
Rapport Interne

Théorie de la génération de houle

2015

Etude théorique de la génération de houle en bassin.

Objet

Le rapport contient l'étude théorique de la génération de houle en bassin à l'aide d'une méthode potentielle dans le domaine fréquentiel. La théorie linéaire est exposée, en 2D et 3D puis une approche à l'ordre deux en série de perturbation est mise en place.

Félicien Bonnefoy
Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Energétique et Environ-
nement Atmosphérique
Centrale Nantes

Introduction, motivation

Il s'agit de rédiger sous \LaTeX l'étude théorique de la génération de houle dans un bassin en 2D et 3D. On se place dans le cadre de la théorie potentielle, développée au second-ordre de Stokes, et appliquée à un batteur dans un bassin semi-infini en deux et trois dimensions. Cette analyse servira d'une part à vérifier le fonctionnement du code instationnaire spectral de David et ensuite de se familiariser avec la solution second ordre, qui est une première approche du non linéaire, avant de regarder ce qui se passe dans le bassin de houle réel. Ces travaux théoriques sont inspirés des articles d'Hudspeth et Sulisz [3] pour la solution second-ordre en deux dimensions, de Schäffer [5] pour une étude en houle irrégulière et de Skourup [6] (??).

En trois dimensions, Wu [8] a développé une théorie second ordre pour des houles directionnelles régulières. Il a pu montré que les ondes libres peuvent avoir une amplitude aussi importante que celle des ondes liées. Suh and Dalrymple [7] ont étendu son travail pour traiter d'un spectre directionnel au premier ordre. Ces deux études sont faites dans un bassin infini dans la direction parallèle au batteur, *i.e.* pour un bassin sans paroi latérale et donc sans réflexion. Le papier de Li et Williams [4] apporte la solution second-ordre en houle régulière pour le cas 3D dans un bassin avec parois réfléchissantes pour un batteur serpent.

Les solutions présentées dans ce document sont en partie implémentées sous **MATLAB**[®] sous la forme de classes décrites dans le document [1]. L'application à la génération de houle dans les bassins de l'ECN est décrite dans [2].

Table des matières

1	Solution analytique de la génération de houle mono-chromatique en bassin bi-dimensionnel	4
1.1	Théorie potentielle	5
1.1.1	Hypothèses et géométrie	5
1.1.2	Etablissement des équations	5
1.1.3	Volume et énergie	6
1.1.4	Forces et moments	8
1.1.5	Ordres de grandeur et adimensionalisation	8
1.1.6	Méthode de perturbation	9
1.2	Solution stationnaire au premier ordre pour une houle régulière	11
1.2.1	Etablissement de la solution au premier ordre	11
1.2.2	Comportement des modes élémentaires :	12
1.2.3	Amplitudes des modes et fonction de transfert	13
1.2.4	Force, moment et puissance	15
1.2.5	Volume et énergie	16
1.3	Avec courant	18
1.4	Solution stationnaire au second ordre pour une houle régulière :	19
1.4.1	Décomposition de la solution au second ordre :	19
1.4.2	Potentiel lié en 2ω :	19
1.4.3	Potentiel libre en 2ω :	21
1.4.4	Potentiel lié indépendant du temps :	23
1.4.5	Potentiel libre indépendant du temps :	23
1.5	Solution stationnaire au troisième ordre pour une houle régulière :	25
1.6	Approximation	25
	Annexes 2D	27
	Annexes 2D 2	32
1.7	Pilotage en force	37
1.7.1	Série de perturbation	38
1.7.2	Ordre zéro	38
1.7.3	Ordre un	38
1.7.4	Ordre deux	39
2	Solution analytique de la génération de houle bi-chromatique en bassin bi-dimensionnel	41
2.1	Au premier ordre	42
2.2	Au second ordre	43
2.2.1	Mode lié somme	44
2.2.2	Mode lié différence	46
2.2.3	Notation généralisée des modes liés	47
2.2.4	Potentiel libre somme	48
2.2.5	Potentiel libre différence	49
2.2.6	Notation généralisée des modes libres	51
2.3	Comparaison avec Schäffer	52
	Annexes 2D Bichromatique	54
3	Solution analytique de la génération de houle mono-chromatique en bassin tri-dimensionnel	55
3.1	Equations au premier ordre :	56
3.2	Les solutions au premier ordre :	56
3.3	Lois de commande du batteur :	57
3.3.1	Principe du serpent	58
3.3.2	Méthode de Dalrymple	58
3.3.3	Comparaison des deux lois de commande	59

3.3.4	Méthodes de Molin	59
3.3.5	Méthode de Boudet	60
3.3.6	Génération sur une portion du bassin	60
3.4	Batteur segmenté	60
3.4.1	Batteur infini	61
3.4.2	Batteur segmenté de largeur finie	64
3.5	Mode propre du bassin, résonance	68
3.6	Equations au second ordre :	70
3.7	Solutions au second ordre :	70
3.7.1	Termes en 2ω :	70
3.7.2	Termes constants :	72
Annexes 3D	73
Annexes 3D 2	80
3.8	Vérifications	88
3.9	Bassin de houle de l'ECN	90
3.9.1	Lois de commande	90
3.9.2	Au second ordre	90
3.10	B600	91

Chapitre 1

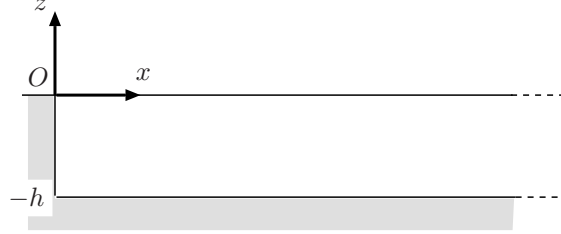
Solution analytique de la génération de houle mono-chromatique en bassin bi-dimensionnel

1.1 Théorie potentielle

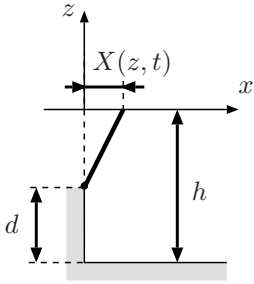
Dans cette partie, je rappelle tout d'abord les hypothèses de la théorie potentielle, qui aboutissent à l'établissement des équations. Celles-ci seront simplifiées dans le cas des vagues de faible amplitude grâce à un développement en série de perturbation.

1.1.1 Hypothèses et géométrie

On considère l'écoulement d'un fluide parfait dans un bassin en deux dimensions nommées x et z . Le bassin est de profondeur h , semi-infini dans la direction des x croissants, fermé en $x = 0$ par un batteur. On cherche, au cours du temps t ,



à décrire la forme de la surface libre et le champ de vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t)$ dans le bassin. Le fluide est mis en mouvement à l'aide du batteur. Celui-ci est de type volet, sa géométrie du batteur est celle du batteur présent dans le bassin de l'ECN. Il s'agit d'un volet articulé à une distance $d = 2,70$ m du fond (la profondeur du bassin est $h = 5$ m).



Un point du batteur est défini par $x = X(z, t) = g_v(z)h(t)$ où $h(t)$ est la loi de commande du batteur et $g_v(z)$ la forme du batteur :

$$g_v(z) = \begin{cases} \frac{z+1-d}{1-d} & \text{si } z \geq 1-d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On effectue les hypothèses suivantes sur l'écoulement :

- la surface libre est représentée par une fonction $F(\mathbf{x}, z, t)$ qui s'annule sur la surface libre.

$$F(\mathbf{x}, z, t) = z - \eta(\mathbf{x}, t) = 0$$

La fonction $\eta(\mathbf{x}, t)$ est univaluée, ce qui exclut tous les phénomènes de déferlement.

- l'écoulement est supposé irrotationnel, *i.e.* $\mathbf{rot} \mathbf{V} = 0$. On peut alors définir une fonction $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ appelée potentiel de vitesse, telle que

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad} \phi(\mathbf{x}, z, t) = \tilde{\nabla} \phi(\mathbf{x}, z, t)$$

Les inconnues qu'on cherche à déterminer¹ sont $\eta(\mathbf{x}, t)$ et $\phi(\mathbf{x}, z, t)$. On établit pour cela plusieurs équations.

1.1.2 Etablissement des équations

Soit D le domaine de l'écoulement délimité verticalement par le fond du bassin ($z = -h$) et la surface libre ($z = \eta(\mathbf{x}, t)$), et horizontalement par le batteur ($x = X(z, t)$) à gauche et infini à droite ($x \rightarrow +\infty$). L'écoulement étudié est incompressible, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{V} &= \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{V} = 0 & \text{pour } (x, z) \in D \\ \Delta \phi &= 0 & \text{pour } (x, z) \in D \end{aligned}$$

L'écoulement vérifie ensuite des conditions aux limites sur les différentes parois du domaine D . Sur les parois solides (batteur et fond du bassin), la vitesse est tangente à la paroi (condition de glissement), soit :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$$

où \mathbf{n} et \mathbf{U} sont les vecteurs normal et vitesse de la paroi au point considéré. Cela se traduit par :

1. Il existe une relation entre ϕ et η : il suffit alors de déterminer ϕ .

– pour le batteur

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial t} \quad \text{pour } x = X(z, t)$$

– pour le fond

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = -h$$

Sur la surface libre, les conditions aux limites s'expriment par deux équations. La première est analogue à une condition de glissement, elle exprime l'égalité des vitesses normales, calculées à partir de l'équation de surface libre ou du potentiel. La deuxième correspond à la continuité de la pression à l'interface air-fluide.

– il faut exprimer les projections $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$ et $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$. Elle est décrite par les points de coordonnées $\{\mathbf{x}; \eta(\mathbf{x}, t)\}$: il s'agit d'une description eulérienne d'une surface. La vitesse \mathbf{U} de la surface libre peut être calculée par la dérivée particulaire de la position ; cette dérivée particulaire exprime la vitesse du point de la SL qui est en \mathbf{x} à t . On a alors

$$\mathbf{U} = \left| \frac{\mathbf{u}}{U_z} \right|_{\eta(\mathbf{x}, t)} = \frac{D}{Dt} \bigg|_{\eta(\mathbf{x}, t)} \mathbf{x} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \cdot \right) \bigg|_{\eta(\mathbf{x}, t)} \mathbf{x} = \left| \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta \right|$$

Un vecteur normale a pour composante $\{-\frac{\partial \eta}{\partial x}, -\frac{\partial \eta}{\partial y}; 1\}$ d'où $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$. De plus, on a $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \phi \cdot \nabla \eta$ d'où finalement la condition cinématique de surface libre (CCSL) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \eta \cdot \nabla \phi \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

– par intégration de l'équation de quantité de mouvement pour un écoulement irrotationnel, on obtient la relation de Bernoulli² :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2 = 0 \quad \text{pour } (x, z) \in D$$

sur la surface libre, la pression atmosphérique est nulle, d'où par continuité de la pression,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2 = 0 \quad \text{pour } z = \eta(x, t)$$

Cette condition est appelée *condition de surface libre dynamique*.

On peut combiner les deux conditions de surface libre de manière à séparer les équations pour ϕ et η . Pratiquement, on applique la dérivée particulaire à la condition dynamique de surface libre. On peut ainsi utiliser les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} E\phi + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (\tilde{\nabla} \phi \cdot \tilde{\nabla}) \right) |\tilde{\nabla} \phi|^2 &= 0 \quad \text{pour } z = \eta(x, t) \\ g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2 &= 0 \quad \text{pour } z = \eta(x, t) \end{aligned}$$

où E est l'opérateur différentiel linéaire suivant :

$$E = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z}$$

A l'opposé du batteur, pour $x \rightarrow +\infty$, l'écoulement aura la forme d'une onde. On impose que cette onde se déplace dans le sens des x croissants (absence d'onde se déplaçant dans le sens des x décroissants³). On parle de condition de radiation. On aura aussi de ne considérer que les ondes d'amplitude finie pour $x \rightarrow +\infty$. Pour fabriquer des vagues, on anime le batteur d'un mouvement périodique de période T . On s'attend alors à ce que loin du batteur, les grandeurs ϕ et η soient périodiques en temps et en espace

$$\begin{aligned} \eta(x + \lambda, t) &= \eta(x, t) \quad \text{pour tout } (x, t) \\ \eta(x, t + T) &= \eta(x, t) \quad \text{pour tout } (x, t) \end{aligned}$$

où λ est la longueur d'onde des vagues créées.

1.1.3 Volume et énergie

On étudie un domaine fluide \mathcal{V} de N longueurs d'onde de long $L = N\lambda$ (avec $N \gg 1$ si bien que les termes évanescents seront nuls sur la face de sortie).

2. la relation générale fait apparaître une fonction du temps seulement $B(t)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{1}{\rho} P + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2 = B(t)$$

Cela revient à définir le potentiel ϕ à une fonction $f(t)$ du temps près $\phi^{new} = \phi + f(t)$ telle que $df/dt = B(t)$.

3. onde réfléchie sur une plage ou sur la paroi du bassin

Volume

On évalue le volume de fluide dans le domaine de calcul. Il s'écrit

$$V = \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} = \int_{X(z,t)}^L \int_{-h}^{\eta(x,t)} dx dz$$

Énergie

On peut s'intéresser à deux aspects ici. D'une part à la conservation de l'énergie lors de la génération et propagation de la houle. On travaille alors dans le domaine \mathcal{V} défini précédemment. D'autre part, on peut évaluer le flux d'énergie traversant une surface verticale au cours du temps.

On se concentre ici sur le premier point de vue. On considère donc un système mécanique constitué d'un volume \mathcal{V} de fluide. Il sera délimité à gauche par la paroi du batteur, en bas par le fond, en haut par la surface libre et à droite par une surface verticale fictive appelée face de sortie. L'énergie du fluide mis en mouvement est d'origine cinétique et potentielle et provient du travail effectué par le batteur.

L'énergie cinétique⁴ E_c s'écrit

$$E_c = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}\phi|^2 d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_S \phi \tilde{\nabla}\phi \cdot \mathbf{n} dS$$

où la vitesse normale sur le fond, le batteur et la surface libre est donnée par les conditions aux limites. On peut interpréter l'équation précédente par le fait que l'énergie cinétique dans le domaine est équivalente au flux de potentiel ϕ à travers les frontières. Sur le fond et toutes les parois fixes, le flux de ϕ est nul. Sur la face de sortie, la vitesse normale est simplement $\frac{\partial\phi}{\partial x}$. On choisira généralement un domaine ayant une longueur multiple de la longueur d'onde pour des raisons de simplifications.

La densité d'énergie potentielle étant ρgz , l'énergie potentielle⁵ E_p du volume \mathcal{V} s'écrit elle

$$E_p = \int_{\mathcal{V}} gz d\mathcal{V}$$

On peut prendre l'énergie potentielle du bassin au repos qui est constante comme référence. En séparant les intégrations en x et z , on obtient

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \eta^2(x,t) dx - \int_{-h}^0 X(z,t) z dz - \int_0^\eta \int_0^X z dx dz$$

Le travail effectué par les forces de pression sur le batteur s'écrit

$$W = - \int_0^t \int_S d\mathcal{P} dt = - \int_0^t \int_S p \tilde{\nabla}\phi \cdot \mathbf{n} dS dt$$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au domaine \mathcal{V} s'écrit donc

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} \int_S \phi \tilde{\nabla}\phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\mathcal{V}} gz d\mathcal{V} = - \int_0^t \int_S p \tilde{\nabla}\phi \cdot \mathbf{n} dS dt$$

Remarque sur l'énergie et les spectres

En milieu infini, l'énergie d'une houle mono-chromatique linéaire délimitée par une surface S s'écrit après calculs

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2 S$$

Elle est proportionnelle à la surface considérée et à l'amplitude au carré de la houle. Les énergies cinétique et potentielle sont équi-réparties et valent donc chacune $E/2$. On définit souvent une énergie par unité de surface

$$e = \frac{E}{\rho g S} = \frac{1}{2} a^2$$

Il s'agit d'une densité surfacique d'énergie.

4. divisée ici par la densité ρ du fluide

5. idem.

1.1.4 Forces et moments

La force hydrodynamique exercée par le fluide sur le batteur s'évalue en fluide parfait par l'intégrale des pressions sur la surface du batteur. En deux dimensions, on travaillera par unité de largeur, en trois dimensions sur la surface d'un volet. La force de pression \mathbf{F}_p s'exprime par

$$\mathbf{F}_p = \int_{-h}^{\eta(X,t)} p(x = X(y, z, t), y, z, t) \mathbf{n} dS$$

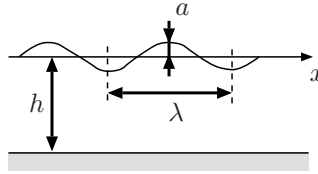
Le moment par rapport à l'axe C de la charnière par

$$\mathcal{M}_{Cp} = \int_{-h}^{\eta(X,t)} \mathbf{CM} \wedge p(x = X(y, z, t), y, z, t) \mathbf{n} dS$$

Les bornes sont éventuellement à adapter en fonction de la géométrie du batteur.

1.1.5 Ordres de grandeur et adimensionalisation

Après avoir établi les équations vérifiées par le potentiel ϕ et la hauteur de surface libre η , on peut s'intéresser à l'ordre de grandeur des différentes variables. On dispose de trois longueurs caractéristiques de l'écoulement. L'amplitude a , des vagues, leur longueur d'onde λ et la profondeur h .



On peut donc former deux nombres adimensionnels indépendants, qu'on construit ainsi :

$$\varepsilon = ka \text{ et } \mu = kh$$

avec

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

le vecteur d'onde des vagues. Le paramètre ε est à relier avec la cambrure de la houle. On adimensionne selon la direction x par λ (ou plutôt par k), selon z par h . L'élévation de la surface libre est de l'ordre de grandeur de l'amplitude des vagues $\eta \sim a$. La condition de surface libre dynamique donne

$$ga \sim \frac{\phi}{T}$$

sans tenir compte du terme $|\tilde{\nabla}\phi|^2$, avec T un temps caractéristique de l'écoulement (par exemple la période des vagues). La condition de surface libre combinée donne, à la louche,

$$gT^2 \sim h \text{ soit } T \sim \sqrt{\frac{h}{g}}$$

Finalement, on obtient un ordre de grandeur pour le potentiel

$$\phi \sim a\sqrt{gh}$$

Une fois reportés les changements de variable (cf. tableau 1.1) dans les équations, on obtient :

Grandeur physique	x	z	η	t	X	ϕ
Ordre de grandeur	λ	h	a	$\sqrt{h/g}$	a	$a\sqrt{gh}$
remplacé par	x/k	hz	$a\eta$	$\sqrt{h/g}t$	aX	$a\sqrt{gh}\phi$

TABLE 1.1 – Tableaux des règles d'adimensionnement

$$\Delta\phi = 0 \text{ pour } (x, z) \in D \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = -1 \quad (1.2)$$

$$\mu^2 \frac{\partial\phi}{\partial x} - \mu \frac{\partial X}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ pour } x = \varepsilon X(z, t) \quad (1.3)$$

$$\mu^2 E\phi + \left(\mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}\phi \cdot \tilde{\nabla}) \right) |\tilde{\nabla}\phi|^2 = 0 \text{ pour } z = \frac{\varepsilon}{\mu} \eta(x, t) \quad (1.4)$$

$$\mu \eta + \mu \frac{\partial\phi}{\partial t} + \varepsilon \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}\phi|^2 = 0 \text{ pour } z = \frac{\varepsilon}{\mu} \eta(x, t) \quad (1.5)$$

$$+ \text{ condition de radiation en } x \rightarrow +\infty \quad (1.6)$$

1.1.6 Méthode de perturbation

A partir des équations précédentes, on peut effectuer des simplifications à partir d'hypothèses supplémentaires portant sur μ et λ . On se place dans le cas d'une profondeur finie telle que

$$\mu \sim 0(1)$$

Ce sera le cas pour le bassin de houle ou $h = 5$ m et $\lambda < 20$ m. Cela revient à prendre $\mu = 1$ dans les équations, ou ce qui est équivalent à avoir adimensionner la direction x par h et non par λ . En tous cas, on n'étudie pas ici le cas faible profondeur où $\mu \ll 1$. On étudie des vagues de faible amplitude a par rapport à leur longueur d'onde. On parle aussi de vagues de faible cambrure. On utilise le facteur $\varepsilon = ka$ pour matérialiser cette hypothèse. On prendra alors :

$$\varepsilon \ll 1$$

On développe chaque grandeur F de l'ordre de un en série de puissance d'un paramètre arbitraire petit α .

$$F(x, z, t) = F_1(x, z, t) + \alpha F_2(x, z, t) + \dots$$

ceci pour $F = \phi(x, z, t)$, $\eta(x, t)$ et $X(z, t)$.

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t)/a\sqrt{gh} &= \phi_1(x, z, t) + \alpha \phi_2(x, z, t) + \dots \\ \eta(x, t)/a &= \eta_1(x, t) + \alpha \eta_2(x, t) + \dots \\ X(z, t) &= X_1(z, t) + \alpha X_2(z, t) + \dots \end{aligned}$$

Les fonctions $X_1(z, t)$ et $X_2(z, t) \dots$ sont les lois de commande du batteur, *a priori* connues. Le batteur a alors un mouvement au premier ordre en α , au second ordre *etc.* Les potentiels ϕ_1 , $\phi_2 \dots$ et les surfaces libres correspondantes sont les nouvelles inconnues. En reportant ces développements en série de perturbation dans les équations et en regroupant les termes de même ordre, on va obtenir des équations pour trouver ces inconnues.

Auparavant, en étudiant les conditions aux limites (1.3), (1.4) et (1.5), on remarque qu'elles sont exprimées en $x = X(z, t)$ ou $z = \eta(x, t)$ qui sont de l'ordre de grandeurs de $\varepsilon \ll 1$. On peut donc effectuer un développement de ces équations autour de $x = 0$ et respectivement $z = 0$. On utilise un développement en série de Taylor de la forme suivante (donné ici pour $z = 0$, E représentant une équation)

$$E(x, z, t) = E(x, 0, t) + \eta(x, t) \frac{\partial E}{\partial z}(x, 0, t) + \dots$$

Dans ce développement, les dérivées en z sont calculées puis exprimées en $z = 0$.

Pour obtenir les équations pour ϕ_1 , $\phi_2 \dots$, on doit simultanément reporter dans les équations (1.1)-(1.6), et effectuer les développements en série de Taylor des conditions aux limites (1.3)-(1.5). On pourra alors identifier⁶ les différents ordres. On obtient les systèmes suivants⁷ :

Au premier ordre en α et ε :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1 &= 0 \text{ pour } (x, z) \in D \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial z} &= 0 \text{ pour } z = -1 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x} &= \frac{\partial X_1}{\partial t} \text{ pour } x = 0 \\ E\phi_1 &= 0 \text{ pour } z = 0 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \eta_1 &= 0 \text{ pour } z = 0 \\ &+ \text{ condition de radiation en } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

6. sans précaution, il pourrait apparaître pour l'étude fréquentielle qui va suivre des solutions divergentes en temps, appelées *séculaires*. Il faut alors utiliser la méthode de Lindstedt-Poincaré. Elle effectue un changement de variable $\tau = \omega t$ avec $\omega = \omega_1 + \varepsilon \omega_2 + \dots$: chaque ordre peut influencer sur la pulsation ω_1 du problème au premier ordre. Il s'avère pour nous qu'au second ordre, on obtient $\omega_2 = 0$, *i.e.* le second ordre ne modifie pas la pulsation premier ordre. Ce n'est plus le cas pour l'étude au troisième ordre.

7. On travaillera toujours dans un bassin de houle profond dans lequel μ est de l'ordre de un

Au second ordre, on obtient pour la condition de surface libre une équation de la forme :

$$\mu^2 \alpha E\phi_2 = -\mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\nabla} \phi_1|^2 - \mu \varepsilon \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1 \text{ pour } z = 0$$

Les termes $E\phi_2, \dots$ sont de l'ordre de un donc α et ε sont du même ordre de grandeur. On prendra alors $\alpha = \varepsilon$ pour simplifier l'écriture et obtenir le système suivant au second ordre en α et ε :

$$\begin{aligned} \Delta \phi_2 &= 0 \text{ pour } (x, z) \in D \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= 0 \text{ pour } z = -1 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= \frac{\partial X_2}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \text{ pour } x = 0 \\ E\phi_2 &= -\frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\nabla} \phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1 \text{ pour } z = 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \eta_2 &= -\eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi_1|^2 \text{ pour } z = 0 \\ &+ \text{condition de radiation en } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Une fois les solutions obtenues au premier et second ordre, on doit vérifier l'hypothèse que la solution d'ordre deux est d'ordre de grandeur inférieur à la solution linéaire. On utilise par exemple le nombre d'Ursell défint comme

$$U_r = \frac{\varepsilon}{\mu^3} = \frac{ka}{(kh)^3}$$

1.2 Solution stationnaire au premier ordre pour une houle régulière

On s'intéresse à la génération de houle régulière, *i.e.* de longueur d'onde donnée. Pour cela, on anime le volet du générateur d'un mouvement sinusoïdal de période T (pulsation ω), d'amplitude b . Cette amplitude est de l'ordre de ε , *i.e.* on cherche à générer une houle de faible amplitude par rapport à sa longueur d'onde. On imposera aussi ensuite un mouvement au second ordre en ε pour tenter d'éliminer la houle libre parasite qui apparaît au second ordre. Dans un premier temps, le mouvement du batteur est décrit par :

$$X_1(z, t) = bg(z) \cos(\omega t + \psi_b)$$

On décrit ce mouvement en notation complexe par l'expression suivante

$$X_1(z, t) = \operatorname{Re} [\underline{b} g(z) e^{i\omega t}]$$

où $\underline{b} = b e^{i\psi_b}$ est l'amplitude complexe du mouvement et $\operatorname{Re}[\cdot]$ la partie réelle. On notera également $\underline{X}_1(z) = \underline{b} g(z)$ le mouvement complexe.

1.2.1 Etablissement de la solution au premier ordre

Le potentiel ϕ_1 et la hauteur de surface libre η_1 vérifient les équations suivantes

$$\Delta \phi_1 = 0 \text{ pour } (x, z) \in D \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = -1 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial X_1}{\partial t} \text{ pour } x = 0 \quad (1.9)$$

$$E_1 \phi_1 = 0 \text{ pour } z = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \eta_1 = 0 \text{ pour } z = 0 \quad (1.11)$$

$$+ \text{condition de radiation en } x \rightarrow +\infty \quad (1.12)$$

avec $E_1 \cdot = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}$. On cherche la solution stationnaire établie de ces équations (résolution fréquentielle). Les conditions aux limites séparent les variables et on cherche donc une solution sous la forme $\phi_1(x, z, t) = f(x)g(z)h(t)$. La dépendance temporelle sera harmonique, *i.e.* $h(t) = e^{i\omega t}$. En utilisant (1.7), (1.8), (1.10) et (1.12), on trouve les solutions élémentaires à variables séparées pour ϕ_1 , appelées modes

$$\underline{\phi}_1(x, z) = \underline{A} \cosh k(z+1) e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{A}_n \cos |\alpha_n|(z+1) e^{-|\alpha_n|x}$$

Analysons la nature de ces modes. Pour cela, on va regarder quelle hauteur de surface libre est produite par le potentiel. D'après l'équation de surface libre (1.11), on obtient pour l'élévation de surface libre :

$$\underline{\eta}_1(x) = -i\omega \underline{A} \cosh k e^{-ikx} - \sum_{n=1}^{+\infty} i\omega \underline{A}_n \cos |\alpha_n| e^{-|\alpha_n|x}$$

De même qu'on l'a fait pour ϕ_1 , on peut écrire η_1 sous la forme de modes (modes d'élévation cette fois) :

$$\underline{\eta}_1(x) = \underline{a} e^{-ikx} + \sum_{n \geq 1} \underline{a}_n e^{-|\alpha_n|x}$$

soit

$$\begin{aligned} -i\underline{A} \omega \cosh k &= \underline{a} \\ -i\underline{A}_n \omega \cos |\alpha_n| &= \underline{a}_n \end{aligned}$$

L'expression du potentiel devient :

$$\underline{\phi}_1(x, z) = \frac{i\underline{a}}{\omega} \frac{\cosh k(z+1)}{\cosh k} e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i\underline{a}_n}{\omega} \frac{\cos |\alpha_n|(z+1)}{\cos |\alpha_n|} e^{-|\alpha_n|x}$$

1.2.2 Comportement des modes élémentaires :

Essayons maintenant d'interpréter les modes du potentiel d'après la hauteur de surface libre correspondante. Le premier, en $\cosh k(z+1) \sin(\omega t - kx + \psi)$, donne naissance à une hauteur de surface libre de la forme $\cos(\omega t - kx + \psi)$: il s'agit d'un mode progressif représentant la houle de caractéristiques (ω, k) . On s'intéressera plus loin à une autre caractéristique de la houle, son amplitude a . Le vecteur d'onde k vérifie la relation de dispersion

$$\omega^2 = k \tanh k$$

Dans l'expression du potentiel ϕ_1 apparaissent ensuite d'autres modes, de la forme $\cos |\alpha_n|(z+1) e^{-|\alpha_n|x} \sin(\omega t + \psi_n)$. Ces modes n'ont pas la structure en $f(\omega t - kx)$ caractéristique de modes progressifs. Il ne se propagent pas mais on peut remarquer qu'ils s'amortissent très vite selon la direction x : on les appelle modes *évanescents*. Les variables $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ vérifient la relation

$$\omega^2 = -|\alpha_n| \tan |\alpha_n|$$

La figure 1.1 donne un exemple de résolution graphique des α_n pour $\omega^2 = 5$: on a tracé la $f(\alpha/\pi) = \omega^2$ et la fonction $f(\alpha/\pi) = -\alpha \tan \alpha$. Les points d'intersection de ces deux courbes donnent en abscisse la valeur des α_n . Il faut noter l'ordre de la numérotation : l'indice '1' correspond au minimum des α_n . On peut remarquer que pour n tendant vers l'infini, $\alpha_n \sim n\pi$; cela servira pour étudier la convergence de la décomposition en modes évanescents.

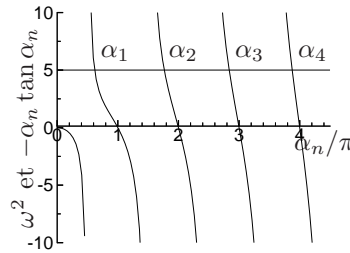


FIGURE 1.1 – Résolution graphique de $\omega^2 = -\alpha_n \tan \alpha_n$

Pour chacun de ces modes, on peut définir une longueur caractéristique d'atténuation δ_n telle que la contribution du mode soit négligeable dans l'expression du potentiel lorsque l'on est éloigné de plusieurs fois δ_n du batteur.

$$\delta_n \sim \frac{1}{\alpha_n}$$

La figure 1.2 donne la variation, en fonction de la longueur d'onde, de cette longueur caractéristique relative δ_n/λ , pour les cinq premiers modes évanescents. On constate que le premier mode évanescent est toujours le plus long à s'amortir, comme

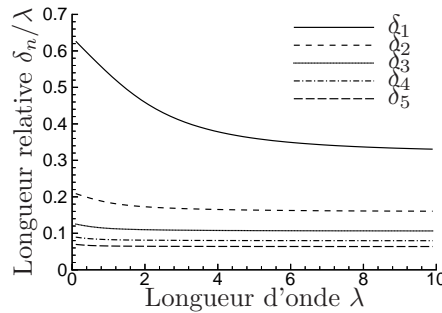


FIGURE 1.2 – Variation de δ_n en fonction de λ

on pouvait s'y attendre selon notre numérotation des modes (le premier mode correspond à α_n minimum soit δ_n maximum). Lorsque la longueur d'onde augmente, la distance d'amortissement relative à la longueur d'onde diminue.

Avant de continuer, on introduit une notation plus compacte en posant $\alpha_o = k$ et $\alpha_n = -i|\alpha_n|$ pour $n \geq 1$, de sorte que les nombres d'ondes α_n pour tout n vérifient la relation de dispersion généralisée

$$\omega^2 = \alpha_n F^-(\alpha_n, 0)$$

La fonction ⁸ F^\pm vaut

$$F^\pm(\alpha, z) = \frac{e^{\alpha(z+1)} \pm e^{-\alpha(z+1)}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}$$

On peut alors réécrire l'élévation de surface libre et le potentiel sous la forme

$$\begin{aligned}\underline{\eta}_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{a}_n e^{-i\alpha_n x} \\ \underline{\phi}_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i\underline{a}_n}{\omega} F^+(\alpha_n, z) e^{-i\alpha_n x}\end{aligned}$$

1.2.3 Amplitudes des modes et fonction de transfert

La condition (1.9) sur le batteur se réécrit :

$$-\sum_{n=0}^{+\infty} i\alpha_n \frac{i\underline{a}_n}{\omega} F^+(\alpha_n, z) = i\omega \underline{b} g_v(z)$$

Elle permet de trouver les amplitudes des modes \underline{a}_n . En effet, la famille de fonctions en z $\{F^+(\alpha_n, z)\}_n$ définies sur le segment $[-1; 0]$ est orthogonale. On aura donc

$$\underline{a}_n = \frac{i\underline{b}\omega^2}{\alpha_n} \frac{\int_{-1}^0 g_v(z) F^+(\alpha_n, z) dz}{\int_{-1}^0 F^+(\alpha_n, z)^2 dz} \quad (1.13)$$

Le mode progressive et le batteur sont en quadrature de phase. Les modes évanescents sont en phase avec le batteur. On peut remarquer que les modes évanescents ont tous la même phase. Ils oscillent ensemble comme un seul bloc. De l'équation précédente, on peut dire que les modes évanescents sont excités parce que le batteur n'a pas une forme adaptée parfaitement à la cinématique de la houle. Autrement dit, le mode progressif en $\cosh k(z+1)$ ne suffit pas à décrire la forme du batteur. Il faut pour cela ajouter d'autres modes. Les modes à notre disposition sont les modes évanescents : on peut voir alors l'équation (1.13) comme la décomposition de la forme $g_v(z)$ du batteur dans la famille des fonctions orthogonales $\{F^+(\alpha_n, z)\}_{n \leq 0} = \{\cosh k(z+1), \{\cos \alpha_n(z+1)\}_{n \leq 1}\}$.

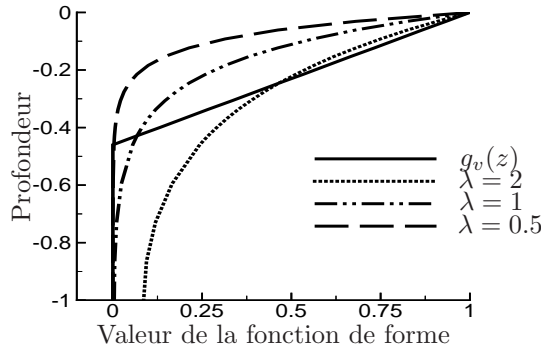


FIGURE 1.3 – Fonction de forme pour différentes longueurs d'ondes λ

La figure 1.3 reproduit la forme du batteur $g_v(z)$ ainsi que la dépendance verticale de la cinématique d'une houle, pour trois longueurs d'ondes, $\lambda = 1/2, 1$ et 2 , sous forme normalisée :

$$g(z) = F^+(\alpha_o, z) = \frac{\cosh k(z+1)}{\cosh k}$$

Utilisons maintenant la relation (1.13) pour terminer le calcul et relier mouvement du batteur et champ de vague créé. Il reste à relier les amplitudes modales a et a_n et du batteur b entre elles.

8. On donne également ses dérivées selon z

$$\frac{\partial F^\pm(\alpha, z)}{\partial z} = \alpha F^\mp(\alpha, z)$$

et

$$\frac{\partial^2 F^\pm(\alpha, z)}{\partial z^2} = \alpha^2 F^\pm(\alpha, z)$$

On définit tout d'abord la fonction de transfert du batteur comme le rapport de l'amplitude d'excitation b sur l'amplitude des vagues créées a (voir figure 1.4).

$$\begin{aligned}\underline{TF} &= \frac{\underline{b}}{\underline{a}} = \frac{-i}{\tanh k} \frac{\int_{-1}^0 F^+(\alpha_o, z)^2 dz}{\int_{-1}^0 g_v(z) F^+(\alpha_o, z) dz} \\ \underline{TF} &= -i \frac{k(1-d)}{4 \sinh k} \frac{2k + \sinh 2k}{k(1-d) \sinh k + \cosh(kd) - \cosh k}\end{aligned}$$

En observant la figure 1.4, on constate qu'à faible longueur d'ondes, le batteur est efficace (on peut générer des houles

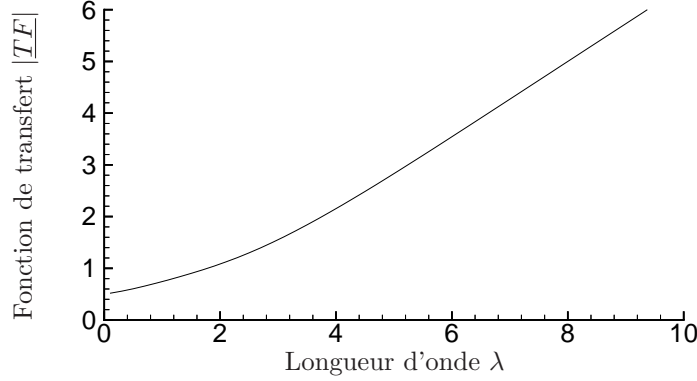


FIGURE 1.4 – Fonction de transfert du batteur en fonction de λ

d'amplitude importantes avec un mouvement réduit du batteur $|\underline{TF}| < 1$). Inversement, pour de grandes longueurs d'ondes, on a $|\underline{TF}| > 1$, et le débattement du batteur étant limité, on ne pourra générer que des houles de faibles amplitudes. On peut définir une longueur d'onde critique λ_c du batteur, pour laquelle $|\underline{TF}| = 1$. D'après la figure 1.4, on a $\lambda_c \simeq 2$.

On peut définir de la même manière une fonction de transfert pour les modes évanescents en exprimant le rapport b sur a_n . Il peut sembler plus intéressant de quantifier l'importance des modes évanescents par rapport à la houle cible, et définir alors le rapport amplitude du mode évanescent n sur amplitude de la houle incidente (voir figure 1.5)

$$\begin{aligned}\underline{TF}_n &= \frac{a_n}{\underline{a}} = i \underline{TF} F^-(\alpha_n, 0) \frac{\int_{-1}^0 g_v(z) F^+(\alpha_n, z) dz}{\int_{-1}^0 F^+(\alpha_n, z)^2 dz} \\ \underline{TF}_n &= \underline{TF} \frac{4 \sin |\alpha_n|}{|\alpha_n|(1-d)} \frac{|\alpha_n|(1-d) \sin |\alpha_n| + \cos |\alpha_n| - \cos |\alpha_n| d}{2|\alpha_n| + \sin 2|\alpha_n|}\end{aligned}$$

D'après la figure 1.5, on remarque qu'il existe un domaine restreint de longueur d'onde pour lequel l'amplitude des modes évanescents est faible. Ainsi, autour de $\lambda = 1$, les modes évanescents seront peu excités lors de la génération de houle. Cela correspond aux longueurs d'ondes pour lesquelles la cinématique verticale est la plus adaptée à la forme verticale du batteur (voir figure 1.3). On peut également constater que :

- pour $\lambda < 1$, l'amplitude des modes évanescents reste faible par rapport à celle de la houle générée.
- pour $\lambda > 1$, l'amplitude du premier mode évanescent n'est plus négligeable devant celle de la houle cible ($a_1/a \simeq 0,35$).

Les autres modes évanescents $n > 1$ restent d'amplitude faible.

Pour finir, on peut remarquer que la série des modes évanescents dans l'expression de η_1 converge bien, puisque le terme \underline{TF}_n de la série converge aussi vite que

$$\frac{1}{\alpha_n^2} \sim \frac{1}{(n\pi)^2}$$

On peut remarquer que $\underline{TF}_0 = 1$ et que $\frac{\underline{TF}_n}{\underline{TF}} \in \mathbb{R}$ pour $n > 0$. On peut également exprimer le mouvement du batteur \underline{X}_1 en fonction de sa forme verticale.

$$\underline{X}_1 = \underline{b} g_v(z)$$

avec l'amplitude complexe $\underline{b} = \underline{TF} \underline{a}$.

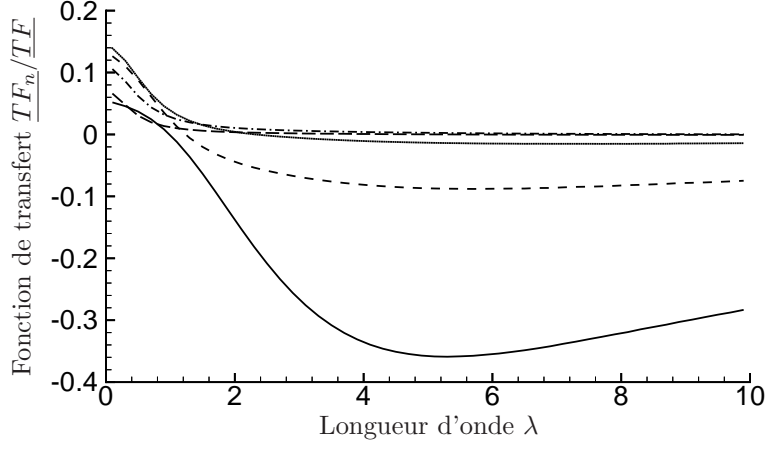


FIGURE 1.5 – Importance relative des modes évanescents en fonction de λ

Batteur piston

La forme d'un batteur piston est simplement $g_v(z) = 1$ pour $z = -1$ à 0 (équivalent à un volet avec $d \rightarrow -\infty$). Les fonctions de transfert valent

$$\begin{aligned} \underline{TF} &= -i \frac{2k + \sinh 2k}{4 \sinh^2 k} \\ \underline{TF}_n &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \underline{TF} \frac{4 \sin^2 \widetilde{\alpha}_n}{2\widetilde{\alpha}_n + \sin 2\widetilde{\alpha}_n} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\widetilde{\alpha}_n = |\alpha_n|$.

Batteur volet avec charnière sous le plancher

Dans ce cas, la forme du batteur est

$$g_v(z) = \frac{z + 1 - d}{1 - d}$$

pour $z = -1$ à 0 avec simplement $d < 0$. On a alors

$$\int_{-1}^0 g_v(z) F^+(\alpha_n, z) dz = \frac{k(1-d) \sinh k + 1 - \cosh k}{k^2(1-d) \cosh k}$$

Les fonctions de transfert valent

$$\begin{aligned} \underline{TF} &= -i \frac{k(1-d)}{4 \sinh k} \frac{2k + \sinh 2k}{k(1-d) \sinh k + 1 - \cosh k} \\ \underline{TF}_n &= \underline{TF} \frac{4 \sin \widetilde{\alpha}_n}{\widetilde{\alpha}_n(1-d)} \frac{\widetilde{\alpha}_n(1-d) \sin \widetilde{\alpha}_n + \cos \widetilde{\alpha}_n - 1}{2\widetilde{\alpha}_n + \sin 2\widetilde{\alpha}_n} \end{aligned}$$

1.2.4 Force, moment et puissance

La section 1.7 décrit en détails le calcul de la force présenté en 1.1.4. Pour un batteur volet, on s'intéresse au moment autour de l'axe de la charnière. Le moment calculé à la charnière vaut, en dimensionnel,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_{-h+d}^0 (h-d+z) F dz \\ &= \int_{-h+d}^0 (h-d+z) \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dz \end{aligned}$$

soit, en complexe

$$\underline{\mathcal{M}} = \rho g a \int_{-h+d}^0 (h-d+z) F^+(\alpha_0, z) dz$$

Après calculs, on obtient

$$\underline{\mathcal{M}} = \rho g a \frac{k(h-d) \sinh kh + \cosh kd - \cosh kh}{k^2 \cosh kh}$$

On peut voir que le moment est en phase avec l'élévation de surface libre et la vitesse horizontale. Le couple maximal délivré par le moteur interviendra donc quand le volet passe par la position verticale avec une vitesse maximale.

La puissance moyenne sur une période se calcule de la façon suivante

$$\mathcal{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{M} \dot{\theta} dt = \frac{1}{2} \underline{\mathcal{M} \bar{\theta}}$$

La vitesse de rotation vaut $\dot{\theta} = i\omega \underline{\theta}$ avec $\underline{\theta} \simeq \underline{X}/(h-d) = \underline{TFa}/(h-d)$ d'où

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho g \underline{a} \frac{k(h-d) \sinh kh + \cosh kd - \cosh kh}{k^2 \cosh kh} \overline{\underline{TFa}} \frac{-i\omega}{h-d}$$

On peut simplifier l'expression ci-dessus et obtenir

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho g \frac{k(h-d) \sinh kh + \cosh kd - \cosh kh}{k^2 (h-d) \cosh kh} \omega |\underline{TF}| |\underline{a}|^2$$

1.2.5 Volume et énergie

On étudie ici la conservation du volume et de l'énergie. On utilise les grandeurs complexes. À l'ordre un, les conclusions tirées correspondront à un état instantané. À l'ordre deux, il faudra distinguer les composantes constante et 2ω .

Volume

À l'ordre zéro, on obtient le volume V du fluide dans le domaine au repos

$$V_0 = \int_0^L \int_{-1}^0 dx dz = L$$

À l'ordre un, le volume déplacé par le batteur est compensé par une variation de hauteur d'eau

$$V_1 = - \int_{-1}^0 \underline{X}_1(z) dz + \int_0^L \underline{\eta}_1(x) dx$$

Si on considère un domaine ayant pour longueur un nombre entier de longueur d'onde, la contribution du mode progressif disparaît dans l'intégrale de surface libre. On ré-écrit le mouvement du batteur à l'aide des modes :

$$\underline{X}_1(z) = - \frac{i \alpha_n \underline{a}_n}{\omega^2} F^+(\alpha_n, z)$$

si bien que l'intégrale sur le batteur vaut

$$- \int_{-1}^0 \underline{X}_1(z) dz = \frac{i \alpha_n \underline{a}_n}{\omega^2} \int_{-1}^0 F^+(\alpha_n, z) dz = \frac{i \alpha_n \underline{a}_n}{\omega^2} \left[\frac{F^-(\alpha_n, z)}{\alpha_n} \right]_{-1}^0 = \frac{i \alpha_n F^-(\alpha_n, 0) \underline{a}_n}{\alpha_n \omega^2} = \frac{i \underline{a}_n}{\alpha_n}$$

avec une somme de $n = 0$ à l'infini. L'intégrale sur la surface libre vaut

$$\int_0^L \underline{\eta}_1(x) dx = \underline{a}_n \int_0^L e^{-i\alpha_n x} dx = \underline{a}_n \left[\frac{e^{-i\alpha_n x}}{-i\alpha_n} \right]_0^L = - \frac{i \underline{a}_n}{\alpha_n}$$

avec $n \geq 1$ d'après la remarque précédente. Le volume de l'élévation évanescence vient donc compenser une partie du volume déplacé par le batteur (les modes évanescents sont en phase et oscillent en bloc, provoquant alternativement des sur- et sous-élévations, respectivement lorsque le batteur est sur l'avant et l'arrière). Il reste la contribution progressive dans l'intégrale sur le batteur, qui représente la variation de volume V_1 du domaine de calcul au premier ordre.

Énergie

Premier ordre Au premier ordre, l'énergie cinétique est nulle (terme quadratique). La variation d'énergie potentielle lié au déplacement du batteur est compensée à chaque instant par le travail de la force de pression hydrostatique sur le batteur. La traduction mathématique est triviale :

$$E^1 = E_p^1 = - \int_{-1}^0 \underline{X}_1(z) z dz = W_1 = - \frac{1}{i\omega} \int_{-1}^0 z i\omega \underline{X}_1(z) dz$$

La division par $i\omega$ représente l'intégration en temps ; la multiplication par $i\omega$ la dérivée de X_1 qui représente la vitesse normale à la paroi.

Second ordre Au second ordre maintenant, énergies cinétique et potentielle sont non nulles. On traite dans un premier temps de la composante 2ω .

Composante 2ω L'énergie cinétique E_c^2 s'écrit

$$E_c^2 = -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi}_1(0, z) \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} dz + \frac{1}{4} \int_0^L \underline{\phi}_1(x, 0) \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} dx + \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi}_1(L, z) \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} dz$$

Les composantes progressives sur les surfaces verticales en $x = 0$ et en $x = L$ se compensent par périodicité : il reste les contributions évanescentes en $x = 0$.

$$E_c^2 = -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi}_1^e(0, z) \frac{\partial \underline{\phi}_1^e}{\partial x} dz + \frac{1}{4} \int_0^L \underline{\phi}_1(x, 0) \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} dx$$

Les quantités $\underline{\phi}_1^e$ et $\frac{\partial \underline{\phi}_1^e}{\partial x}$ sont en quadrature : leur contribution ne disparaît pas cependant lorsqu'on prend la partie réelle. Il reste en effet un terme de phase et l'amplitude des modes intervient aussi comme un produit $\underline{a}_n \underline{a}_m$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi}_1^e(0, z) \frac{\partial \underline{\phi}_1^e}{\partial x} dz &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \frac{i \underline{a}_n}{\omega} F^+(\alpha_n, z) \frac{\alpha_m \underline{a}_m}{\omega} F^+(\alpha_m, z) dz = -\frac{1}{4} \frac{i \alpha_m \underline{a}_n \underline{a}_m}{\omega^2} \int_{-1}^0 F^+(\alpha_n, z) F^+(\alpha_m, z) dz \\ &= -\frac{1}{4} \frac{i \underline{a}_n^2}{\omega^2} \frac{e^{2\alpha_n} - e^{-2\alpha_n}}{2} + 2\alpha_n \\ &= -\frac{1}{4} \frac{i \underline{a}_n^2}{\omega^2} \frac{e^{2\alpha_n} - e^{-2\alpha_n}}{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})^2} \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$. En effet, les intégrales s'annulent pour $n \neq m$: le numérateur de la formule (1.38) s'annule d'après la relation de dispersion qui est vérifiée par α_n et α_m . Les intégrales restantes pour $n = m$ sont évaluées grâce à l'expression (1.39) donnée en Annexe.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_0^L \underline{\phi}_1(x, 0) \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} dx &= \frac{1}{4} \int_0^L \frac{i \underline{a}_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} \frac{i \alpha_m \underline{a}_m}{\omega} F^-(\alpha_m, 0) e^{-i\alpha_m x} dx = \frac{1}{4} \frac{i \underline{a}_n}{\omega} \frac{i \omega^2 \underline{a}_m}{\omega} \int_0^L e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} dx \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\underline{a}_n \underline{a}_m}{\alpha_n + \alpha_m} \left[\frac{e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x}}{-i(\alpha_n + \alpha_m)} \right]_0^L = \frac{1}{4} \frac{i \underline{a}_n \underline{a}_m}{\alpha_n + \alpha_m} \end{aligned}$$

pour $(n, m) \neq (0, 0)$ seulement. L'énergie potentielle vaut

$$\begin{aligned} E_p^2 &= \frac{1}{4} \int_0^L \underline{\eta}_1^2 dx - \int_{-1}^0 \underline{X}_2 z dz = \frac{1}{4} \frac{\underline{a}_n \underline{a}_m}{\alpha_n + \alpha_m} \left[\frac{e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x}}{-i(\alpha_n + \alpha_m)} \right]_0^L \\ &= -\frac{1}{4} \frac{i \underline{a}_n \underline{a}_m}{\alpha_n + \alpha_m} \end{aligned}$$

pour $(n, m) \neq (0, 0)$ seulement. On retrouve le terme précédent. Il reste à évaluer le travail des forces de pression à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} W_2 &= -\frac{1}{i\omega} \left[\int_{-1}^0 i\omega \underline{X}_1 i\omega \underline{\phi}_1 dz + \int_{-1}^0 z i\omega \underline{X}_2 dz \right] \\ &= -i\omega \frac{-i\alpha_n \underline{a}_n}{\omega^2} \frac{i \underline{a}_m}{\omega} \int_{-1}^0 F^+(\alpha_n, z) F^+(\alpha_m, z) dz \end{aligned}$$

On vérifie bien le bilan d'énergie $E_c^2 + E_p^2 = W_2$ en 2ω ici. De même s'il existe un mouvement au second ordre du batteur (cf. raisonnement en énergie à l'ordre un). Passons maintenant au terme constant.

Terme constant L'énergie cinétique E_c^2 s'écrit

$$E_c^2 = -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi}_1(0, z) \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} dz + \frac{1}{4} \int_0^L \underline{\phi}_1(x, 0) \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} dx + \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi}_1(L, z) \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} dz$$

Les composantes progressives sur les surfaces verticales en $x = 0$ et en $x = L$ se compensent par périodicité : il reste les contributions évanescentes en $x = 0$.

$$E_c^2 = -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi}_1^e(0, z) \frac{\partial \underline{\phi}_1^e}{\partial x} dz + \frac{1}{4} \int_0^L \underline{\phi}_1(x, 0) \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} dx$$

Les quantités $\underline{\phi}_1^e$ et $\frac{\partial \underline{\phi}_1^e}{\partial x}$ sont en quadrature : leur contribution ne disparaît pas cependant lorsqu'on prend la partie réelle. Il reste en effet l'amplitude des modes qui intervient dans des produits $\underline{a}_n \underline{a}_m$.

$$-\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi}_1^e(0, z) \frac{\partial \underline{\phi}_1^e}{\partial x} dz = -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \frac{i \underline{a}_n}{\omega} F^+(\alpha_n, z) \frac{\overline{\alpha_m \underline{a}_m}}{\omega} F^+(\overline{\alpha_m}, z) dz = -\frac{1}{4} \frac{i \overline{\alpha_m} \underline{a}_n \overline{a_m}}{\omega^2} \int_{-1}^0 F^+(\alpha_n, z) F^+(\overline{\alpha_m}, z) dz$$

En effet, les intégrales s'annulent : pour $n \neq m$, d'après le même raisonnement que pour la composante 2ω . Les intégrales restantes pour $n = m$ sont évaluées grâce aux expressions

$$F^+(\alpha_n, z) F^+(\overline{\alpha_m}, z) = \frac{1}{2|\alpha_n|^2} [|\alpha_n|^2 + \varepsilon_n \omega^4 + (|\alpha_n|^2 - \varepsilon_n \omega^4) F^+(2\alpha_n, z)]$$

avec $\varepsilon_n = -1$ si $n = 0$ et 1 sinon, et

$$F^-(\alpha_m + \alpha_n, 0) = \frac{\omega^2 (\alpha_m + \alpha_n)}{\alpha_m \alpha_n + \omega^4}$$

d'où

$$-\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi_1^e}(0, z) \frac{\partial \overline{\phi_1^e}}{\partial x} dz = -\frac{1}{4} \frac{i \overline{\alpha_n} \underline{a_n} \overline{a_n}}{\omega^2} \frac{1}{2|\alpha_n|^2} \left[|\alpha_n|^2 + \varepsilon_n \omega^4 + (|\alpha_n|^2 - \varepsilon_n \omega^4) \frac{\omega^2}{\alpha_n^2 + \omega^4} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_0^L \underline{\phi_1}(x, 0) \frac{\partial \phi_1}{\partial z} dx &= \frac{1}{4} \int_0^L \frac{i \underline{a_n}}{\omega} e^{-i\alpha_n x} \frac{i \alpha_m \underline{a_m}}{\omega} F^-(\alpha_m, 0) e^{-i\alpha_m x} dx = \frac{1}{4} \frac{i \underline{a_n}}{\omega} \frac{i \omega^2 \underline{a_m}}{\omega} \int_0^L e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} dx \\ &= -\frac{1}{4} \underline{a_n} \underline{a_m} \left[\frac{e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x}}{-i(\alpha_n + \alpha_m)} \right]_0^L = \frac{1}{4} \frac{i \underline{a_n} \underline{a_m}}{\alpha_n + \alpha_m} \end{aligned}$$

pour $(n, m) \neq (0, 0)$ seulement. L'énergie potentielle vaut

$$\begin{aligned} E_p^2 &= \frac{1}{4} \int_0^L \underline{\eta_1}^2 dx - \int_{-1}^0 \underline{X_2} z dz = \frac{1}{4} \underline{a_n} \underline{a_m} \left[\frac{e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x}}{-i(\alpha_n + \alpha_m)} \right]_0^L \\ &= -\frac{1}{4} \frac{i \underline{a_n} \underline{a_m}}{\alpha_n + \alpha_m} \end{aligned}$$

pour $(n, m) \neq (0, 0)$ seulement. On retrouve le terme précédent. Il reste à évaluer le travail des forces de pression à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} W_2 &= -\frac{1}{i\omega} \left[\int_{-1}^0 i\omega \underline{X_1} i\omega \underline{\phi_1} dz + \int_{-1}^0 z i\omega \underline{X_2} dz \right] \\ &= -i\omega \frac{-i\alpha_n \underline{a_n}}{\omega^2} \frac{i \underline{a_m}}{\omega} \int_{-1}^0 F^+(\alpha_n, z) F^+(\alpha_m, z) dz \end{aligned}$$

On vérifie bien le bilan d'énergie $E_c^2 + E_p^2 = W_2$ en 2ω ici. De même s'il existe un mouvement au second ordre du batteur (cf. raisonnement en énergie à l'ordre un).

Flux d'énergie Si on calcule le flux d'énergie dans une section verticale, on doit retrouver l'énergie du fluide qui la traverse à la surface (courant de Stokes) : à quel ordre? La composante constante sur la frontière verticale en $x = L$ vaut ainsi

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^0 \underline{\phi_1}(L, z) \frac{\partial \overline{\phi_1}}{\partial x} dz = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \frac{i \underline{a_n}}{\omega} F^+(\alpha_n, z) e^{-i\alpha_n L} \frac{\overline{\alpha_m} \underline{a_m}}{\omega} F^+(\overline{\alpha_m}, z) e^{+i\overline{\alpha_m} L} dz$$

L'intégrale en z fait disparaître les interactions croisées évanescents-évanescents comme précédemment. Cela signifie que les modes évanescents ne sont pas associés à une propagation de l'énergie.

1.3 Avec courant

On suppose ici l'existence d'un courant uniforme d'ordre 0 noté U_0 . Il ne modifie pas l'équation de Laplace ni la condition de glissement sur le fond.

1.4 Solution stationnaire au second ordre pour une houle régulière :

On cherche cette fois les solutions ϕ_2 et η_2 du problème stationnaire au second ordre (étude fréquentielle). Commençons tout d'abord par rappeler les équations à résoudre au second ordre :

$$\Delta\phi_2 = 0 \text{ pour } (x, z) \in D \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = -1 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial x} - \frac{\partial X_2}{\partial t} = +\frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial\phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} \text{ pour } x = 0 \quad (1.16)$$

$$E\phi_2 = -\frac{\partial}{\partial t} |\vec{\nabla}\phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1 \text{ pour } z = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \eta_2 = -\eta_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2} |\vec{\nabla}\phi_1|^2 \text{ pour } z = 0 \quad (1.18)$$

$$+ \text{ condition de radiation en } x \rightarrow +\infty \quad (1.19)$$

Le premier ordre résolu précédemment intervient dans les membres de droite dans les équations (1.16), (1.17) et (1.18). On parle de termes de forçage des conditions aux limites.

Grâce à la linéarité des équations vis-à-vis de la solution ϕ_2 cherchée, on peut séparer cette solution en une somme de plusieurs termes, choisissant pour chacun des termes une partie des conditions aux limites seulement. Cette séparation permet de dégager plusieurs types d'ondes au second ordre de comportement différent. On présente ici les principales étapes du raisonnement, écriture des termes de forçage issus du premier ordre, séparation de la solution second ordre d'après ces termes de forçage, solutions séparées et interprétation des différents termes. Les calculs servant à établir les conditions aux limites sont décrits en annexe.

1.4.1 Décomposition de la solution au second ordre :

Si l'on examine plus en détail les équations précédentes, on constate que les termes de forçage issus de la solution au premier ordre sont des produits de deux grandeurs du premier ordre. Les termes du premier étant sous la forme de $\cos(\omega t)$, les produits se décomposeront en un terme constant et un terme oscillant à la pulsation 2ω . En notation complexe, les termes en 2ω seront obtenus par des produits du type $\frac{1}{2} \underline{F}_1 \underline{G}_1$, où \underline{F}_1 et \underline{G}_1 sont des grandeurs du premier ordre. Les termes indépendants du temps par des produits $\frac{1}{2} \underline{F}_1 \underline{G}_1$. Puisqu'on étudie la propagation de houle, on s'intéressera principalement aux termes oscillants, qui feront apparaître le phénomène des ondes libres parasites. Les termes constants permettent quant à eux d'expliquer des phénomènes tels que le courant de retour, hauteur moyenne de surface libre par exemple. On a l'habitude de séparer la solution au second ordre en deux termes différents.

$$\phi_2 = \phi_2^e + \phi_2^l$$

Chaque potentiel ϕ_2^e et ϕ_2^l vérifie l'équation (1.14) de Laplace, ainsi que la condition (1.15) sur le fond

- un potentiel lié
- un potentiel libre

On commence par donner la solution en 2ω puis on s'intéressera à la solution indépendante du temps.

1.4.2 Potentiel lié en 2ω :

Le potentiel lié vérifie l'équation de Laplace, la condition de glissement sur le fond, la condition de radiation en $x \rightarrow +\infty$, ainsi que la condition de surface libre :

$$\begin{aligned} E\phi_2^e &= -4\omega^2 \phi_2^e + \frac{\partial\phi_2^e}{\partial z} \\ &= -i\omega |\vec{\nabla}\phi_1|^2 - \frac{1}{2} \eta_1 \frac{\partial E\phi_1}{\partial z} \text{ en } z = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Les calculs des termes de forçage $-i\omega |\vec{\nabla}\phi_1|^2 - \frac{1}{2} \eta_1 \frac{\partial E\phi_1}{\partial z}$ sont effectués dans l'annexe 1.6. On donne ici seulement le résultat :

$$-i\omega |\vec{\nabla}\phi_1|^2 - \frac{1}{2} \eta_1 \frac{\partial E\phi_1}{\partial z} = \frac{ia_n a_m}{4\omega} [6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x}$$

On cherche donc un potentiel lié de même dépendance en x . La condition de Laplace fournit ensuite la dépendance en z . Le potentiel lié s'écrit sous la forme⁹ :

$$\phi_2^e = \frac{iA_{mn}}{2\omega} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x}$$

9. les coefficients A_{mn} sont introduits par analogie avec la solution au premier ordre. Ils donneront directement une contribution à l'amplitude de hauteur de surface libre

En reportant dans l'équation (1.20), on obtient l'expression des coefficients \underline{A}_{mn} :

$$\begin{aligned} E\phi_2^e &= \frac{i\underline{A}_{mn}}{2\omega} [-4\omega^2 + (\alpha_n + \alpha_m) F^-(\alpha_n + \alpha_m, 0)] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \quad \text{en } z = 0 \\ &= \frac{i\underline{a}_n \underline{a}_m}{4\omega} [6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \quad \text{en } z = 0 \end{aligned}$$

d'où ¹⁰

$$\begin{aligned} \underline{A}_{mn} &= \frac{\underline{a}_n \underline{a}_m}{2} \frac{6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m}{-4\omega^2 + (\alpha_n + \alpha_m) F^-(\alpha_n + \alpha_m, 0)} \\ \underline{A}_{mn} &= -\underline{a}_n \underline{a}_m \frac{\omega^4 + \alpha_n \alpha_m}{2\omega^2} \frac{6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m}{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_n)^2} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Il reste à chercher l'élévation de surface libre correspondante. Écrivons la condition de surface pour l'élévation.

$$\underline{\eta}_2^e = -2i\omega \underline{\phi}_2^e - \frac{i\omega}{2} \underline{\eta}_1 \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} - \frac{1}{4} |\tilde{\nabla} \underline{\phi}_1|^2 \quad \text{pour } z = 0$$

L'élévation de surface libre liée comporte deux termes, l'un semblable au cas des ondes libres en dérivée temporelle du potentiel associé, l'autre provenant du forçage quadratique des termes d'ordre un. Ces termes de forçage valent

$$-\frac{i\omega}{2} \underline{\eta}_1 \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} - \frac{1}{4} |\tilde{\nabla} \underline{\phi}_1|^2 = \frac{\underline{a}_m \underline{a}_n}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_m + \alpha_n)x} [3\omega^4 - \alpha_m \alpha_n] \quad \text{en } z = 0$$

On en déduit la hauteur de surface libre

$$\begin{aligned} \underline{\eta}_2^e &= \underline{a}_{mn} e^{-i(\alpha_m + \alpha_n)x} \\ \underline{a}_{mn} &= \underline{A}_{mn} + \frac{\underline{a}_m \underline{a}_n}{4\omega^2} [3\omega^4 - \alpha_m \alpha_n] \end{aligned}$$

Pour interpréter ce résultat, on peut décomposer pour cela le potentiel lié en composantes ayant un sens physique. La première composante intéressante est le mode (0, 0). Les autres termes sont des modes évanescents décrits plus loin. Ce mode (0, 0) a pour potentiel

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_2^\infty &= \frac{i\underline{A}_{oo}}{2\omega} F^+(\alpha_o + \alpha_o, z) e^{-i(\alpha_o + \alpha_o)x} \\ &= \frac{i\underline{A}_{oo}}{2\omega} \frac{\cosh 2k(z+1)}{\cosh 2k} e^{-2ikx} \\ \text{avec } \underline{A}_{oo} &= \underline{a}^2 \frac{3(\omega^4 - k^2)}{-(2\omega)^2 + 2k \tanh 2k} = \frac{3}{4} k \underline{a}^2 \frac{1 - \tanh^4 k}{\tanh^3 k} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Il s'agit d'un mode progressif, se propageant dans le sens des x croissants, de pulsation 2ω et de longueur d'onde $\lambda_\infty = \lambda/2$. La relation de dispersion n'est alors pas vérifiée. Ce mode se déplace à la vitesse de phase

$$c_{\varphi\infty} = \frac{2\omega}{2k} = \frac{\omega}{k} = c_\varphi$$

c'est celle du premier ordre : on parle alors de mode lié. Le potentiel s'annule en profondeur infinie. L'élévation de surface libre est donnée par

$$\begin{aligned} \underline{\eta}_2^\infty &= \underline{a}_{oo} e^{-2ikx} \\ \text{avec } \underline{a}_{oo} &= \underline{A}_{oo} + \frac{\underline{a}^2}{4\omega^2} [3\omega^4 - k^2] = k \underline{a}^2 \frac{3 - \tanh^2 k}{4 \tanh^3 k} \end{aligned}$$

L'élévation progressive est constituée, comme on l'a vue précédemment d'une partie issue du potentiel lié et d'une partie issue du forçage quadratique. La Figure 1.6 montre l'amplitude normalisée de l'élévation de l'onde liée ainsi que les contributions du potentiel lié et des termes de forçage. On observe que le potentiel lié n'intervient que dans la zone à profondeur finie $kh < 3$, il s'annule en effet en profondeur infinie. La contribution des termes de forçage est prédominante en profondeur infinie et s'annule pour $kh = 0.7$.

10. On pourra utiliser la relation

$$F^-(\alpha_n + \alpha_m, 0) = \omega^2 \frac{\alpha_n + \alpha_m}{\omega^4 + \alpha_n \alpha_m}$$

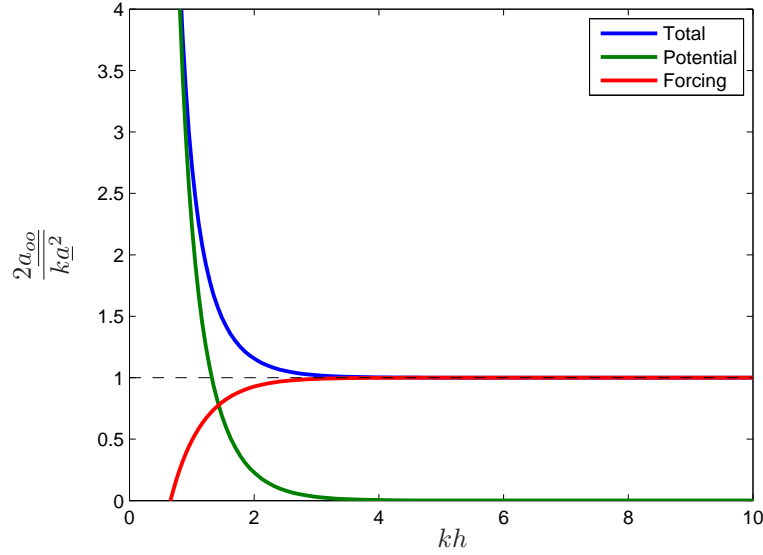


FIGURE 1.6 – Amplitude liée normalisée par l’amplitude liée en profondeur infinie, au second-ordre et pour l’élévation.

Limites asymptotiques En grande profondeur, $kh \gg 1$ on obtient

$$\frac{a_{oo}}{a} = \frac{1}{2} ka$$

En profondeur très faible, l’amplitude diverge comme

$$\frac{a_{oo}}{a} = \frac{3}{4} \frac{ka}{(kh)^3}$$

On peut reconnaître dans ce rapport des amplitudes au second et au premier ordre le nombre d’Ursell¹¹ $\frac{ka}{(kh)^3}$. Pour les ondes longues, l’approche en série de perturbation est donc valable tant que $|a_{oo}/a| \ll 1$ soit quand $U_r \ll 4/3$ ou $U'_r \ll 32\pi^2/3 \simeq 100$.

Influence des modes évanescents On peut observer ce mode seul loin du batteur, lorsque les modes évanescents sont atténués. On retrouve bien l’expression classique pour un second ordre lié en propagation dans un domaine non borné. La présence du batteur doit cependant modifier le champ de vague, par la présence notamment des modes évanescents du premier ordre près du batteur. Au second ordre, on peut séparer en deux catégories les modes évanescents liés au premier ordre.

- interaction mode propagatif - mode évanescent. C’est le cas pour $\{m = 0 \text{ et } n > 0\}$ ou $\{m > 0 \text{ et } n = 0\}$. Le nombre d’onde correspondant vaut $\alpha_m + \alpha_n = k - i|\alpha_n|$. Ce mode se propage et s’atténue suivant la direction des x croissants. Une longueur caractéristique d’atténuation est δ_n , la même qu’au premier ordre (voir premier ordre).
- interaction mode évanescent - mode évanescent. C’est le cas pour $\{m = 0 \text{ et } n = 0\}$. Leur nombre d’onde vaut $-i(|\alpha_m| + |\alpha_n|)$, imaginaire pur. Il s’agit alors d’un mode purement évanescent. Une longueur caractéristique d’atténuation est

$$\delta_{mn} = \frac{1}{|\alpha_m| + |\alpha_n|} < \frac{1}{|\alpha_m|} \text{ ou } \frac{1}{|\alpha_n|}$$

En conclusion, les modes évanescents liés au second ordre possèdent à la fois une amplitude faible (second ordre), et une longueur caractéristique d’atténuation inférieure ou égale à celle des modes évanescents du premier ordre. Ils ne seront donc pas plus gênants que ces derniers. Passons maintenant à la deuxième composante du potentiel second ordre.

1.4.3 Potentiel libre en 2ω :

Le potentiel libre vérifie l’équation de Laplace, la condition de glissement sur le fond, la condition de radiation en $x \rightarrow +\infty$, une condition de surface libre homogène ainsi que la condition sur le batteur :

$$\frac{\partial \phi_2^l}{\partial x} = \frac{\partial X_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{2} X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \text{ en } x = 0 \quad (1.23)$$

11. Il est parfois défini comme

$$U'_r = \frac{H}{h} \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2$$

. On a simplement $U'_r = 8\pi^2 U_r \simeq 80 U_r$.

Exprimons dans un premier temps les termes de forçage (membre de droite de (1.23)). Ils proviennent ici à la fois de la solution au premier ordre

$$\text{forçage} = \frac{1}{2} \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{2} X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \quad \text{en } x = 0$$

et de la solution au second ordre lié $-\frac{\partial \phi_2^e}{\partial x}$. On obtient

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} &= -\frac{(\alpha_n + \alpha_m) \underline{A}_{mn}}{2\omega} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) \quad \text{en } x = 0 \\ \text{forçage} &= \frac{\alpha_n \alpha_m (\alpha_n + \alpha_m) \underline{a}_n \underline{a}_m}{4\omega^3} [F^+(\alpha_n, z) F^+(\alpha_m, z) + F^-(\alpha_n, z) F^-(\alpha_m, z)] \\ &= \frac{(\alpha_n + \alpha_m) \underline{a}_n \underline{a}_m}{4\omega^3} [\omega^4 + \alpha_n \alpha_m] F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) \end{aligned} \quad (1.24)$$

On suppose pour l'instant que l'on n'impose pas de mouvement batteur à la pulsation 2ω , i.e. $\underline{X}_2 = 0$. D'après la condition de surface libre homogène et l'équation de Laplace, on cherche un potentiel libre de la forme

$$\underline{\phi}_2^l = \frac{i \underline{a}_n^l}{2\omega} F^+(\beta_n, z) e^{-i\beta_n x} \quad (1.25)$$

où $4\omega^2 = \beta_n F^-(\beta_n, 0)$. Cette forme est analogue à la solution trouvée au premier ordre (les équations utilisées sont identiques). Ce potentiel se compose d'un terme progressif se déplaçant à la vitesse de phase

$$c_g^l = \frac{d2\omega}{dk_l} \neq \frac{d\omega}{dk}$$

différente de la vitesse de phase de la solution au premier ordre. C'est pourquoi on qualifie de libre ce potentiel. Le mode progressif est caractérisé par une pulsation 2ω et une longueur d'onde $\lambda_l = 2\pi/k_l$ où k_l le nombre d'onde vaut $k_l = \beta_o$. Le potentiel libre est également constitué de modes évanescents, d'indice $n > 0$.

La condition sur le batteur permet d'identifier les coefficients \underline{a}_n^l du potentiel libre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2^l}{\partial x} &= \frac{\beta_n \underline{a}_n^l}{2\omega} F^+(\beta_n, z) \quad \text{en } x = 0 \\ &= \frac{(\alpha_n + \alpha_m)}{2\omega} \left[-\underline{A}_{mn} + \frac{\alpha_n \underline{a}_m}{2\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) \right] F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) \end{aligned} \quad (1.26)$$

En utilisant (1.21), le membre de droite de (1.26) s'écrit

$$\frac{(\alpha_n + \alpha_m)}{2\omega} \frac{\underline{a}_n \underline{a}_m}{4\omega^4 - (\alpha_n - \alpha_m)^2} \frac{\omega^4 + \alpha_n \alpha_m}{\omega^2} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z)$$

En utilisant l'orthogonalité de la famille $\{F^+(\beta_n, z)\}_n$ sur l'intervalle $[-1, 0]$, on peut obtenir par projection les coefficients \underline{a}_n^l du potentiel libre. Après calculs, il vient

$$\underline{a}_n^l = \frac{(e^{\beta_n} + e^{-\beta_n})^2}{\frac{e^{2\beta_n} - e^{-2\beta_n}}{2} + 2\beta_n} D_{mn'}^n \underline{a}_{n'} \underline{a}_m \quad \text{avec} \quad D_{mn'}^n = (\alpha_{n'} + \alpha_m) \frac{5\omega^4 - \alpha_{n'}^2 - \alpha_{n'} \alpha_m - \alpha_m^2}{\beta_n^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2}$$

D'après la condition de surface libre pour $\underline{\eta}_2^l$, on a une élévation

$$\underline{\eta}_2^l = -2i\omega \underline{\phi}_2^l = \underline{a}_n^l e^{-i\beta_n x}$$

On observe dans le résultat ci-dessus que l'élévation libre ne comporte qu'une composante tirée du potentiel libre associé, contrairement au cas de l'onde liée.

Pour générer un champ de vague régulier correct au second ordre, il suffit de générer une houle premier ordre grâce à la fonction de transfert \underline{TF} , et de superposer une houle de pulsation 2ω , d'amplitude \underline{a}_0^l déphasée de π , qui permettra d'enlever l'onde libre trouvée précédemment. On notera pour simplifier

$$D_{mn'}^0 = D_{mn'}$$

L'amplitude cherchée vaut donc

$$\underline{a}_0^l = \frac{(e^{\beta_0} + e^{-\beta_0})^2}{\frac{e^{2\beta_0} - e^{-2\beta_0}}{2} + 2\beta_0} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n'=0}^{+\infty} D_{mn'} \underline{a}_{n'} \underline{a}_m$$

Le terme principal $D_{mn'} \underline{a}_{n'} \underline{a}_m$ est symétrique d'où

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n'=0}^{+\infty} D_{mn'} \underline{a}_{n'} \underline{a}_m = \sum_{m=0}^{+\infty} D_{mm} \underline{a}_m^2 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n'=m+1}^{+\infty} D_{mn'} \underline{a}_{n'} \underline{a}_m$$

1.4.4 Potentiel lié indépendant du temps :

Les calculs du terme de forçage sont effectués dans l'annexe 1.6. On obtient

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{\partial E \phi_1}{\partial z} + \overline{\eta_1} \frac{\partial \overline{E \phi_1}}{\partial z} \right) = \operatorname{Re} \left[\frac{i \underline{a} \overline{a_n}}{2\omega} [\alpha_n^2 - \alpha_0^2] e^{-i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n})x} \right]$$

où la sommation sur n se fait de $n = 1$ à $+\infty$. Le potentiel lié associé est posé de la forme

$$\underline{\phi}_2^e = \operatorname{Re} \left[i \underline{B}_{0n} e^{-i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n})x} F^+(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, z) \right]$$

pour $n = 1$ à $+\infty$. Les amplitudes modales sont données par

$$\underline{B}_{0n} = -(\overline{\alpha_n} + \alpha_0) \frac{\underline{a} \overline{a_n} \omega^4 - \alpha_0 \overline{\alpha_n}}{2\omega^3 \alpha_0 - \overline{\alpha_n}}$$

Ces modes liés ont une contribution évanescence et s'annulent loin du batteur. Aucune élévation n'est associée puisque le potentiel ne dépend pas du temps.

La condition de surface libre pour l'élévation possède les termes de forçage suivants :

$$-\frac{1}{2} i \omega \underline{\eta}_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{4} |\widetilde{\nabla} \phi_1|^2 = -\frac{\overline{a_m} a_n}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_n - \overline{\alpha_m})x} [\overline{\alpha_m} \alpha_n - \omega^4]$$

ce qui donne une élévation indépendante du temps de la forme

$$\underline{\eta}_2^e = \frac{\overline{a_m} a_n}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_n - \overline{\alpha_m})x} [\omega^4 - \overline{\alpha_m} \alpha_n]$$

Dans cette expression, le terme progressif pour lequel $\alpha_0 = k$ donne une contribution en champ lointain

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\overline{a_0} a_0}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_0 - \overline{\alpha_0})x} [\omega^4 - \overline{\alpha_0} \alpha_0] \right] = \frac{|\underline{a}|^2}{4\omega^2} [\omega^4 - k^2]$$

Cette élévation est nulle en profondeur infinie où la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = k$. En champ proche, les termes évanescents apportent également une contribution. Cette élévation constante n'est pas explicitée dans l'article de Hudspeth et Sulisz [3]. La variation du niveau moyen n'étant compensée par aucun déplacement du batteur, on préfère, pour assurer la conservation du volume, ajouter un terme proportionnel à t dans le potentiel pour annuler cette élévation constante :

$$\underline{\phi}_2 = \underline{\phi}_2^e + \frac{|\underline{a}|^2}{4\omega^2} [\omega^4 - k^2] t$$

1.4.5 Potentiel libre indépendant du temps :

Les termes de forçage issus du premier ordre sont

$$-\frac{1}{4} \left(\underline{X}_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \overline{X}_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d\underline{X}_1}{dz} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{d\overline{X}_1}{dz} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) = -(2 - \delta_{0n})(\alpha_0 + \overline{\alpha_n}) \frac{\underline{a} \overline{a_n}}{4\omega^3} (\alpha_0 \overline{\alpha_n} + \omega^4) F^+(\alpha_0 + \overline{\alpha_n}, z)$$

où la somme sur n s'entend de $n = 0$ à $+\infty$. Le terme de forçage issu du potentiel second ordre lié s'écrit quand à lui :

$$-\frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} = -(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}) \underline{B}_{0n} F^+(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, z) \quad \text{en } x = 0$$

pour $n = 1$ à $+\infty$. Le potentiel libre indépendant du temps ne donnera aucune contribution à la surface libre. Il satisfait l'équation de Laplace dans le volume fluide. La condition combinée de surface libre devient une condition de Neumann homogène. On obtient donc avec la condition sur le fond un comportement vertical en

$$F^+(\sigma_n, z) \quad \text{avec} \quad \sigma_n = -i n \pi$$

On peut remarquer que $\sigma_n F^-(\sigma_n, 0) = 0$ pour tout n et que la famille $\{F^+(\sigma_n, z)\}$ est à nouveau orthogonale sur $[-1, 0]$. La dépendance en x vaut alors

$$\begin{aligned} & e^{-i \sigma_n x} \quad \text{si} \quad n > 0 \\ & x \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Le potentiel libre s'écrit

$$\underline{\phi}_2^l = \underline{U}_0^l x + i \underline{A}_n^l e^{-i \sigma_n x} F^+(\sigma_n, z)$$

Le premier terme vaut

$$\underline{U}_0^l = -\frac{k^2 |\underline{a}|^2}{2k\omega} = -k |\underline{a}| \frac{\omega |\underline{a}|}{2k \tanh k} = -\frac{1}{2} k |\underline{a}| \frac{\omega |\underline{a}|}{\omega^2}$$

Il s'agit du courant de retour opposé à la houle qui assure la conservation de la masse dans le bassin.

La partie indépendante du temps du potentiel libre décrit le courant de retour (*cf.* Hudspeth et Sulisz [3]). On retrouve bien cette valeur avec un calcul SWEET. Avant le front d'onde, le champ de vitesse au second ordre est composé de modes longs dûs au démarrage du batteur (*i.e.* régime transitoire). Immédiatement après le front d'onde, on observe le courant de retour puis le champ de vitesse de l'onde libre s'installe avec le front d'onde libre.

Dans le champ proche, les composantes évanescentes s'ajoutent au courant de retour. L'amplitude des modes restants s'écrit

$$\underline{A}_n^l = \frac{(e^{\sigma_n} + e^{-\sigma_n})^2}{2\sigma_n} (2 - \delta_{0m}) (\alpha_0 + \overline{\alpha_m}) \frac{\underline{a} \overline{\alpha_m}}{4\omega} \left(\frac{(\alpha_0 + \overline{\alpha_m})^2}{\sigma_n^2 - (\alpha_0 + \overline{\alpha_m})^2} - \frac{(\alpha_0 - \overline{\alpha_m})^2}{\sigma_n^2 - (\alpha_0 - \overline{\alpha_m})^2} \right)$$

1.5 Solution stationnaire au troisième ordre pour une houle régulière :

On cherche cette fois les solutions ϕ_3 et η_3 du problème stationnaire au troisième ordre (étude fréquentielle). Commençons tout d'abord par rappeler les équations à résoudre au troisième ordre :

$$\Delta\phi_3 = 0 \text{ pour } (x, z) \in D \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = -1 \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial x} - \frac{\partial X_3}{\partial t} = -X_1 \frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2} - X_2 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{2} X_1^2 \frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial\phi_2}{\partial z} + \frac{\partial X_2}{\partial z} \frac{\partial\phi_1}{\partial z} + \frac{1}{2} X_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x \partial z} \text{ pour } x = 0 \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} E\phi_3 &= -\eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_2 - \eta_2 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1 - \frac{1}{2} \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} E\phi_1 - 2 \frac{\partial \nabla \phi_1}{\partial t} \cdot \nabla \phi_2 - 2 \nabla \phi_1 \cdot \frac{\partial \nabla \phi_2}{\partial t} \\ &- 2\eta_1 \frac{\partial \nabla \phi_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \nabla \phi_1}{\partial z} - 2\eta_1 \nabla \phi_1 \cdot \frac{\partial^2 \nabla \phi_1}{\partial z \partial z} - \frac{1}{2} (\nabla \phi_1 \cdot \nabla) |\nabla \phi_1|^2 \text{ pour } z = 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial t} + \eta_3 = \dots \text{ pour } z = 0 \quad (1.31)$$

$$+ \text{ condition de radiation en } x \rightarrow +\infty \quad (1.32)$$

Les premier et second ordres résolus précédemment interviennent dans les membres de droite dans les équations (1.29), (1.30) et (1.31). On parle de termes de forçage des conditions aux limites.

Grâce à la linéarité des équations vis-à-vis de la solution ϕ_3 cherchée, on peut séparer cette solution en une somme de plusieurs termes, choisissant pour chacun des termes une partie des conditions aux limites seulement. Cette séparation permet de dégager plusieurs types d'ondes au second ordre de comportement différent. On présente ici les principales étapes du raisonnement, écriture des termes de forçage issus des deux premier ordres, séparation de la solution troisième ordre d'après ces termes de forçage, solutions séparées et interprétation des différents termes. Les calculs servant à établir les conditions aux limites sont décrits en annexe.

1.6 Approximation

Dans un premier temps, on ne considère que les modes progressifs pour évaluer les termes de forçage sur le batteur. On part de

$$\begin{aligned} \underline{\eta_1} &= \underline{a_n} e^{-i\alpha_n x} && \simeq \underline{a} e^{-ikx} \\ \underline{\phi_1} &= \frac{i\underline{a_n}}{\omega} F^+(\alpha_n, z) e^{-i\alpha_n x} && \simeq \frac{i\underline{a}}{\omega} F^+(k, z) e^{-ikx} \\ \underline{\phi_2^e} &= \frac{i\underline{A_{mn}}}{2\omega} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} && \simeq \frac{i\underline{A_{00}}}{2\omega} F^+(2k, z) e^{-2ikx} \end{aligned}$$

avec $\underline{A_{00}} = \frac{\underline{a}^2}{2} \frac{6\omega^4 - 4k^2 - 2k^2}{-4\omega^2 + 2k} F^-(2k, 0)$. On suppose dans un premier temps que $X_1 = -\frac{ik\underline{a}}{\omega^2} F^+(k, z)$ et $X_2 = 0$ (pas de correction des ondes libres). On néglige les ondes libres générées. La condition sur le batteur s'écrit alors de manière simplifiée

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial x} - \frac{\partial X_3}{\partial t} = -X_1 \frac{\partial^2\phi_2^e}{\partial x^2} - \frac{1}{2} X_1^2 \frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial\phi_2^e}{\partial z} + \frac{1}{2} X_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x \partial z} \text{ pour } x = 0 \quad (1.33)$$

Le forçage sur le batteur contiendra des termes en ω et 3ω . Les premiers vont modifier l'amplitude de la houle émise. On s'intéresse à cette modification et on cherche alors les terme de forçage différence. Comme au second ordre, on est amené à évaluer les modes différences des produits doubles par

$$FG^- = \frac{1}{2} \text{Re} [\underline{F} \overline{\underline{G}}]$$

et les modes différences des produits triples par

$$FGH^- = \frac{1}{4} \text{Re} [\underline{F} \underline{G} \overline{\underline{H}} + \underline{F} \overline{\underline{G}} \underline{H} + \underline{F} \overline{\underline{G}} \overline{\underline{H}}]$$

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{ik\underline{a}}{\omega^2} F^+(k, z) \\ \frac{\partial^2\phi_2^e}{\partial x^2} &= -\frac{4ik^2 \underline{A_{00}}}{2\omega} F^+(2k, z) \\ -X_1 \frac{\partial^2\phi_2^e}{\partial x^2} &= -\frac{4k^3 \underline{a} \underline{A_{00}}}{4\omega^3} F^+(k, z) F^+(2k, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial z} &= -\frac{ik^2 \underline{a}}{\omega^2} F^-(k, z) \\
\frac{\partial \phi_2^e}{\partial z} &= \frac{2ik \underline{A_{00}}}{2\omega} F^-(2k, z) \\
\frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial z} &= \frac{2k^3 \underline{a} \underline{A_{00}}}{4\omega^3} F^-(k, z) F^-(2k, z)
\end{aligned}$$

Annexes 2D

Fonctions F^\pm

On donne ici quelques propriétés des fonctions F^\pm avec $\alpha_0 = k$ pour un terme progressif et $\alpha_n = -i\tilde{\alpha}_n$ pour un mode évanescent

$$\begin{aligned} F^+(\alpha_0, 0) &= 1 \\ F^-(\alpha_0, 0) &= \tanh k \\ F^+(\alpha_n, 0) &= 1 \\ F^-(\alpha_n, 0) &= i \tan \tilde{\alpha}_n \end{aligned}$$

Solution au premier ordre :

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_1 &= \frac{ia_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^+(\alpha_n, z) \\ \underline{\eta}_1 &= \underline{a}_n e^{-i\alpha_n x} \\ \underline{X}_1 &= -\frac{i\alpha_n \underline{a}_n}{\omega^2} F^+(\alpha_n, z) \end{aligned}$$

Calculs intermédiaires :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} &= \frac{\alpha_n \underline{a}_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^+(\alpha_n, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n \underline{a}_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^-(\alpha_n, z) \\ \frac{\partial^2 \underline{\phi}_1}{\partial x^2} &= -\frac{i\alpha_n^2 \underline{a}_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^+(\alpha_n, z) \\ F^+(\alpha_n, 0) &= 1 \quad \text{en } z = 0 \end{aligned}$$

Calculs des termes de forçage :

Condition de surface libre pour le potentiel :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} &= \frac{\alpha_n \underline{a}_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n \underline{a}_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^-(\alpha_n, 0) \quad \text{en } z = 0 \\ -i\omega |\tilde{\nabla} \underline{\phi}_1|^2 &= -\frac{i\alpha_n \alpha_m \underline{a}_n \underline{a}_m}{\omega} [1 - F^-(\alpha_n, 0) F^-(\alpha_m, 0)] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \\ &= -\frac{i\alpha_n \alpha_m \underline{a}_n \underline{a}_m}{\omega} \left[1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n} \frac{\omega^2}{\alpha_m} \right] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \\ &= -\frac{i\underline{a}_n \underline{a}_m}{\omega} [\alpha_n \alpha_m - \omega^4] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{ia_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^+(\alpha_n, z) \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n a_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^-(\alpha_n, z) \\
E\phi_1 &= -\omega^2 \phi_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\
&= \frac{ia_n}{\omega} [-\omega^2 F^+(\alpha_n, z) + \alpha_n F^-(\alpha_n, z)] e^{-i\alpha_n x} \\
\frac{\partial E\phi_1}{\partial z} &= \frac{ia_n}{\omega} [-\alpha_n \omega^2 F^-(\alpha_n, z) + \alpha_n^2 F^+(\alpha_n, z)] e^{-i\alpha_n x} \\
\frac{\partial E\phi_1}{\partial z} &= \frac{ia_n}{\omega} [-\alpha_n \omega^2 F^-(\alpha_n, 0) + \alpha_n^2] e^{-i\alpha_n x} \quad \text{en } z = 0 \\
&= -\frac{ia_n}{\omega} [\omega^4 - \alpha_n^2] e^{-i\alpha_n x} \quad \text{en } z = 0 \\
\eta_1 &= \frac{a_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} \\
-\frac{1}{2}\eta_1 \frac{\partial E\phi_1}{\partial z} &= \frac{ia_n a_m}{2\omega} [\omega^4 - \alpha_n^2] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \\
-i\omega |\widetilde{\nabla}\phi_1|^2 - \frac{1}{2}\eta_1 \frac{\partial E\phi_1}{\partial z} &= \frac{ia_n a_m}{2\omega} [-2\alpha_n \alpha_m + 2\omega^4 + \omega^4 - \alpha_n^2] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \\
&= \frac{ia_n a_m}{2\omega} [3\omega^4 - \alpha_n^2 - 2\alpha_n \alpha_m] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \\
&= \frac{ia_n a_m}{4\omega} [6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x}
\end{aligned}$$

Potentiel lié :

$$\begin{aligned}
\phi_2^e &= \frac{ia_{mn}}{2\omega} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \\
\phi_2^e &= \frac{ia_{mn}}{2\omega} e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \quad \text{en } z = 0 \\
\frac{\partial \phi_2^e}{\partial z} &= \frac{i(\alpha_n + \alpha_m) a_{mn}}{2\omega} F^-(\alpha_n + \alpha_m, z) e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \\
\frac{\partial \phi_2^e}{\partial z} &= \frac{i(\alpha_n + \alpha_m) a_{mn}}{2\omega} F^-(\alpha_n + \alpha_m, 0) e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \quad \text{en } z = 0 \\
E\phi_2^e &= -4\omega^2 \phi_2^e + \frac{\partial \phi_2^e}{\partial z} \quad \text{en } z = 0 \\
&= \frac{ia_{mn}}{2\omega} [-4\omega^2 + (\alpha_n + \alpha_m) F^-(\alpha_n + \alpha_m, 0)] e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \\
a_{mn} &= \frac{a_n a_m}{2} \frac{6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m}{-4\omega^2 + (\alpha_n + \alpha_m) F^-(\alpha_n + \alpha_m, 0)} \tag{1.34}
\end{aligned}$$

Condition de surface libre pour l'élévation :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n a_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^-(\alpha_n, 0) \quad \text{en } z = 0 \\
&= i\omega a_n e^{-i\alpha_n x} \quad \text{en } z = 0 \\
i\omega \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= -\omega^2 a_n e^{-i\alpha_n x} \quad \text{en } z = 0 \\
\eta_1 &= \frac{a_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} \\
-\frac{i\omega}{2}\eta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{\omega^2 a_m a_n}{2} e^{-i(\alpha_m + \alpha_n)x} \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{1}{4}|\widetilde{\nabla}\phi_1|^2 &= \frac{a_m a_n}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_m + \alpha_n)x} [\omega^4 - \alpha_m \alpha_n] \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{i\omega}{2}\eta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{4}|\widetilde{\nabla}\phi_1|^2 &= \frac{a_m a_n}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_m + \alpha_n)x} [3\omega^4 - \alpha_m \alpha_n] \quad \text{en } z = 0
\end{aligned}$$

Condition sur le batteur

Termes de forçage issus du premier ordre :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= -\frac{i\alpha_n^2 a_n}{\omega} F^+(\alpha_n, z) \quad \text{en } x = 0 \\
\underline{X_1} &= -\frac{i\alpha_n a_n}{\omega^2} F^+(\alpha_n, z) \\
-\frac{1}{2} \underline{X_1} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= \frac{\alpha_n^2 \alpha_m a_n a_m}{2\omega^3} F^+(\alpha_n, z) F^+(\alpha_m, z) \\
\frac{d\underline{X_1}}{dz} &= -\frac{i\alpha_n^2 a_n}{\omega^2} F^-(\alpha_n, z) \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n a_n}{\omega} F^-(\alpha_n, z) \quad \text{en } x = 0
\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d\underline{X_1}}{dz} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{\alpha_n \alpha_m^2 a_n a_m}{2\omega^3} F^-(\alpha_n, z) F^-(\alpha_m, z) \\
(1.35) + (1.36) &= \frac{\alpha_n \alpha_m a_n a_m}{2\omega^3} [\alpha_n F^+(\alpha_n, z) F^+(\alpha_m, z) + \alpha_m F^-(\alpha_n, z) F^-(\alpha_m, z)] \\
&= \frac{\alpha_n \alpha_m (\alpha_n + \alpha_m) a_n a_m}{4\omega^3} [F^+(\alpha_n, z) F^+(\alpha_m, z) + F^-(\alpha_n, z) F^-(\alpha_m, z)]
\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
F^+(\alpha_n, z) F^+(\alpha_m, z) + F^-(\alpha_n, z) F^-(\alpha_m, z) &= \frac{(e^{\alpha_n Z} + e^{-\alpha_n Z})(e^{\alpha_m Z} + e^{-\alpha_m Z}) + (e^{\alpha_n Z} - e^{-\alpha_n Z})(e^{\alpha_m Z} - e^{-\alpha_m Z})}{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m})} \\
&= 2 \frac{e^{(\alpha_n + \alpha_m)Z} + e^{-(\alpha_n + \alpha_m)Z}}{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m})}
\end{aligned}$$

$$(1.35) + (1.36) = \frac{\alpha_n \alpha_m (\alpha_n + \alpha_m) a_n a_m}{2\omega^3} \frac{e^{(\alpha_n + \alpha_m)(z+1)} + e^{-(\alpha_n + \alpha_m)(z+1)}}{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m})}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(\alpha_n + \alpha_m)Z} + e^{-(\alpha_n + \alpha_m)Z}}{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m})} &= F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) \frac{e^{(\alpha_n + \alpha_m)} + e^{-(\alpha_n + \alpha_m)}}{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m})} \\
&= \frac{1}{2} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) (F^+(\alpha_n, 0) F^+(\alpha_m, 0) + F^-(\alpha_n, 0) F^-(\alpha_m, 0)) \\
&= \frac{1}{2} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) (1 + F^-(\alpha_n, 0) F^-(\alpha_m, 0)) = F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) \frac{\alpha_n \alpha_m + \omega^4}{2\alpha_n \alpha_m}
\end{aligned}$$

$$(1.35) + (1.36) = \frac{(\alpha_n + \alpha_m) a_n a_m}{4\omega^3} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m)$$

Termes de forçage issus du potentiel second ordre lié :

$$\begin{aligned}
\phi_2^e &= \frac{ia_{mn}}{2\omega} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) e^{-i(\alpha_n + \alpha_m)x} \\
-\frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} &= -\frac{(\alpha_n + \alpha_m) a_{mn}}{2\omega} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) \quad \text{en } x = 0
\end{aligned}$$

Potentiel libre

$$\begin{aligned}
\phi_2^l &= \frac{ia_n^l}{2\omega} F^+(\beta_n, z) e^{-i\beta_n x} \\
\frac{\partial \phi_2^l}{\partial x} &= \frac{\beta_n a_n^l}{2\omega} F^+(\beta_n, z) e^{-i\beta_n x} \quad \text{en } x = 0 \\
\frac{\partial \phi_2^l}{\partial x} &= \frac{(\alpha_n + \alpha_m)}{2\omega} \left[-\underline{a_{mn}} + \frac{a_n a_m}{2\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) \right] F^+(\alpha_n + \alpha_m, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^-(\alpha_n + \alpha_m, 0) &= \frac{e^{(\alpha_n + \alpha_m)} - e^{-(\alpha_n + \alpha_m)}}{e^{(\alpha_n + \alpha_m)} + e^{-(\alpha_n + \alpha_m)}} \\
 &= \frac{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})(e^{\alpha_m} - e^{-\alpha_m}) + (e^{\alpha_n} - e^{-\alpha_n})(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m})}{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m}) + (e^{\alpha_n} - e^{-\alpha_n})(e^{\alpha_m} - e^{-\alpha_m})} \\
 &= \frac{F^+(\alpha_n, 0) F^-(\alpha_m, 0) + F^-(\alpha_n, 0) F^+(\alpha_m, 0)}{F^+(\alpha_n, 0) F^+(\alpha_m, 0) + F^-(\alpha_n, 0) F^-(\alpha_m, 0)} \\
 &= \frac{\alpha_n \omega^2 + \omega^2 \alpha_m}{\alpha_n \alpha_m + \omega^4} = \omega^2 \frac{\alpha_n + \alpha_m}{\omega^4 + \alpha_n \alpha_m}
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

On utilise l'expression

$$\begin{aligned}
 -\underline{a_{mn}} + \frac{a_n a_m}{2\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) &= -\frac{a_n a_m}{2} \frac{6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m}{-4\omega^2 + (\alpha_n + \alpha_m) F^-(\alpha_n + \alpha_m, 0)} + \frac{a_n a_m}{2\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) \\
 &= -\frac{a_n a_m}{2} \frac{6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m}{-4\omega^2 + (\alpha_n + \alpha_m) \omega^2 \frac{\alpha_n + \alpha_m}{\omega^4 + \alpha_n \alpha_m}} + \frac{a_n a_m}{2\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) \\
 &= -\frac{a_n a_m}{2\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) \left[\frac{6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m}{-4(\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) + (\alpha_n + \alpha_m)^2} - 1 \right] \\
 &= -\frac{a_n a_m}{2\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) \frac{6\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_n)^2 - 2\alpha_n \alpha_m + 4\omega^4 - (\alpha_n - \alpha_m)^2}{-4\omega^4 + (\alpha_n - \alpha_m)^2} \\
 &= -\frac{a_n a_m}{2\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) \frac{10\omega^4 - 2\alpha_m^2 - 2\alpha_n^2 - 2\alpha_n \alpha_m}{-4\omega^4 + (\alpha_n - \alpha_m)^2} \\
 &= \frac{a_n a_m}{\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) \frac{5\omega^4 - \alpha_n^2 - \alpha_n \alpha_m - \alpha_m^2}{4\omega^4 - (\alpha_n - \alpha_m)^2}
 \end{aligned}$$

pour simplifier le membre de droite de (1.26)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_2^l}{\partial x} &= \frac{(\alpha_n + \alpha_m)}{2\omega} \left[-\underline{a_{mn}} + \frac{a_n a_m}{2\omega^2} (\omega^4 + \alpha_n \alpha_m) \right] F^+(\alpha_n + \alpha_m, z) \\
 &= \frac{(\alpha_n + \alpha_m)}{2\omega} \frac{a_n a_m}{\omega^2} \frac{5\omega^4 - \alpha_n^2 - \alpha_n \alpha_m - \alpha_m^2}{4\omega^4 - (\alpha_n - \alpha_m)^2} \frac{\omega^4 + \alpha_n \alpha_m}{\omega^2} F^+(\alpha_n + \alpha_m, z)
 \end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité de la famille $\{F^+(\beta_n, z)\}_n$ sur l'intervalle $[-1, 0]$, on peut obtenir par projection les coefficients $\underline{a_n^l}$ du potentiel libre. On aura besoin de l'expression

$$\int_{-1}^0 F^+(\beta, z) F^+(\alpha, z) dz = \frac{\beta F^-(\beta, 0) - \alpha F^-(\alpha, 0)}{\beta^2 - \alpha^2} \quad \text{pour } \alpha \neq \beta$$

On pose $\alpha = \alpha_{n'} + \alpha_m$. Apparaissent alors les intégrales

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 F^+(\beta_n, z) F^+(\alpha_{n'} + \alpha_m, z) dz &= \frac{4\omega^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m) F^-(\alpha_{n'} + \alpha_m, 0)}{\beta_n^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2} \\
 &= \frac{4\omega^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m) \omega^2 \frac{\alpha_{n'} + \alpha_m}{\omega^4 + \alpha_{n'} \alpha_m}}{\beta_n^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2} \\
 &= \frac{\omega^2}{\omega^4 + \alpha_{n'} \alpha_m} \frac{4\omega^4 + 4\alpha_{n'} \alpha_m - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2}{\beta_n^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2} \\
 &= \frac{\omega^2}{\omega^4 + \alpha_{n'} \alpha_m} \frac{4\omega^4 - (\alpha_{n'} - \alpha_m)^2}{\beta_n^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2}
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

On a aussi

$$\int_{-1}^0 F^+(\beta_n, z)^2 dz = \frac{\frac{e^{-2\beta_n} - e^{2\beta_n}}{2i} + 2i\beta_n}{i\beta_n(e^{-\beta_n} + e^{\beta_n})^2} = \frac{\frac{e^{2\beta_n} - e^{-2\beta_n}}{2} + 2\beta_n}{\beta_n(e^{\beta_n} + e^{-\beta_n})^2} \tag{1.39}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \beta_n \underline{a_n^l} \frac{e^{2\beta_n} - e^{-2\beta_n}}{2} + 2\beta_n &= (\alpha_{n'} + \alpha_m) \frac{\underline{a_{n'} a_m}}{\omega^2} \frac{5\omega^4 - \alpha_{n'}^2 - \alpha_{n'} \alpha_m - \alpha_m^2}{4\omega^4 - (\alpha_{n'} - \alpha_m)^2} \frac{\omega^4 + \alpha_{n'} \alpha_m}{\omega^2} \frac{\omega^2}{\omega^4 + \alpha_{n'} \alpha_m} \frac{4\omega^4 - (\alpha_{n'} - \alpha_m)^2}{\beta_n^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2} \\
 &= (\alpha_{n'} + \alpha_m) \frac{\underline{a_{n'} a_m}}{\omega^2} \frac{5\omega^4 - \alpha_{n'}^2 - \alpha_{n'} \alpha_m - \alpha_m^2}{\beta_n^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2}
 \end{aligned}$$

soit, en simplifiant

$$\underline{a_n^l} = \frac{(e^{\beta_n} + e^{-\beta_n})^2}{\frac{e^{2\beta_n} - e^{-2\beta_n}}{2} + 2\beta_n} (\alpha_{n'} + \alpha_m) \underline{a_{n'} a_m} \frac{5\omega^4 - \alpha_{n'}^2 - \alpha_{n'} \alpha_m - \alpha_m^2}{\beta_n^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2}$$

Annexes 2D 2

On cherche la solution indépendante du temps. Elle permet notamment d'après Hudspeth et Sulisz [3] de retrouver le courant de retour. On repart de la solution au premier ordre :

$$\begin{aligned}\underline{\phi}_1 &= \frac{ia_n}{\omega} F(\alpha_n, z) e^{-i\alpha_n x} \\ \underline{\eta}_1 &= \underline{a}_n e^{-i\alpha_n x} \\ \underline{X}_1 &= -\frac{i\alpha_n \underline{a}_n}{\omega^2} F^+(\alpha_n, z)\end{aligned}$$

et des calculs intermédiaires :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} &= \frac{\alpha_n \underline{a}_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^+(\alpha_n, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n \underline{a}_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^-(\alpha_n, z) \\ \frac{\partial^2 \underline{\phi}_1}{\partial x^2} &= -\frac{i\alpha_n^2 \underline{a}_n}{\omega} e^{-i\alpha_n x} F^+(\alpha_n, z)\end{aligned}$$

Calculs des termes de forçage :

Condition de surface libre pour le potentiel :

Dans ces termes de forçage sur la surface libre, le terme en dérivée temporelle de la vitesse est nul. Il reste l'autre terme $-\underline{\eta}_1 \frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} &= -\frac{ia_n}{\omega} [\omega^4 - \alpha_n^2] e^{-i\alpha_n x} \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} &= +\frac{i\bar{a}_n}{\omega} [\omega^4 - (\bar{\alpha}_n)^2] e^{i\bar{\alpha}_n x} \quad \text{en } z = 0 \\ \underline{\eta}_1 &= \underline{a}_n e^{-i\alpha_n x} \\ \bar{\eta}_1 &= \bar{a}_n e^{i\bar{\alpha}_n x} \\ -\frac{1}{2} \bar{\eta}_1 \frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{ia_n \bar{a}_m}{2\omega} [\omega^4 - \alpha_n^2] e^{-i(\alpha_n - \bar{\alpha}_m)x} \\ -\frac{1}{2} \underline{\eta}_1 \frac{\partial E \bar{\phi}_1}{\partial z} &= -\frac{i\bar{a}_n a_m}{2\omega} [\omega^4 - (\bar{\alpha}_n)^2] e^{i(\bar{\alpha}_n - \alpha_m)x} = -\frac{ia_n \bar{a}_m}{2\omega} [\omega^4 - \alpha_m^2] e^{i(\bar{\alpha}_m - \alpha_n)x} \quad (1.40) \\ -\frac{1}{4} \left(\bar{\eta}_1 \frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} + \underline{\eta}_1 \frac{\partial E \bar{\phi}_1}{\partial z} \right) &= \frac{i\bar{a}_m a_n}{4\omega} [\omega^4 - \alpha_n^2 - \omega^4 + \alpha_m^2] e^{-i(\alpha_n - \bar{\alpha}_m)x} = \frac{ia_n \bar{a}_m}{4\omega} [\alpha_m^2 - \alpha_n^2] e^{-i(\alpha_n - \bar{\alpha}_m)x} \quad (1.41)\end{aligned}$$

La seconde égalité de la ligne (1.40) est obtenue par un changement d'indice et en utilisant $(\bar{\alpha}_m)^2 = \alpha_m^2$. On écrit enfin la ligne (1.41) pour symétriser la notation en utilisant

$$FG = \frac{1}{2} \text{Re} [F\bar{G}] = \frac{1}{2} \text{Re} [G\bar{F}] = \frac{1}{4} \text{Re} [F\bar{G} + G\bar{F}]$$

Avant de continuer, on peut faire la remarque suivante sur les interactions des composantes dans le produit (1.41). Le terme $\frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z}$ est en phase avec $\underline{\phi}_1$ si bien que les deux termes du produit précédent, $\underline{\eta}_1$ et $\frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z}$, sont en quadrature ($\underline{\eta}_1$ est en opposition avec $\underline{\phi}_1$). Par conséquent, si deux composantes n et m sont en phase, leur interaction "constante" sera nulle. L'interaction progressive-progressive et les interactions évanescent-évanescent sont dans ce cas de figure alors que les interactions progressive-évanescent fait intervenir des grandeurs en quadrature de phase (en effet, on a alors $TF_n \in i\mathbb{R}$).

Une autre façon de voir les choses est de constater que le terme de forçage sera d'une part nul pour une interaction progressive-progressive car alors $\alpha_m^2 - \alpha_n^2 = 0$. D'autre part, dans le cas d'une interaction évanescent-évanescent alors le terme exponentiel et $\alpha_m^2 - \alpha_n^2$ sont réels si bien que le terme de forçage (1.41) est imaginaire pur.

Il ne reste par conséquent que les interactions progressive-évanescent qui correspondent dans (1.41) à $m = 0$ et $n = 1$ à

$+\infty$ d'une part et $m = 1$ à $+\infty$ et $n = 0$ d'autre part. On notera donc

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial E \phi_1}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial E \phi_1}{\partial z} \right) &= \frac{i \underline{a} \overline{a_n}}{4\omega} [\alpha_n^2 - \alpha_0^2] e^{-i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n})x} + \frac{i \underline{a_n} \overline{a}}{4\omega} [\alpha_0^2 - \alpha_n^2] e^{-i(\alpha_n - \overline{\alpha_0})x} \\ &= 2\text{Re} \left[\frac{i \underline{a} \overline{a_n}}{4\omega} [\alpha_n^2 - \alpha_0^2] e^{-i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n})x} \right] \\ &= \text{Re} \left[\frac{i \underline{a} \overline{a_n}}{2\omega} [\alpha_n^2 - \alpha_0^2] e^{-i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n})x} \right] \end{aligned}$$

où la sommation sur n se fait de $n = 1$ à $+\infty$.

Potentiel lié :

Il faut adapter le potentiel lié au forçage précédent. On pose un potentiel lié ne dépendant pas du temps, de nombre d'onde $\alpha_n - \overline{\alpha_m}$, uniquement pour les couples $(0, n)$ avec $n \geq 1$ d'après la remarque précédente. Ce potentiel étant constant en temps, il ne donnera pas de contribution à l'élévation de surface libre : on utilise alors une normalisation différente de celle employée pour le potentiel en 2ω de type

$$\phi_2^e = \text{Re} \left[i \underline{B_{0n}} e^{-i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n})x} F^+(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, z) \right]$$

pour $n = 1$ à $+\infty$. On peut noter que la partie réelle, introduite pour s'adapter au forçage, est redondante puisqu'en notation complexe, on prendra la partie réelle pour évaluer ϕ_2 . On obtient ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2^e}{\partial z} &= i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}) \underline{B_{0n}} e^{-i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n})x} F^-(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, z) \\ E \phi_2^e &= i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}) \underline{B_{0n}} F^-(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, 0) e^{-i(\alpha_0 - \overline{\alpha_n})x} \quad \text{en } z = 0 \end{aligned}$$

ce qui conduit aux amplitudes modales

$$\underline{B_{0n}} = \frac{\underline{a} \overline{a_n}}{2\omega} \frac{(\overline{\alpha_n})^2 - \alpha_0^2}{(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}) F^-(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, 0)} = -\frac{\underline{a} \overline{a_n}}{2\omega} \frac{\overline{\alpha_n} + \alpha_0}{F^-(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, 0)} \quad (1.42)$$

où

$$F^-(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, 0) = \omega^2 \frac{\alpha_0 - \overline{\alpha_n}}{\omega^4 - \alpha_0 \overline{\alpha_n}}$$

Ces modes ont une contribution évanescence et s'annulent loin du batteur.

Condition de surface libre pour l'élévation :

On recherche ici une élévation constante (niveau moyen).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial z} &= i\omega \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = i\omega \omega^2 \phi_1 \\ &= -\omega^2 \underline{a_n} e^{-i\alpha_n x} \quad \text{en } z = 0 \\ \eta_1 &= \underline{a_n} e^{-i\alpha_n x} \\ -\frac{1}{2} i\omega \eta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{\omega^2}{2} \underline{a_n} \overline{a_m} e^{-i(\alpha_n - \overline{\alpha_m})x} \\ -\frac{1}{4} |\tilde{\nabla} \phi_1|^2 &= -\frac{\overline{a_m} \underline{a_n}}{4\omega^2} \overline{\alpha_m} \alpha_n e^{-i(\alpha_n - \overline{\alpha_m})x} \left[F^+(\alpha_n, 0) \overline{F^+(\alpha_m, 0)} + F^-(\alpha_n, 0) \overline{F^-(\alpha_m, 0)} \right] \quad \text{en } z = 0 \\ &= -\frac{\overline{a_m} \underline{a_n}}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_n - \overline{\alpha_m})x} [\overline{\alpha_m} \alpha_n + \omega^4] \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{1}{2} i\omega \eta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{4} |\tilde{\nabla} \phi_1|^2 &= -\frac{\overline{a_m} \underline{a_n}}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_n - \overline{\alpha_m})x} [\overline{\alpha_m} \alpha_n - \omega^4] \quad \text{en } z = 0 \\ \eta_s &= \frac{\overline{a_m} \underline{a_n}}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_n - \overline{\alpha_m})x} [\omega^4 - \overline{\alpha_m} \alpha_n] \end{aligned}$$

On note qu'au passage, la contribution due au potentiel est nulle ici (dérivée temporelle nulle). La correction du niveau moyen s'obtient en regardant le mode $(0, 0)$, le seul potentiellement non-nul à l'infini :

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{\overline{a_m} \underline{a_n}}{4\omega^2} e^{-i(\alpha_n - \overline{\alpha_m})x} [\omega^4 - \overline{\alpha_m} \alpha_n] \\ \eta_s^{oo} &= \frac{|\underline{a}|^2}{4\omega^2} [\omega^4 - k^2] \end{aligned}$$

Cette élévation constante n'est pas explicitée dans l'article de Hudspeth et Sulisz [3]. En milieu infini et pour assurer la conservation du volume, on ajoute un terme proportionnel à t dans le potentiel pour annuler cette élévation constante :

$$\underline{\phi}_2 = \underline{\phi}_2^e + \frac{|\underline{a}|^2}{4\omega^2} [\omega^4 - k^2] t$$

Condition sur le batteur

Termes de forçage issus du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= -\frac{i\alpha_n^2 \underline{a}_n}{\omega} F^+(\alpha_n, z) \text{ en } x = 0 \\ \underline{X}_1 &= -\frac{i\alpha_n \underline{a}_n}{\omega^2} F^+(\alpha_n, z) \\ -\frac{1}{4} \left(\underline{X}_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \overline{\underline{X}_1} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) &= -\alpha_n \overline{\alpha_m} (\alpha_n + \overline{\alpha_m}) \frac{\underline{a}_n \overline{\alpha_m}}{4\omega^3} F^+(\alpha_n, z) F^+(\overline{\alpha_m}, z) \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{X}_1}{dz} &= -\frac{i\alpha_n^2 \underline{a}_n}{\omega^2} F^-(\alpha_n, z) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n \underline{a}_n}{\omega} F^-(\alpha_n, z) e^{-\alpha_n x} \text{ en } x = 0 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{d\underline{X}_1}{dz} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{d\overline{\underline{X}_1}}{dz} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) &= -\alpha_n \overline{\alpha_m} (\alpha_n + \overline{\alpha_m}) \frac{\underline{a}_n \overline{\alpha_m}}{4\omega^3} F^-(\alpha_n, z) F^-(\overline{\alpha_m}, z) \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} (1.43) + (1.44) &= -\alpha_n \overline{\alpha_m} (\alpha_n + \overline{\alpha_m}) \frac{\underline{a}_n \overline{\alpha_m}}{4\omega^3} (F^+(\alpha_n, z) F^+(\overline{\alpha_m}, z) + F^-(\alpha_n, z) F^-(\overline{\alpha_m}, z)) \\ &= -\alpha_n \overline{\alpha_m} (\alpha_n + \overline{\alpha_m}) \frac{\underline{a}_n \overline{\alpha_m}}{2\omega^3} F^+(\alpha_n + \overline{\alpha_m}, z) \frac{e^{(\alpha_n + \overline{\alpha_m})} + e^{-(\alpha_n + \overline{\alpha_m})}}{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})(e^{\overline{\alpha_m}} + e^{-\overline{\alpha_m}})} \end{aligned} \quad (1.45)$$

On peut simplifier la fraction précédente

$$\frac{e^{(\alpha_n + \overline{\alpha_m})} + e^{-(\alpha_n + \overline{\alpha_m})}}{(e^{\alpha_n} + e^{-\alpha_n})(e^{\overline{\alpha_m}} + e^{-\overline{\alpha_m}})} = \frac{\alpha_n \overline{\alpha_m} + \omega^4}{2 \alpha_n \overline{\alpha_m}}$$

Il faut à nouveau remarquer ici que certains termes ne vont donner aucune contribution lorsqu'on évalue le terme de forçage (1.45). Cette fois, ce sont uniquement les termes d'interaction évanescent-évanescent qui disparaissent. En effet, le terme (m, n) est imaginaire pur et conjugué du terme transposé (matrice hermitienne) : La somme des deux est nulle. Il ne subsiste donc que le terme progressif-progressif ($m = 0$ et $n = 0$) et les termes couplés progressif-évanescent (ces derniers correspondent à $m = 0$ et $n = 1$ à $+\infty$ d'une part et $m = 1$ à $+\infty$ et $n = 0$ d'autre part). On obtient alors, en ne gardant que les interactions avec un évanescent au plus

$$(1.43) + (1.44) = -2\alpha_0 \frac{|\underline{a}|^2}{4\omega^3} (\alpha_0^2 + \omega^4) F^+(2\alpha_0, z) - 2(\alpha_0 + \overline{\alpha_n}) \frac{\underline{a} \overline{\alpha_n}}{4\omega^3} (\alpha_0 \overline{\alpha_n} + \omega^4) F^+(\alpha_0 + \overline{\alpha_n}, z)$$

où la somme sur n s'entend de $n = 1$ à $+\infty$ puisque le terme progressif-progressif a été traité séparément. On peut remarquer que les interactions progressif-évanescent ont été regroupées en une seule somme, doublée en raison de l'hermiticité de la matrice. On peut réécrire, de manière condensée

$$(1.43) + (1.44) = -(2 - \delta_{0n})(\alpha_0 + \overline{\alpha_n}) \frac{\underline{a} \overline{\alpha_n}}{4\omega^3} (\alpha_0 \overline{\alpha_n} + \omega^4) F^+(\alpha_0 + \overline{\alpha_n}, z)$$

où la somme sur n s'entend cette fois de $n = 0$ à $+\infty$. Le terme de forçage issu du potentiel second ordre lié s'écrit quand à lui :

$$-\frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} = -(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}) \underline{B}_{0n} F^+(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, z) \text{ en } x = 0$$

pour $n = 1$ à $+\infty$.

Potentiel libre

Le potentiel libre indépendant du temps ne donnera aucune contribution à la surface libre. Il satisfait l'équation de Laplace dans le volume fluide. La condition combinée de surface libre devient une condition de Neumann homogène. On obtient donc avec la condition sur le fond un comportement vertical en

$$F^+(\sigma_n, z) \text{ avec } \sigma_n = -in\pi$$

On peut remarquer que $\sigma_n F^-(\sigma_n, 0) = 0$ pour tout n et que la famille $\{F^+(\sigma_n, z)\}$ est à nouveau orthogonale sur $[-1, 0]$. La dépendance en x vaut alors

$$\begin{aligned} e^{-i\sigma_n x} & \quad \text{si} \quad n > 0 \\ x & \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Le potentiel libre s'écrit

$$\underline{\phi}_2^l = \underline{U}_0^l x + i \underline{A}_n^l e^{-i\sigma_n x} F^+(\sigma_n, z)$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\phi}_2^l}{\partial x} &= \underline{U}_0^l + \sigma_n \underline{A}_n^l F^+(\sigma_n, z) \quad \text{en} \quad x = 0 \\ &= -(2 - \delta_{0n})(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}) \frac{a \overline{a_m}}{4\omega^3} (\alpha_0 \overline{\alpha_m} + \omega^4) F^+(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}, z) - (\alpha_0 - \overline{\alpha_m}) \underline{B}_{0m} F^+(\alpha_0 - \overline{\alpha_m}, z) \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, le terme provenant des termes de forçage issus du premier ordre est valable pour $n \geq 0$ alors que celui issu du potentiel lié second ordre pour $n > 0$. La contribution constante en z du terme de forçage s'obtient par orthogonalité en projetant l'équation précédente sur les modes propres. Par définition, on a, dans le membre de droite

$$\int_{-1}^0 (\alpha_n \pm \overline{\alpha_m}) F^+(\alpha_n \pm \overline{\alpha_m}, z) dz = F^-(\alpha_n \pm \overline{\alpha_m}, 0) \quad (1.46)$$

On obtient ainsi

$$\underline{U}_0^l = -(2 - \delta_{0n}) \frac{a \overline{a_n}}{4\omega^3} (\alpha_0 \overline{\alpha_n} + \omega^4) F^-(\alpha_0 + \overline{\alpha_n}, 0) - \underline{B}_{0n} F^-(\alpha_0 - \overline{\alpha_n}, 0)$$

Dans cette dernière expression, en séparant les termes progressif-progressif et progressif-évanescent suite à la remarque de la section précédente, on observe que les contributions progressif-évanescent s'annulent : il ne reste que le terme progressif-progressif qui s'écrit

$$\underline{U}_0^l = -\frac{k|\underline{a}|^2}{2\omega} = -k|\underline{a}| \frac{\omega|\underline{a}|}{2k \tanh k} = -\frac{1}{2} k |\underline{a}| \frac{\omega|\underline{a}|}{\omega^2}$$

La partie indépendante du temps du potentiel libre décrit le courant de retour (*cf.* Hudspeth et Sulisz [3]). On retrouve bien cette valeur avec un calcul SWEET. Avant le front d'onde, le champ de vitesse au second ordre est composé de modes longs dûs au démarrage du batteur (*i.e.* régime transitoire). Immédiatement après le front d'onde, on observe le courant de retour puis le champ de vitesse de l'onde libre s'installe avec le front d'onde libre.

Dans le champ proche, les composantes évanescentes s'ajoutent au courant de retour. L'amplitude des modes restants s'écrit

$$\begin{aligned} \sigma_n \underline{A}_n^l \int_{-1}^0 (F^+(\sigma_n, z))^2 dz &= -(2 - \delta_{0n})(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}) \frac{a_0 \overline{a_m}}{4\omega^3} (\alpha_0 \overline{\alpha_m} + \omega^4) \int_{-1}^0 F^+(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}, z) F^+(\sigma_n, z) dz \\ &\quad - (\alpha_0 - \overline{\alpha_m}) \underline{B}_{0m} \int_{-1}^0 F^+(\alpha_0 - \overline{\alpha_m}, z) F^+(\sigma_n, z) dz \end{aligned}$$

On a alors d'une part pour le membre de gauche

$$\int_{-1}^0 F^+(\sigma_n, z)^2 dz = \frac{\frac{e^{2\sigma_n} - e^{-2\sigma_n}}{2} + 2\sigma_n}{\sigma_n(e^{\sigma_n} + e^{-\sigma_n})^2} = \frac{2}{(e^{\sigma_n} + e^{-\sigma_n})^2}$$

et d'autre part pour le membre de droite

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 F^+(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}, z) F^+(\sigma_n, z) dz &= -\frac{(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}) F^-(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}, 0)}{\sigma_n^2 - (\alpha_0 + \overline{\alpha_m})^2} \\ \int_{-1}^0 F^+(\alpha_0 - \overline{\alpha_m}, z) F^+(\sigma_n, z) dz &= -\frac{(\alpha_0 - \overline{\alpha_m}) F^-(\alpha_0 - \overline{\alpha_m}, 0)}{\sigma_n^2 - (\alpha_0 - \overline{\alpha_m})^2} \end{aligned}$$

et

$$F^-(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}, 0) = \omega^2 \frac{\alpha_0 + \overline{\alpha_m}}{\alpha_0 \overline{\alpha_m} + \omega^4}$$

d'où

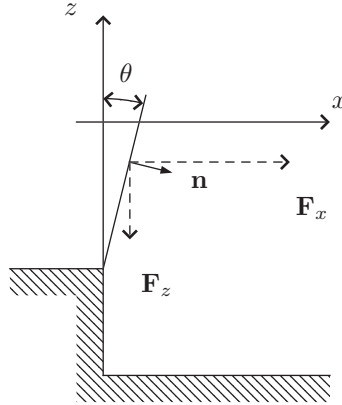
$$\begin{aligned} \frac{2\sigma_n \underline{A}_n^l}{(e^{\sigma_n} + e^{-\sigma_n})^2} &= (2 - \delta_{0n})(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}) \frac{a \overline{a_m}}{4\omega} \frac{(\alpha_0 + \overline{\alpha_m})^2}{\sigma_n^2 - (\alpha_0 + \overline{\alpha_m})^2} + (\alpha_0 - \overline{\alpha_m}) \frac{a \overline{a_m}}{2\omega} \frac{(\overline{\alpha_m})^2 - \alpha_0^2}{\sigma_n^2 - (\alpha_0 - \overline{\alpha_m})^2} \\ &= (2 - \delta_{0n})(\alpha_0 + \overline{\alpha_m}) \frac{a \overline{a_m}}{4\omega} \left(\frac{(\alpha_0 + \overline{\alpha_m})^2}{\sigma_n^2 - (\alpha_0 + \overline{\alpha_m})^2} - \frac{(\alpha_0 - \overline{\alpha_m})^2}{\sigma_n^2 - (\alpha_0 - \overline{\alpha_m})^2} \right) \end{aligned}$$

tracer les profils sur trois figures : profil U_0^l , profil a_n^l et la somme des deux.

c'est validé (par exemple en évaluant le flux de masse au second ordre entre -h et 0 et en comparant à la dérive de Stokes) même si des petites différences avec Hudspeth et Sulisz au niveau du profil de vitesse pour les modes longs en batteur volet avec charnière sous le fond ou en piston. Je trouve que le profil second ordre ne va pas à zéro au fond pour $h/L_0=0.2$ comme eux. La conservation de la masse est bonne pourtant chez moi, vérifié en numérique. Chez eux aussi, c'est fait en analytique. Leur profil est-il le bon ? ou le mien ??

1.7 Pilotage en force

On s'intéresse ici à un contrôle du batteur permettant l'absorption des houles parasites provenant de la réflexion sur la plage par exemple (ou de la maquette). Cette absorption active est obtenue par exemple grâce au pilotage en force des volets. Sur le batteur de l'ECN, un capteur de force est placé à une distance $l = XX$ m de la charnière ; il mesure une force F_m .



La force exercée par le volet du batteur sur le fluide est une force de pression¹² qui s'exprime, comme on l'a vu dans la section 1.1.4

$$\mathbf{F}_p = \int_{-1+d}^{\eta(X,t)} P(X(z,t), z, t) \mathbf{n} dS$$

La force de pression est orientée suivant la normale \mathbf{n} au volet et exercée au centre de poussée P , situé à une distance L de la charnière. Le moment par rapport à la charnière vaut

$$\mathcal{M}_{\mathbf{F}_p}^C = \int_{-1+d}^{\eta(X,t)} \mathbf{CM} \wedge P(X(z,t), z, t) \mathbf{n} dS$$

où C est la charnière et M le point courant sur la surface du volet. La position du point de poussée P est obtenue en écrivant que

$$\mathcal{M}_{\mathbf{F}_p}^P = \int_{-1+d}^{\eta(X,t)} \mathbf{PM} \wedge P(X(z,t), z, t) \mathbf{n} dS = L |\mathbf{F}_p|$$

Dans les expressions ci-dessus intervient la pression qui est donnée par la relation de Bernoulli

$$P = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - z - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi|^2$$

Posons pour vecteur normal, le vecteur $\mathbf{n} = (1; -\partial X / \partial z)$. Dans l'expression de la force, il conviendrait de le normer correctement par $|\mathbf{n}| = \sqrt{1 + (\partial X / \partial z)^2}$. Cependant, on peut remarquer que, lors du calcul, on pourra employer l'égalité

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} dS = \mathbf{n} dz$$

Cela revient à couper le volet en tranches horizontales.

D'un point de vue mécanique, on considère le solide *volet* ; il est soumis à

- la force \mathbf{F}_p de pression de l'eau (hydrostatique et dynamique)
- la force \mathbf{f} de l'actionneur
- la réaction de la charnière
- la force \mathbf{F}_v exercée par le vérin pneumatique permettant de reprendre une partie de l'effort hydrostatique

On n'aura pas besoin d'évaluer la réaction de la charnière si on raisonne à l'aide du théorème du moment cinétique, en l'appliquant au niveau de la charnière située en P . L'actionneur est positionné au point C de coordonnées (x_c, z_c) , à une distance l de la charnière et la force qu'il exerce sur le volet est orientée suivant la normale au volet. Enfin, La force exercée par le vérin s'exerce au point d'attache de ce dernier, situé à une distance L_v de la charnière. Le théorème du moment cinétique s'écrit

$$I_{yy}^P \frac{d\Omega}{dt} = \mathcal{M}_{\mathbf{F}_p}^P + \mathcal{M}_{\mathbf{f}}^P$$

12. la borne supérieure est définie par $\eta(X, t)$ où X est évalué en η et t . . . On se mord la queue.

On obtiendra donc la force à imposer au niveau du capteur à partir de celle exercée par l'eau en tenant compte de l'inertie du volet. L'équation s'écrit simplement

$$l f = -L F_p - L_v F_v + I_{yy}^P \ddot{\theta}$$

où θ est l'angle du volet.

Il est possible aussi de raisonner directement en terme de puissance.

On peut décomposer le moment lié à la pression de l'eau en différentes composantes. La pression hydrostatique s'interprète comme une raideur du système. En mouvement, le solide *volet* est en rotation autour de la charnière située sous l'origine du repère ($Oxyz$) fixe. Autour de son centre de gravité G (de coordonnées (x_g, z_g)), il effectue une translation en x et une rotation autour de (Gy). La radiation liée aux deux mouvements crée le champ de vague désiré et apporte une masse ajoutée et un amortissement.

Pour établir la force exercée sur les volets en houle régulière, on part de la solution linéaire avec le pilotage en position (cf. section 1.2) qui justement ne contient pas d'ondes parasites et on évalue la force nécessaire.

1.7.1 Série de perturbation

Le vecteur normal se décompose en série de perturbation comme

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_x - \varepsilon \left(\frac{\partial X_1}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial X_2}{\partial z} + \dots \right) \mathbf{u}_z$$

La pression intervient en $x = X(z, t)$ dans l'expression de la force. On peut alors effectuer un développement de Taylor en $x = 0$.

$$P(X(z, t), z, t) = P(0, z, t) + X(z, t) \frac{\partial P}{\partial x}(0, z, t)$$

Si on décompose la pression en série de perturbation $P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots$, on obtient ensuite

$$P(X(z, t), z, t) = P_0(z) + \varepsilon P_1(0, z, t) + \varepsilon^2 (X_1(z, t) \frac{\partial P_1}{\partial x}(0, z, t) + P_2(0, z, t))$$

L'intégrale verticale entre -1 et η fait apparaître des termes dits de coin de la manière suivante

$$\int_{-1}^{\varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2} (f_0(z) + \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^2 f_2(z)) dz = \int_{-1}^0 f_0(z) dz + \varepsilon \left(\int_{-1}^0 f_1(z) dz + \eta_1 f_0(0) \right) + \dots$$

La force s'écrit finalement $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \varepsilon \mathbf{F}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{F}_2$.

1.7.2 Ordre zéro

À l'ordre zéro, la pression hydrostatique vaut $P_0 = -z$; elle ne dépend que de la profondeur¹³. La force correspondante vaut

$$\mathbf{F}_0 = \int_{-1+d}^0 P_0 \mathbf{u}_x dz = \frac{(d-1)^2}{2} \mathbf{u}_x$$

Elle est équivalente à la pression exercée au barycentre du volet ($z = (-1+d)/2$ fois la hauteur du volet $1-d$). Le point d'application se situe au tiers inférieur. Dans le bassin de houle de l'ECN, cette force est reprise partiellement par les vérins sous pression et par les moteurs.

1.7.3 Ordre un

La pression à l'ordre un vaut

$$P_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial t}$$

et la force s'écrit

$$\mathbf{F}_1 = \int_{-1+d}^0 \left(P_1 \mathbf{u}_x - \frac{\partial X_1}{\partial z} P_0 \mathbf{u}_z \right) dz + \eta P_0$$

Dans cette expression, la pression P_1 et le mouvement X_1 sont inconnus pour l'instant. On veut générer une houle d'amplitude a et de fréquence ω pour laquelle la pression cible (progressive) est

$$P_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = a \frac{\cosh k(z+1)}{\cosh k}$$

d'où une composante pour la force valant

$$\mathbf{F}_1 = a \frac{\sinh k - \sinh kd}{k \cosh k} \mathbf{u}_x$$

13. On aura notamment par la suite $\partial P_0 / \partial x = 0$ dans le développement de Taylor

Il resterait à calculer la composante hydrostatique mais le mouvement batteur est inconnu. S'il n'y a pas de parasites devant le bassin, le mouvement du batteur sera le même que lors d'un pilotage en position. L'inconvénient est ici qu'on ne peut pas arriver jusqu'à l'amplitude des modes évanescents nécessaires pour le calcul second ordre. La donnée de la seule force cible

$$\mathbf{F}_1 = \underline{a} \frac{\sinh k - \sinh kd}{k \cosh k} \mathbf{u}_x$$

ne suffit pas à tout calculer. Le mouvement du batteur est inconnu dans ce cas. En fait, ne considérer que le mode progressif pour calculer la pression puis la force ne semble pas adapté. Comme annoncé au début de cette partie, il faut considérer la solution linéaire complète (onde progressive et modes évanescents) donnée par le pilotage en position puis en déduire la force à appliquer.

La pression P_1 s'exprime en fonction du potentiel premier ordre comme

$$\begin{aligned} \underline{P}_1 &= \underline{a}_n F^+(\alpha_n, z) \\ \int_{-1+d}^0 F^+(\alpha_n, z) dz &= \frac{1}{\alpha_n} [F^-(\alpha_n, z)]_{-1+d}^0 \\ &= \frac{1}{\alpha_n} (F^-(\alpha_n, 0) - F^-(\alpha_n, -1+d)) \\ &= \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \left[1 - \frac{F^-(\alpha_n, -1+d)}{F^-(\alpha_n, 0)} \right] \end{aligned}$$

La composante correspondante de la force, horizontale, vaut donc simplement

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1x} &= -\frac{\omega^2 \underline{a}_n}{\alpha_n^2} \left[1 - \frac{F^-(\alpha_n, -1+d)}{F^-(\alpha_n, 0)} \right] \mathbf{u}_x \\ \mathbf{F}_{1x} &= \frac{\omega^2 \underline{a}}{k^2} \left[\frac{\sinh k - \sinh kd}{\sinh k} - k^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{TF_m}{\alpha_n^2} \frac{\sin |\alpha_n| - \sinh |\alpha_n|d}{\sinh |\alpha_n|} \right] \mathbf{u}_x \end{aligned}$$

On doit ajouter la composante verticale liée à la pression hydrostatique qui s'écrit

$$\mathbf{F}_{1z} = - \int_{-1+d}^0 \frac{\partial X_1}{\partial z} P_0 \mathbf{u}_z dz$$

On obtient à l'aide du mouvement batteur $X_1(z, t) = \text{Re} [\underline{b} g(z) e^{i\omega t}]$

$$\mathbf{F}_{1z} = -\underline{b} \int_{d-1}^0 \frac{z}{1-d} dz \mathbf{u}_z = \underline{b} \frac{1-d}{2} \mathbf{u}_z$$

\mathbf{F}_{1x} et \mathbf{F}_{1z} sont les composantes de la force à imposer au batteur pour obtenir le champ de vague à ω , identique à celui obtenu par le pilotage en position. Le terme avec la somme infinie dans \mathbf{F}_{1x} est une correction pour prendre en compte la forme du batteur qui n'est pas adaptée au profil vertical de vitesse.

Les deux composantes, horizontale et verticale sont à prendre en compte si on dispose d'un volet oscillant et d'un capteur de force fixé sur ce volet. Dans ce cas, l'angle de rotation vaut

$$\arctan \frac{X_1(0, t)}{h-d}$$

1.7.4 Ordre deux

La pression à l'ordre deux vaut

$$P_2 = -\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi_1|^2$$

et la force

$$\mathbf{F}_2 = \int_{-1+d}^0 \left((P_2 + X_1(z, t)) \frac{\partial P_1}{\partial x} \mathbf{u}_x - \left(\frac{\partial X_1}{\partial z} P_1 + \frac{\partial X_2}{\partial z} P_0 \right) \mathbf{u}_z \right) dz$$

Convergence

On étudie ici la convergence des séries. Pour cela, on s'intéresse aux différents termes de ces séries. Dans ceux-ci interviennent les α_n . Graphiquement, on sait que α_n tend vers $n\pi$. La question qui se pose est comment ? Le développement asymptotique peut-être obtenu de la manière suivante : pour u proche de $n\pi$

$$\begin{aligned} u \tan u &= n\pi \tan n\pi + \frac{u - n\pi}{1!} \frac{d \tan u}{du} (u = n\pi) + o(u - n\pi) \\ &= n\pi(u - n\pi) + o(u - n\pi) \\ \alpha_n \tan \alpha_n &= -\omega^2 \\ \alpha_n &= n\pi - \frac{\omega^2}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n\pi}\right) \end{aligned}$$

On peut en déduire le comportement asymptotique des fonctions de transfert évanescentes

$$\underline{TF}_n = -2i \underline{TF} \frac{\omega^4}{(n\pi)^3} + o\left(\frac{1}{(n\pi)^3}\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n \sin \alpha_n &\underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \omega^2 \text{ borné} \\ \sin \alpha_n &\underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \frac{\omega^2}{n\pi} \\ \cos \alpha_n &\underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \\ \cos \alpha_n d &\underset{+\infty}{\sim} \cos n\pi d \end{aligned}$$

Grâce à ces équivalents, on déduit que $|\underline{TF}_n|$ se comporte à l'infini comme

$$\frac{1}{n^3}$$

La série de terme général \underline{TF}_n converge bien. De même, le terme général de la série des \underline{a}_n^l se comporte comme

$$\frac{n'm}{n'^3 m^3} = \frac{1}{n'^2 m^2}$$

Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} \underline{TF}_n &= i \underline{TF} \frac{4 \sin |\alpha_n|}{|\alpha_n|(1-d)} \frac{|\alpha_n|(1-d) \sin |\alpha_n| + \cos |\alpha_n| - \cos |\alpha_n| d}{2|\alpha_n| + \sin 2|\alpha_n|} \\ \underline{TF}_n &\underset{+\infty}{\sim} 2i \underline{TF} \frac{\omega^2}{1-d} \left(\frac{1 - \omega^2(1-d)}{(n\pi)^3} + \frac{(-1)^n \cos n\pi d}{(n\pi)^3} \right) \\ D_{mn} \underline{a}_n \underline{a}_m &\underset{+\infty}{\sim} -4 (\underline{TF} \underline{a})^2 \frac{\pi \omega^4}{(1-d)^2} \frac{n^2 + nm + m^2}{n+m} \left(\frac{1 - \omega^2(1-d)}{(n\pi)^3} + \frac{(-1)^n \cos n\pi d}{(n\pi)^3} \right) \left(\frac{1 - \omega^2(1-d)}{(m\pi)^3} + \frac{(-1)^m \cos m\pi d}{(m\pi)^3} \right) \end{aligned}$$

Chapitre 2

Solution analytique de la génération de houle bi-chromatique en bassin bi-dimensionnel

2.1 Au premier ordre

Les équations du premier ordre sont linéaires. La solution générale se décompose ainsi en une superposition (somme) d'ondes élémentaires. Ces ondes élémentaires sont des houles mono-chromatiques présentées plus haut. On s'intéresse maintenant au cas de deux ondes de fréquences¹ différentes. Les deux ondes seront repérées par un indice² 1 ou 2.

$$\begin{aligned}\underline{\phi}_1^i &= \frac{i \underline{a}_n^i}{\omega^i} F^+(\alpha_n^i, z) e^{-i\alpha_n^i x} \\ \underline{\eta}_1^i &= \underline{a}_n^i e^{-i\alpha_n^i x}\end{aligned}$$

pour $i = 1, 2$, avec $\omega^1 \neq \omega^2$, vérifiant la relation de dispersion $(\omega^i)^2 = \alpha_n^i F^-(\alpha_n^i, 0)$ et d'amplitude complexe $\underline{a}_n^i = T F_n^i \underline{a}^i$ où \underline{a}^i est l'amplitude de la houle cible de fréquence ω^i .

La solution globale est la somme des deux ondes élémentaires

$$\begin{aligned}\underline{X}_1 &= \underline{X}_1^1 + \underline{X}_1^2 \\ \underline{\phi}_1 &= \underline{\phi}_1^1 + \underline{\phi}_1^2 \\ \underline{\eta}_1 &= \underline{\eta}_1^1 + \underline{\eta}_1^2\end{aligned}$$

Au second ordre, ces solutions du premier ordre apparaissent dans les termes de forçage (seconds membres des conditions aux limites sur la surface libre et sur le batteur).

1. Deux ondes de même fréquence mais d'amplitudes différentes se superposent en une seule onde de cette fréquence par linéarité :

$$\text{Re} \left[\underline{a}_1 e^{i\omega t} + \underline{a}_2 e^{i\omega t} \right] = \text{Re} \left[(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) e^{i\omega t} \right]$$

2. Pour éviter toute confusion, les termes au carré seront mis entre parenthèses.

2.2 Au second ordre

Allons-y pour le calcul des termes de forçage et des solutions au second ordre. Il faut dans un premier temps savoir quels produits calculer. Si F et G sont deux grandeurs premier ordre, avec $F = F^1 + F^2$ et $G = G^1 + G^2$, on a simplement ³

$$FG = F^1 G^1 + F^1 G^2 + F^2 G^1 + F^2 G^2$$

où les indices 1 et 2 sont les fréquences différentes. Le premier et le dernier termes, appelés termes de Stokes dans la suite, sont mono-chromatiques et ont déjà été évalués précédemment (voir page 1.4). Il reste à trouver la solution pour les deux produits croisés $F^1 G^2$ et $F^2 G^1$. Les indices 1 et 2 étant de fréquences différentes, ces produits croisés peuvent se réécrire comme la somme de fréquence somme et différence. En notation réelle, on part de termes $F = F^i \cos(\omega_i t - k_i x + \phi_i)$ et $G = G^i \cos(\omega_i t - k_i x + \psi_i)$ pour $i = 1$ et 2. Le terme d'interaction vaudra

$$\begin{aligned} F^1 G^2 + F^2 G^1 &= F^1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1) G^2 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \psi_2) + F^2 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \phi_2) G^1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \psi_1) \\ &= F^1 G^2 \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1 + \omega_2 t - k_2 x + \psi_2) + \cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1 - (\omega_2 t - k_2 x + \psi_2))] \\ &\quad + F^2 G^1 \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 t - k_1 x + \psi_1 + \omega_2 t - k_2 x + \phi_2) + \cos(\omega_1 t - k_1 x + \psi_1 - (\omega_2 t - k_2 x + \phi_2))] \\ &= \frac{1}{2} F^1 G^2 [\cos((\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x + \phi_1 + \psi_2) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x + \phi_1 - \psi_2)] \\ &\quad + \frac{1}{2} F^2 G^1 [\cos((\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x + \psi_1 + \phi_2) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x + \psi_1 - \phi_2)] \end{aligned}$$

En notation complexe, le terme somme ⁴ vaudra donc

$$(F^1 G^2 + F^2 G^1)^+ = \frac{1}{2} \text{Re} [\underline{F^1 G^2} + \underline{F^2 G^1}]$$

et le terme différence ⁵

$$(F^1 G^2 + F^2 G^1)^- = \frac{1}{2} \text{Re} [\underline{F^1 \overline{G^2}} + \underline{F^2 \overline{G^1}}]$$

En écrivant le terme d'interaction 1-2 sous la forme $F^1 G^2 + F^2 G^1$, cela veut dire qu'on traite en une seule fois l'interaction 1 vers 2 et l'interaction 2 vers 1. Pratiquement, lorsqu'on aura un spectre à traiter, le terme d'interaction s'écrira comme une somme double sur un triangle et on écrira ainsi :

$$FG = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} (F^i G^j + F^j G^i) + \sum_{i=1}^N F^i G^i$$

Ce sera notamment le cas lorsqu'on évaluera le potentiel lié. Puisqu'on commence par estimer le terme de forçage avec la convention précédente, alors le potentiel lié construit d'après la forme du forçage devra suivre la même convention. On peut aussi remarquer que la formule pour l'interaction 1-2 pourra être utilisée pour l'auto-interaction en prenant $i = j$ et en divisant par deux le résultat issu de l'interaction 1-1. Autrement dit, on aura

$$F^1 G^1 = \frac{1}{2} (F^1 G^1 + F^1 G^1)$$

Deux produits (de Stokes) en houle mono-chromatique correspondent à quatre produits somme et différence et deux produits de Stokes en houle bi-chromatique. Et N fréquences en houle irrégulière au premier ordre donneront $4N(N-1)/2 + N = N(2N-1)$ produits à calculer au second ordre.

Solution au premier ordre : On rappelle la solution au premier ordre

$$\begin{aligned} \underline{\phi_1^i} &= \frac{i a_n^i}{\omega^i} F^+(\alpha_n^i, z) e^{-i\alpha_n^i x} \\ \underline{\eta_1^i} &= \underline{a_n^i} e^{-i\alpha_n^i x} \end{aligned}$$

En revanche, le mouvement batteur est modifié par rapport à la version mono-chromatique écrite pour un seul batteur

$$\underline{X_1^i} = -\frac{i \alpha_n^i a_n^i}{(\omega^i)^2} F^+(\alpha_n^i, z)$$

3. On se place dans le cas d'une houle bi-chromatique, ce qui fournira les solutions de base pour les termes de second ordre en houle irrégulière.

4. On notera également que pour $F = G$, le terme somme vaut

$$(F^1 F^2 + F^2 F^1)^+ = \text{Re} [\underline{F^1 F^2}]$$

5. La même remarque s'applique pour $F = G$; le terme différence vaut

$$(F^1 F^2 + F^2 F^1)^- = \text{Re} [\underline{F^1 \overline{F^2}}]$$

Calculs intermédiaires :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1^i}{\partial x} &= \frac{\alpha_n^i a_n^i}{\omega^i} F^+(\alpha_n^i, z) e^{-i\alpha_n^i x} \\ \frac{\partial \phi_1^i}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n^i a_n^i}{\omega^i} F^-(\alpha_n^i, z) e^{-i\alpha_n^i x} \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= \frac{i(\alpha_n^i)^2 a_n^i}{\omega^i} F^+(\alpha_n^i, z) e^{-i\alpha_n^i x}\end{aligned}$$

2.2.1 Mode lié somme

Condition de surface libre pour le potentiel lié

On doit calculer les termes $-\frac{\partial}{\partial t}|\vec{\nabla}\phi_1|^2$, $-\eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1$, $-\eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial z}$ et $-\frac{1}{2}|\vec{\nabla}\phi_1|^2$. En profondeur infinie, le terme $\frac{\partial}{\partial z} E\phi_1$ serait nul. Les termes sommes⁶ dans la condition combinée pour le potentiel valent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1^i}{\partial x} &= \frac{\alpha_n^i a_n^i}{\omega^i} e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial \phi_1^i}{\partial z} &= \frac{i(\omega^i)^2 a_n^i}{\omega^i} e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\ |\vec{\nabla}\phi_1|^2 &= \frac{\partial \phi_1^1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1^1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1^2}{\partial z} = \frac{a_m^1 a_n^2}{\omega^1 \omega^2} \left[\alpha_m^1 \alpha_n^2 - (\omega^1 \omega^2)^2 \right] e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x} \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial t} |\vec{\nabla}\phi_1|^2 &= -i(\omega^1 + \omega^2) \frac{a_m^1 a_n^2}{\omega^1 \omega^2} \left[\alpha_m^1 \alpha_n^2 - (\omega^1 \omega^2)^2 \right] e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x} \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial E\phi_1^i}{\partial z} &= -\frac{i a_n^i}{\omega^i} \left[(\omega^i)^4 - (\alpha_n^i)^2 \right] e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\ \eta_1^i &= \frac{a_n^i}{\omega^i} e^{-i\alpha_n^i x} \\ -\eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1 &= -\frac{1}{2} \left[\eta_1^1 \frac{\partial E\phi_1^2}{\partial z} + \eta_1^2 \frac{\partial E\phi_1^1}{\partial z} \right] \quad \text{en } z = 0 \\ &= \frac{i a_m^1 a_n^2}{2} \left[\frac{(\omega^2)^4 - (\alpha_n^2)^2}{\omega^2} + \frac{(\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2}{\omega^1} \right] e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x} \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial t} |\vec{\nabla}\phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1 &= i \frac{a_m^1 a_n^2}{2\omega^1 \omega^2} \left[\frac{\omega^1 + \omega^2}{\omega^1 \omega^2} \left((\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{(\omega^2)^4 - (\alpha_n^2)^2}{2\omega^2} + \frac{(\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2}{2\omega^1} \right] e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x} \quad \text{en } z = 0 \\ &= i \frac{a_m^1 a_n^2}{2\omega^1 \omega^2} \left[2(\omega^1 + \omega^2) \left((\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. \omega^1 ((\omega^2)^4 - (\alpha_n^2)^2) + \omega^2 ((\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2) \right] e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x} \quad \text{en } z = 0\end{aligned}$$

Potentiel lié

Le potentiel lié correspondant est de pulsation $\omega^1 + \omega^2$; il est de la forme

$$\phi_2^{e+} = i \underline{A}_{mn}^{e+} F^+(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, z) e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x}$$

où la sommation sur les indices répétés s'entend comme une somme sur $m = 1$ à $+\infty$ et $n = 1$ à $+\infty$. Le terme de droite de la condition combinée pour le potentiel s'écrit alors

$$\begin{aligned}\underline{E\phi_2^{e+}} &= -(\omega^1 + \omega^2)^2 \phi_2^{e+} + \frac{\partial \phi_2^{e+}}{\partial z} \quad \text{en } z = 0 \\ &= i \underline{A}_{mn}^{e+} \left[-(\omega^1 + \omega^2)^2 + (\alpha_m^1 + \alpha_n^2) F^-(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, 0) \right] e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x}\end{aligned}$$

d'où

$$\underline{i A_{mn}^{e+}} \left[-(\omega^1 + \omega^2)^2 + (\alpha_m^1 + \alpha_n^2) F^-(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, 0) \right] = i \frac{a_m^1 a_n^2}{2\omega^1 \omega^2} \left[2(\omega^1 + \omega^2) \left((\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^2 \right) + \right. \\ \left. \omega^1 ((\omega^2)^4 - (\alpha_n^2)^2) + \omega^2 ((\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2) \right] \quad (2.1)$$

6. On utilise la note 4 pour le calcul de $|\vec{\nabla}\phi_1|^2$

On peut simplifier l'expression précédente en utilisant

$$F^-(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, 0) = \frac{\alpha_m^1 (\omega^2)^2 + \alpha_n^2 (\omega^1)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2}$$

On obtient alors

$$\underline{A}_{mn}^{e+} = (\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2) \frac{\underline{a}_m^1 \underline{a}_n^2}{2 \omega^1 \omega^2} \frac{2(\omega^1 + \omega^2) \left((\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^2 \right) + \omega^1 ((\omega^2)^4 - (\alpha_n^2)^2) + \omega^2 ((\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2)}{-(\omega^1 + \omega^2)^2 (\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2) + (\alpha_m^1 + \alpha_n^2) (\alpha_m^1 (\omega^2)^2 + \alpha_n^2 (\omega^1)^2)}$$

Condition de surface libre pour l'élévation

La condition de surface libre dynamique donnent les termes de forçage suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1^i}{\partial z} &= \frac{i(\omega^i)^2 \underline{a}_n^i}{\omega^i} e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_1^i}{\partial z \partial t} &= -(\omega^i)^2 \underline{a}_n^i e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\ \underline{\eta}_1^i &= \underline{a}_n^i e^{-i\alpha_n^i x} \\ -\underline{\eta}_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} &= -\frac{1}{2} \left[\underline{\eta}_1^1 \frac{\partial^2 \phi_1^2}{\partial z \partial t} + \underline{\eta}_1^2 \frac{\partial^2 \phi_1^1}{\partial z \partial t} \right] \\ &= \frac{\underline{a}_m^1 \underline{a}_n^2}{2} [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x} \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi_1|^2 &= \frac{\underline{a}_m^1 \underline{a}_n^2}{2 \omega^1 \omega^2} [(\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^2] e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x} \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{\partial \phi_2^{e+}}{\partial t} &= (\omega^1 + \omega^2) \underline{A}_{mn}^{e+} e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x} \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{\partial \phi_2^{e+}}{\partial t} - \underline{\eta}_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi_1|^2 &= \left[(\omega^1 + \omega^2) \underline{A}_{mn}^{e+} + \frac{\underline{a}_m^1 \underline{a}_n^2}{2} \left[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \omega^1 \omega^2 - \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^2}{\omega^1 \omega^2} \right] \right] e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x} \end{aligned}$$

Élévation de surface libre liée

L'élévation de surface libre liée s'écrit

$$\underline{\eta}_2^{e+} = \underline{a}_{mn}^{e+} e^{-i(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)x}$$

avec une amplitude

$$\underline{a}_{mn}^{e+} = (\omega^1 + \omega^2) \underline{A}_{mn}^{e+} + \frac{\underline{a}_m^1 \underline{a}_n^2}{2} \left[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \omega^1 \omega^2 - \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^2}{\omega^1 \omega^2} \right]$$

On retrouve une contribution due au potentiel liée et une part issue des termes de forçage. La partie potentiel lié ne s'annule pas en profondeur infinie.

2.2.2 Mode lié différence

Condition de surface libre pour le potentiel lié différence

Les termes différences⁷ dans la condition combinée pour le potentiel valent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1^i}{\partial x} &= \frac{\alpha_n^i a_n^i}{\omega^i} e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\
\frac{\partial \phi_1^i}{\partial z} &= \frac{i(\omega^i)^2 a_n^i}{\omega^i} e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\
|\vec{\nabla} \phi_1|^2 &= \frac{\partial \phi_1^1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1^2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1^1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1^2}{\partial z} = \frac{a_m^1 \overline{a_n^2}}{\omega^1 \omega^2} \left[\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} + (\omega^1 \omega^2)^2 \right] e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x} \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{\partial}{\partial t} |\vec{\nabla} \phi_1|^2 &= -i(\omega^1 - \omega^2) \frac{a_m^1 \overline{a_n^2}}{\omega^1 \omega^2} \left[\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} + (\omega^1 \omega^2)^2 \right] e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x} \quad \text{en } z = 0 \\
\frac{\partial E \phi_1^i}{\partial z} &= -\frac{i a_n^i}{\omega^i} \left[(\omega^i)^4 - (\alpha_n^i)^2 \right] e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\
\underline{\eta_1^i} &= \underline{a_n^i} e^{-i\alpha_n^i x} \\
-\eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E \phi_1 &= -\frac{1}{2} \left[\underline{\eta_1^1} \frac{\partial E \phi_1^2}{\partial z} + \overline{\eta_1^2} \frac{\partial E \phi_1^1}{\partial z} \right] \quad \text{en } z = 0 \\
&= \frac{i a_m^1 \overline{a_n^2}}{2} \left[-\frac{(\omega^2)^4 - (\overline{\alpha_n^2})^2}{\omega^2} + \frac{(\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2}{\omega^1} \right] e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x} \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{\partial}{\partial t} |\vec{\nabla} \phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E \phi_1 &= i \underline{a_m^1} \overline{a_n^2} \left[-\frac{\omega^1 - \omega^2}{\omega^1 \omega^2} \left(\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} + (\omega^1 \omega^2)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\omega^2)^4 - (\overline{\alpha_n^2})^2}{2\omega^2} + \frac{(\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2}{2\omega^1} \right] e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x} \quad \text{en } z = 0
\end{aligned}$$

Potentiel lié

Le potentiel lié correspondant est de pulsation $\omega^1 - \omega^2$ et de la forme

$$\underline{\phi_2^{e-}} = i \underline{A_{mn}^{e-}} F^+(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}, z) e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x}$$

La relation de dispersion fournit un nombre d'onde qui croît avec la pulsation, de sorte que $\alpha_0^1 - \overline{\alpha_0^2} = k^1 - k^2$ est du même signe que $\omega^1 - \omega^2$: l'onde liée se déplace dans le même sens que les ondes linéaires. On peut se demander ce qu'il advient lorsqu'un mode évanescent intervient. Pour une interaction évanescent-évanescent, on a simplement $-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x = -(|\alpha_m^1| + |\alpha_n^2|)x$ ce qui donne bien une exponentielle décroissante quelles que soient ω^1 et ω^2 . Dans le cas d'une interaction progressif-évanescent,

$$\begin{aligned}
E \underline{\phi_2^{e-}} &= -(\omega^1 - \omega^2)^2 \underline{\phi_2^{e-}} + \frac{\partial \phi_2^{e-}}{\partial z} \quad \text{en } z = 0 \\
&= i \underline{A_{mn}^{e-}} \left[-(\omega^1 - \omega^2)^2 + (\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}) F^-(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}, 0) \right] e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x}
\end{aligned}$$

d'où⁸

$$i \underline{A_{mn}^{e-}} \left[-(\omega^1 - \omega^2)^2 + (\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}) F^-(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}, 0) \right] = i \underline{a_m^1} \overline{a_n^2} \left[-\frac{\omega^1 - \omega^2}{\omega^1 \omega^2} \left(\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} + (\omega^1 \omega^2)^2 \right) \right. \\
\left. - \frac{(\omega^2)^4 - (\overline{\alpha_n^2})^2}{2\omega^2} + \frac{(\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2}{2\omega^1} \right] \quad (2.2)$$

7. On utilise la note 5 pour le calcul de $|\vec{\nabla} \phi_1|^2$

8. On utilise la simplification $(\overline{\alpha_n^2})^2 = (\alpha_n^2)^2$.

Condition de surface libre pour l'élévation

La condition de surface libre dynamique donnent les termes de forçage suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1^i}{\partial z} &= \frac{i(\omega^i)^2 \underline{a}_n^i}{\omega^i} e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\
\frac{\partial^2 \phi_1^i}{\partial z \partial t} &= -(\omega^i)^2 \underline{a}_n^i e^{-i\alpha_n^i x} \quad \text{en } z = 0 \\
\underline{\eta}_1^i &= \underline{a}_n^i e^{-i\alpha_n^i x} \\
-\underline{\eta}_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} &= -\frac{1}{2} \left[\underline{\eta}_1^1 \frac{\partial^2 \phi_1^2}{\partial z \partial t} + \underline{\eta}_1^2 \frac{\partial^2 \phi_1^1}{\partial z \partial t} \right] \\
&= \frac{a_m^1 \overline{a_n^2}}{2} [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x} \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi_1|^2 &= -\frac{a_m^1 \overline{a_n^2}}{2\omega^1 \omega^2} [\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} + (\omega^1 \omega^2)^2] e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x} \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{\partial \phi_2^{e-}}{\partial t} &= (\omega^1 - \omega^2) \underline{A}_{mn}^{e-} e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x} \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{\partial \phi_2^{e-}}{\partial t} - \underline{\eta}_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi_1|^2 &= \left[(\omega^1 - \omega^2) \underline{A}_{mn}^{e-} + \frac{a_m^1 \overline{a_n^2}}{2} \left[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 - \frac{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2}}{\omega^1 \omega^2} - \omega^1 \omega^2 \right] \right] e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x}
\end{aligned}$$

Élévation de surface libre liée

L'élévation de surface libre liée s'écrit

$$\underline{\eta}_2^{e-} = \underline{a}_{mn}^{e-} e^{-i(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})x}$$

avec pour amplitude

$$\underline{a}_{mn}^{e-} = (\omega^1 - \omega^2) \underline{A}_{mn}^{e-} + \frac{a_m^1 \overline{a_n^2}}{2} \left[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 - \omega^1 \omega^2 - \frac{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2}}{\omega^1 \omega^2} \right]$$

Lorsque $\omega_2 \rightarrow \omega_1$, on a

$$\underline{a}_{mn}^{e-} = \frac{a_m^1 \overline{a_n^1}}{2} \left[(\omega^1)^2 - \frac{|\alpha_m^1|^2}{\omega^1 \omega^2} \right]$$

Il s'agit de la modification de niveau moyen en houle mono-chromatique du second ordre. On s'affranchit en général de cette variation en modifiant le potentiel (défini par construction à une fonction du temps seul).

2.2.3 Notation généralisée des modes liés

On rassemble les modes somme et différence de fréquence $\omega^1 \pm \omega^2$ sous une seule notation

$$\underline{\phi}_2^{e\pm} = i \underline{A}_{mn}^{e\pm} F^{\pm}(\alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm}, z) e^{-i(\alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm})x}$$

avec $f^+ = f$ pour les modes somme, et $f^- = \bar{f}$ pour les modes différence. L'amplitude s'écrit

$$\begin{aligned}
\underline{A}_{mn}^{e\pm} [-(\omega^1 \pm \omega^2)^2 + (\alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm}) F^{\pm}(\alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm}, 0)] &= \underline{a}_m^1 \underline{a}_n^{2\pm} \left[\frac{\omega^1 \pm \omega^2}{\omega^1 \omega^2} \left(\pm (\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2}{2\omega^1} \pm \frac{(\omega^2)^4 - (\alpha_n^2)^2}{2\omega^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\underline{\eta}_2^{e\pm} = \underline{a}_{mn}^{e\pm} e^{-i(\alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm})x}$$

avec

$$\begin{aligned}
\underline{a}_{mn}^{e\pm} &= (\omega^1 \pm \omega^2) \underline{A}_{mn}^{e\pm} + \frac{a_m^1 \overline{a_n^{2\pm}}}{2} \left[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 \pm \omega^1 \omega^2 - \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm}}{\omega^1 \omega^2} \right] \\
&= (\omega^1 \pm \omega^2) \underline{A}_{mn}^{e\pm} + \frac{a_m^1 \overline{a_n^{2\pm}}}{2} \left[(\omega^1 \pm \omega^2)^2 \mp \omega^1 \omega^2 - \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm}}{\omega^1 \omega^2} \right]
\end{aligned}$$

avec, dans l'expression pour $\underline{A}_{mn}^{e\pm}$ précédente

$$F^{\pm}(\alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm}, 0) = \frac{\alpha_m^1 (\omega^2)^2 \pm \alpha_n^2 (\omega^1)^2}{(\omega^1 \omega^2)^2 \pm \alpha_m^1 \alpha_n^2} \quad (2.3)$$

2.2.4 Potentiel libre somme

Condition sur le batteur

La condition sur le batteur 1.23 fait intervenir les termes de forçage suivants :

$$\frac{\partial \phi_2^l}{\partial x} = \frac{\partial X_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \quad \text{en } x = 0 \quad (2.4)$$

En mode somme, on aura donc

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi_2^{e+}}{\partial x} &= -(\alpha_m^1 + \alpha_n^2) \underline{A_{mn}^{e+}} F^+(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, z) \quad \text{en } x = 0 \\ \frac{\partial X_1^i}{\partial z} &= -\frac{i(\alpha_n^i)^2 \underline{a_n^i}}{(\omega^i)^2} F^-(\alpha_n^i, z) \\ \frac{\partial \phi_1^i}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n^i \underline{a_n^i}}{\omega^i} F^-(\alpha_n^i, z) \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial X_1^1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1^2}{\partial z} + \frac{\partial X_1^2}{\partial z} \frac{\partial \phi_1^1}{\partial z} \right] \\ &= \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^2 \underline{a_m^1} \underline{a_n^2}}{2\omega^1 \omega^2} \left[\frac{\alpha_m^1}{\omega^1} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^2} \right] F^-(\alpha_m^1, z) F^-(\alpha_n^2, z) \\ \underline{X_1^i} &= -\frac{i\alpha_n^i \underline{a_n^i}}{(\omega^i)^2} F^+(\alpha_n^i, z) \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= -\frac{i(\alpha_n^i)^2 \underline{a_n^i}}{\omega^i} F^+(\alpha_n^i, z) \\ -X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2} \left[\underline{X_1^1} \frac{\partial^2 \phi_1^2}{\partial x^2} + \underline{X_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1^1}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^2 \underline{a_m^1} \underline{a_n^2}}{2\omega^1 \omega^2} \left[\frac{\alpha_n^2}{\omega^1} + \frac{\alpha_m^1}{\omega^2} \right] F^+(\alpha_m^1, z) F^+(\alpha_n^2, z) \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^2 \underline{a_m^1} \underline{a_n^2}}{2\omega^1 \omega^2} \left[\left(\frac{\alpha_m^1}{\omega^1} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^2} \right) F^-(\alpha_m^1, z) F^-(\alpha_n^2, z) + \left(\frac{\alpha_n^2}{\omega^1} + \frac{\alpha_m^1}{\omega^2} \right) F^+(\alpha_m^1, z) F^+(\alpha_n^2, z) \right] \end{aligned}$$

Simplifications

D'après les équations (2.6) et (2.7), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^2 \underline{a_m^1} \underline{a_n^2}}{4\omega^1 \omega^2} F^+(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, z) \left(1 + \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2} \right) \left[\frac{\alpha_m^1}{\omega^1} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^2} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^1} + \frac{\alpha_m^1}{\omega^2} \right] \\ &+ \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^2 \underline{a_m^1} \underline{a_n^2}}{4\omega^1 \omega^2} F^+(\alpha_m^1 - \alpha_n^2, z) \left(1 - \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2} \right) \left[-\left(\frac{\alpha_m^1}{\omega^1} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^2} \right) + \frac{\alpha_n^2}{\omega^1} + \frac{\alpha_m^1}{\omega^2} \right] \\ &= (\alpha_m^1 + \alpha_n^2) (\omega^1 + \omega^2) \frac{\underline{a_m^1} \underline{a_n^2}}{4(\omega^1 \omega^2)^2} F^+(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, z) (\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2) \\ &+ (\alpha_m^1 - \alpha_n^2) (\omega^1 - \omega^2) \frac{\underline{a_m^1} \underline{a_n^2}}{4(\omega^1 \omega^2)^2} F^+(\alpha_m^1 - \alpha_n^2, z) (\alpha_m^1 \alpha_n^2 - (\omega^1 \omega^2)^2) \end{aligned}$$

Potentiel libre

Le potentiel libre de fréquence $\omega^1 + \omega^2$ s'écrit

$$\underline{\phi_2^{l+}} = i \underline{A_n^{l+}} F^+(\beta_n^+, z) e^{-i\beta_n^+ x}$$

Le nombre d'onde progressif β_0^+ vérifie la relation de dispersion $(\omega^1 + \omega^2)^2 = \beta_0^+ F^-(\beta_0^+, 0)$. L'amplitude $\underline{A_m^{l+}}$ s'obtient par projection des termes de forçage précédents sur les fonctions verticales $\{F^+(\beta_n^+, z)\}$ orthogonales. On a

$$\frac{\partial \phi_2^{l+}}{\partial x} = \beta_n^+ \underline{A_n^{l+}} F^+(\beta_n^+, z) e^{-i\beta_n^+ x}$$

Le terme progressif vaut ainsi

$$\beta_0^+ \underline{A_0^{l+}} \int_{-1}^0 F^+(\beta_0^+, z)^2 dz = \int_{-1}^0 \left(-\frac{\partial \phi_2^{e+}}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) F^+(\beta_0^+, z) dz$$

On doit évaluer des intégrales du type

$$M_{\beta, \alpha} = \int_{-1}^0 F^+(\beta, z) F^+(\alpha, z) dz = \frac{\beta F^-(\beta, 0) - \alpha F^-(\alpha, 0)}{\beta^2 - \alpha^2} \quad \text{pour } \alpha \neq \beta$$

Avant de continuer les calculs, on écrit de manière simplifiée

$$-\frac{\partial \phi_2^{e+}}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = [(\alpha_m^1 + \alpha_n^2) (G_{mn}^{12+} + K_{mn}^{12+}) F^+(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, z) + (\alpha_m^1 - \alpha_n^2) H_{mn}^{12+} F^+(\alpha_m^1 - \alpha_n^2, z)] \underline{a_m^1} \underline{a_n^2}$$

où

$$\begin{aligned} G_{mn}^{12+} &= \frac{\omega^1 + \omega^2}{4(\omega^1 \omega^2)^2} (\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2) \\ H_{mn}^{12+} &= \frac{\omega^1 - \omega^2}{4(\omega^1 \omega^2)^2} (\alpha_m^1 \alpha_n^2 - (\omega^1 \omega^2)^2) \\ K_{mn}^{12+} &= -\frac{A_{mn}^{e+}}{\underline{a_m^1} \underline{a_n^2}} \end{aligned}$$

L'amplitude libre à la fréquence somme $\omega^1 + \omega^2$ vérifie

$$\beta_0^+ \underline{A_0^{l+}} M_{\beta_0, \beta_0} = \left[(\alpha_m^1 + \alpha_n^2) (G_{mn}^{12+} + K_{mn}^{12+}) M_{\beta_0^+, \alpha_m^1 + \alpha_n^2} + (\alpha_m^1 - \alpha_n^2) H_{mn}^{12+} M_{\beta_0^+, \alpha_m^1 - \alpha_n^2} \right] \underline{a_m^1} \underline{a_n^2}$$

avec

$$M_{\beta_0^+, \alpha_m^1 \pm \alpha_n^2} = \frac{(\omega^1 + \omega^2)^2 - (\alpha_m^1 \pm \alpha_n^2) F^-(\alpha_m^1 \pm \alpha_n^2, 0)}{(\beta_0^+)^2 - (\alpha_m^1 \pm \alpha_n^2)^2}$$

Sachant que

$$\frac{A_{mn}^{e+}}{\underline{a_m^1} \underline{a_n^2}} = \frac{1}{2\omega^1 \omega^2} \frac{L_{mn}^{12+}}{-(\omega^1 + \omega^2)^2 + (\alpha_m^1 + \alpha_n^2) F^-(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, 0)}$$

avec

$$L_{mn}^{12+} = 2(\omega^1 + \omega^2) ((\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^2) + \omega^1 ((\omega^2)^4 - (\alpha_n^2)^2) + \omega^2 ((\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2)$$

on peut simplifier la notation et écrire

$$\begin{aligned} G_{mn}^{12+} M_{\beta_0^+, \alpha_m^1 + \alpha_n^2} &= \frac{\omega^1 + \omega^2}{4(\omega^1 \omega^2)^2} \frac{(\omega^1 + \omega^2)^2 (\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2) - (\alpha_m^1 + \alpha_n^2) (\alpha_m^1 (\omega^2)^2 + \alpha_n^2 (\omega^1)^2)}{(\beta_0^+)^2 - (\alpha_m^1 + \alpha_n^2)^2} \\ K_{mn}^{12+} M_{\beta_0^+, \alpha_m^1 + \alpha_n^2} &= \frac{1}{2\omega^1 \omega^2} \frac{L_{mn}^{12+}}{(\beta_0^+)^2 - (\alpha_m^1 + \alpha_n^2)^2} \end{aligned}$$

Élévation de surface libre

L'élévation de surface libre correspondante s'écrit

$$\underline{\eta_2^{l+}} = \underline{a_n^{l+}} e^{-i\beta_n^+ x}$$

Son amplitude est obtenue avec la condition homogène de surface libre. Le mode progressif donne :

$$\underline{a_0^{l+}} = (\omega_1 + \omega_2) \underline{A_0^{l+}}$$

2.2.5 Potentiel libre différence

Condition sur le batteur

La condition sur le batteur 1.23 fait intervenir les termes de forçage suivants :

$$\frac{\partial \phi_2^l}{\partial x} = \frac{\partial X_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \quad \text{en } x = 0 \quad (2.5)$$

En mode différence, on aura donc

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \phi_2^{e-}}{\partial x} &= -(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}) \underline{A_{mn}^{e-}} F^+(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}, z) \quad \text{en } x = 0 \\
\frac{\partial X_1^i}{\partial z} &= -\frac{i(\alpha_n^i)^2 \underline{a_n^i}}{(\omega^i)^2} F^-(\alpha_n^i, z) \\
\frac{\partial \phi_1^i}{\partial z} &= \frac{i\alpha_n^i \underline{a_n^i}}{\omega^i} F^-(\alpha_n^i, z) \\
\frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial X_1^1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1^2}{\partial z} + \frac{\partial X_1^2}{\partial z} \frac{\partial \phi_1^1}{\partial z} \right] \\
&= -\frac{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} \underline{a_m^1} \overline{a_n^2}}{2\omega^1 \omega^2} \left[\frac{\alpha_m^1}{\omega^1} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^2} \right] F^-(\alpha_m^1, z) \overline{F^-(\alpha_n^2, z)} \\
\underline{X_1^i} &= -\frac{i\alpha_n^i \underline{a_n^i}}{(\omega^i)^2} F^+(\alpha_n^i, z) \\
\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= -\frac{i(\alpha_n^i)^2 \underline{a_n^i}}{\omega^i} F^+(\alpha_n^i, z) \\
-X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2} \left[\underline{X_1^1} \frac{\partial^2 \phi_1^2}{\partial x^2} + \underline{X_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1^1}{\partial x^2} \right] \\
&= -\frac{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} \underline{a_m^1} \overline{a_n^2}}{2\omega^1 \omega^2} \left[\frac{\alpha_n^2}{\omega^1} + \frac{\alpha_m^1}{\omega^2} \right] F^+(\alpha_m^1, z) \overline{F^+(\alpha_n^2, z)} \\
\frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= -\frac{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} \underline{a_m^1} \overline{a_n^2}}{2\omega^1 \omega^2} \left[\left(\frac{\alpha_m^1}{\omega^1} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^2} \right) F^-(\alpha_m^1, z) \overline{F^-(\alpha_n^2, z)} + \left(\frac{\alpha_n^2}{\omega^1} + \frac{\alpha_m^1}{\omega^2} \right) F^+(\alpha_m^1, z) \overline{F^+(\alpha_n^2, z)} \right]
\end{aligned}$$

Simplifications

Que α soit réel ou imaginaire pur, on a $\overline{F^\pm(\alpha, z)} = F^\pm(\overline{\alpha}, z)$. D'après les équations (2.6) et (2.7), il vient alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= -\frac{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} \underline{a_m^1} \overline{a_n^2}}{4\omega^1 \omega^2} F^+(\alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2}, z) \left(1 + \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2}} \right) \left[\frac{\alpha_m^1}{\omega^1} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^2} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^1} + \frac{\alpha_m^1}{\omega^2} \right] \\
&\quad - \frac{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} \underline{a_m^1} \overline{a_n^2}}{4\omega^1 \omega^2} F^+(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}, z) \left(1 - \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2}} \right) \left[-\left(\frac{\alpha_m^1}{\omega^1} + \frac{\alpha_n^2}{\omega^2} \right) + \frac{\alpha_n^2}{\omega^1} + \frac{\alpha_m^1}{\omega^2} \right] \\
&= -(\alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2}) (\omega^1 + \omega^2) \frac{\underline{a_m^1} \overline{a_n^2}}{4(\omega^1 \omega^2)^2} F^+(\alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2}, z) \left(\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} + (\omega^1 \omega^2)^2 \right) \\
&\quad - (\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}) (\omega^1 - \omega^2) \frac{\underline{a_m^1} \overline{a_n^2}}{4(\omega^1 \omega^2)^2} F^+(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}, z) \left(\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} - (\omega^1 \omega^2)^2 \right)
\end{aligned}$$

Potentiel libre

Les termes de forçage différence ont été calculé avec une dépendance temporelle en $\exp i(\omega_1 - \omega_2)t$ en notation complexe : l'onde libre différence aura pour pulsation $|\omega^1 - \omega^2|$. On doit s'assurer que l'onde libre se propage bien dans la direction des x croissants, *i.e.* avec une phase de la forme $\Omega t - Kx$ avec $\Omega > 0$ et $K > 0$. Pour cela, on choisit d'écrire le potentiel libre sous la forme

$$\phi_2^{l-}(x, z, t) = \operatorname{Re} \left[i \underline{A_n^{l-}} F^+(\beta_n^-, z) e^{i(|\omega^1 - \omega^2|t - \beta_n^- x)} \right]$$

soit, en notation complexe, un potentiel libre de fréquence $|\omega^1 - \omega^2|$ s'écrit

$$\underline{\phi_2^{l-}}(x, z) = i \underline{A_n^{l-}} F^+(\beta_n^-, z) e^{-i\beta_n^- x}$$

Le nombre d'onde progressif β_0^- vérifie la relation de dispersion $(\omega^1 - \omega^2)^2 = \beta_0^- F^-(\beta_0^-, 0)$. L'amplitude $\underline{A_n^{l-}}$ s'obtient par projection des termes de forçage précédents sur les fonctions verticales $\{F^+(\beta_n^-, z)\}_{n \in \dots}$ orthogonales. On a

$$\frac{\partial \phi_2^{l-}}{\partial x} = \beta_n^- \underline{A_n^{l-}} F^+(\beta_n^-, z) e^{-i\beta_n^- x}$$

Les termes de forçage ont été calculé avec une pulsation $\omega_1 - \omega_2$; on doit donc tenir compte du cas $\omega_1 - \omega_2 < 0$ puisque la pulsation de l'onde libre est alors $|\omega_1 - \omega_2| = -(\omega_1 - \omega_2)$. Il faut dans ce cas conjuguer les termes de forçage pour être cohérent avec la phase. Le terme progressif vaut ainsi

$$\beta_0^- \underline{A_0^{l-}} \int_{-1}^0 F^+(\beta_0^-, z)^2 dz = \int_{-1}^0 \left(-\frac{\partial \phi_2^{e-}}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right)^* F^+(\beta_0^-, z) dz$$

où $\underline{Y}^* = \underline{Y}$ si $\omega_1 > \omega_2$ et \overline{Y} sinon. Avant de continuer les calculs, on écrit de manière simplifiée

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi_2^{e-}}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= \left[(\alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2}) G_{mn}^{12-} F^+(\alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2}, z) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}) (H_{mn}^{12-} + K_{mn}^{12-}) F^+(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}, z) \right] \underline{a_m^1} \underline{a_n^2} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} G_{mn}^{12-} &= -\frac{\omega^1 + \omega^2}{4(\omega^1 \omega^2)^2} \left(\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} + (\omega^1 \omega^2)^2 \right) \\ H_{mn}^{12-} &= \frac{\omega^1 - \omega^2}{4(\omega^1 \omega^2)^2} \left((\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} \right) \\ K_{mn}^{12-} &= -\frac{\underline{A_{mn}^{e-}}}{\underline{a_n^1} \underline{a_n^2}} \end{aligned}$$

On peut remarquer que, comme le nombre d'onde β_0^- est réel, on a $\overline{F^+(\beta_0^-, z)} = F^+(\beta_0^-, z) = F^+(\beta_0^-, z)$. L'amplitude libre à la fréquence différence $\omega^1 - \omega^2$ vérifie alors

$$\beta_0^- \underline{A_0^{l-}} M_{\beta_0^-, \beta_0} = \left[(\alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2}) G_{mn}^{12-} M_{\beta_0^-, \alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2}} + (\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}) (H_{mn}^{12-} + K_{mn}^{12-}) M_{\beta_0^-, \alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}} \right]^* \left(\underline{a_m^1} \underline{a_n^2} \right)^*$$

On a

$$M_{\beta_0^-, \alpha_m^1 \pm \overline{\alpha_n^2}} = \frac{(\omega^1 - \omega^2)^2 - (\alpha_m^1 \pm \overline{\alpha_n^2}) F^-(\alpha_m^1 \pm \overline{\alpha_n^2}, 0)}{(\beta_0^-)^2 - (\alpha_m^1 \pm \overline{\alpha_n^2})^2}$$

En utilisant l'équation (2.3) et sachant que

$$\frac{\underline{A_{mn}^{e-}}}{\underline{a_m^1} \underline{a_n^2}} = \frac{1}{2\omega^1 \omega^2} \frac{L_{mn}^{12-}}{-(\omega^1 - \omega^2)^2 + (\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}) F^-(\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}, 0)}$$

avec

$$L_{mn}^{12-} = -2(\omega^1 - \omega^2) \left((\omega^1 \omega^2)^2 + \alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} \right) - \omega^1 \left((\omega^2)^4 - (\overline{\alpha_n^2})^2 \right) + \omega^2 \left((\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2 \right)$$

on peut simplifier la notation et écrire

$$\begin{aligned} G_{mn}^{12-} M_{\beta_0^-, \alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2}} &= -\frac{\omega^1 + \omega^2}{4(\omega^1 \omega^2)^2} \frac{(\omega^1 - \omega^2)^2 \left(\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2} + (\omega^1 \omega^2)^2 \right) - (\alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2}) \left(\alpha_m^1 (\omega^2)^2 + \overline{\alpha_n^2} (\omega^1)^2 \right)}{(\beta_0^-)^2 - (\alpha_m^1 + \overline{\alpha_n^2})^2} \\ K_{mn}^{12-} M_{\beta_0^-, \alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2}} &= \frac{1}{2\omega^1 \omega^2} \frac{L_{mn}^{12-}}{(\beta_0^-)^2 - (\alpha_m^1 - \overline{\alpha_n^2})^2} \end{aligned}$$

Élévation de surface libre

De même que pour le potentiel, l'élévation de surface libre correspondante oscillera à la pulsation $|\omega^1 - \omega^2|$. En notation complexe, elle s'écrit

$$\underline{\eta_2^{l-}} = \underline{a_n^{l-}} e^{-i\beta_n^- x}$$

Son amplitude est obtenue avec la condition homogène de surface libre. Le mode progressif donne :

$$\underline{a_0^{l-}} = |\omega_1 - \omega_2| \underline{A_0^{l-}}$$

2.2.6 Notation généralisée des modes libres

On rassemble les modes somme et différence de fréquence $\omega^1 \pm \omega^2$ sous une seule notation.

Potentiel

$$\phi_2^{l\pm}(x, z, t) = \operatorname{Re} \left[\underline{iA_n^{l\pm}} F^+(\beta_n^\pm, z) e^{i(\omega^1 \pm \omega^2 |t - \beta_n^\pm x|)} \right]$$

soit

$$\underline{\phi_2^{l\pm}}(x, z) = \underline{iA_n^{l\pm}} F^+(\beta_n^\pm, z) e^{-i\beta_n^\pm x}$$

avec la relation de dispersion $(\omega^1 \pm \omega^2)^2 = \beta_0^\pm F^-(\beta_0^\pm, 0)$. L'amplitude de l'onde progressive vérifie

$$\begin{aligned} \beta_0^\pm \underline{A_0^{l\pm}} M_{\beta_0^\pm, \beta_0^\pm} &= \left[(\alpha_m^1 + \alpha_n^{2\pm}) \left(G_{mn}^{12\pm} + \frac{1 \pm 1}{2} K_{mn}^{12\pm} \right) M_{\beta_0^\pm, \alpha_m^1 + \alpha_n^{2\pm}} \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_m^1 - \alpha_n^{2\pm}) \left(H_{mn}^{12\pm} + \frac{1 \mp 1}{2} K_{mn}^{12\pm} \right) M_{\beta_0^\pm, \alpha_m^1 - \alpha_n^{2\pm}} \right]^* \left(\underline{a_m^1 a_n^{2\pm}} \right)^* \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} G_{mn}^{12\pm} M_{\beta_0^\pm, \alpha_m^1 + \alpha_n^{2\pm}} &= \pm \frac{\omega^1 + \omega^2}{4(\omega^1 \omega^2)^2} \frac{(\omega^1 \pm \omega^2)^2 (\alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm} + (\omega^1 \omega^2)^2) - (\alpha_m^1 + \alpha_n^{2\pm}) (\alpha_m^1 (\omega^2)^2 + \alpha_n^{2\pm} (\omega^1)^2)}{(\beta_0^\pm)^2 - (\alpha_m^1 + \alpha_n^{2\pm})^2} \\ H_{mn}^{12\pm} M_{\beta_0^\pm, \alpha_m^1 - \alpha_n^{2\pm}} &= \mp \frac{\omega^1 - \omega^2}{4(\omega^1 \omega^2)^2} \frac{(\omega^1 \pm \omega^2)^2 ((\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm}) - (\alpha_m^1 - \alpha_n^{2\pm}) (\alpha_m^1 (\omega^2)^2 - \alpha_n^{2\pm} (\omega^1)^2)}{(\beta_0^\pm)^2 - (\alpha_m^1 - \alpha_n^{2\pm})^2} \\ K_{mn}^{12\pm} M_{\beta_0^\pm, \alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm}} &= \frac{1}{2\omega^1 \omega^2} \frac{L_{mn}^{12\pm}}{(\beta_0^\pm)^2 - (\alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm})^2} \end{aligned}$$

où

$$L_{mn}^{12\pm} = \pm 2(\omega^1 \pm \omega^2) ((\omega^1 \omega^2)^2 \mp \alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm}) \pm \omega^1 ((\omega^2)^4 - (\alpha_n^{2\pm})^2) + \omega^2 ((\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2)$$

Élévation de surface libre

$$\underline{\eta_2^{l\pm}} = \underline{a_n^{l\pm}} e^{-i\beta_n^\pm x}$$

Son amplitude est obtenue avec la condition homogène de surface libre. Le mode progressif donne :

$$\underline{a_0^{l\pm}} = |\omega^1 \pm \omega^2| \underline{A_0^{l\pm}}$$

2.3 Comparaison avec Schäffer

Schäffer a présenté une étude analytique en houle droite irrégulière au second ordre pour un mouvement batteur à un degré de liberté. Cette solution est complète (prise en compte des interactions progressif-évanescent et évanescent-évanescent, modes somme et différence (sous-harmonique et super-harmonique)). L'inconvénient de la théorie présentée est qu'elle est écrite directement pour le batteur à un degré de liberté par l'intermédiaire d'intégrale et de ce fait difficilement applicable à une autre géométrie comme le bi-flap du B600.

Le terme de forçage pour le potentiel lié s'écrit

$$R^{(21)} = \delta_{nm} H_{jnlm}^\pm iX_n X_m^{-:*} c_{jn} c_{lm}^{-:*} e^{i(\theta_{jn} \pm \theta_{lm}^{-:*})}$$

avec

$$H_{jnlm}^\pm = (\omega_n \pm \omega_m) \left(\pm \omega_n \omega_m - \frac{g^2 k_{jn} k_{lm}^{-:*}}{\omega_n \omega_m} \right) + \frac{\omega_n^3 \pm \omega_m^3}{2} - \frac{g^2}{2} \left(\frac{k_{jn}^2}{\omega_n} \pm \frac{k_{lm}^2}{\omega_m} \right)$$

Le lien avec mes notations se fait notamment en remplaçant les indices n et m de Schäffer par des exposants 1 et 2, et les indices restants j et l par m et n . On a exactement $k_{jn} = \alpha_m^1$. De plus, les quantités $X_n c_{jn}$ sont égales à l'amplitude de la composante, soit $\underline{a_m^1}$ avec mes notations. La notation en exposant $- : *$ correspond à ma notation \pm . D'où finalement

$$H_{m1n2}^\pm = (\omega^1 \pm \omega^2) \left(\pm \omega^1 \omega^2 - \frac{\alpha_m^1 \overline{\alpha_n^2}}{\omega^1 \omega^2} \right) + \frac{(\omega^1)^3 \pm (\omega^2)^3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{(\alpha_m^1)^2}{\omega^1} \pm \frac{(\alpha_n^2)^2}{\omega^2} \right)$$

à comparer avec la solution que j'obtiens :

$$R^{(21)} = \underline{i a_m^1 a_n^{2\pm}} \left[\frac{\omega^1 \pm \omega^2}{\omega^1 \omega^2} \left(\pm (\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm} \right) \pm \frac{(\omega^2)^4 - (\alpha_n^2)^2}{2\omega^2} + \frac{(\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2}{2\omega^1} \right]$$

On obtient bien la même chose.

Passons à l'élévation de surface libre (on pourra comparer à la solution de Dean). Le terme de forçage s'écrit

$$\begin{aligned}
P^{(21)} &= \delta_{nm} L_{jnlm}^{\pm} X_n X_m^{-:*} c_{jn} c_{lm}^{-:*} e^{i(\theta_{jn} \pm \theta_{lm}^{-:*})} \\
L_{jnlm}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^2 k_{jn} k_{lm}^{-:*}}{\omega_n \omega_m} \mp \omega_n \omega_m - (\omega_n^2 + \omega_m^2) \right\} \\
\eta_{jnlm}^{(21)\pm} &= G_{jnlm}^{\pm} X_n X_m^{-:*} c_{jn} c_{lm}^{-:*} e^{i(\theta_{jn} \pm \theta_{lm}^{-:*})} \\
G_{jnlm}^{\pm} &= \frac{\delta_{nm}}{g} \left\{ (\omega_n \pm \omega_m) \frac{H_{jnlm}^{\pm}}{D_{jnlm}^{\pm}} - L_{jnlm}^{\pm} \right\} \\
D_{jnlm}^{\pm} &= g(k_{jn} \pm k_{lm}^{-:*}) \tanh(k_{jn} \pm k_{lm}^{-:*}) h - (\omega_n \pm \omega_m)^2
\end{aligned}$$

En passant à mes notations :

$$\begin{aligned}
P^{(21)} &= \delta_{nm} L_{m1n2}^{\pm} X_n X_m^{-:*} c_{jn} c_{lm}^{-:*} e^{i(\theta_{jn} \pm \theta_{lm}^{-:*})} \\
L_{m1n2}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm}}{\omega^1 \omega^2} \mp \omega^1 \omega^2 - ((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \right\}
\end{aligned}$$

à comparer à ma version :

$$P^{(21)} = \frac{a_m^1 a_n^{2\pm}}{2} \left[(\omega^1 \pm \omega^2)^2 \mp \omega^1 \omega^2 - \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm}}{\omega^1 \omega^2} \right]$$

Il y a une différence de signe qui vient d'une erreur dans sa condition aux limites sur la surface libre (1d) : il écrit $\eta = (\phi_t + P)/g$ en page 49 (ce qui est faux) et utilise ensuite $\eta = -(\phi_t + P)/g$ pour calculer $\eta^{(12)}$ en page 57 (ce qui est correct). Pour l'élévation maintenant

$$\begin{aligned}
\eta_{m1n2}^{(21)\pm} &= G_{jnlm}^{\pm} X_n X_m^{-:*} c_{jn} c_{lm}^{-:*} e^{i(\theta_{jn} \pm \theta_{lm}^{-:*})} \\
G_{m1n2}^{\pm} &= \frac{\delta_{12}}{g} \left\{ (\omega^1 \pm \omega^2) \frac{H_{jnlm}^{\pm}}{D_{jnlm}^{\pm}} - L_{jnlm}^{\pm} \right\} \\
L_{m1n2}^{\pm} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm}}{\omega^1 \omega^2} \mp \omega^1 \omega^2 - ((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \right\} \\
D_{m1n2}^{\pm} &= (\alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm}) F^-(\alpha_m^1 \pm \alpha_n^{2\pm}, 0) - (\omega^1 \pm \omega^2)^2
\end{aligned}$$

à comparer à ma version :

$$\eta_{m1n2}^{(21)\pm} = \frac{A_{mn}^{e\pm}}{2} + \frac{a_m^1 a_n^{2\pm}}{2} \left[(\omega^1 \pm \omega^2)^2 \mp \omega^1 \omega^2 - \frac{\alpha_m^1 \alpha_n^{2\pm}}{\omega^1 \omega^2} \right]$$

C'est correct.

Passons alors aux termes de forçage pour le potentiel libre : les termes $Q^{(22)}$ ne sont malheureusement pas donnés. Schäffer donne directement plutôt l'élévation libre

$$\begin{aligned}
\eta_p^{(22)\pm} &= \frac{A_n A_m^{-:*}}{h} c_0^{(22)\pm} e^{i((\omega_n \pm \omega_m)t - K_0^{\pm} x)} \\
c_0^{(22)\pm} &= \delta_{nm} \frac{h(\omega_n \pm \omega_m) \cosh K_0^{\pm} h}{g c_{0n} c_{0m} \Lambda(K_0^{\pm})} \left\{ \pm \frac{g}{2\omega_n} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_{jn} k_{jn}}{\cosh k_{jn} h} \Gamma_4(k_{jn}, K_0^{\pm}) + \widehat{lmjn}^{-:*} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} c_{jn} c_{lm}^{-:*} \frac{k_{jn} \pm k_{lm}^{-:*}}{\cosh(k_{jn} \pm k_{lm}^{-:*}) h} \frac{H_{jnlm}^{\pm}}{D_{jnlm}^{\pm}} \Gamma_1(k_{jn} + k_{lm}^{-:*}, K_0^{\pm}) \right\}
\end{aligned}$$

On peut vérifier que $K_0^{\pm} = \beta_0^{\pm}$. On pourra ensuite comparer l'expression de \mathcal{F}^{\pm} avec la quantité $-iT F(\beta_0^{\pm}) a_0^{\pm}$.

Annexes 2D Bichromatique

On part de

$$F^-(\alpha_m^1, z) F^-(\alpha_n^2, z) = F^+(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, z) \frac{e^{\alpha_m^1 + \alpha_n^2} + e^{-(\alpha_m^1 + \alpha_n^2)}}{(e^{\alpha_m^1} + e^{-\alpha_m^1})(e^{\alpha_n^2} + e^{-\alpha_n^2})} - F^+(\alpha_m^1 - \alpha_n^2, z) \frac{e^{\alpha_m^1 - \alpha_n^2} + e^{-(\alpha_m^1 - \alpha_n^2)}}{(e^{\alpha_m^1} + e^{-\alpha_m^1})(e^{\alpha_n^2} + e^{-\alpha_n^2})}$$

On a montré dans l'annexe 1.6 que

$$F^+(\alpha, z) F^+(\delta, z) + F^-(\alpha, z) F^-(\delta, z) = 2 \frac{e^{(\alpha+\delta)Z} + e^{-(\alpha+\delta)Z}}{(e^\alpha + e^{-\alpha})(e^\delta + e^{-\delta})}$$

qu'on utilise en $z = 0$, avec $\alpha = \alpha_m^1$ et $\delta = \alpha_n^2$. On a aussi

$$F^+(\alpha_m^1, 0) F^+(\alpha_n^2, 0) + F^-(\alpha_m^1, 0) F^-(\alpha_n^2, 0) = 1 + \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2}$$

On obtient alors

$$F^-(\alpha_m^1, z) F^-(\alpha_n^2, z) = \frac{1}{2} F^+(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, z) \left[1 + \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2} \right] - F^+(\alpha_m^1 - \alpha_n^2, z) \frac{e^{\alpha_m^1 - \alpha_n^2} + e^{-(\alpha_m^1 - \alpha_n^2)}}{(e^{\alpha_m^1} + e^{-\alpha_m^1})(e^{\alpha_n^2} + e^{-\alpha_n^2})}$$

De même, on montre que

$$F^+(\alpha, z) F^+(\delta, z) - F^-(\alpha, z) F^-(\delta, z) = 2 \frac{e^{(\alpha-\delta)Z} + e^{-(\alpha-\delta)Z}}{(e^\alpha + e^{-\alpha})(e^\delta + e^{-\delta})}$$

qu'on utilise en $z = 0$, avec $\alpha = \alpha_m^1$ et $\delta = \alpha_n^2$. On a aussi

$$F^+(\alpha_m^1, 0) F^+(\alpha_n^2, 0) - F^-(\alpha_m^1, 0) F^-(\alpha_n^2, 0) = 1 - \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2}$$

d'où

$$F^-(\alpha_m^1, z) F^-(\alpha_n^2, z) = \frac{1}{2} F^+(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, z) \left[1 + \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2} \right] - \frac{1}{2} F^+(\alpha_m^1 - \alpha_n^2, z) \left[1 - \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2} \right] \quad (2.6)$$

On montre de manière similaire que

$$F^+(\alpha_m^1, z) F^+(\alpha_n^2, z) = \frac{1}{2} F^+(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, z) \left[1 + \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2} \right] + \frac{1}{2} F^+(\alpha_m^1 - \alpha_n^2, z) \left[1 - \frac{(\omega^1 \omega^2)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2} \right] \quad (2.7)$$

Les équations (2.6) et (2.7) sont utilisées lors du calcul des termes de forçage de la condition batteur pour le potentiel libre somme. À partir de l'équation (1.37), on peut montrer que

$$\begin{aligned} F^-(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, 0) &= \frac{F^+(\alpha_m^1, 0) F^-(\alpha_n^2, 0) + F^-(\alpha_m^1, 0) F^+(\alpha_n^2, 0)}{F^+(\alpha_m^1, 0) F^+(\alpha_n^2, 0) + F^-(\alpha_m^1, 0) F^-(\alpha_n^2, 0)} \\ &= \frac{F^-(\alpha_n^2, 0) + F^-(\alpha_m^1, 0)}{1 + F^-(\alpha_m^1, 0) F^-(\alpha_n^2, 0)} \\ F^-(\alpha_m^1 + \alpha_n^2, 0) &= \frac{\alpha_m^1 (\omega^2)^2 + \alpha_n^2 (\omega^1)^2}{\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2} \end{aligned}$$

La dernière expression sert à simplifier la notation de A_{mn}^{e+} :

$$\frac{A_{mn}^{e+}}{\omega^1 + \omega^2} = (\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2) \frac{a_m^1 a_n^2}{2 \omega^1 \omega^2} \frac{2(\omega^1 + \omega^2) \left((\omega^1 \omega^2)^2 - \alpha_m^1 \alpha_n^2 \right) + \omega^1 ((\omega^2)^4 - (\alpha_n^2)^2) + \omega^2 ((\omega^1)^4 - (\alpha_m^1)^2)}{-(\omega^1 + \omega^2)^2 (\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2) + (\alpha_m^1 + \alpha_n^2) (\alpha_m^1 (\omega^2)^2 + \alpha_n^2 (\omega^1)^2)}$$

En remplaçant α_n^2 par $-\alpha_n^2$, on obtient facilement

$$\begin{aligned} F^-(\alpha_m^1 - \alpha_n^2, 0) &= \frac{-\alpha_n^2 (\omega^1)^2 + \alpha_m^1 (\omega^2)^2}{-\alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2} \\ F^-(\alpha_m^1 \pm \alpha_n^2, 0) &= \frac{\alpha_m^1 (\omega^2)^2 \pm \alpha_n^2 (\omega^1)^2}{\pm \alpha_m^1 \alpha_n^2 + (\omega^1 \omega^2)^2} \end{aligned}$$

Chapitre 3

Solution analytique de la génération de houle mono-chromatique en bassin tri-dimensionnel

3.1 Equations au premier ordre :

Les équations de propagation de houle en bassin confiné 3D sont obtenues de la même manière que pour le bassin 2D. On considère à nouveau un bassin de profondeur h , semi-infini dans la direction x et cette fois de largeur finie $0 \leq y \leq L_y$. Les conditions aux limites sur les murs latéraux seront des conditions de glissement (vitesse normale au mur nulle). Les équations en 3D, au premier ordre tout d'abord

$$\Delta\phi_1 = 0 \text{ pour } (x, y, z) \in D \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -1 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } y = L_y \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x} = \frac{\partial X_1}{\partial t} \text{ en } x = 0 \quad (3.4)$$

$$E\phi_1 = 0 \text{ en } z = 0 \quad (3.5)$$

$$\eta_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial t} \text{ en } z = 0 \quad (3.6)$$

$$+ \text{ condition de radiation en } x \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

3.2 Les solutions au premier ordre :

On se place en notation complexe. Les conditions aux limites séparent les variables. Utilisons tout d'abord les équations (3.1) et (3.2). On obtient des modes en z de la forme ¹ $F^+(\alpha_m, z)$. L'équation (3.5) permet de trouver la valeur des α_m . Ils appartiennent à \mathbb{R} ou $i\mathbb{R}$, et vérifient la relation

$$\omega^2 = \alpha_m^2 F^-(\alpha_m, 0)$$

Utilisons maintenant les équations (3.1) et (3.3). On obtient des modes en y de la forme ² :

$$\cos(\mu_n y)$$

avec $\mu_n = \frac{n\pi}{L_y}$ pour $n = 0$ à l'infini. Les modes en x se déduisent de (3.1) et de (3.7) :

$$e^{-ik_{mn}x}$$

avec $k_{mn}^2 = \alpha_m^2 - \mu_n^2$. Il existe alors plusieurs cas possibles.

1. pour $m = 0$, on a $\alpha_0 = k \in \mathbb{R}$. On en déduit que $k_{0n}^2 = k^2 - \mu_n^2$. On définit alors $N_1 = E\left[\frac{kL_y}{\pi}\right]$ et on obtient :
 - si $n > N_1$ alors $k_{0n}^2 \leq 0$: les modes sont évanescents
 - si $n \leq N_1$ alors $k_{0n}^2 \geq 0$: les modes sont progressifs
2. pour $m \geq 1$, on a $\alpha_m \in i\mathbb{R}$ donc $k_{mn}^2 \leq 0$: il s'agit dans ce cas de modes évanescents

En résumé, la nature des modes est reportée dans le tableau 3.1.

$m = 0$		$m \geq 1$	
$n \leq N_1$	progressif	$n \in \mathbb{N}$	évanescent
$n > N_1$	évanescent		

TABLE 3.1 – Nature des modes longitudinaux

Pour les modes progressifs (*i.e.* $m = 0$ et $n \leq N_1$), la condition de radiation (3.7) et la forme des modes en x choisie conduisent à prendre $k_{0n} \in \mathbb{R}^+$. En résumé, l'expression du potentiel, de la hauteur de surface libre sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \underline{A}_{mn} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \eta_1 &= \underline{a}_{mn} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \end{aligned}$$

1. cette forme est aussi choisie en fonction de la résolution en notation réelle :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = a \in \mathbb{R} \quad \text{et non}$$

2. *idem*

Grâce à l'équation (3.6), on peut relier les coefficients \underline{A}_{mn} du potentiel à ceux de la hauteur d'eau \underline{a}_{mn} et réécrire le potentiel sous la forme :

$$\underline{\phi}_1 = \frac{i \underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z)$$

Il reste à relier l'amplitude de la houle \underline{a}_{mn} au mouvement du batteur. Pour cela, on utilise la condition (3.4) sur le batteur, qui s'écrit, en notation complexe

$$\frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} = i\omega \underline{X}_1 \text{ en } x = 0 \quad (3.8)$$

Pour cette étude de la solution harmonique en régime stationnaire, on a fait l'hypothèse forte ici que la loi de commande du batteur est à variables séparées en y et en temps, *i.e.* on a écrit

$$X_1(y, z, t) = \text{Re} [\underline{X}_1(y, z) e^{i\omega t}]$$

On aura ensuite $\underline{X}_1 = \underline{b} f(y) g_v(z)$ où $g_v(z)$ est la forme verticale d'un volet du batteur et \underline{b} une amplitude caractéristique du mouvement. On se sert ensuite de l'orthogonalité des fonctions $\{\cos(\mu_n y)\}_n$ d'une part, et des fonctions $\{F^+(\alpha_m, z)\}_m$, d'autre part pour obtenir la relation suivante

$$k_{mn} \frac{\underline{a}_{mn}}{\omega} \int_0^{L_y} \cos^2(\mu_n y) dy \int_{-1}^0 (F^+(\alpha_m, z))^2 dz = i\omega \underline{b} \int_0^{L_y} f(y) \cos(\mu_n y) dy \int_{-1}^0 g_v(z) F^+(\alpha_m, z) dz \quad (3.9)$$

On peut remarquer la relation entre les coefficients \underline{a}_{mn} et \underline{a}_{0n}

$$\begin{aligned} \underline{TF}_{mn} &= \frac{\underline{a}_{mn}}{\underline{a}_{0n}} = \frac{\int_{-1}^0 g_v(z) F^+(\alpha_m, z) dz \int_{-1}^0 (F^+(\alpha_0, z))^2 dz}{\int_{-1}^0 (F^+(\alpha_m, z))^2 dz \int_{-1}^0 g_v(z) F^+(\alpha_0, z) dz} \\ &= \frac{k_{0n}}{k_{mn}} \frac{\alpha_m}{\alpha_0} \underline{TF}_m \end{aligned} \quad (3.10)$$

Elle sera utile lors du calculs des amplitudes \underline{a}_{mn} . Une fois les coefficients pour $m = 0$ calculés, on obtiendra les coefficients $m \geq 1$ grâce à la fonction de transfert \underline{TF}_m issue de la théorie 2D.

On peut également décomposer la loi de contrôle transverse $f(y)$ du batteur selon les modes propres transverses et écrire ainsi

$$\underline{b} f(y) = \underline{b}_n \cos \mu_n y$$

La condition (3.4) sur le batteur nous fournit une relation

$$\underline{b}_n = \underline{TF} \frac{k_{0n}}{\alpha_0} \underline{a}_{0n}$$

Celle-ci sera utile lorsqu'on voudra obtenir le mouvement du batteur à partir d'un potentiel cible. Intéressons-nous maintenant à différentes lois de contrôle.

3.3 Lois de commande du batteur :

On veut générer une houle régulière oblique, de pulsation ω , de direction θ par rapport à l'axe x du bassin et d'amplitude \underline{a} . En domaine non borné, le potentiel et la hauteur de surface libre au premier ordre sont

$$\begin{aligned} \underline{\eta}_1 &= \underline{a} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \underline{a} e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \\ \underline{\phi}_1 &= \frac{i \underline{a}}{\omega} \frac{\cosh k(z+1)}{\cosh k} e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \\ \underline{\phi}_1 &= \frac{i \underline{a}}{\omega} F^+(\alpha_0, z) e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

On trouve plusieurs lois de commande dans la littérature pour générer une telle houle. Le point clé est d'obtenir dans le bassin un champ de vague proche de celui en domaine non borné. En raison du confinement, la zone où champs obtenu et cible sont proches est limitée. On a intérêt à maximiser l'étendue de cette zone dite zone utile. Il faut pour cela prendre en compte les réflexions dans la loi de commande.

3.3.1 Principe du serpent

La loi de commande la plus simple est la loi proposée par Biésel [?]. Il considère le batteur comme infini dans la direction y et calcule l'amplitude à donner au batteur pour obtenir la houle cible. Le mouvement est du type

$$\underline{X_1} = \underline{b} e^{-ik \sin \theta y} g_v(z)$$

Afin d'identifier le coefficient \underline{b} , amplitude du mouvement du batteur, il reporte dans la condition batteur (3.8), le mouvement $\underline{X_1}$ cité et le potentiel (3.11) en domaine non borné, ce qui donne

$$-k \cos \theta \frac{ia}{\omega} \frac{\int_{-1}^0 \cosh^2 k(z+1) dz}{\cosh k} = i\omega \underline{b} \int_{-1}^0 g_v(z) \cosh k(z+1) dz$$

On obtient alors la fonction de transfert du batteur en 3D

$$\underline{TF_{3D}} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} = \underline{TF_{2D}} \cos \theta$$

On peut alors retrouver les composantes $\underline{a_{mn}}$ du potentiel. Pour cela, il suffit de reporter la loi de commande $f(y) = \exp(-ik \sin \theta y)$ dans la condition sur le batteur (3.9). Cela revient comme en 2D à décomposer la loi de commande sur la famille des modes en $\{y, z\}$ du potentiel. Comme remarqué plus haut, il suffit de s'intéresser aux modes $m = 0$, les autres en découlant grâce à (3.10). On obtient

$$\begin{aligned} \underline{a_{0n}} &= \frac{\underline{b}}{\underline{TF_{2D}}} \frac{\alpha_0}{k_{0n}} \frac{\int_0^{L_y} e^{-ik \sin \theta y} \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^{L_y} \cos^2(\mu_n y) dy} \\ &= \underline{b} \frac{1}{\underline{TF_{2D}}} \frac{\alpha_0}{k_{0n}} I_n = \underline{a} \frac{\alpha_0 \cos \theta}{k_{0n}} I_n \\ \text{où } I_n &= \frac{\int_0^{L_y} e^{-ik \sin \theta y} \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^{L_y} \cos^2(\mu_n y) dy} \end{aligned}$$

Intéressons nous à l'intégrale en y . Après calculs, on obtient

$$I_n = \begin{cases} \delta_{0n} & \text{si } \theta = 0 \\ 1 & \text{si } \theta \neq 0 \text{ et } \mu_n = |k \sin \theta| \\ \frac{2ik \sin \theta}{(k \sin \theta)^2 - \mu_n^2} \frac{e^{-ik L_y \sin \theta} (-1)^n - 1}{L_y (1 + \delta_{0n})} & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction $I_n(\theta)$ est continue lorsque $\mu_n = |k \sin \theta|$. Dans l'expression ci-dessus, ce cas a été séparé pour le calcul numérique.

On peut finalement exprimer l'amplitude des modes évanescents générés par cette loi de commande. On s'intéressera pour cela aux coefficients correspondants aux modes évanescents ($m \geq 1$ ou ($m = 0$ et $n \geq N_1$)).

Le principe du serpent revient à imposer le potentiel cible (3.11) sur un contour très simple sur la surface libre : la paroi du batteur, et de projeter sur le mode zéro en z . Des contours plus complexes conduisent aux méthodes élaborées qu'on présente maintenant.

3.3.2 Méthode de Dalrymple

Dalrymple [?] a proposé une loi de commande de batteur qui prend en compte les réflexions sur les parois latérales du bassin pour optimiser la zone utile. Pour cela, on impose un potentiel cible (3.11) sur une ligne parallèle au batteur, à une distance X_d de ce dernier. On peut alors en déduire les coefficients $\underline{a_{mn}}$ du potentiel dans le bassin. On peut remarquer tout

de suite qu'un tel potentiel cible imposerait $\underline{a}_{mn} = 0$ pour $m \geq 1$ (cf. la suite). On a ³

$$\begin{aligned}\underline{a}_{0n} &= \underline{a} \frac{\int_0^{L_y} e^{-i\alpha_0 \sin \theta y} \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^{L_y} \cos^2(\mu_n y) dy} e^{i(k_{0n} - \alpha_0 \cos \theta) X_d} \\ \underline{a}_{0n} &= \underline{a} I_n e^{i(k_{0n} - \alpha_0 \cos \theta) X_d}\end{aligned}$$

A partir de ces coefficients \underline{a}_{0n} , on peut en déduire les \underline{a}_{mn} pour $m \geq 1$ d'après (3.10). Comme on veut générer un champ de vague proche du champ cible, on a intérêt à exciter le moins de modes évanescents possible. C'est d'autant plus vrai que certains de ces modes peuvent avoir une grande longueur d'atténuation. C'est le cas pour le premier mode évanescent en y , *i.e.* $n = N + 1$. Son nombre d'onde est $k_{N+1,0} = -i\sqrt{\mu_{N+1}^2 - k^2}$, qui tend vers zéro si k tend vers μ_{N+1} (par valeur inférieure). Cela correspond à une fréquence de houle tendant vers la fréquence d'un mode propre transverse par valeur inférieure.

On aura donc intérêt à éviter ces modes. Le plus simple est de ne pas les exciter, *i.e.* d'imposer un mouvement batteur nul pour ces modes, soit

$$\underline{a}_{0n} = 0 \text{ si } n > N_1$$

A priori, ce comportement se produit aussi en loi de commande serpent. Expérimentalement, on observe en houle droite qu'un mode transverse $n \neq 0$ se développe pour certaines fréquences, évanescents selon la direction de propagation. On peut penser que ce mode excité expérimentalement est le premier mode évanescent décrit plus haut. L'excitation est non linéaire, par des effets du troisième ordre comme dans Yao *et al.* [?].

On peut interpréter l'intégrale I_n comme la projection sur les modes propres transverses de la fonction $\exp(-ik \sin \theta y)$. Cette fonction possède une longueur d'onde $\lambda_y = 2\pi/k \sin \theta$. Par construction, les modes propres transverses sont quant à eux symétriques par rapport à $y = 0$ et $y = L_y$ d'une part et sont périodiques de période $2L_y$ d'autre part. Avant d'être projetée, la fonction évoquée ci-dessus définie sur $[0; L_y]$ est donc étendue à $[L_y; 2L_y]$ par symétrie par rapport à $y = L_y$ avant d'être périodisée. Dans la plupart des cas, on n'aura pas un nombre entier de périodes entre 0 et $2L_y$ (*i.e.* demi-entier entre 0 et L_y) : la fonction $\exp(-ik \sin \theta y)$ est décrite par plusieurs modes transverses.

On peut remarquer ici qu'à longueur d'onde fixée, si l'on fait varier la direction, on tombera alternativement sur des cas périodiques ou non. Il y aura des directions à éviter et des directions privilégiées.

On observe que la décomposition ne se fait jamais sur un seul mode : au mieux, pour un nombre entier de demie périodes, on observe trois modes centraux puis un mode sur deux est nul.

3.3.3 Comparaison des deux lois de commande

En deux dimensions (houle droite), *i.e.* avec $\underline{a}_{0n} = 0$ pour $n \geq 1$, $k_{00} = \alpha_0$ et $\theta = 0$, les deux lois donnent bien les mêmes coefficients \underline{a}_{00} . On peut noter que le paramètre X_d n'intervient pas en 2D, puisque

$$k_{00} - \alpha_0 \cos \theta = 0$$

On pourra donc utiliser indifféremment l'une ou l'autre des deux méthodes pour piloter le batteur, en imposant simplement $\theta = 0$ (X_d quelconque pour la méthode de Dalrymple). De plus, on pourra se limiter au mode $n = 0$.

En trois dimensions (houle oblique), on remarque un terme

$$e^{i(k_{0n} - \alpha_0 \cos \theta) X_d}$$

de déphasage entre les deux méthodes. Il est dû au fait que la condition sur le potentiel cible n'est pas imposée au même endroit dans le bassin ($x = 0$ pour le batteur serpent, $x = X_d$ pour la loi de commande de Dalrymple). Il apparaît en outre un terme d'amplitude

$$\frac{k_{0n}}{\alpha_0 \cos \theta}$$

En effet, la houle cible est imposée en terme de mouvement batteur directement dans le principe du serpent...

3.3.4 Méthodes de Molin

Molin a proposé une zone cible circulaire, sur un disque, et sur un rectangle. voir la thèse de Pierre.

3. on peut noter également la relation entre les coefficients Dalrymple et serpent

$$\underline{a}_{0n}^{dal} = \underline{a}_{0n}^{ser} \frac{k_{0n}}{\alpha_0 \cos \theta} e^{i(k_{0n} - \alpha_0 \cos \theta) X_d}$$

3.3.5 Méthode de Boudet

Boudet et Pérois [?] ont présenté des méthodes originales pour augmenter la taille de la zone utile. Ils ont traité à la fois le cas d'un batteur continu et d'un batteur segmenté. Leur approche est d'imposer la cible voulue non sur le batteur ou sur une ligne parallèle au batteur, mais sur une ellipse dans le bassin. Cela permet de ne pas imposer la cible près des parois comme c'est le cas avec la méthode de Dalrymple. Les amplitudes qui décrivent le mouvement batteur sont les amplitudes des modes transverses dans le cas du batteur continu ou les amplitudes de chaque volet dans le cas d'un batteur segmenté. Elles sont déterminées grâce à la cible. Il apparaît qu'on doit aussi vérifier le débattement des volets qui peut être important. On peut également contrôler la puissance fournie par le batteur (Molin [?]).

La méthode de Boudet consiste à imposer le potentiel cible sur un contour donné quelconque. Les inconnues à déterminer sont, dans le cas d'un batteur continu, les amplitudes modales a_{0n} , pour $n = 0, 1, 2, \dots$. On écrira

$$\underline{a_{0n}} e^{-ik_{0n}x} \cos(\mu_n y) = \underline{a} e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

pour tout couple (x, y) du contour. On détermine les coefficients en imposant cette relation en un jeu de points discrets (collocation avec Dirac). Pratiquement, on limite le nombre de modes à N (bien que cela limite la résolution) et on prend plus de points en résolvant au sens des moindres carrés.

3.3.6 Génération sur une portion du bassin

Pour les essais de modèle libre de Boris Horel, un champ de vague sur une largeur limitée du bassin est requis, de manière à assurer une zone de calme nécessaire à l'accélération du navire.

Pour cela, la houle droite cible à une distance X_d du batteur est modulée par une fonction transverse $f(y)$ qui vaut 1 près d'un bord et 0 de l'autre côté du bassin. Une rampe linéaire est utilisée entre les distances y_d et y_f , ce qui donne

$$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < y_d \\ \frac{y - y_d}{y_f - y_d} & \text{si } y_d \leq y \leq y_f \\ 1 & \text{si } y > y_f \end{cases}$$

Dans ces conditions (houle droite), on conduit les calculs suivants

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\int_0^{L_y} e^{-ik \sin \theta y} \cos(\mu_n y) f(y) dy}{\int_0^{L_y} \cos^2(\mu_n y) dy} = \frac{\int_0^{L_y} \cos(\mu_n y) f(y) dy}{\int_0^{L_y} \cos^2(\mu_n y) dy} \\ &= \frac{2}{L_y(1 + \delta_{0n})} \left(\int_{y_d}^{y_f} \cos(\mu_n y) \frac{y - y_d}{y_f - y_d} dy + \int_{y_f}^{L_y} \cos(\mu_n y) dy \right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{L_y} \frac{\cos(\mu_n y_f) - \cos(\mu_n y_d)}{\mu_n^2 (y_f - y_d)} & \text{si } n \neq 0 \\ \frac{1}{L_y} (L_y - y_f + (y_f - y_d)/2) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

3.4 Batteur segmenté

Relire le commentaire de Bernard Molin dans le rapport de Pierre Roux de Reilhac.

Le batteur physique n'est pas continu comme cela a été supposé mais composé de volets distincts de largeur B finie comme le montre la figure 3.1. On étudie dans cette partie l'effet de la segmentation sur le champ de vagues produit.

Il est possible de prendre la segmentation en compte dans la solution au premier ordre. Par linéarité, il suffit de trouver la solution pour un des volets et la solution pour le batteur complet sera une combinaison linéaire de ces solutions individuelles. Pour décrire le mouvement du batteur, on devra déterminer l'amplitude du mouvement de chaque volet.

On peut appliquer cela aux différentes méthodes de génération présentées ci-dessus. Le principe du serpent ne s'applique guère qu'au batteur continu (on veut imposer $f(y) = \exp(ik \sin \theta y)$ par mimétisme du potentiel cible). Disons classiquement que pour un batteur segmenté, le mouvement d'un volet sera le mouvement du batteur continu pris au centre du volet.

On peut espérer davantage des méthodes élaborées, de Dalrymple, Molin ou Boudet. On impose aucune forme au mouvement batteur, seulement au potentiel tout d'abord, à partir duquel on re-calcule le mouvement batteur.

Soit un batteur segmenté constitué de N_B volets indépendants, numérotés de 1 à N_B . On repère la position y_j du volet numéro j du batteur par son milieu $y_j = (j - 1/2)B$, avec B la largeur⁴ du volet. La forme selon y du volet j est du type

$$f_j(y) = \Pi_B^j(y) = \Pi_B(y - (j - 1)B) = \Pi(y/B - (j - 1))$$

4. On aura simplement la largeur du bassin L_y égale à $N_B B$.

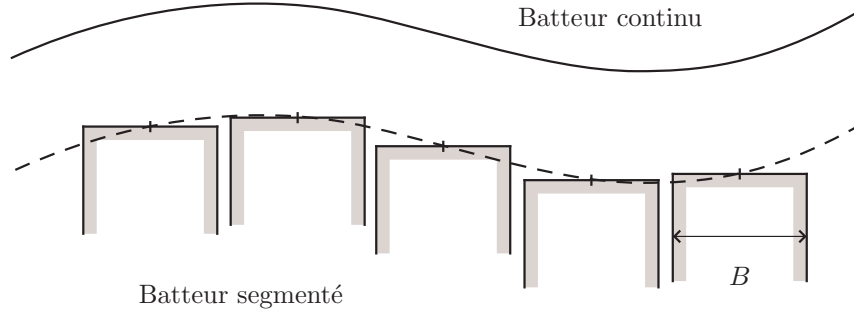


FIGURE 3.1 – Batteur continu / segmenté

avec comme notations $\Pi_B(y)$ la fonction porte valant 1 pour y entre 0 et B et valant 0 ailleurs (voir la figure 3.2), et $\Pi(y) = \Pi_1(y)$ la fonction porte de largeur unité.

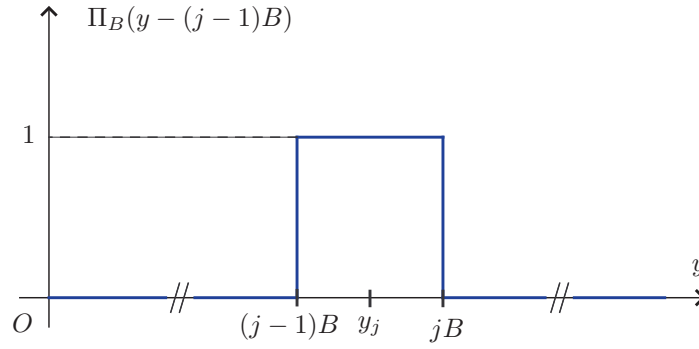


FIGURE 3.2 – Fonction porte

3.4.1 Batteur infini

On considère ici le cas d'un batteur segmenté dans un bassin infiniment large (l'indice des volets s'étend de $-\infty$ à $+\infty$). Le batteur est piloté par le principe du serpent, qui s'exprime pour un batteur continu par

$$\underline{X}_1 = \underline{b} e^{-iky \sin \theta} g_v(z)$$

Batteur continu

Pour ce batteur continu, le champ de vague généré vaut

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_1 &= \frac{i a_m}{\omega} e^{-i(k_m x + ky \sin \theta)} F^+(\alpha_m, z) \\ \underline{\eta}_1 &= \underline{a}_m e^{-i(k_m x + ky \sin \theta)} \end{aligned}$$

avec un nombre d'onde en x qui vérifie $k_m^2 = \alpha_m^2 - k^2 \sin^2 \theta$. Le champ de vague généré est constitué d'une onde progressive et d'ondes évanescentes. La fonction de transfert s'obtient en reportant le potentiel précédent dans la condition sur le batteur, en multipliant de chaque côté par $\exp iky \sin \theta$ et en intégrant sur y de $-\infty$ à $+\infty$ et sur z . Est-ce vraiment ça qu'on fait ??

On obtient simplement la fonction de transfert du batteur serpent

$$\underline{TF}_{3D} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} = \underline{TF}_{2D} \cos \theta$$

Batteur segmenté

On considère maintenant que le batteur infini est segmenté : il est composé d'une infinité de volets, dont la forme individuelle est donnée par $\Pi(y/B - (j-1))$. La forme latérale du batteur est donc

$$f(y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Pi(y/B - (j-1)) e^{-ik y_j \sin \theta}$$

où y_j est la position du milieu des volets. Cette forme transverse du batteur conditionne celle de la houle générée. La dépendance en y_i du terme de la somme ne permet pas de conclure.

L'étude de la segmentation du batteur a été réalisée initialement par Biésel [?] et reprise dans Bonnefoy [?]. Biésel exprime le mouvement segmenté f_s à partir du mouvement continu f sous la forme

$$f_s(y) = f\left(y + B F\left(\frac{y}{B}\right)\right) \quad \text{avec} \quad f(y) = e^{-ik \sin \theta y}$$

où B est la largeur d'un volet⁵ et $F(u)$ la fonction 1-périodique valant $\frac{1}{2} - u$ sur $[0; 1]$ (fonction en dents de scie). Ainsi, le mouvement d'un volet est choisi comme le mouvement du batteur continu pris au centre du volet. Pour une discrétisation correcte du mouvement batteur, le critère de Shannon impose de prendre $\lambda_y > 2B$ soit

$$\sin \theta < \frac{\lambda}{2B}$$

Cette condition n'est pas restrictive si la longueur d'onde est suffisante ($\lambda > 2B$) et n'intervient que pour les longueurs d'onde très courtes, inférieures à deux largeurs de batteur. La figure 3.3 montre l'évolution de l'angle maximal générable si $\lambda < 2B$.

Grâce à la périodicité de F , Biésel décompose ensuite la fonction $\exp(-ikB \sin \theta F(y/B))$, elle-même B -périodique, en série de Fourier dans la direction y , de fondamental de longueur d'onde B

$$e^{-ikB \sin \theta F\left(\frac{y}{B}\right)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underline{c}_n e^{2i\pi \frac{n y}{B}}$$

En posant⁶ $\tau = \frac{1}{2}kB \sin \theta$, on obtient après calcul

$$\underline{c}_n = \frac{1}{B} \int_0^B e^{-ikB \sin \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{B}\right)} e^{-2i\pi \frac{n y}{B}} dy = \frac{\sin \tau}{\tau - n\pi}$$

Le mouvement du batteur s'écrit

$$f_s(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin \tau}{\tau - n\pi} e^{-i\left(k \sin \theta - \frac{2\pi n}{B}\right)y}$$

Dans le cas du batteur infini (serpent) en négligeant les modes évanescents (en prenant $\underline{a}_{mn} = 0$ pour $m \neq 0$), le potentiel en champ lointain résultant de ce mouvement batteur s'écrit

$$\phi = \frac{ia \cosh k(z+1)}{\omega \cosh k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin \tau}{\tau - n\pi} e^{-i\widehat{\mu}_n y} e^{-\widehat{k}_{on} x}$$

avec $\widehat{\mu}_n = k \sin \theta - \frac{2\pi n}{B}$ et $\widehat{k}_{on}^2 = -k^2 + \widehat{\mu}_n^2$. La nature évanescence ou progressive des modes dépend du signe de \widehat{k}_{on}^2 . On obtient

$$\widehat{k}_{on}^2 = \frac{4\pi^2}{B^2} \left(n - \frac{\tau}{\pi} - \frac{kB}{2\pi}\right) \left(n - \frac{\tau}{\pi} + \frac{kB}{2\pi}\right)$$

Le polynôme du second degré en n admet deux racines réelles dont l'une est négative⁷ $n_1 = \frac{\tau}{\pi} - \frac{kB}{2\pi}$ et l'autre positive $n_2 = \frac{\tau}{\pi} + \frac{kB}{2\pi}$. Si $n \in [n_1; n_2]$, \widehat{k}_{on}^2 est négatif : le mode est progressif, sinon, il est évanescent. Le mode progressif $n = 0$ est toujours présent, c'est celui qu'on observe dans le cas d'un batteur continu. Les autres modes progressifs, s'ils existent, viennent perturber le champ de vagues désiré. On suppose ici que la largeur B des batteurs et la longueur d'onde sont fixées et on cherche une limite sur l'angle de propagation.

En imposant qu'aucun mode progressif supplémentaire n'existe, *i.e.* $n_2 < 1$ (alors on a aussi $n_1 > -1$) et en généralisant aux angles négatifs, on obtient la condition

$$|\sin \theta| < \frac{\lambda - B}{B} \quad \text{ou encore} \quad \lambda > B(1 + |\sin \theta|)$$

5. Le batteur contient un nombre entier M de volets sur toute la largeur soit $L_y = MB$.

6. La condition de Shannon évoquée plus haut s'écrit alors $\tau < \pi$.

7. On considère ici le cas $\theta \geq 0$ *i.e.* $\tau \geq 0$. Le raisonnement dans le cas $\theta < 0$ est exactement le même.

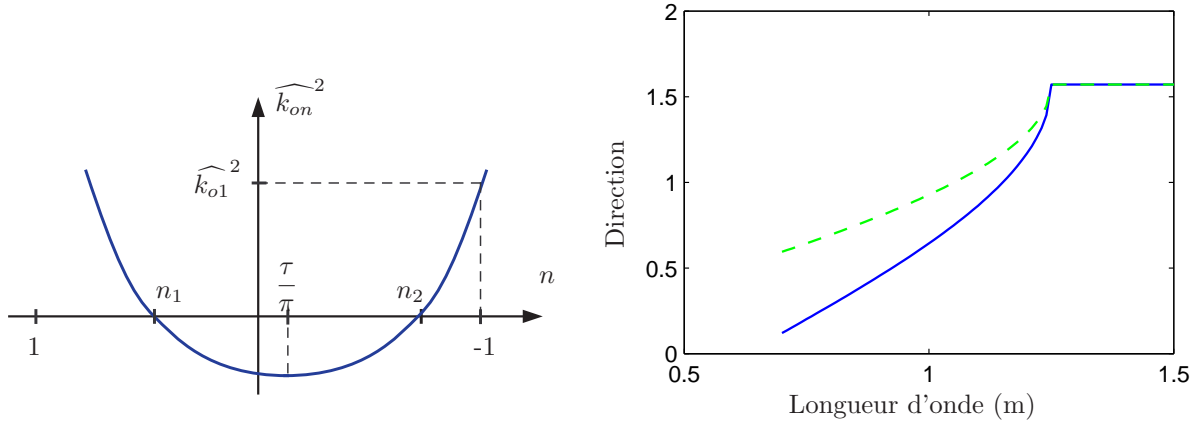


FIGURE 3.3 – Évolution du nombre d'onde $\widehat{k_{on}}^2$ (à gauche) et direction maximale admissible (à droite avec Shannon ---, évanescent —)

Cette condition, appelée critère de Bonnefoy, restreint l'angle de propagation si $\lambda < 2B$ (longueurs d'onde très courtes) comme pour le critère de Shannon mais la restriction est ici plus sévère ($\frac{\lambda-B}{B} < \frac{\lambda}{2B}$), comme le montre la figure 3.3 à droite. De plus si $\lambda < B$ alors les houles obliques ne sont pas accessibles.

Pour une gamme de longueurs d'onde usuelles, supérieures à 1.5 m, et des volets de 60 cm, la segmentation ne vient pas modifier le champ de vagues progressif lointain.

Pour un batteur aux volets larges, seules les longueurs d'onde supérieures à la largeur d'un volet peuvent être générées avec un angle de propagation.

Biésel impose que les modes évanescents décroissent plus vite que e^{-kx} . Il obtient alors la condition suivante

$$|\sin \theta| \frac{\lambda - \sqrt{2}B}{B} \quad \text{ou} \quad \lambda > B(\sqrt{2} + |\sin \theta|)$$

Ce critère est le plus restrictif des trois.

Il faut également vérifier que la longueur d'atténuation des modes évanescents soit faible, par rapport à la profondeur par exemple, comme on l'a fait pour les modes évanescents en continu. Le premier mode concerné sera $n = 1$, dont la longueur d'atténuation est définie par

$$\widehat{\delta_{o1}} = \frac{1}{\widehat{k_{o1}}} = \frac{B}{\sqrt{(2\tau - 2\pi - kB)(2\tau - 2\pi + kB)}}$$

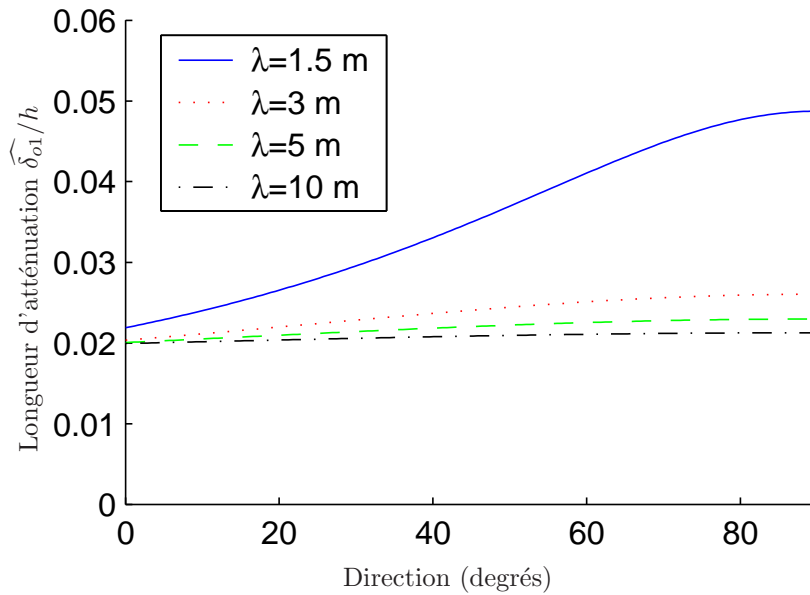


FIGURE 3.4 – Longueur d'atténuation du premier mode évanescent pour quatre longueurs d'onde

La figure 3.4 donne la longueur d'atténuation du mode évanescent $n = 1$ pour quatre longueurs d'onde usuelles. On constate que ces longueurs sont plus faibles que pour les modes évanescents obtenus en houle droite qui étaient les plus longs à s'amortir.

Si $n_2 \approx 1$ (toujours avec $n_2 < 1$), alors on a intérêt à se placer assez loin du seuil $\sin \theta < (\lambda - B)/B$. Près du seuil, la longueur d'atténuation pourra être grande (*i.e.* $\widehat{k_{o1}}$ faible).

Les deux conditions trouvées, par le critère de Shannon et pour éviter un mode parasite progressif, ne concernent que les très courtes longueurs d'onde et dépendent de la direction de propagation ; pour une houle droite, les conditions sont vérifiées, c'est-à-dire que la largeur des volets n'a aucune influence, ce à quoi on s'attend bien évidemment.

3.4.2 Batteur segmenté de largeur finie

On considère le cas d'un bassin de largeur finie $L_y = N_B B$, équipé de N_B volets sur un de ses côtés.

Solution pour un des volets

Si on anime le volet j du batteur d'un mouvement harmonique d'amplitude $\underline{b_j}$, le potentiel obtenu s'écrit

$$\begin{aligned}\underline{\phi_1^j} &= \frac{i \underline{a_{mn}^j} \underline{b_j}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \underline{a_{mn}^j} &= \underline{TF_{mn}} \underline{a_{0n}^j} \\ \underline{a_{0n}^j} &= \frac{1}{\underline{TF}} \frac{\alpha_0}{k_{0n}} I_n^j\end{aligned}$$

avec \underline{TF} la fonction de transfert en 2D et I_n^j une intégrale suivant y qui s'écrit

$$I_n^j = \frac{\int_0^{L_y} \Pi_B^j(y) \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^{L_y} \cos^2(\mu_n y) dy}$$

On obtient après calculs

$$\begin{aligned}I_n^j &= \begin{cases} B/L_y & \text{si } n = 0 \\ \frac{2}{\mu_n L_y} (\sin j \mu_n B - \sin(j-1) \mu_n B) & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1/N_B & \text{si } n = 0 \\ \frac{4 \sin(\mu_n B/2)}{\mu_n L_y} \cos(j-1/2) \mu_n B & \text{sinon} \end{cases} \\ I_n^j &= \frac{2 \operatorname{sinc}(n/2N_B)}{(1 + \delta_{0n}) N_B} \cos(j-1/2) \mu_n B\end{aligned}$$

avec $\operatorname{sinc} x = \sin(\pi x)/\pi x$ prolongé par continuité à 1 en $x = 0$. On peut remarquer que cette intégrale ne dépend pas de la houle considérée mais seulement des modes propres et du nombre de volets. Elle possède la propriété suivante :

$$\sum_{j=1}^{N_B} I_n^j = \frac{\int_0^{L_y} \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^{L_y} \cos^2(\mu_n y) dy} = \delta_{0n} \quad (3.12)$$

qui traduit le fait que les modes $\cos \mu_n y$ sont de moyenne nulle entre $y = 0$ et L_y sauf le mode constant dont la moyenne vaut un. La figure 3.5 représente le facteur $\operatorname{sinc}(n/2N_B)$.

Il s'annule pour les n multiples de $2N_B$ et vaut 0.64 pour $n = N_B$. Le terme $\cos(j-1/2) \mu_n B = \cos(2j-1)n\pi/2N_B$ est lui périodique en n de période $4N_B$:

$$\cos(j-1/2) \mu_{4N_B+n} B = \cos(2(2j-1)\pi + (j-1/2) \mu_n B) = \cos(j-1/2) \mu_n B$$

Si l'on met plusieurs volets en mouvements, la solution s'obtient simplement en superposant les contributions de chaque volet. Le potentiel $\underline{\phi_1}$ s'exprime comme la somme des potentiels $\underline{\phi_1^j}$ des volets en action. On peut ainsi construire le champ de vagues obtenu avec une partie seulement des volets, les autres étant immobiles. On a bien sûr accès à la solution lorsque tous les volets sont en mouvement, celle qui nous intéressera le plus dans la pratique et qu'on décrit plus en détail dans la section suivante.

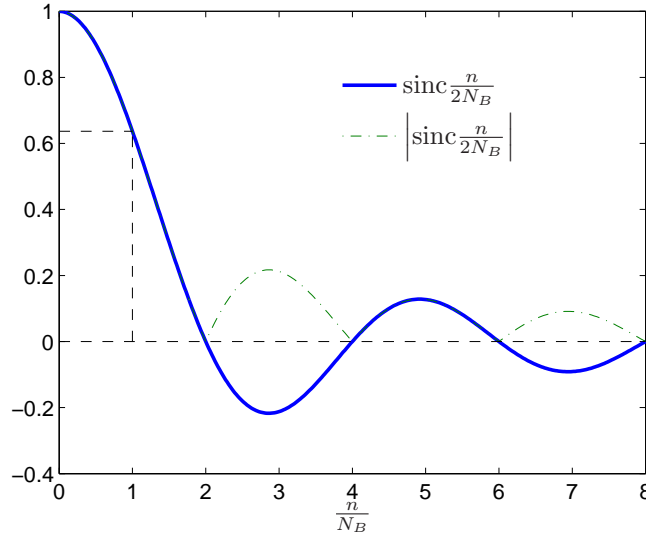


FIGURE 3.5 – Allure de la fonction sinc

Solution pour les N_B volets

Le potentiel total du batteur est la superposition des potentiels des volets $j = 1$ à N_B .

$$\underline{\phi}_1 = \frac{ib_j a_{mn}^j}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z)$$

On peut définir une amplitude totale pour le potentiel $\underline{\tilde{a}}_{0n}$ et pour le batteur \underline{B}_n en regroupant convenablement les termes ci-dessus

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{a}}_{0n} &= \underline{b}_j \underline{a}_{0n}^j = \frac{1}{TF} \frac{\alpha_0}{k_{0n}} \underline{b}_j \underline{I}_n^j \\ \underline{B}_n &= \underline{b}_j \underline{I}_n^j \end{aligned}$$

La propriété (3.12) de la somme des \underline{I}_n^j se traduit par le fait qu'en houle droite, lorsque $\underline{b}_j = \underline{b}$ pour tous les volets : on n'excite que le mode constant. Si on regarde l'amplitude $\underline{\tilde{a}}_{0n}$ plus en détails, on peut écrire

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{a}}_{0n} &= \frac{1}{TF} \frac{\alpha_0}{k_{0n}} \underline{b}_j \frac{2 \operatorname{sinc}(n/2N_B)}{(1 + \delta_{0n}) N_B} \cos(j - 1/2) \mu_n B \\ &= \frac{1}{TF} \frac{\alpha_0}{k_{0n}} \frac{2 \operatorname{sinc}(n/2N_B)}{(1 + \delta_{0n}) N_B} \sum_{j=1}^{N_B} \underline{b}_j \cos(j - 1/2) \mu_n B \end{aligned}$$

À partir des amplitudes modales $\underline{\tilde{a}}_{0n}$ et \underline{B}_n , on peut utiliser les mêmes relations⁸ que les amplitudes du potentiel de batteur continu pour obtenir les vitesses, l'élévation de surface libre *etc.*. Il reste donc à spécifier les amplitudes \underline{b}_j des volets. Avant cela, il convient de remarquer qu'à partir des \underline{b}_j , on obtient un jeu $\underline{\tilde{a}}_{0n}$ pour $n = 0$ à $+\infty$, autrement dit, le batteur segmenté pourra exciter les modes évanescents $n > N_1$. Il faudra prendre des précautions particulières si on veut éviter cela, pour les méthodes de génération dont la zone utile est éloignée du batteur notamment.

On peut ré-écrire l'argument du cosinus comme

$$(j - 1/2) \mu_n B = 2\pi \frac{(j - 1/2) n}{2N_B}$$

On reconnaît alors, au facteur $1/2$ près, l'argument classique d'une transformée de Fourier discrète en cosinus : il faudra tenir compte du phénomène de repliement. Dans notre cas, la transformée en cosinus sur N_B volets est équivalente à une transformée sur $2N_B$ volets avec une symétrie en $y = L_y$ (où le mouvement du volet $N_B + j$ est celui du volet $N_B - j + 1$. Par

8. on peut noter, en plus, la relation

$$\underline{B}_0 = \frac{B}{L_y} \sum_{j=1}^{N_B} \underline{b}_j \quad \text{et} \quad \underline{B}_n = \frac{2}{\mu_n b} \sum_{j=1}^{N_B-1} (\underline{b}_j - \underline{b}_{j+1}) \sin \frac{nj\pi}{N_B}$$

conséquent, le critère de Shannon indique qu'on peut au mieux représenter N_B modes⁹, les modes $N_B + 1$ à $2N_B$ étant en effet reliés aux modes N_B à 0. Si l'on tente de d'utiliser plus de modes pour obtenir les \underline{b}_j , on verra apparaître le repliement : les modes $n > N_B$ se replient sur les N_B premiers modes.

Il est intéressant de noter que les facteurs dépendant de n devant la somme modifie le repliement *classique*. Ici, le spectre \tilde{a}_{0n} se replie et se répète tous les $2N_B$ mais le sinus cardinal fait que son amplitude décroît (comme $1/n$) et que son signe change (voir la figure 3.5). On a par exemple

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{02N_B-n} &= \frac{1}{TF} \frac{\alpha_0}{k_{02N_B-n}} \frac{2 \operatorname{sinc}((2N_B - n)/2N_B)}{(1 + \delta_{02N_B-n}) N_B} \sum_{j=1}^{N_B} \underline{b}_j \cos(j - 1/2) \mu_{2N_B-n} B \\ &= -\frac{1}{TF} \frac{\alpha_0}{k_{02N_B-n}} \frac{2 \operatorname{sinc}((2N_B - n)/2N_B)}{(1 + \delta_{02N_B-n}) N_B} \sum_{j=1}^{N_B} \underline{b}_j \cos(j - 1/2) \mu_n B \\ &= -\frac{k_{0n}}{k_{02N_B-n}} \frac{\operatorname{sinc}(2N_B - n)/2N_B}{\operatorname{sinc}n/2N_B} \frac{1 + \delta_{0n}}{1 + \delta_{02N_B-n}} \tilde{a}_{0n}\end{aligned}$$

On voit que l'amplitude du mode $2N_B - n$ est égale à celle du mode n multipliée par le rapport des sinus cardinaux et des nombres d'onde. Le rapport des sinus cardinaux est toujours inférieur à 1 si $n < N_B$ mais le rapport des nombres d'onde peut prendre des valeurs supérieures à 1. Ceci se produit lorsque

Le critère de Shannon signifie physiquement qu'avec un batteur constitué de N_B volets, on ne peut générer que des modes ayant une longueur d'onde supérieure à 2 fois la largeur d'un volet. Le dernier mode accessible est donc le mode 49, celui où schématiquement les volets sont alternativement sur des crêtes et des creux.

Afin de caractériser l'influence de la segmentation, on va maintenant comparer la solution segmentée \tilde{a}_{0n} avec la solution continue \underline{a}_{0n} obtenue précédemment. Pour choisir les amplitudes des volets, on dispose de deux approches. On peut partir du mouvement continu et dire que l'amplitude \underline{b}_j est l'amplitude continue complexe prise au milieu du volet : c'est la solution qu'on présente dans la suite. On peut aussi considérer directement ces amplitudes comme des inconnues et résoudre les équations reliant les \underline{b}_j au champ cible.

On commence par traiter le cas général d'une loi de commande en partant du mouvement continu du batteur et en fixant les amplitudes \underline{b}_j des volets à celles prises au milieu des volets.

Cas général

On part d'une loi de commande générale définie pour un batteur continu et on donne à chaque volet l'amplitude de son point milieu. Le mouvement du batteur continu exprimé en fonction des modes transverses s'écrit

$$\underline{b}f(y) = \underline{b}_n \cos \mu_n y$$

avec la relation suivante pour les amplitudes modales

$$\underline{b}_n = \frac{TF}{\alpha_0} \frac{k_{0n}}{\alpha_0} \underline{a}_{0n}$$

On en déduit que l'amplitude du volet j vaut

$$\underline{b}_j = \frac{TF}{\alpha_0} \frac{k_{0n}}{\alpha_0} \underline{a}_{0n} \cos \mu_n y_j$$

La somme sur n est éventuellement tronquée à $n = N_1$ pour ne conserver que les modes progressifs¹⁰ (voir section 3.3.2). Le potentiel total aura pour amplitude

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{0n} &= \frac{1}{TF} \frac{\alpha_0}{k_{0n}} \underline{b}_j \underline{I}_n^j \\ &= \frac{k_{0m}}{k_{0n}} \frac{\underline{a}_{0m}}{\alpha_0} \sum_{j=1}^{N_B} \cos \mu_m y_j \underline{I}_n^j \\ &= \frac{k_{0m}}{k_{0n}} \frac{\underline{a}_{0m}}{\alpha_0} \frac{2 \operatorname{sinc}(n/2N_B)}{(1 + \delta_{0n}) N_B} \sum_{j=1}^{N_B} \cos(j - 1/2) \mu_m B \cos(j - 1/2) \mu_n B\end{aligned}$$

Suite à la remarque faite dans la section 3.4.2, on voit qu'on effectue ici la transformée de Fourier de $\cos(j - 1/2) \mu_m B$. Elle vaut, après calculs

$$\sum_{j=1}^{N_B} \cos(j - 1/2) \mu_m B \cos(j - 1/2) \mu_n B = \frac{N_B (1 + \delta_{0n})}{2} (\delta_{mn} - \delta_{2N_B-mn} + \dots) \quad (3.13)$$

9. La remarque sur la symétrie prend son importance ici. On dispose de N_B volets mais le repliement se produit à N_B et non $N_B/2$ comme on a l'habitude. La raison est que la TF en cosinus suppose implicitement que la fonction à représenter est symétrique par rapport à $j = N_B$ ($y = L_y$ ici) et donc décrite en fait sur $2N_B$ points/modes.

10. On verra plus tard que cette condition n'est pas suffisante pour éviter des modes parasites y compris progressifs avec un batteur segmenté.

d'où

$$\widetilde{a_{0n}} = \frac{\text{sinc}(n/2N_B)}{k_{0n}} \left(k_{0n} \underline{a_{0n}} - k_{02N_B-n} \underline{a_{02N_B-n}} + \dots \right) \quad (3.14)$$

Dans un premier temps on peut ne considérer que le premier terme. L'interprétation est alors relativement simple. La modification liée à la segmentation est seulement un terme d'amplitude en sinus cardinal. Tous les modes progressifs sont affectés avec des poids différents (Molin, rapport de la thèse de Pierre Roux de Reilhac). La segmentation dégrade le champ de vagues prévu pour un batteur continu en atténuant les modes transverses élevés. On peut anticiper cet effet et construire le mouvement des volets avec

$$\widetilde{a_{0n}} = \frac{a_{0n}}{\text{sinc}(n/2N_B)}$$

Les termes suivants dans la transformée de Fourier (3.13) de $\cos(j-1/2)\mu_m B$ sont liés au repliement. Ces termes repliés se retrouvent dans l'expression (3.14) des amplitudes, mais atténués par les sinus cardinaux.

Par exemple le premier repliement transportera les modes 0 à N_1 vers les modes $2N_B$ à $2N_B - N_1$ respectivement. Suivant la valeur de N_1 par rapport à N_B , les modes repliés pourront être progressifs et évanescents ($N_1 > N_B$) ou uniquement évanescents ($N_1 < N_B$).

Même si on a pris la précaution d'imposer $\underline{a_{0n}} = 0$ pour $n > N_1$ en batteur continu (*i.e.* pour éviter les modes évanescents), on peut constater qu'avec segmentation, des modes $\widetilde{a_{0n}}$ pour $n > N_1$ sont excités.

Il s'agit maintenant de tenter de quantifier quand ces modes $n > N_1$ deviennent gênants soit au niveau de la zone utile, soit près du batteur, soit pour le retour au calme du bassin.

D'après la théorie du batteur continu, on sait que pour f et θ données, on excite surtout les modes proches de

$$n_0 = E \left[\frac{kL_y \sin \theta}{\pi} \right]$$

Les modes repliés de plus forte amplitude se trouvent donc vers $n = 2N_B - n_0$. Tant qu'ils sont loin de N_1 , tout se passe bien, il s'agit de modes évanescents décroissant rapidement.

En revanche, lorsque $2N_B - n_0$ se rapproche de N_1 , on a observé un comportement particulier du dernier mode progressif. Pour mettre en évidence ce phénomène, il faut considérer l'amplitude $\widetilde{a_{0N_1}}$ qui s'écrit alors, en ne gardant que le terme prépondérant

$$\widetilde{a_{0N_1}} \simeq \text{sinc}(N_1/2N_B) \frac{k_{02N_B-N_1}}{k_{0N_1}} \underline{a_{02N_B-N_1}}$$

Dans ce cas, l'amplitude $\underline{a_{02N_B-N_1}}$ est non négligeable (proche de $\underline{a_{0n_0}}$) car $2N_B - N_1 \sim n_0$, et surtout k_{0N_1} devient très faible. Par conséquent l'amplitude en batteur segmenté $\widetilde{a_{0N_1}}$ du dernier mode progressif est importante. Ce mode vient perturber le champ de vagues.

Ce mode parasite est lié au repliement qui provient de la discrétisation du mouvement batteur, *i.e.* de la largeur finie des volets. Pour un batteur infini segmenté, le repliement existe aussi et empêche de générer des houles dont la longueur d'onde dans la direction transverse est inférieure à $2B$; les houles acceptables vérifient

$$k \sin \theta < \frac{\pi}{B} \quad \text{ou encore} \quad \lambda > 2B \sin \theta$$

La largeur finie du bassin fait, elle, passer d'une transformée de Fourier continue (pour un batteur infini comme dans la théorie de Biésel) à une transformée de Fourier discrète (*i.e.* une projection sur les modes propres). Elle introduit un nombre fini de mode progressif et une dimension supplémentaire pour les modes évanescents. Cela aura pour conséquence une résonance pouvant perturber le bassin à grande distance du batteur (voir la section 3.5).

Revenons au batteur segmenté de largeur finie. Il faut s'affranchir du mode parasite $n = N_1$, par exemple en s'assurant qu'on travaille avec des fréquences ou directions telles que le dernier mode progressif garde une amplitude faible, par exemple

$$\widetilde{a_{0N_1}} < \frac{1}{10} \max \underline{a_{0n}}$$

Applications

La théorie présentée précédemment s'applique aux méthodes de Dalrymple, du disque *etc.*

On traite dans la partie suivante du principe du serpent qui ne prend pas en compte la largeur finie et excite aussi par conséquent les modes évanescents à $n > N_1$. L'interprétation des résultats est simple et c'est pourquoi on la présente ici.

Principe du serpent

On considère à nouveau le principe du serpent. Quoique limitée en terme de zone utile, cette méthode garde l'avantage d'avoir une formulation très simple et de conduire facilement à des résultats interprétables physiquement. Un fois qu'on aura effectué les calculs pour cette méthode, on pourra les réutiliser éventuellement pour les méthodes plus complexes.

L'amplitude du volet j est simplement l'amplitude \underline{b} avec un déphasage correspondant à l'onde transverse $\exp(-iky \sin \theta)$ prise au centre du volet en $y = y_j$ soit

$$\underline{b}_j = \underline{b} e^{-iky_j \sin \theta} \quad \text{avec} \quad y_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) B$$

On obtient alors la relation

$$\underline{\tilde{a}}_{0n} = \underline{b} \frac{1}{\underline{TF}_{2D}} \frac{\alpha_0}{k_{0n}} e^{-iky_j \sin \theta} \underline{I}_n^j$$

soit simplement

$$\underline{\tilde{a}}_{0n} = \underline{a}_{0n} \frac{1}{\underline{I}_n} \sum_{j=1}^{N_B} \underline{I}_n^j e^{-iky_j \sin \theta}$$

Le principe du serpent pour un batteur continu excite tous les modes transverses, y compris les modes évanescents, *i.e.* $\underline{a}_{0n} \neq 0$ pour $n > N_1$. D'après l'expression des $\underline{\tilde{a}}_{0n}$, il en sera de même pour le batteur segmenté.

La somme dans le terme de droite, notée \underline{S}_n représente simplement la modification liée à la segmentation par rapport au batteur continu où elle est remplacée par \underline{I}_n . Le terme de phase $\exp(-iky_j \sin \theta)$ joue un rôle important ici. On étudie le comportement de \underline{S}_n lorsqu'on fait varier la fréquence, la direction de la houle. On ne doit pas se limiter aux seuls modes progressifs, *i.e.* $n \leq N_1$ mais regarder aussi les modes évanescents.

On a, pour tout n

$$\sum_{j=1}^{N_B} \underline{I}_n^j e^{-iky_j \sin \theta} = \frac{2 \text{sinc}(n/2N_B)}{(1 + \delta_{0n}) N_B} \sum_{j=1}^{N_B} e^{-i(j-1/2)kB \sin \theta} \cos(j-1/2)\mu_n B$$

Comme on l'a évoqué dans la partie précédente, on peut interpréter la somme sur j comme une transformée de Fourier discrète en cosinus (TFDC) sur $2N_B$ points de la fonction $\exp(-iky_j \sin \theta)$ symétrisée par rapport à $y = L_y$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_B} e^{-i(j-1/2)kB \sin \theta} \cos(j-1/2)\mu_n B &= \sum_{j=N_B+1}^{2N_B} e^{-i(2N_B-j+1/2)kB \sin \theta} \cos(2N_B-j+1/2)\mu_n B \\ &= \sum_{j=N_B+1}^{2N_B} e^{-i(2N_B-j+1/2)kB \sin \theta} \cos(j-1/2)\mu_n B \end{aligned}$$

d'où, en considérant la fonction $\exp(-iky_j \sin \theta)$ symétrisée par rapport à $y = L_y$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^{N_B} e^{-i(j-1/2)kB \sin \theta} \cos(j-1/2)\mu_n B &= \sum_{j=1}^{N_B} \dots + \sum_{j=N_B+1}^{2N_B} \dots \\ &= \sum_{j=1}^{2N_B} e^{-i(j-1/2)kB \sin \theta} \cos(j-1/2)\mu_n B \end{aligned}$$

Cette transformée est la convolution d'un pic situé à n tel que $\mu_n = k \sin \theta$ par un sinus cardinal lié à la taille finie $2L_y$ ou $2N_B$. La largeur à mi-hauteur de ce sinus cardinal est $2(2\pi/2L_y) = 2\pi/N_B.B = 2\Delta_{\mu_n}$: on verra au minimum deux modes excités. Le pic se décale avec n comme $n \sim k \sin \theta L_y / \pi$ et le mode le plus élevé atteint par le pic est $kL_y / \pi = N_1$.

Cependant, des modes à $n > N_1$ sont excités d'une part comme dans le cas continu, d'autre part par l'existence du repliement. D'après le critère de Shannon, la TFDC de $\exp(-iky_j \sin \theta)$ est symétrique conjuguée par rapport à $n = N_B$ et périodique de période $2N_B$. Cette périodicité est le repliement. En se rappelant en plus du facteur $\text{sinc}(n/2N_B)$, on en déduit que le spectre de Fourier du batteur segmenté est composé de la façon suivante :

- le spectre du batteur continu est modulé par le terme d'amplitude $\text{sinc}(n/2N_B)$. Celui-ci vaut un pour n faible mais décroît ensuite pour s'annuler en $n = 2N_B$ (voir la figure 3.5). Cela a de l'influence quand on utilise des modes élevés, proche de N_B : en somme soit pour des ondes courtes ou pour des ondes fortement angulées,
- des modes supplémentaires sont excités en lien avec le repliement.

3.5 Mode propre du bassin, résonance

Une résonance risque de se produire lorsqu'on approche une fréquence propre transverse du bassin par valeurs inférieures. Le premier mode évanescent $n = N_1 + 1$ voit son nombre d'onde tendre vers zéro. La longueur d'atténuation est grande. Son amplitude vaut par exemple pour le principe du serpent

$$\underline{a}_{0N_1+1} = \underline{a} \frac{\alpha_0 \cos \theta}{k_{0N_1+1}} \underline{I}_{N+1}$$

Si l'on génère de la houle droite, on a $N_1 + 1 > 0$ donc $I_{N_1+1} = 0$. L'amplitude du premier mode évanescent est nulle même si on se rapproche de la fréquence propre $N_1 + 1$. Il n'y a pas de phénomène de résonance au premier ordre en houle droite. Il est possible qu'elle apparaisse au troisième ordre (*cf.* Yao *et al.* [?]). Si l'on génère une houle oblique ($\theta \neq 0$) à une fréquence proche mais inférieure à la fréquence du $N_1 + 1$ mode propre transverse du bassin, l'amplitude du premier mode évanescent n'est plus nulle. On a $N_1 + 1 \neq 0$ et $\sin \theta \neq 0$ donc $|k \sin \theta| \neq \mu_{N_1+1}$ lorsque $k \rightarrow \mu_{N_1+1}^-$. Le terme en y vaut

$$I_{N_1+1} = \frac{2ik \sin \theta}{(k \sin \theta)^2 - \mu_{N_1+1}^2} \frac{e^{-ikL_y \sin \theta} (-1)^{N_1+1} - 1}{L_y}$$

qui est bornée quand $k \rightarrow \mu_{N_1+1}^-$ donc $\frac{a_{0N_1+1}}{\alpha_0}$ diverge¹¹ comme $1/k_{0N_1+1}$. L'amplitude du premier mode évanescent tend vers l'infini pour un mouvement fini du batteur. J'appellerai ça un phénomène de résonance. Au premier ordre, avec le principe du serpent, on devra prendre des précautions lorsqu'on veut générer un spectre directionnel de houle ou une houle oblique. On peut se donner des marges de sécurité sur la longueur d'atténuation du premier mode évanescent (ne pas utiliser les fréquences telles que $\delta_{0N_1+1} > \lambda$), sur son amplitude (idem si $\frac{a_{0N_1+1}}{\alpha_0} > \alpha \underline{a}$ avec α un facteur de sécurité).

Comme on l'a dit pour la méthode de Dalrymple, une façon de faire est de ne pas exciter ce mode $N_1 + 1$ avec le batteur, *i.e.* d'imposer $\underline{a_{0n}} = 0$ pour tout $n > N_1$. Pour le principe du serpent, cela enlève des modes évanescents qui n'ont qu'une contribution près du batteur. Cela ne modifie pas le champ disons lointain.

Pour une loi de commande de type Dalrymple, on impose la cible à une certaine distance du batteur. L'amplitude du premier mode évanescent vaut cette fois

$$\underline{a_{0N_1+1}} = \underline{a} I_{N_1+1} e^{i(k_{0N_1+1} - \alpha_0 \cos \theta) X_d}$$

Cette fois, cette amplitude du premier mode évanescent ne diverge pas¹² lorsque $k \rightarrow \mu_{N_1+1}^-$. Cependant, l'amplitude du mouvement batteur vaut elle

$$\underline{b_{N_1+1}} = \frac{TF}{\alpha_0} \frac{k_{0N_1+1}}{\alpha_0} \underline{a_{0N_1+1}} = \frac{TF \underline{a}}{I_{N_1+1}} \frac{k_{0N_1+1}}{\alpha_0} e^{i(k_{0N_1+1} - \alpha_0 \cos \theta) X_d}$$

elle pourra prendre des valeurs importantes du fait de l'exponentielle. Il faut regarder les valeurs de $k_{0N_1+1} X_d$. On obtiendra une marge de sécurité sur l'amplitude du premier mode évanescent.

On peut également, comme mentionné plus haut, arrêter la génération des modes propres transverses à $n = N_1$. Lorsqu'on supprime les modes $n > N_1$, on ôte des éléments de la famille $\{\cos(\mu_n y)\}$. La solution obtenue sera incomplète¹³. Je veux dire ici que la hauteur de surface libre sur la ligne $x = X_d$ ne sera pas uniforme. On observe des oscillations sur les bords. Ceci est d'autant plus flagrant pour les grandes longueurs d'ondes pour lesquelles N_1 est faible.

11. On peut définir $\varepsilon > 0$ tel que $k = \mu_{N_1+1} - \varepsilon/L_y$. En reportant cette expression de k dans $k_{0N_1+1}^2 = k^2 - \mu_{N_1+1}^2$ alors on en déduit que $k_{0N_1+1} = -i\sqrt{2\varepsilon\mu_{N_1+1}/L_y}$ à l'ordre le plus faible en ε . Tous les autres termes dans l'expression de $\underline{a_{0N_1+1}}$ sont d'ordre zéro en ε .

12. il semble que la différence soit due au fait que pour le principe du serpent, on passe directement du potentiel cible vers le mouvement batteur (terme $k \cos \theta$ de dérivée selon x puis terme $1/k_{0n}$ dans la solution) alors que pour la méthode de Dalrymple, on projette d'abord le potentiel cible sur les modes propres transverses du bassin (terme en k_{0n} puis en $1/k_{0n}$ qui se simplifient).

13. on peut interpréter l'expression de I_n comme la décomposition de Fourier d'une fonction rectangle. Si on tronque la série de Fourier à un ordre donné, la série reconstruite est différente de la fonction rectangle. Elle présente des oscillations aux bords !

3.6 Equations au second ordre :

Le problème au second ordre s'écrit de la façon suivante

$$\Delta\phi_2 = 0 \text{ pour } (x, y, z) \in D \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial z} = 0 \text{ pour } z = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = L_y \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial x} = \frac{\partial X_2}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial y} \frac{\partial\phi_1}{\partial y} + \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial\phi_1}{\partial z} - X_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} \text{ en } x = 0 \quad (3.18)$$

$$E\phi_2 = -\frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\nabla}\phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E\phi_1 \text{ en } z = 0 \quad (3.19)$$

$$\eta_2 + \frac{\partial\phi_2}{\partial t} = -\frac{1}{2} |\tilde{\nabla}\phi_1|^2 - \eta_1 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z \partial t} \text{ en } z = 0 \quad (3.20)$$

$$+\text{condition de radiation en } x \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

On résout ce système d'équation en considérant tout d'abord la partie en 2ω des membres de droite puis de la partie constante en temps.

3.7 Solutions au second ordre :

On se place en notation complexe. Les produits des grandeurs du premier ordre (termes de forçage) vont conduire à des potentiels second ordre constants dans le temps et oscillant en 2ω .

3.7.1 Termes en 2ω :

On s'intéresse seulement ici aux termes en 2ω . Ils décrivent d'une part des termes reliés à la houle linéaire qui se propage ou évanescence. Ils décrivent des ondes se propageant à la vitesse de phase des ondes linéaires : on les appelle ondes liées. Elles existent également en milieu ouvert, du moins pour celles qui sont progressives et elles sont ainsi nécessaires à la description de la houle. D'autre part, il apparaît des ondes se propageant à leur propre vitesse de phase. Ces termes sont reliés à la non-coïncidence, au second ordre, entre les profils verticaux de vitesse des ondes liées et s'établissant sur le batteur en déplacement fini. Ces ondes dites libres viennent perturber le champ de vague lié et sont donc à éliminer. Une suppression très simple passe par la prédiction de leur amplitude et la génération d'ondes de même amplitude et direction mais en opposition de phase.

À partir de la solution au premier ordre, on peut calculer les termes dits de forçage dans les seconds membres des équations ci-dessus, termes ainsi nommés parce qu'ils dépendent du premier ordre. On reprend donc successivement chaque équation de conditions aux limites au second ordre et on calcule le terme de forçage correspondant. Pratiquement, un terme de la forme $F.G$ en notation réelle donne un terme en 2ω de la forme $\frac{1}{2}\underline{F}.\underline{G}$.

Condition de surface libre pour le potentiel : Les termes de droite, dits de forçage, s'écrivent après calculs sous la forme

$$-\frac{1}{2}\eta_1 \frac{\partial E\phi_1}{\partial z} - i\omega |\tilde{\nabla}\phi_1|^2 = \frac{ia_{mn}a_{pq}}{8\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \left[(6\omega^4 - 4k_{mn}k_{pq} - \alpha_m^2 - \alpha_p^2 - 4\mu_n\mu_q) \cos(\mu_n + \mu_q)y \right. \\ \left. + (6\omega^4 - 4k_{mn}k_{pq} - \alpha_m^2 - \alpha_p^2 + 4\mu_n\mu_q) \cos(\mu_n - \mu_q)y \right] \text{ en } z = 0$$

On propose alors un potentiel lié qui satisfait

$$E\phi_2 = -\frac{1}{2}\eta_1 \frac{\partial E\phi_1}{\partial z} - i\omega |\tilde{\nabla}\phi_1|^2$$

Cela fixe l'évolution horizontale du potentiel dit lié. Les conditions sur les murs latéraux sont vérifiées ainsi que la condition sur le fond. L'équation de Laplace fournit le comportement en z , si bien qu'on peut écrire le potentiel lié sous la forme

$$\phi_2 = \frac{iA_{mnpq}^+}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) + \frac{iA_{mnpq}^-}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z)$$

avec les nombres d'onde

$$(\alpha_{mnpq}^\pm)^2 = (k_{mn} + k_{pq})^2 + (\mu_n \pm \mu_q)^2$$

d'après l'équation de Laplace. En reportant l'expression du potentiel dans la condition de surface libre combinée, on cherche à obtenir les amplitudes.

$$\begin{aligned} E\phi_2 &= -4\omega^2 \phi_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{iA_{mnpq}^+}{2\omega} [-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^+ F^-(\alpha_{mnpq}^+, 0)] e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y \\ &\quad + \frac{iA_{mnpq}^-}{2\omega} [-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^- F^-(\alpha_{mnpq}^-, 0)] e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \quad \text{en } z = 0 \end{aligned}$$

Après identification, on aboutit aux égalités suivantes :

$$\underline{A_{mnpq}^\pm} = \frac{a_{mn} a_{pq}}{4} \frac{6\omega^4 - 2k_{mn}k_{pq} - (\alpha_{mnpq}^\pm)^2 \mp 2\mu_n\mu_q}{-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^\pm F^-(\alpha_{mnpq}^\pm, 0)}$$

Condition de surface libre pour l'élévation : Là encore, on évalue les termes de forçage à partir des grandeurs linéaires

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{2} \underline{\eta_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{4} |\tilde{\nabla} \phi_1|^2 &= \frac{a_{mn} a_{pq}}{8\omega^2} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} [(3\omega^4 - k_{mn}k_{pq} - \mu_n\mu_q) \cos(\mu_n + \mu_q)y \\ &\quad + (3\omega^4 - k_{mn}k_{pq} + \mu_n\mu_q) \cos(\mu_n - \mu_q)y] \quad \text{en } z = 0 \end{aligned}$$

L'élévation de surface libre liée doit satisfaire la condition

$$\underline{\eta_2} = -2i\omega \phi_2 - \frac{i\omega}{2} \underline{\eta_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{4} |\tilde{\nabla} \phi_1|^2 \quad \text{en } z = 0$$

On propose alors la forme suivante :

$$\underline{\eta_2} = \underline{a_{mnpq}^+} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y + \underline{a_{mnpq}^-} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y$$

On a besoin de

$$-2i\omega \phi_2 = \underline{A_{mnpq}^+} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y + \underline{A_{mnpq}^-} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \quad \text{en } z = 0$$

qu'on combine avec les termes de forçage pour obtenir les amplitudes de l'élévation :

$$\underline{a_{mnpq}^\pm} = \underline{A_{mnpq}^\pm} + \frac{a_{mn} a_{pq}}{8\omega^2} (3\omega^4 - k_{mn}k_{pq} \mp \mu_n\mu_q)$$

Condition sur le batteur : Les termes de forçage issus des grandeurs linéaires valent

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} X_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial X_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{(k_{mn} + k_{pq}) a_{mn} a_{pq}}{8\omega^3} \cos(\mu_n + \mu_q)y \\ &\quad [(k_{mn}^2 - \mu_n\mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) + \alpha_m \alpha_p F^-(\alpha_m, z) F^-(\alpha_p, z)] \\ &\quad + \frac{(k_{mn} + k_{pq}) a_{mn} a_{pq}}{8\omega^3} \cos(\mu_n - \mu_q)y \\ &\quad [(k_{mn}^2 + \mu_n\mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) + \alpha_m \alpha_p F^-(\alpha_m, z) F^-(\alpha_p, z)] \end{aligned}$$

On utilisera les transformations

$$\begin{aligned} F^\pm(\alpha_m, z) F^\pm(\alpha_p, z) &= \frac{1}{2} (F^+(\alpha_m, 0) F^+(\alpha_p, 0) + F^-(\alpha_m, 0) F^-(\alpha_p, 0)) F^+(\alpha_m + \alpha_p, z) \\ &\quad \pm \frac{1}{2} (F^+(\alpha_m, 0) F^+(-\alpha_p, 0) + F^-(\alpha_m, 0) F^-(-\alpha_p, 0)) F^+(\alpha_m - \alpha_p, z) \\ &= \frac{\omega^4 + \alpha_m \alpha_p}{2 \alpha_m \alpha_p} F^+(\alpha_m + \alpha_p, z) \mp \frac{\omega^4 - \alpha_m \alpha_p}{2 \alpha_m \alpha_p} F^+(\alpha_m - \alpha_p, z) \end{aligned}$$

Le terme de forçage incluant le potentiel lié s'écrit lui

$$-\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{A_{mnpq}^+}}{2\omega} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) - \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{A_{mnpq}^-}}{2\omega} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z) \quad \text{en } x = 0$$

On propose alors une forme de potentiel libre satisfaisant une condition de surface libre combinée homogène :

$$\underline{\phi_2} = \frac{i a_{mn}^l}{2\omega} e^{-i\gamma_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\beta_m, z)$$

avec le nombre d'onde $\gamma_{mn}^2 = \beta_m^2 - \mu_n^2$ où β_m satisfait la relation de dispersion $4\omega^2 = \beta_m F^-(\beta_m, 0)$. En combinant les termes de forçage, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_2^l}{\partial x} &= \frac{\gamma_{m'n'} a_{m'n'}^l}{2\omega} \cos(\mu_{n'} y) F^+(\beta_{m'}, z) \quad \text{en } x = 0 \\
&\text{d'où } \frac{\gamma_{m'n'} a_{m'n'}^l}{2\omega} \cos(\mu_{n'} y) F^+(\beta_{m'}, z) \\
&= -\frac{(k_{mn} + k_{pq}) A_{mnpq}^+}{2\omega} \cos(\mu_n + \mu_q) y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) - \frac{(k_{mn} + k_{pq}) A_{mnpq}^-}{2\omega} \cos(\mu_n - \mu_q) y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z) \\
&+ \frac{(k_{mn} + k_{pq}) a_{mn} a_{pq}}{8\omega^3} \\
&\quad \left\{ [(k_{mn} k_{pq} - \mu_n \mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) + \alpha_m \alpha_p F^-(\alpha_m, z) F^-(\alpha_p, z)] \cos(\mu_n + \mu_q) y \right. \\
&\quad \left. + [(k_{mn} k_{pq} + \mu_n \mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) + \alpha_m \alpha_p F^-(\alpha_m, z) F^-(\alpha_p, z)] \cos(\mu_n - \mu_q) y \right\}
\end{aligned}$$

Il reste à projeter sur les fonctions de forme en y et en z . On obtient, après simplifications (voir annexe)

$$\frac{\gamma_{m'n'} a_{m'n'}^l}{\beta_{m'}} \frac{e^{2\beta_{m'} - e^{-2\beta_{m'}}} + 2\beta_{m'}}{(e^{\beta_{m'}} + e^{-\beta_{m'}})^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-\varepsilon_{n'}} \mathcal{A}_{mnpn'-n}^{m'+} + \frac{\varepsilon_{n'}}{4} \mathcal{A}_{mNpn'-N}^{m'+} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{mnpn'+n}^{m'-}$$

avec les entiers $N = E\left[\frac{n'}{2}\right]$ et $\varepsilon_{n'} = 1$ si n' est pair et 0 sinon et les termes suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{mnpq}^{m'\pm} &= (k_{mn} + k_{pq}) \frac{a_{mn} a_{pq}}{\beta_{m'}} \left[\frac{6\omega^4 - (\alpha_{mnpq}^\pm)^2 - 2k_{mn} k_{pq} \mp 2\mu_n \mu_q}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_{mnpq}^\pm)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_m \alpha_p + k_{mn} k_{pq} \mp \mu_n \mu_q}{2\alpha_m \alpha_p} \frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} + \frac{\alpha_m \alpha_p - k_{mn} k_{pq} \pm \mu_n \mu_q}{2\alpha_m \alpha_p} \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right]
\end{aligned}$$

L'élévation de surface libre correspondante s'écrit simplement

$$\eta_2^l = \frac{a_{mn}^l}{\beta_{m'}} e^{-i\gamma_{mn} x} \cos(\mu_n y)$$

On devra générer les ondes de pulsation 2ω , progressives en x et stationnaires en y , d'amplitude $\frac{a_{0n}^l}{\beta_{0n}}$ pour $n = 0$ à $N_2 = E\left[\frac{k^l L_y}{\pi}\right]$ avec $k^l = \beta_0$.

3.7.2 Termes constants :

Ils mettent en évidence le phénomène de courant de retour...

Annexes 3D

Solution au premier ordre

$$\begin{aligned}\underline{\phi_1} &= \frac{\underline{ia_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \underline{\eta_1} &= \underline{a_{mn}} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \\ \underline{X_1} &= -i \frac{k_{mn} \underline{a_{mn}}}{\omega^2} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z)\end{aligned}$$

Calculs intermédiaires

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{\phi_1}}{\partial x} &= \frac{k_{mn} \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi_1}}{\partial y} &= -\frac{i \mu_n \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \sin(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi_1}}{\partial z} &= \frac{i \alpha_m \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^-(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial^2 \underline{\phi_1}}{\partial x^2} &= \frac{-ik_{mn}^2 \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z)\end{aligned}$$

Condition de surface libre pour le potentiel

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{\phi_1}}{\partial x} &= \frac{k_{mn} \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial \underline{\phi_1}}{\partial y} &= -\frac{i \mu_n \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \sin(\mu_n y) \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial \underline{\phi_1}}{\partial z} &= \frac{i \alpha_m \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^-(\alpha_m, 0) = \frac{i \omega^2 \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \quad \text{en } z = 0 \\ |\underline{\tilde{\nabla} \phi_1}|^2 &= \frac{\underline{a_{mn}} \underline{a_{pq}}}{\omega^2} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} [(k_{mn} k_{pq} - \omega^4) \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) - \mu_n \mu_q \sin(\mu_n y) \sin(\mu_q y)] \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{1}{2} 2i\omega |\underline{\tilde{\nabla} \phi_1}|^2 &= \frac{i \underline{a_{mn}} \underline{a_{pq}}}{\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} [(\omega^4 - k_{mn} k_{pq}) \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) + \mu_n \mu_q \sin(\mu_n y) \sin(\mu_q y)] \quad \text{en } z = 0 \\ \underline{\phi_1} &= \frac{\underline{ia_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi_1}}{\partial z} &= \frac{i \alpha_m \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^-(\alpha_m, z) \\ E \underline{\phi_1} &= -\omega^2 \underline{\phi_1} + \frac{\partial \underline{\phi_1}}{\partial z} = \frac{i \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) [-\omega^2 F^+(\alpha_m, z) + \alpha_m F^-(\alpha_m, z)] \\ \frac{\partial E \underline{\phi_1}}{\partial z} &= \frac{i \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) [-\omega^2 \alpha_m F^-(\alpha_m, z) + \alpha_m^2 F^+(\alpha_m, z)] \\ \frac{\partial E \underline{\phi_1}}{\partial z} &= \frac{i \underline{a_{mn}}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) [-\omega^4 + \alpha_m^2] \quad \text{en } z = 0 \\ \underline{\eta_1} &= \underline{a_{mn}} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \\ -\frac{1}{2} \underline{\eta_1} \frac{\partial E \underline{\phi_1}}{\partial z} &= \frac{i \underline{a_{mn}} \underline{a_{pq}}}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) [\omega^4 - \alpha_m^2] \quad \text{en } z = 0 \\ &= \frac{i \underline{a_{mn}} \underline{a_{pq}}}{4\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) [2\omega^4 - \alpha_m^2 - \alpha_p^2] \quad \text{en } z = 0\end{aligned}$$

On a utilisé la symétrie (sommutation sur les indices muets)

$$\sum_p \sum_q A_{pq} B_p = \sum_p \sum_q A_{qp} B_q = \frac{1}{2} \sum_p \sum_q A_{pq} (B_p + B_q)$$

lorsque A_{pq} est symétrique. On a ensuite les relations trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\underline{\eta_1}\frac{\partial E\phi_1}{\partial z} - i\omega|\widetilde{\nabla}\underline{\phi_1}|^2 &= \frac{ia_{mn}a_{pq}}{4\omega} [(6\omega^4 - 4k_{mn}k_{pq} - \alpha_m^2 - \alpha_p^2) \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) + 4\mu_n\mu_q \sin(\mu_n y) \sin(\mu_q y)] e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \\
&= \frac{ia_{mn}a_{pq}}{8\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} [(6\omega^4 - 4k_{mn}k_{pq} - \alpha_m^2 - \alpha_p^2 - 4\mu_n\mu_q) \cos(\mu_n + \mu_q)y \\
&\quad + (6\omega^4 - 4k_{mn}k_{pq} - \alpha_m^2 - \alpha_p^2 + 4\mu_n\mu_q) \cos(\mu_n - \mu_q)y] \quad \text{en } z = 0
\end{aligned}$$

Condition de surface libre pour l'élévation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{i\omega^2 a_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \quad \text{en } z = 0 \\
i\omega \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= -\omega^2 \underline{a_{mn}} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \quad \text{en } z = 0 \\
\underline{\eta_1} &= \underline{a_{mn}} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \\
-\frac{i\omega}{2}\underline{\eta_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{\omega^2 \underline{a_{mn}} a_{pq}}{2} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{1}{4}|\widetilde{\nabla}\underline{\phi_1}|^2 &= \frac{a_{mn}a_{pq}}{4\omega^2} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} [(\omega^4 - k_{mn}k_{pq}) \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) + \mu_n\mu_q \sin(\mu_n y) \sin(\mu_q y)] \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{i\omega}{2}\underline{\eta_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{4}|\widetilde{\nabla}\underline{\phi_1}|^2 &= \frac{a_{mn}a_{pq}}{4\omega^2} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} [(3\omega^4 - k_{mn}k_{pq}) \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) + \mu_n\mu_q \sin(\mu_n y) \sin(\mu_q y)] \quad \text{en } z = 0 \\
&= \frac{a_{mn}a_{pq}}{8\omega^2} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} [(3\omega^4 - k_{mn}k_{pq} - \mu_n\mu_q) \cos(\mu_n + \mu_q)y + \\
&\quad (3\omega^4 - k_{mn}k_{pq} + \mu_n\mu_q) \cos(\mu_n - \mu_q)y] \quad \text{en } z = 0
\end{aligned}$$

Potentiel second ordre lié

$$\underline{\phi_2} = \frac{iA_{mnpq}^+}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) + \frac{iA_{mnpq}^-}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z)$$

avec

$$\begin{aligned}
(\alpha_{mnpq}^+)^2 &= (k_{mn} + k_{pq})^2 + (\mu_n + \mu_q)^2 \\
(\alpha_{mnpq}^-)^2 &= (k_{mn} + k_{pq})^2 + (\mu_n - \mu_q)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\phi_2} &= \frac{iA_{mnpq}^+}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y + \frac{iA_{mnpq}^-}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \quad \text{en } z = 0 \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= \frac{i\alpha_{mnpq}^+ A_{mnpq}^+}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^-(\alpha_{mnpq}^+, z) + \frac{i\alpha_{mnpq}^- A_{mnpq}^-}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^-(\alpha_{mnpq}^-, z) \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= \frac{i\alpha_{mnpq}^+ A_{mnpq}^+}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^-(\alpha_{mnpq}^+, 0) \\
&\quad + \frac{i\alpha_{mnpq}^- A_{mnpq}^-}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^-(\alpha_{mnpq}^-, 0) \quad \text{en } z = 0 \\
E\underline{\phi_2} &= -4\omega^2 \underline{\phi_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \\
&= \frac{iA_{mnpq}^+}{2\omega} [-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^+ F^-(\alpha_{mnpq}^+, 0)] e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y \\
&\quad + \frac{iA_{mnpq}^-}{2\omega} [-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^- F^-(\alpha_{mnpq}^-, 0)] e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \quad \text{en } z = 0
\end{aligned}$$

On obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{iA_{mnpq}^+}{2\omega} [-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^+ F^-(\alpha_{mnpq}^+, 0)] &= \frac{ia_{mn}a_{pq}}{8\omega} [6\omega^4 - 4k_{mn}k_{pq} - \alpha_m^2 - \alpha_p^2 - 4\mu_n\mu_q] \\
\frac{iA_{mnpq}^-}{2\omega} [-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^- F^-(\alpha_{mnpq}^-, 0)] &= \frac{ia_{mn}a_{pq}}{8\omega} [6\omega^4 - 4k_{mn}k_{pq} - \alpha_m^2 - \alpha_p^2 + 4\mu_n\mu_q]
\end{aligned}$$

On peut utiliser les simplifications suivantes

$$\begin{aligned}(\alpha_{mnpq}^+)^2 &= \alpha_m^2 + \alpha_p^2 + 2k_{mn}k_{pq} + 2\mu_n\mu_q \\(\alpha_{mnpq}^-)^2 &= \alpha_m^2 + \alpha_p^2 + 2k_{mn}k_{pq} - 2\mu_n\mu_q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{A}_{mnpq}^+ &= \frac{a_{mn}a_{pq}}{4} \frac{6\omega^4 - (\alpha_{mnpq}^+)^2 - 2k_{mn}k_{pq} - 2\mu_n\mu_q}{-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^+ F^-(\alpha_{mnpq}^+, 0)} \\ \underline{A}_{mnpq}^- &= \frac{a_{mn}a_{pq}}{4} \frac{6\omega^4 - (\alpha_{mnpq}^-)^2 - 2k_{mn}k_{pq} + 2\mu_n\mu_q}{-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^- F^-(\alpha_{mnpq}^-, 0)}\end{aligned}$$

Élévation de surface libre liée

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \underline{a}_{mnpq}^+ e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y + \underline{a}_{mnpq}^- e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \\ &= -2i\omega\underline{\phi}_2 - \frac{i\omega}{2}\underline{\eta}_1 \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} - \frac{1}{4}|\tilde{\nabla}\underline{\phi}_1|^2 \quad \text{en } z = 0 \\ -2i\omega\underline{\phi}_2 &= \underline{A}_{mnpq}^+ e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y + \underline{A}_{mnpq}^- e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{i\omega}{2}\underline{\eta}_1 \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} - \frac{1}{4}|\tilde{\nabla}\underline{\phi}_1|^2 &= \frac{a_{mn}a_{pq}}{8\omega^2} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} [(3\omega^4 - k_{mn}k_{pq} - \mu_n\mu_q) \cos(\mu_n + \mu_q)y + \\ &\quad (3\omega^4 - k_{mn}k_{pq} + \mu_n\mu_q) \cos(\mu_n - \mu_q)y] \quad \text{en } z = 0 \\ \underline{a}_{mnpq}^+ &= \underline{A}_{mnpq}^+ + \frac{a_{mn}a_{pq}}{8\omega^2} (3\omega^4 - k_{mn}k_{pq} - \mu_n\mu_q) \\ \underline{a}_{mnpq}^- &= \underline{A}_{mnpq}^- + \frac{a_{mn}a_{pq}}{8\omega^2} (3\omega^4 - k_{mn}k_{pq} + \mu_n\mu_q)\end{aligned}$$

Calculs intermédiaires

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} &= \frac{k_{mn}a_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial y} &= -\frac{i\mu_n a_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \sin(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{i\alpha_m a_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^-(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial^2 \underline{\phi}_1}{\partial x^2} &= \frac{-ik_{mn}^2 a_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z)\end{aligned}$$

Condition sur le batteur

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \underline{\phi}_1}{\partial x^2} &= \frac{-ik_{mn}^2 a_{mn}}{\omega} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \quad \text{en } x = 0 \\ \underline{X}_1 &= -i \frac{k_{mn}a_{mn}}{\omega^2} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ -\frac{1}{2}\underline{X}_1 \frac{\partial^2 \underline{\phi}_1}{\partial x^2} &= \frac{k_{mn}k_{pq}(k_{mn} + k_{pq})a_{mn}a_{pq}}{4\omega^3} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) \quad \text{en } x = 0\end{aligned}\tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{X}_1}{\partial y} &= i \frac{\mu_n k_{mn} a_{mn}}{\omega^2} \sin(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial y} &= -\frac{i\mu_n a_{mn}}{\omega} \sin(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \quad \text{en } x = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial y} &= \frac{\mu_n \mu_q (k_{mn} + k_{pq}) a_{mn} a_{pq}}{4\omega^3} \sin(\mu_n y) \sin(\mu_q y) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) \quad \text{en } x = 0\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{X}_1}{\partial z} &= -i \frac{\alpha_m k_{mn} a_{mn}}{\omega^2} \cos(\mu_n y) F^-(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{i\alpha_m a_{mn}}{\omega} \cos(\mu_n y) F^-(\alpha_m, z) \quad \text{en } x = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \underline{X}_1}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{\alpha_m \alpha_p (k_{mn} + k_{pq}) a_{mn} a_{pq}}{4\omega^3} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) F^-(\alpha_m, z) F^-(\alpha_p, z) \quad \text{en } x = 0\end{aligned}\tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
(3.22) + (3.23) + (3.24) &= \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a_{mn}} \underline{a_{pq}}}{8\omega^3} \\
&\quad \left\{ [(k_{mn}k_{pq} - \mu_n\mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) + \alpha_m\alpha_p F^-(\alpha_m, z) F^-(\alpha_p, z)] \cos(\mu_n + \mu_q)y \right. \\
&\quad \left. + [(k_{mn}k_{pq} + \mu_n\mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) + \alpha_m\alpha_p F^-(\alpha_m, z) F^-(\alpha_p, z)] \cos(\mu_n - \mu_q)y \right\} \\
\phi_2 &= \frac{iA_{mnpq}^+}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) + \frac{iA_{mnpq}^-}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z) \\
-\frac{\partial\phi_2}{\partial x} &= -\frac{(k_{mn} + k_{pq}) A_{mnpq}^+}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) \\
&\quad - \frac{(k_{mn} + k_{pq}) A_{mnpq}^-}{2\omega} e^{-i(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z) \\
-\frac{\partial\phi_2}{\partial x} &= -\frac{(k_{mn} + k_{pq}) A_{mnpq}^+}{2\omega} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) - \frac{(k_{mn} + k_{pq}) A_{mnpq}^-}{2\omega} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z) \quad \text{en } x = 0
\end{aligned}$$

Potentiel libre

$$\phi_2^l = \frac{ia_{m'n'}^l}{2\omega} e^{-i\gamma_{m'n'}x} \cos(\mu_{n'}y) F^+(\beta_{m'}, z)$$

avec $(\gamma_{m'n'})^2 = \beta_{m'}^2 - \mu_{n'}^2$. On continue...

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi_2^l}{\partial x} &= \frac{\gamma_{m'n'} a_{m'n'}^l}{2\omega} \cos(\mu_{n'}y) F^+(\beta_{m'}, z) \quad \text{en } x = 0 \\
\text{d'où } \frac{\gamma_{m'n'} a_{m'n'}^l}{2\omega} \cos(\mu_{n'}y) F^+(\beta_{m'}, z) \\
&= -\frac{(k_{mn} + k_{pq}) A_{mnpq}^+}{2\omega} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) - \frac{(k_{mn} + k_{pq}) A_{mnpq}^-}{2\omega} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z) \\
&\quad + \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a_{mn}} \underline{a_{pq}}}{8\omega^3} \\
&\quad \left\{ [(k_{mn}k_{pq} - \mu_n\mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) + \alpha_m\alpha_p F^-(\alpha_m, z) F^-(\alpha_p, z)] \cos(\mu_n + \mu_q)y \right. \\
&\quad \left. + [(k_{mn}k_{pq} + \mu_n\mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\alpha_p, z) + \alpha_m\alpha_p F^-(\alpha_m, z) F^-(\alpha_p, z)] \cos(\mu_n - \mu_q)y \right\} \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Il reste à projeter sur les fonctions de forme en y et en z . En y , les fonctions $\cos(\mu_n y)$ sont orthogonales.

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_y} \cos(\mu_{n'}y) \cos(\mu_n y) dy &= \frac{L_y}{2} \delta_{n'n} (1 + \delta_{0n'}) \\
\int_0^{L_y} \cos(\mu_{n'}y) \cos(\mu_n + \mu_q)y dy &= \frac{L_y}{2} \delta(n' - (n + q))(1 + \delta_{0n'}) \\
\int_0^{L_y} \cos(\mu_{n'}y) \cos(\mu_n - \mu_q)y dy &= \frac{L_y}{2} \delta(n' - |n - q|)(1 + \delta_{0n'})
\end{aligned}$$

On peut remarquer qu'on pourra simplifier par $\frac{L_y}{2}(1 + \delta_{0n'})$ de chaque côté de l'égalité (3.25). En z , les fonctions $\{F^+(\beta_m, z)\}_m$ sont orthogonales.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 F^+(\beta_n, z)^2 dz &= \frac{\frac{e^{2\beta_n} - e^{-2\beta_n}}{2} + 2\beta_n}{\beta_n(e^{\beta_n} + e^{-\beta_n})^2} \\
\int_{-1}^0 F^+(\beta, z) F^+(\alpha, z) dz &= \frac{\beta F^-(\beta, 0) - \alpha F^-(\alpha, 0)}{\beta^2 - \alpha^2} \quad \text{pour } \alpha \neq \beta \quad (3.26)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 F^+(\beta_{m'}, z) F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) dz &= \frac{4\omega^2 - \alpha_{mnpq}^+ F^-(\alpha_{mnpq}^+, 0)}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_{mnpq}^+)^2} \\
\int_{-1}^0 F^+(\beta_{m'}, z) F^+(\alpha_{mnpq}^-, z) dz &= \frac{4\omega^2 - \alpha_{mnpq}^- F^-(\alpha_{mnpq}^-, 0)}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_{mnpq}^-)^2}
\end{aligned}$$

On a ensuite des termes du type $F^+(\beta, z) F^+(\alpha, z) F^+(\gamma, z)$ à intégrer sur la verticale

$$\begin{aligned}
F^\pm(\beta, z) F^\pm(\alpha, z) &= \frac{(e^{\beta Z} \pm e^{-\beta Z})(e^{\alpha Z} \pm e^{-\alpha Z})}{(e^\beta + e^{-\beta})(e^\alpha + e^{-\alpha})} \\
&= \frac{e^{(\beta+\alpha)Z} + e^{-(\beta+\alpha)Z} \pm (e^{(\beta-\alpha)Z} + e^{(\alpha-\beta)Z})}{(e^\beta + e^{-\beta})(e^\alpha + e^{-\alpha})} \\
&= \frac{(e^{(\beta+\alpha)} + e^{-(\beta+\alpha)}) F^+(\beta + \alpha, z) \pm (e^{(\beta-\alpha)} + e^{(\alpha-\beta)}) F^+(\beta - \alpha, z)}{(e^\beta + e^{-\beta})(e^\alpha + e^{-\alpha})} \\
&= \frac{e^{(\beta+\alpha)} + e^{-(\beta+\alpha)}}{(e^\beta + e^{-\beta})(e^\alpha + e^{-\alpha})} F^+(\beta + \alpha, z) \pm \frac{e^{(\beta-\alpha)} + e^{(\alpha-\beta)}}{(e^\beta + e^{-\beta})(e^\alpha + e^{-\alpha})} F^+(\beta - \alpha, z) \\
&= \frac{1}{2} (F^+(\beta, 0) F^+(\alpha, 0) + F^-(\beta, 0) F^-(\alpha, 0)) F^+(\beta + \alpha, z) \\
&\pm \frac{1}{2} (F^+(\beta, 0) F^+(-\alpha, 0) + F^-(\beta, 0) F^-(-\alpha, 0)) F^+(\beta - \alpha, z) \\
&= \frac{\omega^4 + \beta \alpha}{2 \beta \alpha} F^+(\beta + \alpha, z) \mp \frac{\omega^4 - \beta \alpha}{2 \beta \alpha} F^+(\beta - \alpha, z)
\end{aligned}$$

En utilisant les indices $\beta = \alpha_m$ et $\alpha = \alpha_p$, on obtient

$$F^\pm(\alpha_m, z) F^\pm(\alpha_p, z) = \frac{\omega^4 + \alpha_m \alpha_p}{2 \alpha_m \alpha_p} F^+(\alpha_m + \alpha_p, z) \mp \frac{\omega^4 - \alpha_m \alpha_p}{2 \alpha_m \alpha_p} F^+(\alpha_m - \alpha_p, z)$$

d'où, avec la relation (3.26)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 F^\pm(\alpha_m, z) F^\pm(\alpha_p, z) F^+(\beta_{m'}, z) dz &= \\
\frac{\omega^4 + \alpha_m \alpha_p}{2 \alpha_m \alpha_p} \frac{4\omega^2 - (\alpha_m + \alpha_p) F^-(\alpha_m + \alpha_p, 0)}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} &\mp \frac{\omega^4 - \alpha_m \alpha_p}{2 \alpha_m \alpha_p} \frac{4\omega^2 - (\alpha_m - \alpha_p) F^-(\alpha_m - \alpha_p, 0)}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}
\end{aligned}$$

En utilisant $F^-(\alpha_n \pm \alpha_m, 0) = \omega^2 \frac{\alpha_n \pm \alpha_m}{\omega^4 \pm \alpha_n \alpha_m}$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 F^\pm(\alpha_m, z) F^\pm(\alpha_p, z) F^+(\beta_{m'}, z) dz &= \frac{\omega^2}{2 \alpha_m \alpha_p} \left[\frac{4(\omega^4 + \alpha_m \alpha_p) - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} \mp \frac{4(\omega^4 - \alpha_m \alpha_p) - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right] \\
&= \frac{\omega^2}{2 \alpha_m \alpha_p} \left[\frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} \mp \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right]
\end{aligned}$$

On reporte cette expression dans celle de $\underline{a_{m'n'}^l}$ en simplifiant par ω^2 et $\alpha_m \alpha_p$ quand c'est possible. On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_{m'n'} \underline{a_{m'n'}^l}}{2\omega} \frac{e^{2\beta_{m'}} - e^{-2\beta_{m'}}}{\beta_{m'}(e^{\beta_{m'}} + e^{-\beta_{m'}})^2} + 2\beta_{m'} &= -\frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a_{mnpq}^+}}{2\omega} \delta(n' - (n + q)) \frac{4\omega^2 - \alpha_{mnpq}^+ F^-(\alpha_{mnpq}^+, 0)}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_{mnpq}^+)^2} \\
&- \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a_{mnpq}^-}}{2\omega} \delta(n' - |n - q|) \frac{4\omega^2 - \alpha_{mnpq}^- F^-(\alpha_{mnpq}^-, 0)}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_{mnpq}^-)^2} \\
&+ \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a_{mn}} \underline{a_{pq}}}{16\omega} \delta(n' - (n + q)) \\
&\left[\frac{k_{mn} k_{pq} - \mu_n \mu_q}{\alpha_m \alpha_p} \left(\frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} - \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right) \right. \\
&\left. + \frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} + \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a_{mn}} \underline{a_{pq}}}{16\omega} \delta(n' - |n - q|) \\
&\left[\frac{k_{mn} k_{pq} + \mu_n \mu_q}{\alpha_m \alpha_p} \left(\frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} - \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right) \right. \\
&\left. + \frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} + \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right] \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Ensuite, on utilise les expressions connues des amplitudes liées, à savoir

$$\begin{aligned} \underline{A}_{mnpq}^+ &= \frac{\underline{a}_{mn} \underline{a}_{pq}}{4} \frac{6\omega^4 - (\alpha_{mnpq}^+)^2 - 2k_{mn}k_{pq} - 2\mu_n\mu_q}{-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^+ F^-(\alpha_{mnpq}^+, 0)} \\ \underline{A}_{mnpq}^- &= \frac{\underline{a}_{mn} \underline{a}_{pq}}{4} \frac{6\omega^4 - (\alpha_{mnpq}^-)^2 - 2k_{mn}k_{pq} + 2\mu_n\mu_q}{-4\omega^2 + \alpha_{mnpq}^- F^-(\alpha_{mnpq}^-, 0)} \end{aligned}$$

qui donnent une simplification du terme $4\omega^2 - \alpha_{mnpq}^+ F^-(\alpha_{mnpq}^+, 0)$ (ainsi qu'un changement de signe). On simplifie aussi de part et d'autre par $1/2\omega$.

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{m'n'}}{\beta_{m'}} \underline{a}_{m'n'}^l \frac{\frac{e^{2\beta_{m'}} - e^{-2\beta_{m'}}}{2} + 2\beta_{m'}}{(e^{\beta_{m'}} + e^{-\beta_{m'}})^2} &= \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a}_{mn} \underline{a}_{pq}}{4} \delta(n' - (n + q)) \frac{6\omega^4 - (\alpha_{mnpq}^+)^2 - 2k_{mn}k_{pq} - 2\mu_n\mu_q}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_{mnpq}^+)^2} \\ &+ \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a}_{mn} \underline{a}_{pq}}{4} \delta(n' - |n - q|) \frac{6\omega^4 - (\alpha_{mnpq}^-)^2 - 2k_{mn}k_{pq} + 2\mu_n\mu_q}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_{mnpq}^-)^2} \\ &+ \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a}_{mn} \underline{a}_{pq}}{8} \delta(n' - (n + q)) \\ &\left[\frac{k_{mn}k_{pq} - \mu_n\mu_q}{\alpha_m \alpha_p} \left(\frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} - \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} + \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{(k_{mn} + k_{pq}) \underline{a}_{mn} \underline{a}_{pq}}{8} \delta(n' - |n - q|) \\ &\left[\frac{k_{mn}k_{pq} + \mu_n\mu_q}{\alpha_m \alpha_p} \left(\frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} - \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} + \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

On pose les notations suivantes, qu'on factorise

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{mnpq}^{m'\pm} &= (k_{mn} + k_{pq}) \underline{a}_{mn} \underline{a}_{pq} \left[\frac{6\omega^4 - (\alpha_{mnpq}^\pm)^2 - 2k_{mn}k_{pq} \mp 2\mu_n\mu_q}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_{mnpq}^\pm)^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} + \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_{mn}k_{pq} \mp \mu_n\mu_q}{\alpha_m \alpha_p} \left(\frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} - \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right) \right] \\ &= (k_{mn} + k_{pq}) \underline{a}_{mn} \underline{a}_{pq} \left[\frac{6\omega^4 - (\alpha_{mnpq}^\pm)^2 - 2k_{mn}k_{pq} \mp 2\mu_n\mu_q}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_{mnpq}^\pm)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_m \alpha_p + k_{mn}k_{pq} \mp \mu_n\mu_q}{2 \alpha_m \alpha_p} \frac{4\omega^4 - (\alpha_m - \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m + \alpha_p)^2} + \frac{\alpha_m \alpha_p - k_{mn}k_{pq} \pm \mu_n\mu_q}{2 \alpha_m \alpha_p} \frac{4\omega^4 - (\alpha_m + \alpha_p)^2}{\beta_{m'}^2 - (\alpha_m - \alpha_p)^2} \right] \end{aligned}$$

si bien que l'amplitude libre s'écrit

$$\frac{\gamma_{m'n'}}{\beta_{m'}} \underline{a}_{m'n'}^l \frac{\frac{e^{2\beta_{m'}} - e^{-2\beta_{m'}}}{2} + 2\beta_{m'}}{(e^{\beta_{m'}} + e^{-\beta_{m'}})^2} = \frac{1}{4} \left[\delta(n' - (n + q)) \mathcal{A}_{mnpq}^{m'+} + \delta(n' - |n - q|) \mathcal{A}_{mnpq}^{m'-} \right]$$

On doit réintroduire les sommes¹⁴ sur n et q pour utiliser les symboles de Kronecker

$$\mathcal{A}_{nq}^+ \delta(n' - (n + q)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{nq}^+ \delta(n' - (n + q)) = \sum_{n=0}^{n'} \mathcal{A}_{nn'-n}^+ \quad (3.31)$$

$$\mathcal{A}_{nq}^- \delta(n' - |n - q|) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{nq}^- \delta(n' - |n - q|) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{nn'+n}^- + \sum_{q=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{n'+q}^- \quad (3.32)$$

Les sommes précédentes sont désormais triples, sur m , p et n ou q . On peut remarquer la symétrie du domaine de sommation par rapport à la droite $n = q$. Pour ne calculer que ce qui est nécessaire, on coupe alors la somme de droite de (3.31) en deux et on montre que la seconde somme de (3.32) est égale à la première. Pour cela, on écrit dans un premier temps

$$\sum_{n=0}^{n'} \mathcal{A}_{nn'-n}^+ = \sum_{n=0}^{N-\varepsilon_{n'}} \mathcal{A}_{nn'-n}^+ + \varepsilon_{n'} \mathcal{A}_{Nn'-N}^+ + \sum_{n=N+1}^{n'} \mathcal{A}_{nn'-n}^+ \quad (3.33)$$

14. On omet pour les expressions (3.31) à (3.34) les indices m et p et l'exposant m' .

avec $\varepsilon_{n'} = 1$ si n' est pair et 0 sinon, et $N = E\left[\frac{n'}{2}\right]$. On effectue un changement d'indice $q = n' - n$ dans le troisième terme de (3.33)

$$\sum_{n=0}^{n'} \mathcal{A}_{n n' - n}^+ = \sum_{n=0}^{N - \varepsilon_{n'}} \mathcal{A}_{n n' - n}^+ + \varepsilon_{n'} \mathcal{A}_{N n' - N}^+ + \sum_{q=0}^{n' - (N+1)} \mathcal{A}_{n' - q q}^+ \quad (3.34)$$

On aura exactement $n' - (N + 1) = N - \varepsilon_{n'}$. On utilise en outre les symétries mises en place précédemment pour les termes généraux des séries quadruples¹⁵

$$\mathcal{A}_{mnpq}^\pm = \mathcal{A}_{pqmn}^\pm \quad (3.35)$$

d'où, pour la troisième somme

$$\mathcal{A}_{m n' - q pq}^+ = \mathcal{A}_{pqm n' - n}^+ = \mathcal{A}_{mnp n' - n}^+$$

la dernière égalité étant obtenue grâce à un changement d'indices muets. En regroupant on obtient

$$\sum_{n=0}^{n'} \mathcal{A}_{mnp n' - n}^+ = 2 \sum_{n=0}^{N - \varepsilon_{n'}} \mathcal{A}_{mnp n' - n}^+ + \varepsilon_{n'} \mathcal{A}_{mNp n' - N}^+ \quad (3.36)$$

De même pour le second terme de (3.32), pour lequel on utilise la symétrie (3.35) puis un changement d'indices muets (sur p , m et q) pour montrer l'égalité avec le premier terme. On a ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{mnp n' + n}^- + \sum_{q=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{m n' + q pq}^- = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{mnp n' + n}^- \quad (3.37)$$

L'amplitude libre vaut après introduction des expressions (3.36) et (3.37)

$$\frac{\gamma_{m'n'}}{\beta_{m'}} d_{m'n'}^l \frac{\frac{e^{2\beta_{m'}} - e^{-2\beta_{m'}}}{2} + 2\beta_{m'}}{(e^{\beta_{m'}} + e^{-\beta_{m'}})^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N - \varepsilon_{n'}} \mathcal{A}_{mnp n' - n}^{m'+} + \frac{\varepsilon_{n'}}{4} \mathcal{A}_{mNp n' - N}^{m'+} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{mnp n' + n}^{m'-}$$

15. On omet pour les expressions (3.35) à (3.37) l'exposant m' .

Annexes 3D 2

Il s'agit de trouver la solution indépendante du temps. Pour cela, on considère cette fois-ci des produits de termes du premier ordre dont l'un de termes est conjugué.

$$FG = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{F} \overline{G}] = \frac{1}{4} (\underline{F} \overline{G} + \overline{\underline{F}} G)$$

La deuxième expression est simple à utiliser car elle donne directement un réel. Les dérivées temporelles de ces produits seront nulles.

Solution au premier ordre

$$\begin{aligned}\underline{\phi}_1 &= \frac{\underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \underline{\eta}_1 &= \frac{\underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \\ \underline{X}_1 &= -i \frac{k_{mn} \underline{a}_{mn}}{\omega^2} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z)\end{aligned}$$

Calculs intermédiaires

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial x} &= \frac{k_{mn} \underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial y} &= -\frac{i \mu_n \underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \sin(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{i \alpha_m \underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^-(\alpha_m, z) \\ \frac{\partial^2 \underline{\phi}_1}{\partial x^2} &= -\frac{k_{mn}^2 \underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z)\end{aligned}$$

Solution au second ordre

Condition de surface libre pour le potentiel : La dérivée temporelle du gradient au carré est nulle

$$\begin{aligned}\frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{i \underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) [-\omega^4 + \alpha_m^2] \quad \text{en } z = 0 \\ \underline{\eta}_1 &= \frac{\underline{a}_{mn}}{\omega} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \\ -\frac{1}{2} \underline{\eta}_1 \frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{i \underline{a}_{mn} \overline{a_{pq}}}{2\omega} [\omega^4 - \alpha_m^2] e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) \quad \text{en } z = 0 \\ -\frac{1}{4} \left(\underline{\eta}_1 \frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} + \underline{\eta}_1 \frac{\partial E \overline{\phi}_1}{\partial z} \right) &= \frac{i \underline{a}_{mn} \overline{a_{pq}}}{4\omega} [\omega^4 - \alpha_m^2 - \omega^4 + \overline{\alpha_p}^2] e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) \quad \text{en } z = 0 \\ &= \frac{i \underline{a}_{mn} \overline{a_{pq}}}{8\omega} [\alpha_p^2 - \alpha_m^2] e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} (\cos(\mu_n + \mu_q)y + \cos(\mu_n - \mu_q)y) \quad \text{en } z = 0 \quad \text{en } z = 0\end{aligned}$$

en utilisant $\overline{\alpha_p}^2 = \alpha_p^2$. On pose alors un potentiel

$$\underline{\phi}_2 = i \underline{B}_{mnpq}^+ e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) + i \underline{B}_{mnpq}^- e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z)$$

avec les nombres d'onde

$$\begin{aligned}(\alpha_{mnpq}^+)^2 &= (k_{mn} - \overline{k_{pq}})^2 + (\mu_n + \mu_q)^2 \\ (\alpha_{mnpq}^-)^2 &= (k_{mn} - \overline{k_{pq}})^2 + (\mu_n - \mu_q)^2\end{aligned}$$

Il satisfait la condition combinée de surface libre

$$E \underline{\phi}_2 = \frac{\partial \underline{\phi}_2}{\partial z} = -\frac{1}{4} \left(\underline{\eta}_1 \frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} + \underline{\eta}_1 \frac{\partial E \overline{\phi}_1}{\partial z} \right)$$

ce qui donne les amplitudes

$$\underline{B}_{mnpq}^\pm = \frac{\underline{a}_{mn} \overline{a_{pq}}}{8\omega} \frac{\alpha_p^2 - \alpha_m^2}{\alpha_{mnpq}^\pm F^-(\alpha_{mnpq}^\pm, z)}$$

Ce potentiel donnera une vitesse constante liée mais pas de composante dans l'élévation de surface libre puisqu'il ne dépend pas du temps.

Condition de surface libre pour l'élévation : Les termes de forçage s'écrivent

$$\begin{aligned}
i\omega \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= i\omega \omega^2 \underline{\phi_1} \quad \text{en } z = 0 \\
i\omega \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= -\omega^2 \underline{a_{mn}} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \quad \text{en } z = 0 \\
\underline{\eta_1} &= \underline{a_{mn}} e^{-ik_{mn}x} \cos(\mu_n y) \\
-\frac{1}{2} i\omega \underline{\eta_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{\omega^2}{2} \underline{a_{mn}} \overline{a_{pq}} e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) \\
-\frac{1}{4} \underline{\tilde{\nabla} \phi_1} \overline{\underline{\tilde{\nabla} \phi_1}} &= -\frac{\underline{a_{mn}} \overline{a_{pq}}}{4\omega^2} e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} [(k_{mn} \overline{k_{pq}} + \omega^4) \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) \\
&\quad + \mu_n \mu_q \sin(\mu_n y) \sin(\mu_q y)] \quad \text{en } z = 0 \\
-\frac{1}{2} i\omega \underline{\eta_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{4} \underline{\tilde{\nabla} \phi_1} \overline{\underline{\tilde{\nabla} \phi_1}} &= \frac{\underline{a_{mn}} \overline{a_{pq}}}{8\omega^2} e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} [(\omega^4 - k_{mn} \overline{k_{pq}} + \mu_n \mu_q) \cos(\mu_n + \mu_q)y \\
&\quad + (\omega^4 - k_{mn} \overline{k_{pq}} - \mu_n \mu_q) \cos(\mu_n - \mu_q)y] \quad \text{en } z = 0
\end{aligned}$$

L'élévation de surface libre liée sera de la forme

$$\underline{\eta_2} = \underline{a_{mnpq}^+} e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y + \underline{a_{mnpq}^-} e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y$$

Elle satisfait la condition de surface libre

$$\underline{\eta_2} = -\frac{1}{2} i\omega \underline{\eta_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{4} \underline{\tilde{\nabla} \phi_1} \overline{\underline{\tilde{\nabla} \phi_1}}$$

d'où

$$\underline{a_{mnpq}^\pm} = \frac{\underline{a_{mn}} \overline{a_{pq}}}{8\omega^2} (\omega^4 - k_{mn} \overline{k_{pq}} \pm \mu_n \mu_q)$$

On peut interpréter cette élévation comme une variation du niveau moyen après le passage du front d'onde. On peut également considérer un niveau moyen nul et modifier le potentiel de la façon suivante

$$\underline{\phi_2'} = \underline{\phi_2} + \left[\underline{a_{mnpq}^+} e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y + \underline{a_{mnpq}^-} e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \right] t$$

Condition sur le batteur :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= \frac{-ik_{mn}^2 \underline{a_{mn}}}{\omega} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \quad \text{en } x = 0 \\
\underline{X_1} &= -i \frac{k_{mn} \underline{a_{mn}}}{\omega^2} \cos(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\
-\frac{1}{4} \left(\overline{\underline{X_1}} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \underline{X_1} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) &= -\frac{k_{mn} \overline{k_{pq}} (k_{mn} + \overline{k_{pq}}) \underline{a_{mn}} \overline{a_{pq}}}{4\omega^3} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) F^+(\alpha_m, z) F^+(\overline{\alpha_p}, z) \quad \text{en } x = 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{X_1}}{\partial y} &= i \frac{\mu_n k_{mn} \underline{a_{mn}}}{\omega^2} \sin(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial y} &= -\frac{i \mu_n \underline{a_{mn}}}{\omega} \sin(\mu_n y) F^+(\alpha_m, z) \quad \text{en } x = 0 \\
\frac{1}{4} \left(\overline{\frac{\partial \underline{X_1}}{\partial y}} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \underline{X_1}}{\partial y} \overline{\frac{\partial \phi_1}{\partial y}} \right) &= -\frac{\mu_n \mu_q (k_{mn} + \overline{k_{pq}}) \underline{a_{mn}} \overline{a_{pq}}}{4\omega^3} \sin(\mu_n y) \sin(\mu_q y) F^+(\alpha_m, z) F^+(\overline{\alpha_p}, z) \quad \text{en } x = 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{X_1}}{\partial z} &= -i \frac{\alpha_m k_{mn} \underline{a_{mn}}}{\omega^2} \cos(\mu_n y) F^-(\alpha_m, z) \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= \frac{i \alpha_m \underline{a_{mn}}}{\omega} \cos(\mu_n y) F^-(\alpha_m, z) \quad \text{en } x = 0 \\
\frac{1}{4} \left(\overline{\frac{\partial \underline{X_1}}{\partial z}} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \underline{X_1}}{\partial z} \overline{\frac{\partial \phi_1}{\partial z}} \right) &= -\frac{\alpha_m \overline{\alpha_p} (k_{mn} + \overline{k_{pq}}) \underline{a_{mn}} \overline{a_{pq}}}{4\omega^3} \cos(\mu_n y) \cos(\mu_q y) F^-(\alpha_m, z) F^-(\overline{\alpha_p}, z) \quad \text{en } x = 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
(3.38) + (3.39) + (3.40) &= -\frac{(k_{mn} + \overline{k_{pq}}) \underline{a_{mn}} \overline{a_{pq}}}{8\omega^3} \cos(\mu_n + \mu_q) y \\
&\quad [(k_{mn} \overline{k_{pq}} - \mu_n \mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\overline{\alpha_p}, z) + \alpha_m \overline{\alpha_p} F^-(\alpha_m, z) F^-(\overline{\alpha_p}, z)] \\
&\quad -\frac{(k_{mn} + \overline{k_{pq}}) \underline{a_{mn}} \overline{a_{pq}}}{8\omega^3} \cos(\mu_n - \mu_q) y \\
&\quad [(k_{mn} \overline{k_{pq}} + \mu_n \mu_q) F^+(\alpha_m, z) F^+(\overline{\alpha_p}, z) + \alpha_m \overline{\alpha_p} F^-(\alpha_m, z) F^-(\overline{\alpha_p}, z)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= i \underline{B_{mnpq}^+} e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n + \mu_q) y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) + i \underline{B_{mnpq}^-} e^{-i(k_{mn} - \overline{k_{pq}})x} \cos(\mu_n - \mu_q) y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z) \\
-\frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= -(k_{mn} - \overline{k_{pq}}) \underline{B_{mnpq}^+} \cos(\mu_n + \mu_q) y F^+(\alpha_{mnpq}^+, z) - (k_{mn} - \overline{k_{pq}}) \underline{B_{mnpq}^-} \cos(\mu_n - \mu_q) y F^+(\alpha_{mnpq}^-, z) \quad \text{en } x = 0
\end{aligned}$$

Potentiel libre : Il vérifie une condition de surface libre homogène. Celle-ci se limite à une condition de Neumann

$$\frac{\partial \phi_2^l}{\partial z} = 0$$

La dépendance verticale de la solution libre est alors de la forme

$$F^+(\sigma_m, z) \quad \text{avec} \quad \sigma_m = -im\pi$$

On peut remarquer que σ_m vérifie la relation

$$\sigma_m F^-(\sigma_m, 0) = 0$$

pour tout m . Les modes transverses (dans la direction y) sont identiques aux modes du premier ordre. La dépendance en x vaut alors

$$\begin{aligned}
&x \quad \text{si} \quad m = 0 \quad \text{et} \quad n = 0 \\
&e^{-i\gamma_{mn}x} \quad \text{sinon}
\end{aligned}$$

avec $\gamma_{mn}^2 = \sigma_m^2 - \mu_n^2 \leq 0$ et $\gamma_{mn} = -i|\gamma_{mn}| \in i^-$ si bien que l'exponentielle en x est décroissante pour tous les modes $(m, n) \neq (0, 0)$. La longueur d'atténuation $|\gamma_{mn}|^{-1}$ maximale vaut L_y/π : les modes constants libres ne sont jamais très longs à s'amortir.

$$\underline{\phi_2^l} = \underline{U_{00}^l} x + \frac{ia_{mn}^l}{2\omega} e^{-i\gamma_{mn}x} \cos(\mu_n y) F^+(\sigma_m, z)$$

Le mode x correspond au cas $n = 0$ et $n = 0$ qui doit donc être enlevé de la somme double. Les fonctions de forme sont orthogonales, aussi bien en transverse pour la famille $\{\cos(\mu_n y)\}_{n=0} \text{ à } +\infty$ sur l'intervalle $[0; L_y]$ qu'en vertical pour la famille $\{F^+(\sigma_m, z)\}_{m=0} \text{ à } +\infty$ sur l'intervalle $[-1; 0]$. De la forme du potentiel libre à l'infini, on voit déjà que le courant de retour est orienté selon la direction x et ne présente aucune variation selon y . Le potentiel vérifie la condition sur le batteur

$$\frac{\partial \phi_2^l}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + (3.38) + (3.39) + (3.40)$$

qui permet d'avoir accès aux amplitudes \underline{U}_{00}^l et \underline{a}_{mn}^l par projection sur les fonctions propres. L'amplitude du courant de retour est ainsi reliée au terme $(m, n, p, q) = (0, 0, 0, 0)$ dans le membre de droite de la condition sur le batteur

$$\begin{aligned} \underline{U}_{00}^l &= -\frac{2k |a_{00}|^2}{8\omega^3} \left[k^2 \int_{-1}^0 (F^+(k, z))^2 dz + k^2 \int_{-1}^0 (F^-(k, z))^2 dz \right] \\ &\quad - \frac{2k |a_{00}|^2}{8\omega^3} \left[(k^2 \int_{-1}^0 (F^+(k, z))^2 dz + k^2 \int_{-1}^0 (F^-(k, z))^2 dz) \right] \\ &= -\frac{2k^3 |a_{00}|^2}{4\omega^3} \int_{-1}^0 [(F^+(k, z))^2 + (F^-(k, z))^2] dz \end{aligned}$$

On utilise $k^2 [(F^+(k, z))^2 + (F^-(k, z))^2] = (\omega^4 + k^2) F^+(2k, z)$ puis l'équation (1.46) pour évaluer l'intégrale et on trouve

$$\underline{U}_{00}^l = -\frac{(\omega^4 + k^2) |a_{00}|^2}{4\omega^3} F^-(2k, 0) = -\frac{k |a_{00}|^2}{2\omega}$$

On retrouve le courant de retour observé en houle droite. Le reste des modes, tels que $(m, n) \neq (0, 0)$, contribuent à ajuster le profil de vitesse au niveau du batteur. Le potentiel lié constant ne produit pas d'élévation de surface libre.

Convergence

On étudie ici la convergence des séries. Pour cela, on s'intéresse aux différents termes de ces séries. Dans ceux-ci interviennent les α_m , les μ_n ... Comme en deux dimensions, on sait que

$$\begin{aligned}\alpha_n &\simeq n\pi - \frac{\omega^2}{n\pi} \\ \alpha_n \sin \alpha_n &\underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \omega^2 \text{ borné} \\ \sin \alpha_n &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{\omega^2}{n\pi} \\ \mu_n &= n\mu_1 \\ k_{on} = (\mu_n^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} &\underset{+\infty}{\sim} n\mu_1\end{aligned}$$

La fonction de transfert \underline{TF}_{mn} vaut

$$\underline{TF}_{mn} = \frac{k_{on}}{k_{mn}} \frac{\alpha_m}{\alpha_o} \underline{TF}_m$$

Pour mémoire, la fonction de transfert \underline{TF}_m en deux dimensions se comporte à l'infini comme $\frac{1}{n^3}$. Grâce aux équivalents précédents, on déduit que $|\underline{TF}_{mn}|$ se comporte à l'infini comme

$$\frac{n}{\sqrt{m^2 + \frac{n^2}{b^2} m^2}}$$

Plus précisément, on sait que

$$\begin{aligned}\underline{TF}_m &\underset{+\infty}{\sim} \underline{TF} \frac{2\omega^2}{(m\pi)^3(1-d)} (1 - \omega^2(1-d) + (-1)^{m+1} \cos m\pi d) \\ \underline{TF}_m &\underset{+\infty}{\sim} \underline{TF} \frac{2\omega^2}{\pi^3(1-d)} \left(\frac{1 - \omega^2(1-d)}{m^3} + (-1)^{m+1} \frac{\cos m\pi d}{m^3} \right) \\ \underline{TF}_{mn} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2}} \frac{m\pi}{\alpha_o} \underline{TF} \frac{2\omega^2}{\pi^3(1-d)} \left(\frac{1 - \omega^2(1-d)}{m^3} + (-1)^{m+1} \frac{\cos m\pi d}{m^3} \right)\end{aligned}$$

Quant à l'amplitude \underline{a}_{on} , elle s'écrit, pour un batteur serpent

$$\begin{aligned}\underline{a}_{on} &= \underline{a} \frac{\alpha_o \cos \theta}{k_{on}} I_n \\ \text{où } I_n &= \frac{\int_0^b e^{-ik \sin \theta y} \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^b \cos^2(\mu_n y) dy}\end{aligned}$$

Pour n tendant vers l'infini, dans le cas $\theta \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{2ik \sin \theta}{(k \sin \theta)^2 - \mu_n^2} \frac{e^{-ik \sin \theta b} (-1)^n - 1}{b} \\ &\sim \frac{2ikb \sin \theta}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n e^{-ik \sin \theta b})\end{aligned}$$

Pour un batteur serpent, \underline{a}_{on} se comporte donc comme

$$\frac{1}{n^3}$$

Pour la méthode de Dalrymple, on a

$$\underline{a}_{on} = \underline{a} I_n e^{(k_{on} - \alpha_o \cos \theta) X_d}$$

Quant n tend vers l'infini, I_n décroît comme $1/n^2$ mais le terme exponentiel croît si $n > N$ et $k_{on} > \alpha_o \cos \theta$. On a là encore intérêt à ne pas exciter ces modes $n > N$.

Finalement, la série de terme général $\underline{a_{mn}} = \underline{TF_{mn}a_{on}}$ converge bien.

A finir

Intéressons-nous maintenant à l'amplitudes des modes libres. L'amplitude $\underline{a_{mn}^l}$ est le résultat de deux triples sommes. La première est

$$S_1 = \left\{ \sum_{q=0}^{E[n/2]} (k_{m'n-q} + k_{pq}) \frac{a_{m'n-q} a_{pq}}{2} \left[\frac{6\omega^4 + 2k_{m'n-q} k_{pq} + (\alpha_{m'n-q}^+)^2 - 2\mu_{n-q} \mu_q}{(\alpha_{m'n-q}^+)^2 - \beta_m^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_{m'n-q} k_{pq} + \mu_{n-q} \mu_q + \alpha_{m'} \alpha_p}{2\alpha_{m'} \alpha_p} \frac{4\omega^4 + (\alpha_{m'} - \alpha_p)^2}{(\alpha_{m'} + \alpha_p)^2 - \beta_m^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha_{m'} \alpha_p - k_{m'n-q} k_{pq} - \mu_{n-q} \mu_q}{2\alpha_{m'} \alpha_p} \frac{4\omega^4 + (\alpha_{m'} + \alpha_p)^2}{(\alpha_{m'} - \alpha_p)^2 - \beta_m^2} \right] - A_{m'p}^{mn} \right\}$$

A partir des équivalents ci-dessus, on peut montrer que le terme entre crochet tend vers 2 pour m' et p tendant vers l'infini. Le terme général de la série triple se comporte alors comme $(k_{m'n-q} + k_{pq}) a_{m'n-q} a_{pq}$. En utilisant le fait que $\underline{a_{mn}}$ se comporte comme $1/m^3$ lorsque m tend vers l'infini, on peut en déduire que le terme général se comporte comme $1/m'^2$ ou $1/p^2$ en l'infini. La série converge bien.

Accélération de convergence

Hauteur de surface libre au premier ordre Avant de calculer la hauteur de surface libre $\eta_1(x, y, t)$, on calcule sa valeur complexe $\underline{\eta}_1(x, y)$ puis $\eta_1(x, y, t) = \text{Re}[\underline{\eta}_1(x, y)e^{i\omega t}]$. Le calcul de la valeur complexe $\underline{\eta}_1(x, y)$ nous conduit à l'évaluation de la somme d'une double série

$$\begin{aligned}\underline{\eta}_1 &= \underline{a}_{mn} e^{-k_{mn}x} \cos(\mu_n y) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{a}_{mn} e^{-k_{mn}x} \cos(\mu_n y)\end{aligned}$$

Les termes $e^{-k_{mn}x}$ et $\cos(\mu_n y)$ sont bornés pour tout (x, y) . D'après l'étude de convergence précédente, le terme \underline{a}_{mn} se comporte à l'infini comme

$$\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 m^2 n^2}$$

au moins. La convergence de la double série sera lente (typique des séries de Riemann en $1/n^2$). On peut donc envisager d'accélérer la convergence de la double série lors de l'évaluation numérique de sa somme. Pour cela, il existe de nombreux algorithmes d'accélération de convergence. Il suffit d'en choisir un adapté aux séries de Riemann. Il s'agit de construire une suite à partir de moyenne pondérée des sommes partielles de la série. Les pondérations utilisées sont choisies de manière à ce que la nouvelle suite converge plus rapidement vers la somme de la série que la suite des sommes partielles. Soit u_n , le terme général d'une série, équivalent à K/n^p en l'infini. On note S la somme de la série, S_n la somme partielle d'ordre n et R_n le reste correspondant. On a

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \\ &= S_n + R_n \\ &= \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\end{aligned}$$

On construit la suite t_n telle que

$$t_n = \sum_{k=0}^n \mu_k S_k$$

Un raffinement supplémentaire consiste à construire non pas une nouvelle suite mais une famille de suites qui convergent plus rapidement vers la somme. Tel est le cas de l'algorithme de Salzer vers lequel mon choix s'est porté. Ce procédé de sommation à plusieurs étapes k , définit la suite $t_n^{(k)}$ à l'étape k par

$$\begin{aligned}t_n^{(k)} &= \sum_{i=0}^n \mu_i^{(k)} S_i \\ \text{avec } \mu_i^{(k)} &= \frac{(-1)^{i+k}}{k!} (n+m+\gamma)^k C_k^m S_{n+m}\end{aligned}$$

où γ est un paramètre dont la valeur n'a guère d'importance, généralement prise à 1. Pour un tel procédé de sommation, on définit son noyau comme l'ensemble des suites que ce procédé transforme en la suite constante $\{S\}$ à l'étape k . On a donc $t_n^{(k)} = S$ pour tout n et pour un k fixé. L'algorithme est donc exact pour les suites qui font partie de son noyau. Pratiquement, il fonctionnera correctement pour les suites proches de celles de son noyau, *i.e.* pour les suites se comportant asymptotiquement comme celles de son noyau (suites équivalentes ou dominées par une suite du noyau). Dans le cas de l'algorithme de Salzer, une propriété intéressante du noyau est qu'il dépend de n . Le noyau à l'étape k est l'ensemble des suites $\{S_n\}$ vérifiant

$$S_n = S + \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_i}{(n+\gamma)^i}$$

en sorte que l'application répétée de l'algorithme doit permettre d'accélérer les suites se comportant comme

$$S_n \simeq S + \frac{\lambda_1}{n+\gamma} + \frac{\lambda_2}{(n+\gamma)^2} + \dots$$

En pratique, le procédé de sommation de Salzer peut être reformulé de façon récurrente, par la suite facilement programmable

$$t_n^{(k+1)} = \frac{(n+k+2)t_{n+1}^{(k)} - (n+1)t_n^{(k)}}{k+1} \quad (3.41)$$

$$t_n^{(o)} = S_n \quad (3.42)$$

On aboutit après calculs à une table de valeurs

$$\begin{array}{ccccccc} t_o^{(o)} = S_o & t_o^{(1)} & t_o^{(2)} & \cdots & t_o^{(k)} \\ t_1^{(o)} = S_1 & t_1^{(1)} & t_1^{(2)} & & \\ t_2^{(o)} = S_2 & t_2^{(1)} & t_2^{(2)} & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ t_n^{(o)} = S_n & & & & \end{array}$$

D'après la formule (3.41) de récurrence, cette table est construite en triangle. La première colonne de cette table reproduit les termes de la suite $\{S_n\}$. La deuxième colonne fournit les résultats de la première étape du procédé de sommation et ainsi de suite en suivant les colonnes, chaque colonne améliorant la convergence de la suite $\{t_n\}$ correspondante. On arrêtera le procédé lorsqu'une précision suffisante est atteinte.

Une autre approche, proposée par Schäffer [?] consiste à estimer le reste d'ordre n à l'aide du comportement asymptotique de terme général de la série. Les deux approches seront comparées en terme de précision, de coût de calcul et de rapidité.

3.8 Vérifications

On vérifie dans cette partie la concordance entre la théorie 3D qui vient d'être obtenue, avec la solution 2D validée, elle, par les articles précédents. Pour passer du 3D au 2D, il faut :

- conserver uniquement le mode 0 en y
- générer une houle dans la direction $\theta = 0$

Cela revient à prendre $\mu_n = 0$ pour tout n , $k_{mn} = \alpha_m$ pour tout (m, n) , $A_{mn} = A_m$ et $a_{mn} = a_m$ alors :

$$\begin{aligned}\underline{\phi}_1 &= \underline{A}_m e^{-\alpha_m x} \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{2} \\ \underline{\eta}_1 &= \underline{a}_m e^{-\alpha_m x}\end{aligned}$$

Etablissement des conditions aux limites : à chaque fois que la troisième dimension intervient, c'est dans une dérivée en y des grandeurs. Il apparaît alors un coefficient μ_n qui s'annule en passant en 2D. Tout ira donc bien. . .

Condition de surface libre pour le potentiel :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\underline{\eta}_1 \frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} - i\omega |\underline{\nabla} \underline{\phi}_1|^2 &= \frac{ia_{mn}a_{pq}}{4\omega} [(3\omega^4 + 2k_{mn}k_{pq} + \alpha_m^2 - 2\mu_n\mu_q) \cos(\mu_n + \mu_q)y \\ &\quad + (3\omega^4 + 2k_{mn}k_{pq} + \alpha_m^2 + 2\mu_n\mu_q) \cos(\mu_n - \mu_q)y] e^{-(k_{mn}+k_{pq})x} \text{ en } z = 0 \\ -i\omega |\underline{\nabla} \underline{\phi}_1|^2 - \frac{1}{2}\underline{\eta}_1 \frac{\partial E \underline{\phi}_1}{\partial z} &= \frac{ia_n a_m}{2\omega} [3\omega^4 + \alpha_n^2 + 2\alpha_n\alpha_m] e^{-(\alpha_n+\alpha_m)x}\end{aligned}$$

OK !

Potentiel lié :

$$\begin{aligned}(\alpha_{mnpq}^+)^2 &= (k_{mn} + k_{pq})^2 - (\mu_n + \mu_q)^2 = (\alpha_m + \alpha_p)^2 \\ (\alpha_{mnpq}^-)^2 &= (k_{mn} + k_{pq})^2 + (\mu_n - \mu_q)^2 = (\alpha_m + \alpha_p)^2 \\ \alpha_{mnpq}^+ &= \alpha_m + \alpha_p = \alpha_{mp}^+ \\ \alpha_{mnpq}^- &= \alpha_m + \alpha_p = \alpha_{mp}^- \\ \underline{\phi}_2 &= \frac{ia_{mnpq}^+}{2\omega} e^{-(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n + \mu_q)y \frac{e^{i\alpha_{mnpq}^+(z+1)} + e^{-i\alpha_{mnpq}^+(z+1)}}{e^{i\alpha_{mnpq}^+} + e^{-i\alpha_{mnpq}^+}} \\ &\quad + \frac{ia_{mnpq}^-}{2\omega} e^{-(k_{mn}+k_{pq})x} \cos(\mu_n - \mu_q)y \frac{e^{i\alpha_{mnpq}^-(z+1)} + e^{-i\alpha_{mnpq}^-(z+1)}}{e^{i\alpha_{mnpq}^-} + e^{-i\alpha_{mnpq}^-}} \\ &= \frac{ia_{mp}^+}{2\omega} e^{-(\alpha_m+\alpha_p)x} \frac{e^{i\alpha_{mp}^+(z+1)} + e^{-i\alpha_{mp}^+(z+1)}}{e^{i\alpha_{mp}^+} + e^{-i\alpha_{mp}^+}} \\ &\quad + \frac{ia_{mp}^-}{2\omega} e^{-(\alpha_m+\alpha_p)x} \frac{e^{i\alpha_{mp}^-(z+1)} + e^{-i\alpha_{mp}^-(z+1)}}{e^{i\alpha_{mp}^-} + e^{-i\alpha_{mp}^-}} \\ &= \frac{i(a_{mp}^+ + a_{mp}^-)}{2\omega} e^{-(\alpha_m+\alpha_p)x} \frac{e^{i(\alpha_m+\alpha_p)(z+1)} + e^{-i(\alpha_m+\alpha_p)(z+1)}}{e^{i(\alpha_m+\alpha_p)} + e^{-i(\alpha_m+\alpha_p)}} \\ \underline{a}_{mp}^+ &= \underline{a}_{mp}^- \\ &= \frac{\underline{a}_m \underline{a}_p}{2} \frac{3\omega^4 + 2\alpha_m \alpha_p + \alpha_m^2}{-4\omega^2 + i\alpha_{mp}^+ \frac{e^{i\alpha_{mp}^+} - e^{-i\alpha_{mp}^+}}{e^{i\alpha_{mp}^+} + e^{-i\alpha_{mp}^+}}} \\ \underline{a}_{mp}^+ &= \frac{\underline{a}_m \underline{a}_p}{2} \frac{3\omega^4 + 2\alpha_m \alpha_p + \alpha_m^2}{-4\omega^2 + i(\alpha_m + \alpha_p) \frac{e^{i(\alpha_m+\alpha_p)} - e^{-i(\alpha_m+\alpha_p)}}{e^{i(\alpha_m+\alpha_p)} + e^{-i(\alpha_m+\alpha_p)}}} \\ \underline{\phi}_2 &= \frac{ia_{mn}}{2\omega} \frac{e^{i(\alpha_n+\alpha_m)(z+1)} + e^{-i(\alpha_n+\alpha_m)(z+1)}}{e^{i(\alpha_n+\alpha_m)} + e^{-i(\alpha_n+\alpha_m)}} e^{-(\alpha_n+\alpha_m)x} \\ \underline{a}_{mn} &= \frac{\underline{a}_n \underline{a}_m}{-4\omega^2 + i(\alpha_n + \alpha_m) \frac{e^{i(\alpha_n+\alpha_m)} - e^{-i(\alpha_n+\alpha_m)}}{e^{i(\alpha_n+\alpha_m)} + e^{-i(\alpha_n+\alpha_m)}}}\end{aligned}$$

C'est bon!!

Condition sur le batteur :

$$\begin{aligned}
(3.22) + (3.23) + (3.24) &= \frac{ik_{pq}\underline{a_{mn}a_{pq}}}{4\omega^3} \cos(\mu_n + \mu_q)y \\
&\quad \left[(k_{mn}^2 + \mu_n\mu_q) \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \frac{e^{i\alpha_p(z+1)} + e^{-i\alpha_p(z+1)}}{e^{i\alpha_p} + e^{-i\alpha_p}} \right. \\
&\quad \left. + \alpha_m\alpha_p \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} - e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \frac{e^{i\alpha_p(z+1)} - e^{-i\alpha_p(z+1)}}{e^{i\alpha_p} + e^{-i\alpha_p}} \right] \\
&+ \frac{ik_{pq}\underline{a_{mn}a_{pq}}}{4\omega^3} \cos(\mu_n - \mu_q)y \\
&\quad \left[(k_{mn}^2 - \mu_n\mu_q) \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \frac{e^{i\alpha_p(z+1)} + e^{-i\alpha_p(z+1)}}{e^{i\alpha_p} + e^{-i\alpha_p}} \right. \\
&\quad \left. + \alpha_m\alpha_p \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} - e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \frac{e^{i\alpha_p(z+1)} - e^{-i\alpha_p(z+1)}}{e^{i\alpha_p} + e^{-i\alpha_p}} \right] \\
&= 2 \frac{i\alpha_p\underline{a_m a_p}}{4\omega^3} \left[\alpha_m^2 \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \frac{e^{i\alpha_p(z+1)} + e^{-i\alpha_p(z+1)}}{e^{i\alpha_p} + e^{-i\alpha_p}} \right. \\
&\quad \left. + \alpha_m\alpha_p \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} - e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \frac{e^{i\alpha_p(z+1)} - e^{-i\alpha_p(z+1)}}{e^{i\alpha_p} + e^{-i\alpha_p}} \right] \\
&= \frac{i(\alpha_m + \alpha_p)\alpha_m\alpha_p\underline{a_m a_p}}{4\omega^3} \\
&\quad \left[\frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \frac{e^{i\alpha_p(z+1)} + e^{-i\alpha_p(z+1)}}{e^{i\alpha_p} + e^{-i\alpha_p}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} - e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}} \frac{e^{i\alpha_p(z+1)} - e^{-i\alpha_p(z+1)}}{e^{i\alpha_p} + e^{-i\alpha_p}} \right] \\
&= \frac{i(\alpha_m + \alpha_p)\alpha_m\alpha_p\underline{a_m a_p}}{2\omega^3} \frac{e^{i(\alpha_m+\alpha_p)(z+1)} + e^{-i(\alpha_m+\alpha_p)(z+1)}}{(e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m})(e^{i\alpha_p} + e^{-i\alpha_p})} \\
(1.35) + (1.36) &= \frac{i(\alpha_n + \alpha_m)\alpha_n\alpha_m\underline{a_n a_m}}{2\omega^3} \frac{e^{i(\alpha_n+\alpha_m)(z+1)} + e^{-i(\alpha_n+\alpha_m)(z+1)}}{(e^{i\alpha_n} + e^{-i\alpha_n})(e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m})}
\end{aligned}$$

OK!!

Potentiel libre :

$$\underline{a_n^l} = (\alpha_{n'} + \alpha_m)\underline{a_{n'}a_m} \frac{(e^{i\beta_n} + e^{-i\beta_n})^2}{\frac{e^{2i\beta_n} - e^{-2i\beta_n}}{2i} + 2\beta_n} \frac{5\omega^4 + \alpha_{n'}^2 + \alpha_{n'}\alpha_m + \alpha_m^2}{\beta_n^2 - (\alpha_{n'} + \alpha_m)^2}$$

3.9 Bassin de houle de l'ECN

Il s'agit d'adapter les résultats de la théorie précédente au cas du batteur de l'ECN. En particulier, l'origine du repère utilisée dans le pilotage du batteur est différente. Les batteurs sont situés entre $x = -\frac{b}{2}$ et $x = \frac{b}{2}$. Les modes en y s'écrivent

$$\cos \mu_n(y + \frac{b}{2})$$

d'où un potentiel

$$\underline{\phi_1} = \frac{ia_{mn}}{\omega} e^{-k_{mn}x} \cos \mu_n(y + \frac{b}{2}) \frac{e^{i\alpha_m(z+1)} + e^{-i\alpha_m(z+1)}}{e^{i\alpha_m} + e^{-i\alpha_m}}$$

3.9.1 Lois de commande

Pour le principe du serpent, les coefficients $\underline{a_{on}}$ valent

$$\underline{a_{on}} = \frac{\underline{a}}{k_{on}} \frac{\alpha_o \cos \theta \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik \sin \theta y} \cos \mu_n(y + \frac{b}{2}) dy}{\int_{-b/2}^{b/2} \cos^2 \mu_n(y + \frac{b}{2}) dy}$$

L'intégrale en y vaut cette fois :

$$\frac{\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik \sin \theta y} \cos \mu_n(y + \frac{b}{2}) dy}{\int_{-b/2}^{b/2} \cos^2 \mu_n(y + \frac{b}{2}) dy} = e^{ikb \frac{\sin \theta}{2}} \frac{\int_0^b e^{-ik \sin \theta y} \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^b \cos^2(\mu_n y) dy}$$

Le changement est un simple déphasage. Pour la méthode de Dalrymple, on aura exactement le même déphasage à ajouter aux coefficients $\underline{a_{on}}$.

3.9.2 Au second ordre

Les modes liés en y sont cette fois

$$\cos(\mu_n + \mu_q)(y + \frac{b}{2}) \text{ et } \cos(\mu_n - \mu_q)(y + \frac{b}{2})$$

3.10 B600

$X_1 = \underline{b}f(y)g_v(z)$ où $g_v(z)$ est la forme d'un volet du batteur. La fonction de forme $f(y)$ est non nulle sur le batteur, nulle ailleurs :

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < L_r \text{ ou } y > L_l \\ \tilde{f}(y) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec, par exemple

$$\tilde{f}(y) = e^{-ik \sin \theta y}$$

On aura besoin des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^b \cos^2(\mu_n y) dy &= \frac{b}{2}(\delta_{0n} + 1) \\ \int_0^b f(y) \cos(\mu_n y) dy &= \int_{L_r}^{L_l} \tilde{f}(y) \cos(\mu_n y) dy \end{aligned}$$

On posera

$$\begin{aligned} Int_n &= \frac{\int_0^b f(y) \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^b \cos^2(\mu_n y) dy} \\ \int_{L_r}^{L_l} \tilde{f}(y) \cos(\mu_n y) dy &= \int_{L_r}^{L_l} \tilde{f}(y) \frac{e^{i\mu_n y} + e^{-i\mu_n y}}{2} dy \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{i(\mu_n - k \sin \theta)y}}{\mu_n - k \sin \theta} - \frac{e^{-i(\mu_n + k \sin \theta)y}}{\mu_n + k \sin \theta} \right]_{L_r}^{L_l} \\ &= \frac{1}{2i(\mu_n^2 - (k \sin \theta)^2)} \left[(e^{i(\mu_n - k \sin \theta)L_l} - e^{i(\mu_n - k \sin \theta)L_r})(\mu_n + k \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. - (e^{-i(\mu_n + k \sin \theta)L_l} - e^{-i(\mu_n + k \sin \theta)L_r})(\mu_n - k \sin \theta) \right] \\ &= \frac{1}{2i(\mu_n^2 - (k \sin \theta)^2)} \left[e^{-ik \sin \theta L_l} (e^{i\mu_n L_l} (\mu_n + k \sin \theta) - e^{-i\mu_n L_l} (\mu_n - k \sin \theta)) \right. \\ &\quad \left. - e^{-ik \sin \theta L_r} (e^{i\mu_n L_r} (\mu_n + k \sin \theta) - e^{-i\mu_n L_r} (\mu_n - k \sin \theta)) \right] \\ &= \frac{1}{i(\mu_n^2 - (k \sin \theta)^2)} \left[e^{-ik \sin \theta L_l} (i\mu_n \sin(\mu_n L_l) + k \sin \theta \cos(\mu_n L_l)) \right. \\ &\quad \left. - e^{-ik \sin \theta L_r} (i\mu_n \sin(\mu_n L_r) + k \sin \theta \cos(\mu_n L_r)) \right] \\ Int_n &= \frac{2}{((\mu_n b)^2 - (kb \sin \theta)^2)(\delta_{0n} + 1)} \\ &\quad \left[e^{-ik \sin \theta L_l} (\mu_n b \sin(\mu_n L_l) - ikb \sin \theta \cos(\mu_n L_l)) \right. \\ &\quad \left. - e^{-ik \sin \theta L_r} (\mu_n b \sin(\mu_n L_r) - ikb \sin \theta \cos(\mu_n L_r)) \right] \end{aligned}$$

Si l'angle d'incidence demandé est nul, \tilde{f} vaut seulement \underline{b} et l'intégrale Int_n devient

$$\begin{aligned} Int_n &= \frac{\int_0^b f(y) \cos(\mu_n y) dy}{\int_0^b \cos^2(\mu_n y) dy} \\ \int_{L_r}^{L_l} \tilde{f}(y) \cos(\mu_n y) dy &= \int_{L_r}^{L_l} \cos \mu_n y dy \\ &= \frac{1}{\mu_n} [\sin \mu_n L_l - \sin \mu_n L_r] \text{ si } n \neq 0 \\ &= L_l - L_r \text{ sinon} \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Félicien Bonnefoy. Description des classes matlab. Technical report, Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Energétique et Environnement Atmosphérique, 2010.
- [2] Félicien Bonnefoy. Génération de houle à l’ecn. Technical report, Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Energétique et Environnement Atmosphérique, 2012.
- [3] Robert T. Hudspeth and Wojciech Sulisz. Stokes drift in two-dimensional wave flumes. *Journal of Fluid Mechanics*, 230 :209–229, 1991.
- [4] W. Li and A. N. Williams. Second-order waves in a three-dimensional wave basin with perfectly reflecting sidewalls. *Journal of Fluids and Structures*, 14(4) :575–592, May 2000.
- [5] Hemming A. Schäffer. Second-order wavemaker theory for irregular waves. *Ocean Engineering*, 23(1) :47–88, 1996.
- [6] Jesper Skourup. Analytical second order wavemaker theory verified in a numerical wave flume. In *Proceedings of Computer Modelling of Seas and Coastal Regions II (Coastal 95)*, pages 167–174, Cancun, Mexico, 1995.
- [7] Kyungduck Suh and Robert A. Dalrymple. Directional wavemaker theory : a spectral approach. In *Proceedings of IARH Seminar*, pages 389–395, Lausanne, Swiss, 1987.
- [8] Y.-C. Wu. *Directional wavemaker : theory and experiment*. PhD thesis, University of Delaware, 1985.