

---

# Rapport Interne

## Traitement du signal

### 2010

---

Notions de traitement du signal utilisées pour  
l'analyse des mesures en bassin.

#### Objet

Le rapport contient la description des principales notions de traitement du signal utilisées pour l'analyse des données obtenues lors des campagnes d'essai au LMF.

Félicien Bonnefoy  
Laboratoire de Mécanique des Fluides  
Centrale Nantes

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
0.1 Mesure d'un signal $x(t)$ :	3
<b>1 Transformées de Fourier et propriétés mathématiques</b>	<b>3</b>
1.1 Hypothèses et définition	3
1.2 Propriétés	4
1.3 Lien entre TF et convolution	4
1.4 Signal de durée finie	4
<b>2 Calcul numérique des Transformées de Fourier</b>	<b>6</b>
2.1 Échantillonnage en fréquence	6
2.2 Échantillonnage en temps	6
2.3 Double échantillonnage	7
2.4 Précautions	8
2.5 Implémentations en <b>Matlab</b> <sup>®</sup>	8
<b>3 Exemple</b>	<b>8</b>
3.1 Nombre entier de périodes	9
3.2 Nombre non-entier de périodes	9
3.3 Nombre non-entier de points	10
3.4 Signal avec des harmoniques	10
<b>4 Transformée de Fourier glissante</b>	<b>12</b>
4.1 Implémentations en <b>Matlab</b> <sup>®</sup>	13
4.1.1 moving_Fourier.m	13
4.1.2 moving_Fourier_resamp.m	14
4.2 Moyenne et pondération	14
<b>A Fonctions développées sous Matlab</b> <sup>®</sup>	<b>15</b>
A.1 plot_moving.m	15
A.2 moving_Fourier.m	15
A.3 moving_Fourier_resamp.m	16
A.4 Fourier.m	16
A.5 iFourier.m	17
<b>B Autres fonctions développées sous Matlab</b> <sup>®</sup>	<b>17</b>
B.1 Fourier2.m	17
B.2 iFourier2.m	17

# Introduction

On introduit ici la notion d'analyse de Fourier, et les hypothèses sous-jacentes à son utilisation.

## 0.1 Mesure d'un signal $x(t)$ :

Dans toute la suite, un signal sera pour nous la mesure d'une grandeur physique au cours du temps. Un des objectifs du traitement du signal est de caractériser un signal autrement que par la simple donnée des valeurs  $x(t)$  aux différents instants de mesure  $t$ . On dispose pour cela de plusieurs outils, notamment celles qui nous intéresseront par la suite, les notions de probabilité et de fréquence.

Une des méthodes couramment utilisée est de décomposer le signal dans une base de fonctions de  $t$ , en choisissant les fonctions de base suivantes :

$$\begin{cases} \cos(2\pi ft) \\ \sin(2\pi ft) \end{cases}$$

Elles dépendent continûment du paramètre  $f$  appelé fréquence. Il s'agit bien évidemment de la base de fonctions utilisée dans la théorie de Fourier.

Les caractéristiques-mêmes de ces fonctions de base nous donnent les limitations à connaître de la théorie de Fourier :

- chaque fonction de base possède un support infini dans le temps, ce qui n'est pas adapté pour les signaux instationnaires<sup>1</sup> ou les signaux de durée finie<sup>2</sup>.
- 

Dans le cas de signaux instationnaires, on est amené à utiliser d'autres méthodes, l'analyse de Fourier à court terme, l'analyse en ondelettes, ou les distributions temps-fréquence comme celle de Wiegner-Ville (on décompose le signal dans une base où  $t$  et  $f$  sont séparés).

## 1 Transformées de Fourier et propriétés mathématiques

### 1.1 Hypothèses et définition

Pour un signal  $x(t)$  sommable, on définit sa Transformée de Fourier (TF) par la formule intégrale suivante :

$$\mathcal{F} : x \mapsto X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi ft} dt \quad (1)$$

La fréquence  $f$  est un réel et la TF  $\mathcal{F}(x) = X(f)$  est une fonction complexe. Si le signal n'est pas sommable, il est possible d'utiliser la théorie des distributions et de définir une TF au sens des distributions. C'est par exemple le cas pour  $t \mapsto \cos(2\pi f_0 t)$  qui n'est pas sommable. On définit sa TF au sens des distributions  $\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)$ .

---

1. Signal instationnaire : dont le comportement évolue au cours du temps, par opposition à un signal stationnaire dont le comportement est indépendant de tout changement d'origine des temps.

2. Un signal de durée finie est nul au bout d'un temps suffisamment grand

$$x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## 1.2 Propriétés

La TF d'un signal réel est paire :  $X(-f) = \bar{X}(f)$ . Ce sera le cas pour les signaux qui nous intéressent, hauteurs d'eau, vitesses, pression... De plus, l'interprétation physique de la fréquence se fait pour les fréquences positives. On aura donc intérêt à se limiter à l'étude de ces fréquences positives. On conserve alors l'information contenue par les fréquences négatives grâce à la parité des TF : à partir de la TF  $X(f)$  d'un signal, on introduit souvent une autre fonction  $\tilde{X}(f)$ , définie pour  $f > 0$  par  $\tilde{X}(f) = 2X(f)$  et  $\tilde{X}(0) = X(0)$ . Elle est parfois appelée TF physiquement réalisable.

## 1.3 Lien entre TF et convolution

Le produit de convolution de deux signaux est défini par :

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \bar{y}(t - u) du$$

Cette notion est très utile en traitement du signal de par la propriété suivante. La TF d'un produit de deux signaux est le produit de convolution des TF, ce qui s'écrit

$$\mathcal{F}(x.y) = \mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y)$$

Une application importante est décrite dans la section 1.4. De même, la TF d'un produit de convolution est le produit des TF

$$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x).\mathcal{F}(y)$$

On l'utilise cette dernière propriété par exemple dans l'équation de Cummins pour les termes d'amortissement.

## 1.4 Signal de durée finie

Étudions le cas d'un signal  $x_T(t)$  de durée  $T$  finie, mesuré entre 0 et  $T$ . On peut interpréter ce signal comme un signal  $x(t)$  à support infini, multiplié par une fenêtre de durée  $T$ .

$$x_T(t) = x(t) . w_T(t - T/2) \quad \text{où} \quad w_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La figure 1 montre l'allure de la fenêtre  $w_T$ , qui est par définition centrée autour de l'origine.

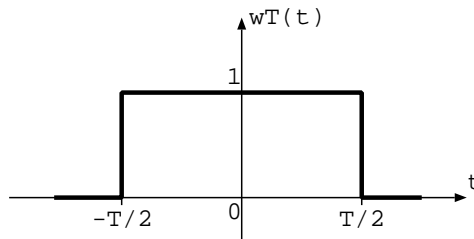


FIGURE 1 – Fenêtre temporelle pour un signal de durée finie

La TF du signal  $x_T(t)$  de durée finie est donc le produit de convolution des TF de  $x(t)$  et  $w_T(t)$

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot w_T(t - T/2) e^{-2i\pi ft} dt = X * W_T(f)$$

Dans cette expression,  $X$  désigne la TF de  $x(t)$  et  $W_T$  la TF de la fenêtre temporelle, qui vaut

$$\begin{aligned} W_T(f) &= \mathcal{F}(w_T(t - T/2)) = \mathcal{F}(w_T(t)) e^{-i\pi fT} \\ &= T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} e^{-i\pi fT} \end{aligned}$$

On peut remarquer le facteur  $e^{-i\pi fT}$  dû à la translation dans le temps de la fenêtre centrée  $w_T(t)$ , le facteur  $T$  de normalisation (la fenêtre  $w_T(t)$  n'est pas normée puisque  $\int w_T(t) dt = T$ ). La fonction sinus cardinal définie par

$$\text{sinc}(fT) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

est tracée sur la figure 2. Elle possède une largeur caractéristique  $1/T$  en fréquence. La convolution est ici équivalente au lissage de  $X$  par  $W_T$ .

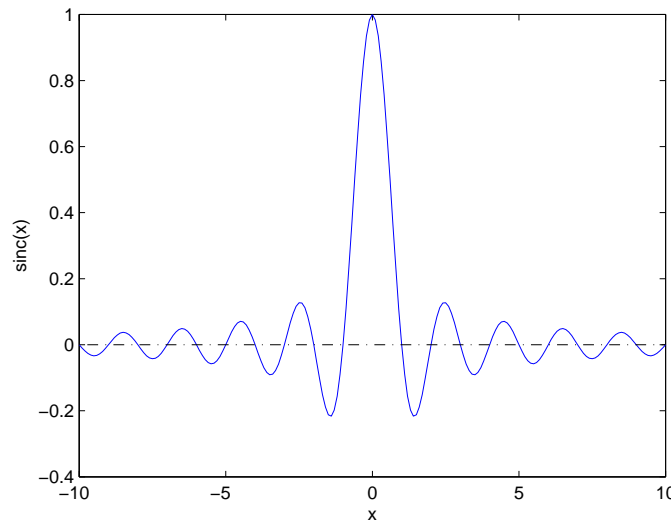


FIGURE 2 – Fonction sinus cardinal

Examinons tout de suite les applications de cette propriété à l'aide de quelques exemples :

- La première est application de ce résultat concerne un signal de durée finie  $T_d$  : sa TF sera lissée par une fonction de taille  $\frac{1}{T_d}$ . Plus on voudra obtenir de détails en fréquence, plus on devra avoir une durée de mesure grande.
- De même l'analyse en fréquence se fait jusqu'à une fréquence maximale, ce qui équivaut à un lissage temporel. Si l'on veut observer des détails fins dans le temps, il faudra pouvoir étudier des hautes fréquences.
- En pratique, la durée de mesure sera toujours limitée. On aura tout intérêt à chercher à l'augmenter si l'on souhaite améliorer la finesse de l'analyse fréquentielle.

## 2 Calcul numérique des Transformées de Fourier

Les enregistrements de signaux de mesure se font numériquement, grâce aux importantes capacités de stockage des instruments numériques et grâce également à la facilité du traitement numérique des données.

Signal et spectre seront donc numérisés et traités de manière discrète. Il faut alors utiliser une théorie de Fourier adaptée et essayer de voir si une telle discrétisation impose des contraintes sur le signal.

### 2.1 Échantillonnage en fréquence

Soit un signal  $x(t)$ , dont la TF est  $X(f)$ . Lors de l'étude numérique, on sera amené à discrétiser cette TF du signal. On notera alors  $X[m] = X(m\Delta f)$  la TF échantillonnée ( $\Delta f$  est la résolution en fréquence). Cette analyse à fréquences discrètes est semblable à une analyse par série de Fourier.

$$X[m] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_f(t) e^{2i\pi m \Delta f t} dt$$

$$x_f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X[m] e^{-2i\pi m \Delta f t} \Delta f$$

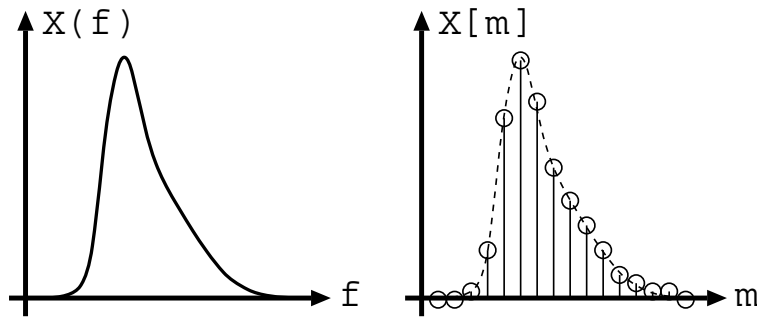


FIGURE 3 – Échantillonnage en fréquence

Une conséquence de l'échantillonnage en fréquence est la périodisation  $x_f(t)$  du signal  $x[n]$ . Cela signifie que l'analyse (à fréquences discrètes) que l'on effectue considère le signal comme périodique, de période  $T = \frac{1}{\Delta f}$ .

Il existe une condition analogue à la condition de Shannon en temps. Le signal doit être de support borné, autrement dit de durée finie  $T_d$  telle que  $T_d \leq T$ . Cette condition est automatiquement réalisée en pratique puisqu'on mesure pendant une durée finie  $T_d$ , sur laquelle on analyse le signal  $T = T_d$ , ce qui fixe la résolution fréquentielle  $\Delta f = 1/T = 1/T_d$ .

### 2.2 Échantillonnage en temps

Soit un signal  $x(t)$  dont on relève les valeurs à des instants régulièrement espacés  $t_n = nT_e$  où  $T_e$  est la période d'échantillonnage. On note la valeur  $x[n] = x(nT_e)$  les valeurs ainsi obtenues. On dit qu'on a échantillonné le signal.

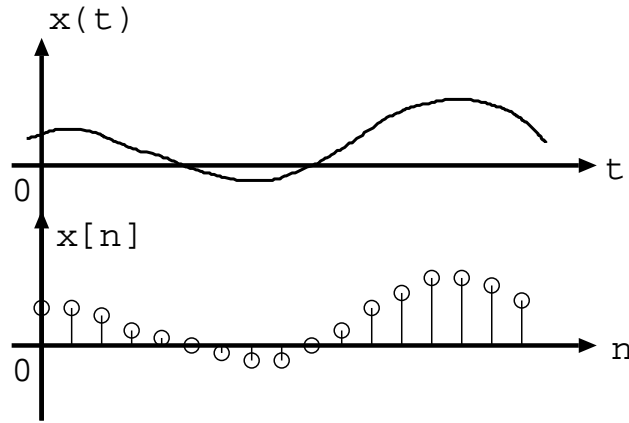


FIGURE 4 – Échantillonnage en temps

Une conséquence de l'échantillonnage en temps est la périodisation du spectre de  $x[n]$ , avec une période  $f_e = \frac{1}{T_e}$ .

Rappel : le spectre d'amplitude du signal  $x[n]$  est le module de la Transformée de Fourier définie par :

$$X_t(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2i\pi n f T_e} T_e$$

$$x[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} X_t(f) e^{2i\pi n f T_e} df$$

L'indice  $t$  rappelle que le signal a été échantillonné en temps. Il faut éviter le phénomène de repliement de spectre ou d'aliasing que peut introduire la périodisation du spectre. Le spectre du signal doit être à support borné ( $X_t(f) = 0$  pour  $f \geq f_{max}$ ). La condition de Shannon<sup>3</sup> s'écrit

$$f_{max} \leq \frac{f_e}{2}$$

avec  $f_e = \frac{1}{T_e}$  la fréquence d'échantillonnage. En pratique, soit on choisit une fréquence d'échantillonnage suffisamment grande de manière à ce que toutes les fréquences contenues dans le signal soient correctement analysées, y compris le bruit éventuel pour éviter qu'il ne se replie sur les fréquences d'étude. Soit on place un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure vaut  $\frac{f_e}{2}$ .

## 2.3 Double échantillonnage

Considérons maintenant un double échantillonnage en temps et en fréquence, ce qui est le cas pour un traitement numérique. On mesure les valeurs  $x[n]$  et on calcule une TFD  $X[m]$ .

- d'après l'échantillonnage en fréquence, le signal doit avoir une durée finie, et donc cette fois un nombre de points fini.
- d'après l'échantillonnage en temps, le signal doit avoir un spectre de support borné, et donc un nombre de fréquences fini.

3. Le facteur  $\frac{1}{2}$  présent dans la condition de Shannon par rapport au cas de l'échantillonnage en fréquence est dû au fait que le signal  $x(t)$  est réel et donc que sa TF est symétrique  $X(-f) = \bar{X}(f)$ .

En général, on prend le même nombre de points de fréquences et de temps, d'où les Transformées de Fourier Discrètes (TFD) utilisant une normalisation par  $1/T_d$  par rapport aux définitions précédentes

$$X[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2i\pi \frac{nm}{N}}$$

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{2i\pi \frac{nm}{N}}$$

Cette convention de normalisation fait qu'un exponentiel de fréquence  $m\Delta f$  possède une amplitude de Fourier de 1.

## 2.4 Précautions

Le signal mesuré de durée  $T$  comportera toujours un nombre entier de points, ou autrement dit, la durée de la fenêtre d'analyse  $T_d$  est un multiple de la période d'échantillonnage.

Pour l'étude d'un signal périodique de période  $T_0$ , il est important de sélectionner un nombre entier de périodes, c'est-à-dire de prendre une fenêtre de longueur égale à un nombre entier de période  $T_d = NT_0$ .

Il est nécessaire que les  $N$  périodes sélectionnées correspondent à un nombre entier d'échantillons.

## 2.5 Implémentations en Matlab®

Sous **Matlab**®, on évalue les TFD à l'aide de la fonction `fft.m` qu'on normalise par  $2/N$  en ne gardant que les fréquences positives entre 0 et  $f_e/2$ .

```
N      = length(signal);
FT     = 2 * fft(signal) / N;
FT(1) = FT(1) / 2;
freq   = (0:(N-1)/2) / T_d;
FT(length(freq)+1:end) = [];
```

Comme son nom l'indique, la fonction `fft.m` utilise un algorithme de Transformée de Fourier rapide qui est tiré de la librairie FFTW<sup>4</sup>. On a défini la fonction `Fourier.m` qui regroupe les opérations précédentes.

## 3 Exemple

La TF de la fonction  $t \mapsto x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  est

$$X(f) = \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)$$

(au sens des distributions puisque le signal n'est pas sommable). La TF du signal de durée  $T_d$  finie vaut

$$X_{T_d}(f) = (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) * W_{T_d}(f) \quad (2)$$

$$= T_d (e^{-i\pi(f-f_0)T_d} \text{sinc}(f - f_0)T_d + e^{-i\pi(f+f_0)T_d} \text{sinc}(f + f_0)T_d) \quad (3)$$

---

4. <http://www.fftw.org>



Il s'agit de deux sinus cardinaux, chacun pondéré par un terme de phase. On effectue l'analyse de Fourier sur différents types de fenêtres, selon que leur durée est un nombre entier ou non de périodes.

### 3.1 Nombre entier de périodes

Si on a pris une durée d'analyse égale à un nombre entier de période  $T_d = N_d T_0$ , les fréquences d'analyse tombent pile soit sur la fréquence fondamentale  $f_0 = N_d/T_d$ , soit sur les zéros du sinc pour  $f_n = n/T_d$ ,  $n \neq N_d$ . Un exemple est donné sur la figure 5, où on étudie un signal cosinusoidal sur une fenêtre de  $N_d = 4$  périodes. À gauche, on voit le signal temporel en trait plein sur la fenêtre  $[0, T_d]$  et le signal périodisé en traits pointillés de part et d'autre de la fenêtre (les traits hachurés verticaux marquent les instants  $t = 0$  et  $t = T_d$ ). Sur la figure de droite, on a tracé la TF discrète du signal, matérialisée par les ronds, et la TF du signal de durée finie  $T_d$  en traits pointillés. On observe bien que seule une fréquence est d'amplitude non-nulle, celle d'indice  $n = N_d + 1$  : il s'agit de la fréquence du fondamental. Les autres fréquences discrètes tombent sur les zéros des sinus cardinaux donnés dans l'équation (3). Plus

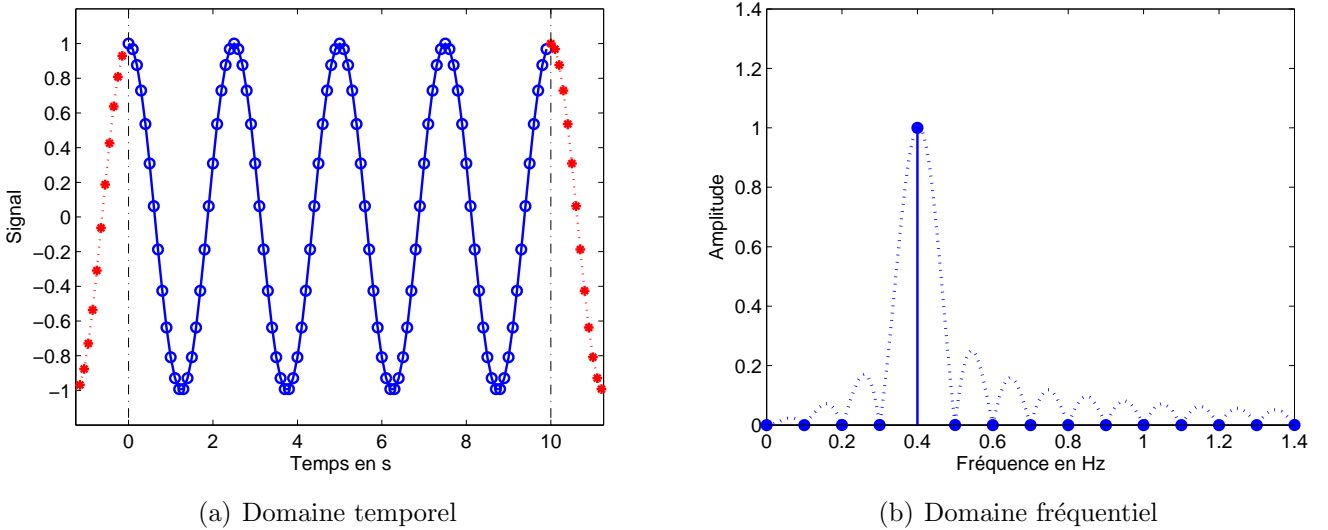


FIGURE 5 – Signal  $\cos(2\pi f_0 t)$  étudié sur une durée finie  $T_d = 4T_0 = 10$  (à gauche, signal de durée  $T_d$  en trait plein et signal périodisé en trait pointillé, à droite, TF discrète (rond) et TF sur une durée finie en traits pointillés)

on augmente le nombre de période, plus l'indice de la fréquence fondamentale augmente.

### 3.2 Nombre non-entier de périodes

Si la durée d'analyse  $T_d$  n'est pas égale à un nombre entier par période, les fréquences d'analyse  $f_n = n/T_d$  ne tombent pas ni sur la fréquence fondamentale  $f_0$ , ni sur les zéros du sinc. Un exemple est donné sur la figure 6, où on étudie un signal cosinusoidal sur une fenêtre longue de  $N_d = 4.3$  périodes. À gauche, on peut constater dans le domaine temporel que le signal périodisé tel qu'il est vu par la TF discrète n'est pas continu aux extrémités. Sur la figure de droite, les ronds correspondants à la TF discrète du signal ne tombent pas sur les zéros de

la TF du signal de durée finie  $T_d$  en traits pointillés et donnée par l'équation (3). Il semble que l'énergie du signal soit répartie sur plusieurs fréquences.

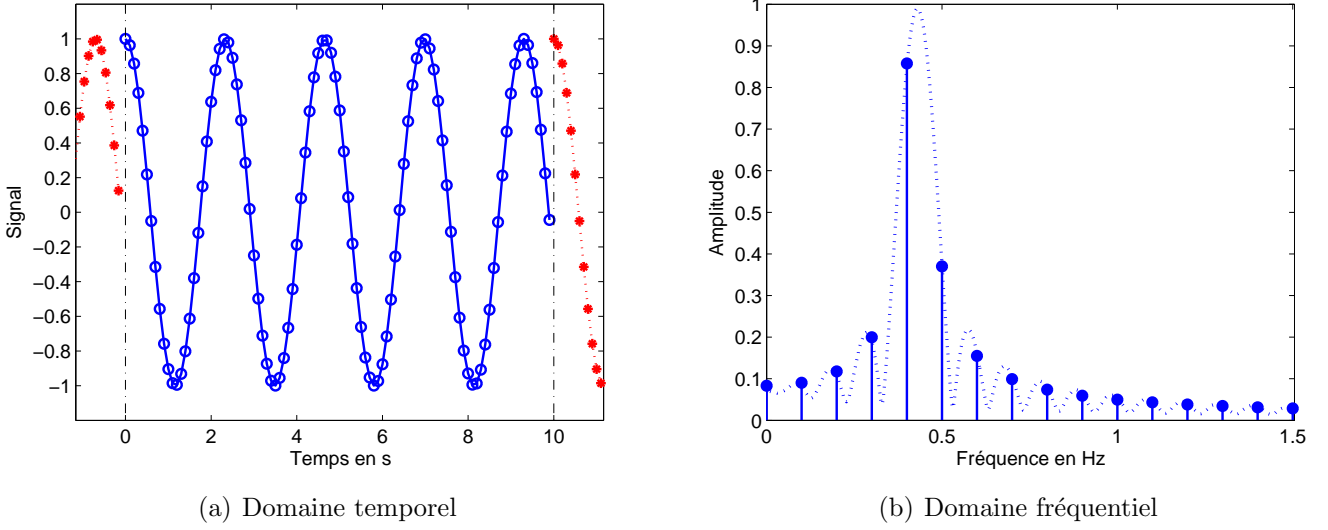


FIGURE 6 – Signal  $\cos(2\pi f_0 t)$  étudié sur une durée finie  $T_d = 4.3T_0 = 10$  (voir la légende sur la figure 5)

### 3.3 Nombre non-entier de points

Si la fréquence d'échantillonnage ne permet pas d'obtenir un nombre entier de période dans la fenêtre  $T_d$ , la TF discrète va faire apparaître les sinc. Le pire des cas correspond à  $N_d$  périodes durant la durée d'analyse plus presque un échantillon, soit

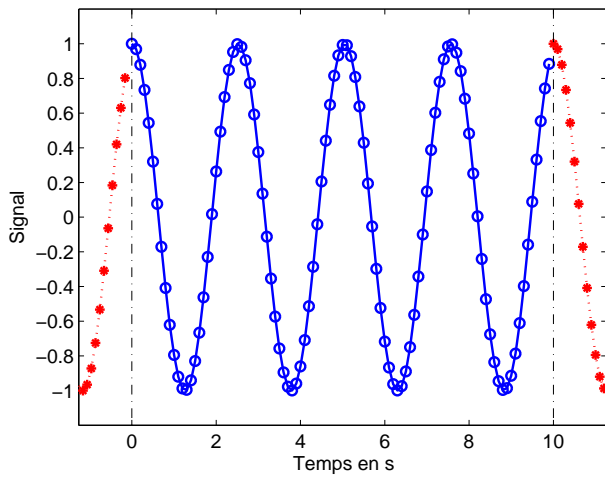
$$N_d T_0 = T_d + 0.9 T_s = T_d + \frac{0.9}{f_e}$$

Dans ce cas, les fréquences discrètes adjacentes au fondamental ont une amplitude non-nulle, égale à 5 % de celle du fondamental, alors que l'amplitude du fondamental est de 99.5 % de la valeur exacte.

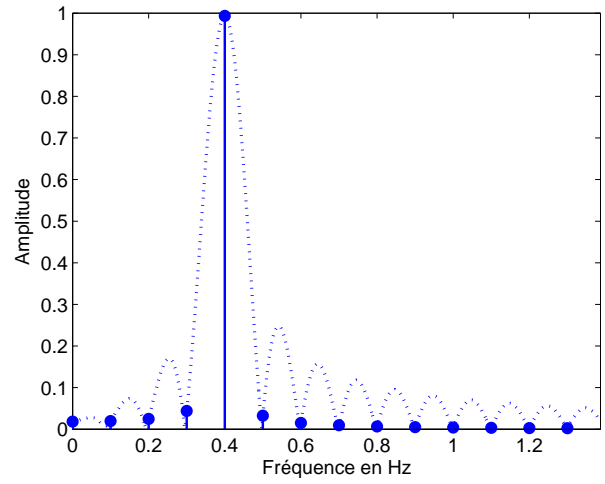
En gros, si on ne rééchantillonne pas, on aura quand même une bonne estimation de l'amplitude du fondamental, mais il faut savoir qu'une erreur de 5 % est faite sur les fréquences adjacentes au fondamental.

### 3.4 Signal avec des harmoniques

Si on considère un signal périodique non-linéaire, c'est-à-dire qui contient des harmoniques  $2f$ ,  $3f$ ... avec une fenêtre contenant  $N_d$  périodes, ceux-ci apparaissent aux fréquences d'indice  $n = 2N_d + 1$ ,  $3N_d + 1$ ... La figure 8 montre l'exemple d'un signal avec deux harmoniques  $2f_0$  et  $3f_0$  qui sont bien visibles sur les indices 9 et 13.

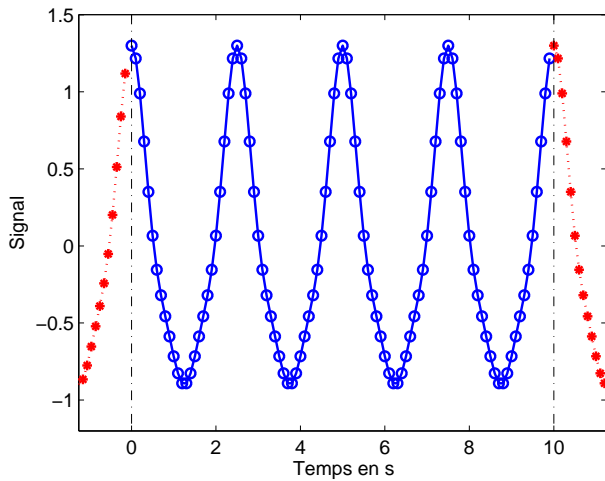


(a) Domaine temporel

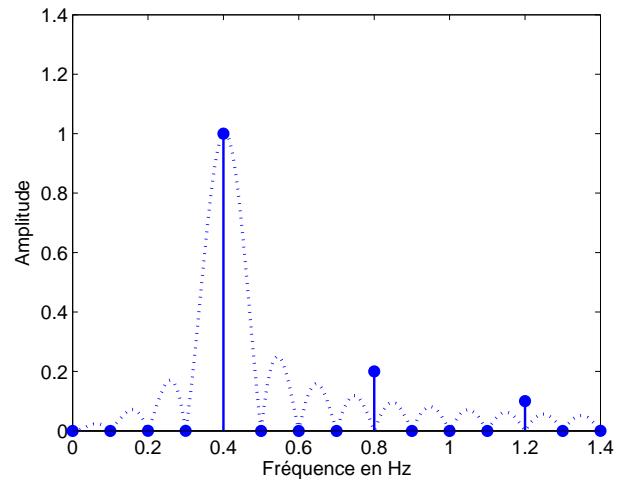


(b) Domaine fréquentiel

FIGURE 7 – Signal  $\cos(2\pi f_0 t)$  étudié sur une durée finie  $T_d = 10$  (voir la légende sur la figure 5)



(a) Domaine temporel



(b) Domaine fréquentiel

FIGURE 8 – Signal non-linéaire étudié sur une durée finie  $T_d = 4T_0 = 10$  (voir la légende sur la figure 5)

## 4 Transformée de Fourier glissante

Pour observer l'évolution temporelle du contenu fréquentiel d'un signal, on effectue une TF glissante. Cela consiste à calculer la TF successivement sur des fenêtres qu'on décale à chaque fois.

$$X(f, t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(t') e^{-2i\pi f t'} dt'$$

Numériquement, cette TF glissante est estimée pour des instants et des fréquences discrets. Les fenêtres temporelles sont les intervalles  $n\Delta t + [-T_d/2, T_d/2]$  pour  $n \geq 0$  où  $\Delta t$  est l'incrément de temps dont on décale chaque fenêtre. Le temps caractéristique  $t_n = n\Delta t$  associé à une fenêtre est choisi comme le temps milieu. On obtient au final une matrice complexe de résultat temps/fréquence.

Pour un signal périodique, on prend une fenêtre de durée égale à un multiple de périodes.

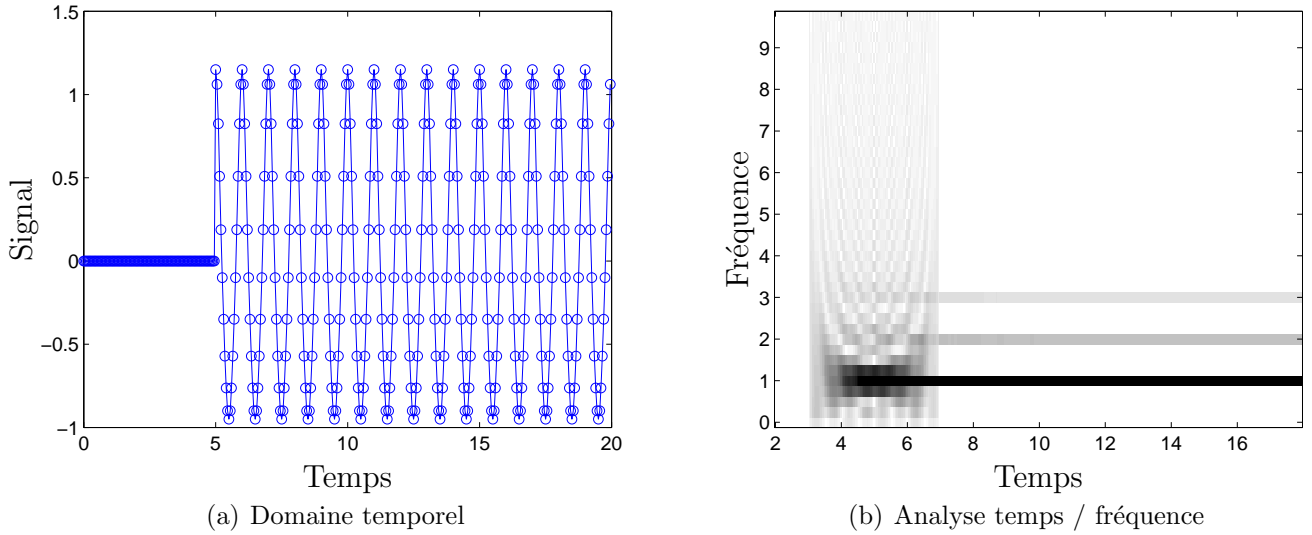


FIGURE 9 – Signal non-linéaire étudié par TF glissante avec une fenêtre de  $T_d = 4T = 4$  s.

La figure 9 à gauche montre un signal temporel simple avec une première partie sans rien (par exemple une houle avant l'arrivée du front d'onde) et une seconde partie un signal périodique de période  $T = 1$  s avec la superposition de trois houles harmoniques du type

$$f(t) = \cos(\omega t) + 0.1 \cos(2\omega t) + 0.05 \cos(3\omega t)$$

L'échantillonnage est fait avec 20 points par période, soit une fréquence d'échantillonnage de  $f_s = 20/T$ . Sur la figure de droite, on montre le module de la TF glissante avec en abscisse le temps et en ordonnée la fréquence. Les paramètres de la TFD sont une durée de fenêtre de 4 périodes et un décalage temporel d'un échantillon  $\Delta t = 1/f_s$ . On observe après 7 secondes trois bandes horizontales qui correspondent aux 3 harmoniques  $\omega$ ,  $2\omega$  et  $3\omega$ .

Cette TFD donne des informations sur l'évolution temporelle du contenu fréquentiel du signal. Pour y voir plus clair, on peut par exemple tracer des coupes à un instant  $t$  donné (pour identifier les harmoniques présentes à cet instant) et/ou à fréquence  $f$  donnée (pour suivre l'évolution temporelle de cette harmonique).

On a tracé le spectre d'amplitude à un instant donné pour voir l'amplitude des différentes composantes. La figure 10 à gauche montre un exemple à  $t = 8$  s. On observe trois pics à 1, 2 et 3 Hz qui correspondent aux harmoniques. Les amplitudes relevées sur la figure 10, respectivement 1, 0.1 et 0.05 sont bien celles utilisées pour construire le signal.

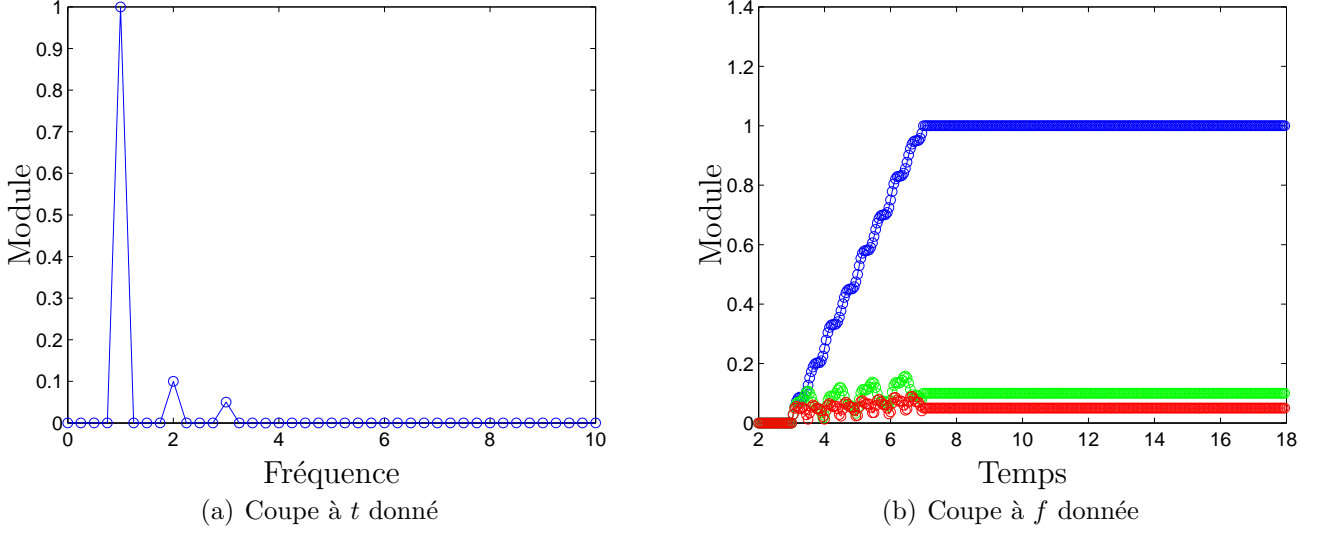


FIGURE 10 – Signal non-linéaire étudié par TF glissante avec une fenêtre de  $T_d = 4T = 4$  s.

A droite de la figure 10, on a superposé des coupes temporelles aux trois fréquences 1, 2 et 3 Hz et on constate que la TFD montre un établissement progressif du régime permanent, qui apparaît dans ce cas après 7 s. Le changement de régime, qui est brutal dans le signal d'origine sur la figure 9 à gauche, apparaît comme lissé entre  $t = 3$  et  $t = 7$  s sur la figure 10 à droite. Cela est dû à la taille de la fenêtre glissante. La discontinuité s'étale sur une durée égale à la longueur de la fenêtre d'analyse et l'instant à laquelle se produit la discontinuité peut être repérer lorsque l'enveloppe à la fréquence 1 Hz passe à une amplitude moitié du régime permanent sur la figure 10 à droite.

Il existe un compromis à trouver entre la durée d'analyse  $T_d = NT$  et la localisation temporelle. Si on prend plus de périodes, on aura une information moyenne de meilleure qualité mais moins bien localisée en temps. À l'opposé, avec une seule période, l'information est bien localisée en temps mais elle peut varier rapidement d'un instant à l'autre si le régime établi n'est pas très propre.

Il existe une redondance de l'information si  $\Delta t \neq T_d$ .

## 4.1 Implémentations en Matlab®

Sous Matlab®, on évalue les TFD glissante à l'aide des fonctions `moving_Fourier.m` et `moving_Fourier_resamp.m` décrites dans l'Annexe A.2.

### 4.1.1 `moving_Fourier.m`

On spécifie la durée  $T$  et le pas de temps  $\Delta t$  non pas directement en seconde mais en nombre d'échantillons soit  $N_T = T f_e$  et  $N_\Delta = \Delta t f_e$ . Il faut par conséquent que  $T$  et  $\Delta t$  soit des multiples de la période d'échantillonnage, ce qu'on obtient par un ré-échantillonnage préliminaire.

Les figures 9 et 10 ont été obtenues après calcul de la TF glissante par la commande suivante

```
[moving, time, freq] = moving_Fourier(signal, 8 * T * f_s, 1, f_s);
```

*i.e.* avec en paramètres une durée de fenêtre de 8 périodes, et un décalage temporel  $\Delta t = 1/f_s$ .

#### 4.1.2 moving\_Fourier\_resamp.m

Cette fonction inclut le ré-échantillonnage, si bien qu'il suffit d'entrer la durée  $T$  et le pas de temps  $\Delta t$  dans les mêmes unités que le vecteur temps.

## 4.2 Moyenne et pondération

Quand on calcule une moyenne à une fréquence sur un intervalle de temps, le signal temporel de départ est en fait pondéré. Par exemple, si on considère trois fenêtres temporelles aux instants  $t_1$ ,  $t_2 = t_1 + \Delta t$  et  $t_3 = t_1 + 2\Delta t$ , la moyenne  $\tilde{a}$  du coefficient de Fourier à la fréquence  $f$  vérifie

$$3\tilde{a} = a_1 + a_2 + a_3 = \int_{t_1-T/2}^{t_1+T/2} + \int_{t_2-T/2}^{t_2+T/2} + \int_{t_3-T/2}^{t_3+T/2} = \int_{t_1-T/2}^{t_1} + 2 \int_{t_1}^{t_3} + \int_{t_3}^{t_3+T/2}$$

En généralisant à une moyenne sur  $N$  fenêtres,

- les fenêtres  $i = 1$  à  $n - 1$  où  $n\Delta t = T_d$  sont pondérées par un poids  $p_i = i/N$ ,
- les fenêtres  $i = n$  à  $N - n$  par  $p_i = n/N$ ,
- les fenêtres  $i = N - n + 1$  à  $N$  par  $p_i = (N - i + 1)/N$

## A Fonctions développées sous Matlab®

Les fonctions décrites dans la suite sont stockées dans le répertoire `lib` sauf mention contraire.

### A.1 `plot_moving.m`

La fonction permet d'afficher sur une figure la TFD glissante d'un signal réel. La syntaxe est la suivante :

```
plot_moving(FT, time, freq, f_max, plot_type, amplitude)
```

Les trois arguments `FT`, `time` et `freq` proviennent de la routine `moving_Fourier.m` (voir la section A.2). Les trois suivants sont optionnels.

- `f_max` sert à donner une borne supérieure pour l'intervalle des fréquences à afficher.
- `plot_type` permet de sélectionner un affichage pour la première sonde seulement (`plot_type=1`, en niveaux de gris, utile pour mettre dans un rapport) ou pour l'ensemble des sondes, en couleur (`plot_type=2`). Cet affichage est primordial pour s'assurer que l'énergie du signal est bien aux fréquences attendues. Par exemple en houle régulière, il faut absolument vérifier que l'énergie est bien sur une seule fréquence, celle du mouvement batteur. Sinon, il est possible qu'on ait pas utilisé un nombre entier de période par fenêtre.
- `amplitude` permet de donner une référence pour les niveaux de contour. On peut par exemple obtenir les mêmes niveaux pour différentes amplitudes en donnant `amplitude=constante`. Ou rendre plus visible les pics secondaires en donnant `amplitude` égal à une fraction du maximum du module de `FT`.

### A.2 `moving_Fourier.m`

La fonction permet de calculer la TFD glissante d'un signal réel. La syntaxe est la suivante :

```
[FT, time, freq] = moving_Fourier(signal, n_TFD, n_shift, f_samp)
```

La variable d'entrée `signal` est un vecteur contenant les échantillons temporels du signal, ou une matrice contenant plusieurs signaux, en colonne. On entre ensuite le nombre de points `n_TFD` de la TFD, *i.e.* la longueur de la fenêtre d'analyse et le nombre de points `n_shift` de décalage entre chaque fenêtre mobile.

Le quatrième argument `f_samp` est optionnel, il s'agit de la fréquence d'échantillonnage, qui est nécessaire si on demande de sortir le vecteur des fréquences `freq`.

En sortie, la variable `FT` contient la TFD complexe sous la forme suivante

- si un seul signal est étudié, la variable `FT` est une matrice avec en ligne le temps des fenêtres glissantes et en colonne la fréquence.
- si plusieurs signaux sont fournis en entrée, la matrice contient toujours le temps en ligne, les différents signaux en colonne et en page la fréquence.

On fournit la TFD pour des fréquences positives seulement, comprises entre 0 et `f_samp/2` d'après le critère de Shannon. Le vecteur `time` contient les instants de chaque fenêtre d'analyse, estimés au milieu de la fenêtre. Les transformées de Fourier sont normalisées de telle sorte que le module est directement exprimé dans les unités des signaux d'entrée.

Si on fournit en entrée la fréquence d'échantillonnage `f_samp`, la variable `freq` contient le vecteur des fréquences associées  $f_n = n\Delta f$  pour  $n = 0$  à  $(N - 1)/2$  où  $N$  est le nombre d'échantillons du signal.

La fonction `moving_Fourier.m` utilise la fonction `make_it_column.m` pour mettre le signal d'entrée sous forme d'une matrice colonne. On n'a pas construit de fonction inverse du fait de la redondance et du fait qu'on n'en a pas besoin pour l'analyse des mesures.

### A.3 `moving_Fourier_resamp.m`

Cette fonction calcule la TFD glissante d'un signal réel en ré-échantillonnant le signal pour garantir un nombre entier de points dans la fenêtre glissante. Les variables d'entrée sont différentes de la routine `moving_Fourier.m`.

```
[FT, time_out, freq] = moving_Fourier_resamp(signal, time_in, T_d, T_shift, f_samp)
```

La variable d'entrée `signal` est un vecteur contenant les échantillons temporels du signal, ou une matrice contenant plusieurs signaux, en colonne. On entre ensuite le vecteur temps (nécessaire pour le ré-échantillonnage), la longueur `T_d` de la fenêtre d'analyse glissante et le décalage temporel `T_shift` entre chaque fenêtre mobile.

Le quatrième argument `f_samp` n'est optionnel ici, il s'agit de la fréquence d'échantillonnage, qui est nécessaire pour le ré-échantillonnage.

Les sorties sont les mêmes que la fonction `moving_Fourier.m`.

La fonction `moving_Fourier_resamp.m` utilise la fonction `make_it_column.m` pour mettre le signal d'entrée sous forme d'une matrice colonne. On n'a pas construit de fonction inverse du fait de la redondance et du fait qu'on n'en a pas besoin pour l'analyse des mesures.

### A.4 `Fourier.m`

La fonction permet de calculer la TFD d'un signal réel. Elle est associée à la fonction transformée de Fourier inverse `iFourier` (voir la section A.5). La syntaxe est la suivante :

```
[FT, freq] = Fourier(signal, f_samp)
```

La variable d'entrée `signal` est un vecteur contenant les échantillons temporels du signal, ou une matrice contenant plusieurs signaux. Le deuxième argument `f_samp` est optionnel, il s'agit de la fréquence d'échantillonnage, qui est nécessaire si on demande de sortir le vecteur des fréquences `freq`. En sortie, la variable `FT` contient la TFD complexe (si plusieurs signaux sont fournis en entrée, la matrice contient les TFDs en colonne). On fournit la TFD pour des fréquences positives seulement, comprises entre 0 et `f_samp/2` d'après le critère de Shannon.

Si on fournit en entrée la fréquence d'échantillonnage `f_samp`, la variable `freq` contient le vecteur des fréquences associées  $f_n = n\Delta f$  pour  $n = 0$  à  $(N - 1)/2$  où  $N$  est le nombre d'échantillons du signal.

La fonction `Fourier.m` utilise la fonction `make_it_column.m` pour mettre le signal d'entrée sous forme d'une matrice colonne. Il existe une deuxième fonction `Fourier2` qui fournit les résultats sous la forme d'une structure.



## A.5 iFourier.m

La fonction permet de calculer la TFD inverse et fournit un signal réel. Elle est associée à la fonction transformée de Fourier `Fourier` (voir la section A.4). La syntaxe est la suivante :

```
[signal, time] = iFourier(FT, N, f_samp)
```

La variable d'entrée `FT` est la TFD complexe en colonnes (voir la fonction `Fourier.m`), et `N` le nombre de points du signal. Le troisième argument, `f_samp` est optionnel, il s'agit de la fréquence d'échantillonnage qui est nécessaire pour calculer le vecteur des temps.

En sortie, on fournit `signal` le vecteur contenant les échantillons temporels du signal, ou la matrice colonne dans le cas de plusieurs signaux. Si on fournit en entrée la fréquence d'échantillonnage `f_samp`, on peut évaluer le vecteur temps `time`.

Il existe une deuxième fonction `iFourier2` qui utilise une entrée sous forme de structure.

## B Autres fonctions développées sous Matlab®

### B.1 Fourier2.m

La fonction permet de calculer la TFD d'un signal réel et fournit un résultat sous forme de structure. Elle est associée à la fonction transformée de Fourier inverse `iFourier2` (voir la section B.2). La syntaxe est la suivante :

```
FT = Fourier2(signal, f_samp)
```

La variable d'entrée `signal` est un vecteur contenant les échantillons temporels du signal, ou une matrice contenant plusieurs signaux. Le deuxième argument `f_samp` est optionnel, il s'agit de la fréquence d'échantillonnage, qui est nécessaire si on demande de sortir le vecteur des fréquences `freq`.

En sortie, la structure `FT` contient par défaut

- `FT.data` la TFD complexe (si plusieurs signaux sont fournis en entrée, la matrice contient les TFDs en colonne). On fournit la TFD pour des fréquences positives seulement, comprises entre 0 et `f_samp/2` d'après le critère de Shannon,
- `FT.N` le nombre de points.

Si on fournit en entrée la fréquence d'échantillonnage `f_samp`, la structure contient en plus

- `FT.freq` le vecteur des fréquences associées  $f_n = n\Delta f$  pour  $n = 0$  à  $(N - 1)/2$  où  $N$  est le nombre d'échantillons du signal,
- `FT.f_samp` la fréquence d'échantillonnage,
- `FT.T_d` la durée du signal donnée par  $T_d = N f_{samp}$ .

La fonction `Fourier2.m` utilise la fonction `make_it_column.m` pour mettre le signal d'entrée sous forme d'une matrice colonne.

### B.2 iFourier2.m

La fonction permet de calculer la TFD inverse et fournit un signal réel. Elle est associée à la fonction transformée de Fourier `Fourier2` (voir la section B.1). La syntaxe est la suivante :

```
[signal, time] = iFourier2(FT)
```

La variable d'entrée `FT` est une structure (voir la définition de la sortie de `Fourier2.m`).

En sortie, on fournit `signal` le vecteur contenant les échantillons temporels du signal, ou la matrice colonne dans le cas de plusieurs signaux. Si la structure d'entrée contient la fréquence d'échantillonnage `f_samp`, on peut évaluer le vecteur temps `time`.