modelo de precificação de ativos - CAPM;
  - regressão linear simples no R...

ASSAF NETO, A. **Finanças Corporativas e Valor**. 7 Ed. São Paulo: Atlas, 2014. Capítulos 10 e 11.

Prof. Leandro Maciel

leandromaciel@usp.br