

# Aide à la décision

## Compte rendu client

Salma El Alaoui Talibi

Zied Thabet

Donovan Fournier

Ségolène Minjard

Benjamin Legrand

Quentin Dupont

H 4304

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Contexte de l'étude . . . . .	3
1.2	Notations et conventions . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Prise en compte des contraintes globales</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Analyse des objectifs de chacun des cadres : programmation linéaire mono-critère</b>	<b>4</b>
3.1	Le comptable . . . . .	4
3.2	Le responsable d'atelier . . . . .	6
3.3	Le responsable des stocks . . . . .	7
3.4	Le responsable commercial . . . . .	9
3.5	Le responsable du personnel . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Point de vue du Responsable d'entreprise : programmation linéaire multicritère</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Sélection du meilleur plan de production : analyse multicritère</b>	<b>11</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Contexte de l'étude

Ce document est un compte rendu de l'étude menée par notre hexanôme H4304 pour le compte de la société FaBrique. Cette étude a pour but d'optimiser l'utilisation des ressources de l'entreprise en proposant le meilleur plan de production à mettre en place. En premier lieu, nous considérerons indépendamment les objectifs métiers de chacun des cadres impliqués dans cette étude d'aide à la décision pour apporter une solution optimale à chacun. En second lieu, nous proposons au responsable d'entreprise une solution qui satisfait au mieux l'ensemble des points de vue. Finalement, nous dégagerons parmi les 8 propositions de gestion de l'atelier, la solution optimale au vu des critères définis par les décideurs de l'entreprise.

## 1.2 Notations et conventions

Nous expliquons dans ce paragraphe les notations qui seront adoptées dans la suite du document.

- Fonction objectif à optimiser pour le responsable.

$$Z_{\text{poste.responsable}}$$

- Vecteur où chaque composante  $x_i$  représente la production hebdomadaire du produit  $i$ . Les valeurs sont à  $10^{-2}$  près.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{x}_E \\ \mathbf{x}_F \end{pmatrix}$$

Nous présenterons pour chaque responsable 3 résultats significatifs permettant d'analyser notre solution par rapport à l'objectif défini, il s'agit de :

- Vecteur  $\mathbf{X}$  (défini ci-dessus) où la fonction objectif atteint son optimum.

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{x}_E \\ \mathbf{x}_F \end{pmatrix}$$

- La valeur de la fonction objectif en cet optimum.
- Vecteur donnant la distance entre les contraintes et la solution optimale. Les valeurs sont arrondies à l'unité.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^* - \mathbf{b}$$

## 2 Prise en compte des contraintes globales

Deux critères nous semblent limitants d'un point de vue de la production. En effet, les machines ne peuvent fonctionner qu'en présence des ouvriers et leurs horaires de travail sont limités. Il convient donc de limiter les temps d'utilisation de chacune d'elles. En prenant en compte les durées de production respectives de chacun des produits sur les différentes machines, on introduit les 7 contraintes suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 8x_A + 15x_B + 0x_C + 5x_D + 0x_E + 10x_F \leq 4800 \\ 7x_A + 1x_B + 2x_C + 15x_D + 7x_E + 12x_F \leq 4800 \\ 8x_A + 1x_B + 11x_C + 0x_D + 10x_E + 25x_F \leq 4800 \\ 2x_A + 10x_B + 5x_C + 4x_D + 13x_E + 7x_F \leq 4800 \\ 5x_A + 0x_B + 0x_C + 7x_D + 10x_E + 25x_F \leq 4800 \\ 5x_A + 5x_B + 3x_C + 12x_D + 8x_E + 0x_F \leq 4800 \\ 5x_A + 3x_B + 5x_C + 8x_D + 0x_E + 7x_F \leq 4800 \end{array} \right\}$$

De plus, la production est limitée par les matières premières. De fait, en appliquant les pondérations associées, on trouve :

$$\left. \begin{array}{l} 1x_A + 2x_B + 1x_C + 5x_D + 0x_E + 2x_F \leq 350 \\ 2x_A + 2x_B + 1x_C + 2x_D + 2x_E + 2x_F \leq 620 \\ 1x_A + 0x_B + 3x_C + 2x_D + 2x_E + 0x_F \leq 485 \end{array} \right\}$$

Par ailleurs, nous devons ajouter des contraintes de domaines. En effet, la production ne peut pas être négative. Nous avons donc :  $x_A \geq 0$ ,  $x_B \geq 0$ ,  $x_C \geq 0$ ,  $x_D \geq 0$ ,  $x_E \geq 0$ ,  $x_F \geq 0$ . Des contraintes relatives aux différents cas d'analyses seront ajoutées aux précédentes par la suite.

## 3 Analyse des objectifs de chacun des cadres : programmation linéaire mono-critère

Dans cette partie, nous mettons en œuvre des techniques de programmation linéaire mono-critère afin de proposer à chaque cadre la solution qui permet d'optimiser son objectif métier.

### 3.1 Le comptable

L'objectif du comptable est de maximiser le bénéfice de l'entreprise. Ce bénéfice est calculé en tenant compte des coûts de fonctionnement des machines et du coût d'achat des matières premières. Pour chaque produit le bénéfice unitaire (i.e. pour un produit vendu) sera donc donné par la formule suivante :

$$pv - \sum_{i=1}^3 (paMP_i * qteMP_i) - \frac{1}{60} \sum_{j=1}^7 (tupM_j * chM_j)$$

***pv***

Prix de vente du produit considéré fini.

***paMP<sub>i</sub>***

Le prix d'achat de la matière première de numéro i.

***qteMP<sub>i</sub>***

La quantité de matière première i, nécessaire pour la fabrication du produit considéré.

***tupM<sub>j</sub>***

Temps unitaire d'usinage du produit considéré sur la machine j.

***chM<sub>j</sub>***

Coût horaire de la machine j.

Il en ressort le problème de programmation linéaire mono-critère suivant :

Maximiser

$$Z_{comptable} = 5.67x_A + 11.88x_B + 12.27x_C + 1.03x_D + 31.65x_E + 27.55x_F$$

Sous les contraintes :

– contraintes globales (cf section 2 - Prise en compte des contraintes globales )

On peut à partir des coefficients de la fonction objectif classer les produits selon le bénéfice unitaire qu'ils permettent de dégager. On obtient dans l'ordre décroissant de bénéfice unitaire : E, F, C, B, A, D.

La résolution mathématique de ce problème de programmation linéaire donne les résultats suivant :

$$X_{comptable}^* = \begin{pmatrix} x_A = 0 \\ x_B = 20.41 \\ x_C = 0 \\ x_D = 0 \\ x_E = 242.50 \\ x_F = 94.18 \end{pmatrix}$$

On constate que les produits les plus rentables (E puis F) sont beaucoup produits. Les produits les moins rentables (A et D) ne sont pas du tout produits. Le produit C est légèrement plus rentable que le produit B mais B est préféré à C car il n'utilise pas la matière première 3 qui est beaucoup utilisée par E (présence d'une contrainte sur l'utilisation des matières premières).

**Bénéfice maximal = 10512**

Satisfaction des contraintes :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{comptable}^* - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3552 \\ -1952 \\ 0 \\ -784 \\ -20 \\ -2758 \\ -4080 \\ -121 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les 7 premières lignes correspondent à l'utilisation des machines. On constate que les machines 1 et 7 sont les moins utilisées. Ceci s'explique par le fait que ces machines ne sont pas nécessaires pour produire E qui est le produit le plus réalisé. La machine 3 est utilisée au maximum car elle est très utilisée par les produits les plus réalisés (E et F). Les matières premières 2 et 3 sont consommées au maximum. En effet ce sont les matières premières nécessaires à la production de E. La production de E est ainsi poussée au maximum (jusqu'à épuisement des matières premières nécessaires).

### 3.2 Le responsable d'atelier

L'objectif du responsable d'atelier est de maximiser la quantité de produits fabriqués. Il en ressort le problème de programmation linéaire mono-critère suivant :

Maximiser

$$Z_{atelier} = x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F$$

Sous les contraintes :

– contraintes globales (cf section 2 - Prise en compte des contraintes globales )

La résolution mathématique de ce problème de programmation linéaire donne les résultats suivants :

$$\mathbf{X}_{atelier}^* = \begin{pmatrix} x_A = 0 \\ x_B = 56.73 \\ x_C = 38.69 \\ x_D = 0 \\ x_E = 184.46 \\ x_F = 98.92 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que le modèle A n'est pas du tout produit car il mobilise toutes les machines ni le produit D car il mobilise en quantité toutes les matières premières. On

produit en quantité les produits B, E et F car ils n'utilisent pas toutes les matières premières. On produit aussi du C car il n'utilise pas du tout 2 machines.

**Quantité totale maximale de produits réalisés = 378.81**

La quantité est cohérente car celle-ci ne peut dépasser 620 (quantité maximale de matière première 2, matière qui est toujours utilisée). La plupart des produits utilisent 2 unités de matière première 2 ce qui nous rapproche de 310. Les autres matières premières ont un maximum du même ordre de grandeur.

Satisfaction des contraintes :

$$A \cdot X_{atelier}^* - b = \begin{pmatrix} -2960 \\ -2188 \\ 0 \\ -949 \\ -482 \\ -2925 \\ -3744 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après les 3 dernières lignes, toutes les matières premières ont été utilisées au maximum, ce résultat est cohérent par rapport à l'objectif.

### 3.3 Le responsable des stocks

L'objectif du responsable des stocks est de minimiser le nombre de produits dans son stock.

Cette quantité est calculée en ajoutant le nombre de matières premières utilisées au nombre de produits usinés. Les coefficients de chaque produit sont donc calculés de la manière suivante :

$$C_i = 1 + \sum_{j=1}^3 (qteMP_j)$$

**C<sub>i</sub>**

Coefficient associé au produit i.

**1**

Valeur correspondant au stockage du produit fini.

**qteMP<sub>j</sub>**

La quantité de matière première j, nécessaire pour la fabrication du produit considéré.

Les contraintes globales, bien qu'elles prévoient des quantités fabriquées positives, ne suffisent pas pour assurer une activité minimale de l'entreprise. Et une tentative de résolution

du problème du responsable de stock sans ajout de contraintes assurant l'activité minimale, aboutira à des quantités quasi nulle (de l'ordre de  $10^{-16}$  ).

Nous avons donc ajouté la contrainte d'activité minimale suivante : le bénéfice de l'entreprise doit être supérieur à 50% du bénéfice maximale. Il en ressort le problème de programmation linéaire mono-critère suivant :

Minimiser

$$Z_{stocks} = 5x_A + 5x_B + 6x_C + 10x_D + 5x_E + 4x_F$$

Sous les contraintes :

- contraintes globales (cf section 2 - Prise en compte des contraintes globales )
- $Z_{comptable} = 5.67x_A + 11.88x_B + 12.27x_C + 1.03x_D + 31.65x_E + 27.55x_F \geq 5256$

La résolution mathématique de ce problème de programmation linéaire donne les résultats suivants :

$$\mathbf{X}_{stocks}^* = \begin{pmatrix} x_A = 0 \\ x_B = 0 \\ x_C = 0 \\ x_D = 0 \\ x_E = 13.74 \\ x_F = 175 \end{pmatrix}$$

On remarque que le produit F est le plus fabriqué. De fait, il s'agit du produit qui utilise le moins de matières premières. Ensuite, les produits B et E consomment la même quantité de matières premières. Toutefois, les contraintes associées aux matières premières nous encouragent à préférer l'utilisation de la matière 3 par rapport à la matière 1 (Plus de disponibilité).

**Quantité minimale de produits et de matières premières en stock = 768.70**

TODO : Analyser le résultat

Satisfaction des contraintes :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{stocks}^* - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3050 \\ -2604 \\ -288 \\ -3396 \\ -288 \\ -4690 \\ -3575 \\ 0 \\ -418 \\ -458 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que la matière 1 est limitante car il est légitime de privilégier le produit F jusqu'à épuisement de la ressource 1. On constate également que l'on pourrait utiliser



plus de ressource 2 et 3 et les différentes machines. Néanmoins, le critère de bénéfice minimal étant atteint, la production est arrêtée malgré les disponibilités.

### 3.4 Le responsable commercial

L'objectif du commercial est de conserver une certaine diversité dans sa gamme de produits tout en produisant le plus de produits. Concrètement, l'entreprise doit produire autant de produit de la gamme 1 (composée des produits A,B,C) que de la gamme 2 (composée des produits D,E,F). On peut donc en déduire une contrainte d'égalité :

$$(x_a + x_b + x_c) - (x_d + x_e + x_f) = 0$$

De plus, il nous semble légitime de rajouter dans notre modèle le souhait de produire le plus de produits (comme dans le modèle du responsable atelier). Il en ressort le problème de programmation linéaire mono-critère suivant :

Maximiser

$$Z_{commercial}(X) = x_a + x_b + x_c + x_d + x_e + x_f$$

Sous les contraintes :

- contraintes globales (cf section 2 - Prise en compte des contraintes globales )
- $(x_a + x_b + x_c) - (x_d + x_e + x_f) = 0$

La résolution mathématique de ce problème de programmation linéaire donne les résultats suivants :

$$\mathbf{X}_{commercial}^* = \begin{pmatrix} x_A = 142.12 \\ x_B = 0 \\ x_C = 44.42 \\ x_D = 0 \\ x_E = 104.81 \\ x_F = 81.73 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que la contrainte inhérente au problème du commercial est respecté : le lot de produits A et C est usiné en même quantité que le lot de produits E et F. On remarque que les produits B et D sont totalement supprimés de la production. Cette particularité montre que le modèle B demande plus de ressources et/ou de temps de travail que ses modèles équivalents (A et C) et que d'un point de vue quantitatif, il est préférable de choisir ces derniers.

**Nombre de produits total = 373.08**

On trouve une valeur cohérente par rapport à celle trouvée pour le chef d'atelier.

Satisfaction des contraintes :

$$A.X_{commercial}^* - b = \begin{pmatrix} -2846 \\ -2002 \\ -83 \\ -2359 \\ -998 \\ -3118 \\ -3295 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces valeurs nous indiquent que les facteurs limitants de notre problème sont les ressources de production. Une augmentation de ces dernières permettrait de fabriquer plus de produits. Dans ces conditions, la machine 7 est sous-exploitée tandis que la 3ème est presque en constante utilisation. Ces constatations sont explicables par l'importante production des modèles A, E et F.

### 3.5 Le responsable du personnel

L'objectif du responsable du personnel est de minimiser l'usage des machines 3 et 5 (ces machines étant délicates). On calcule donc les temps passés sur les machines pour chaque produit, d'où la formule suivante permettant de calculer les coefficients de la fonction :

$$C_i = \sum_{j \in \{3;5\}} tupM_j$$

$C_i$

Coefficient associé au produit i.

$tupM_j$

Temps unitaire d'usinage du produit considéré sur la machine j.

De même que pour le responsable des stocks, il faudra rajouter ici une contrainte assurant une activité minimale de l'entreprise afin d'obtenir des quantités produites non nulles. Nous avons retenu la même contrainte, à savoir que le bénéfice de l'entreprise doit être supérieur à 50% du bénéfice maximale. Il en ressort le problème de programmation linéaire mono-critère suivant :

Minimiser

$$Z_{personnel} = 13x_A + x_B + 11x_C + 7x_D + 20x_E + 50x_F$$

Sous les contraintes :

- contraintes globales (cf section 2 - Prise en compte des contraintes globales )
- $Z_{comptable} = 5.67 * x_A + 11.88 * x_B + 12.27 * x_C + 1.03 * x_D + 31.65 * x_E + 27.55 * x_F \geq 5256$

La résolution mathématique de ce problème de programmation linéaire donne les résultats suivant :

$$X_{personnel}^* = \begin{pmatrix} x_A = 0 \\ x_B = 175.00 \\ x_C = 0 \\ x_D = 0 \\ x_E = 100.38 \\ x_F = 0 \end{pmatrix}$$

TODO : Analyser résultats.

**Usage minimal des machines en ?? = 2182.7**

Satisfaction des contraintes :

$$A.X_{personnel}^* - b = \begin{pmatrix} -2175 \\ -3922 \\ -3612 \\ -1745 \\ -3792 \\ -3122 \\ -4275 \\ 0 \\ -69 \\ -284 \end{pmatrix}$$

TODO : Analyser résultats

## 4 Point de vue du Responsable d'entreprise : programmation linéaire multicritère

Nous avons défini la matrice de gain suivante :

$$MatricedGain = \begin{pmatrix} 10512,33 & 357,09 & 1691,28 & 316,28 & 9579,59 & 4800 & 4779,59 \\ 9712,21 & 378,81 & 1833,81 & 187,96 & 9117,65 & 4800 & 4317,65 \\ 5256,17 & 188,74 & 768,71 & 188,74 & 9024,83 & 4512,41 & 4512,41 \\ 6919,71 & 373,08 & 1828,08 & 0 & 8518,85 & 4716,92 & 3801,92 \\ 5256,17 & 275,38 & 1376,92 & 74,62 & 2182,69 & 1178,84 & 1003,84 \end{pmatrix}$$

## 5 Sélection du meilleur plan de production : analyse multicritère

Suite aux études précédentes et aux différentes discussions, nous avons retenu 8 propositions de gestion d'atelier. L'entreprise s'est entendue sur 4 critères à considérer pour

décider du meilleur plan de production : le bénéfice, la gestion du stock, l'équilibre commercial (Proposer une diversité de produits) et le taux d'utilisation de certaines machines délicates.

Nous avons attribué un poids à chacun de ces critères en jugeant de leur importance relative. Nous privilégions principalement le bénéfice (Raison d'être de l'entreprise). Nous avons ensuite décidé de pondérer de la même manière les critères 2 et 3, que nous jugeons de même importance. Quant au critère 4, nous le considérons comme le moins important, les opérateurs pouvant être formés à l'utilisation de ces machines. Pour notre analyse, nous avons réévalué les notes de chaque critère afin de correspondre à une échelle plus adaptée. Nous obtenons donc les résultats suivants :

Critère	g1	g2	g3	g4
Coefficient	5	3	3	2
Echelle	$0 \Rightarrow 10$	$2 \Rightarrow 8$	$2 \Rightarrow 8$	$3 \Rightarrow 7$
a	6	5	5	5
b	5	4.4	7.4	4.2
c	3	4.4	6.2	4.2
d	3	6.2	5	4.6
e	5	4.4	3.8	6.6
f	2	5	6.2	4.2
g	5	4.4	3.2	6.6
h	3	5	6.2	4.6

Pour résoudre ce problème et trouver la meilleure solution possible, nous avons utilisé la méthode *Electre 1*. Dans un premier temps, nous avons déterminé les dominances fortes sur les critères précédents. Ainsi, nous avons déterminé que :

- b et h dominent c
- e domine g
- h domine f

Nous avons ensuite calculé les matrices de concordance et de discordance.

$$\begin{aligned}
 \text{Matrice de Concordance} &= \begin{pmatrix} \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \\ \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \\ \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \\ \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \\ \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \end{pmatrix} \\
 \text{Matrice de Discordance} &= \begin{pmatrix} \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \\ \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \\ \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \\ \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \\ \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} & \text{ff} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Après plusieurs itérations, nous avons choisi les seuils suivants :

$C_1$  = Seuil de concordance =

$C_2$  = Seuil de discordance =

En appliquant ces valeurs, nous obtenons le graphe de surclassement suivant :