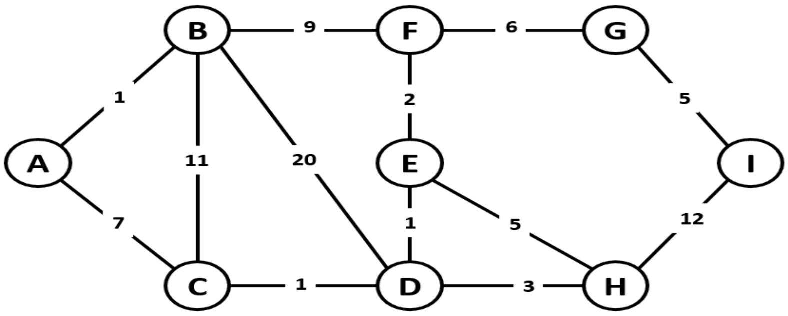
esprit — Se former autrement — HONORIS UNITED UNIVERSITIES	**EXAMEN** Semestre : 1 ■ 2 ☐ Session : Principale ■ Rattrapage ☐

Module : Graphes & Applications (G&A)
Enseignant(s) : Équipe G&A de l'UP Mathématiques
Classe(s) : 4SAE-4INFINI-4WIN-4NIDS
Documents autorisés : OUI ☐ NON ■ Nombre de pages : 2 pages
Calculatrice autorisée : OUI ☐ NON ■ Internet autorisée : OUI ☐ NON ■
Date : 11-11-2023 Heure : 11h00 Durée :1h30

Exercice 1 : (5 points)

Un matin de printemps, la mère du petit chaperon rouge a préparé des galettes et lui a demandé de les ramener à sa grand-mère malade. Pour ce faire, le petit chaperon rouge, qui habite au sommet **A**, devrait traverser la forêt, représentée par le graphe ci-dessous, pour atteindre la maison de sa grand-mère qui se trouve au sommet **I**, tout en minimisant la possibilité de rencontrer le loup. Le reste des sommets du graphe correspondent aux croisements, les arêtes représentent les sentiers de la forêt et les poids qui leur sont associés indiquent le nombre de fois où le loup y a été aperçu en moyenne par jour.



1) À quel problème en théorie des graphes, ce contexte se ramène-t-il ? Justifiez votre réponse. (1 point) : PCC

2) a) Quel est l'algorithme le plus adéquat à utiliser pour trouver une solution à ce problème ? et pourquoi ? (1 point) : Dijkstra

   b) Appliquer cet algorithme pour déterminer le chemin que le petit chaperon rouge peut emprunter pour atteindre la maison de sa grand-mère en minimisant la possibilité de rencontrer le loup. (3 points) : 2 points pour l'application de l'algorithme + 1 point pour la présentation explicite du résultat final. Le plus court chemin de $A \longrightarrow I$ est de longueur 21 et il est donné par : $A \to B \to F \to G \to I$.

Exercice 2 : (5 points)

Six professeurs P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, et P_6 sont appelés à assurer chacun une séance d'informatique de durée 2 heures pour ses élèves. Pour ce faire, ils auront besoin de l'un ou de plusieurs des ouils informatiques suivants : Ordinateur Portable (OP), Vidéo Projecteur (VP), Calculatrice (C) et RétropPojecteur (RP), comme indiqué sur le tableau ci-dessous.

Professeur	à besoin de
P_1	OP-VP
P_2	C-RP
P_3	C-VP
P_4	OP-C-VP
P_5	OP-VP-C
P_6	OP-C-RP

Sachant que deux séances ne peuvent pas avoir lieu en parallèle si les professeurs qui les assurent utilisent au moins le même outil informatique, l'objectif étant de planifier l'ensemble des séances en un temps minimal.

1) Donnez un graphe traduisant les incompatibilités liéés à ce problème. (1 point) : les sommets désignent les séances (ou professeurs) et les liens désignent les incompatibilités (deux professeurs utilisant le même outil informatique).

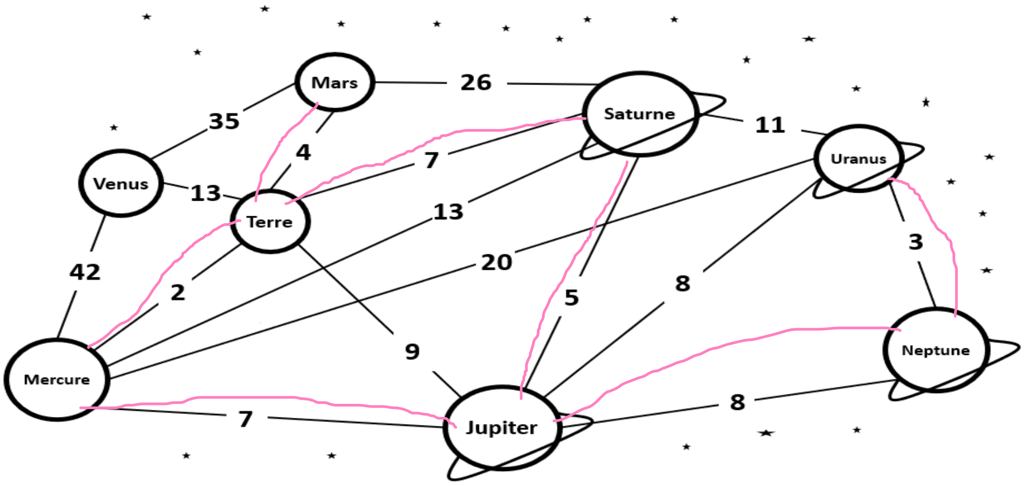
2) Appliquez l'algorithme de Welsh-Powell pour déterminer le nombre minimal d'heures nécessiraies pour planifier l'ensemble des séances. Développez les étapes intermédiaires. (2.5 points) : 2 points pour l'application de Welsh-Powell qui donne 5 couleurs et 0.5 point pour la minoration du nombre chromatique par 5 (existence d'un K_5) : $\chi(G) = 5$.

3) Donnez une planification possible de l'ensemble des séances. (0.5 point) : P_1 et P_2 ensemble et chacun des 4 restants dans 2h différentes.

4) Une journée de 8 heures est-elle suffisante pour planifier toutes les séances ? Justifiez votre réponse. (1 point) : Non, $2 \times 5 = 10$h.

Exercice 3 : (5 points)

Dans le cadre de l'expansion du tourisme spatial, une entreprise ambitionne de créer un réseau de télécabines spatiales reliant diverses planètes du système solaire. Le défi consiste à concevoir ce réseau de manière à minimiser les coûts d'installation tout en garantissant que chaque planète soit accessible depuis la Terre. Pour ce faire, l'entreprise s'intéresse à la carte spatiale ci-dessous représentant une partie du système solaire figé à un instant t : Les sommets sont les planètes, les arêtes représentent les liaisons des télécabines spatiales et les poids qui leur sont associés indiquent les coûts d'installation, exprimés en milliards de dollars.



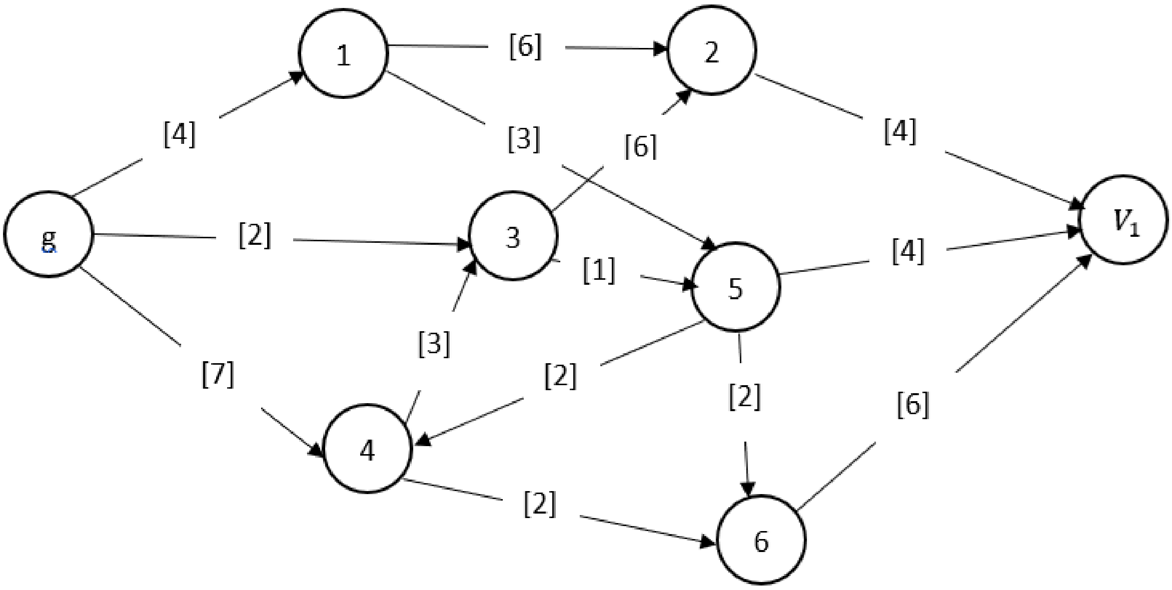
1) À quel problème en théorie des graphes, ce problème se ramène-t-il ? Justifiez votre réponse. (1 point) : Arbre couvrant à poids minimal.

2) Déterminez le coût total d'installation du réseau. Détaillez les étapes intermédiaires. (2 points) : Application de l'algorithme de Kruskal ou Prim et (1 point) pour le résultat final qui donne un arbre couvrant de coût total = 42 composé des arêtes : (Mercure-Terre), (Uranus-Neptune), (Terre-Mars), (Jupiter-Saturne), (Terre,Saturne), (Jupiter,Uranus) et (Venus, Terre). NB : (Jupiter,Uranus) peut être remplacée par (Jupiter,Neptune).

3) Maintenant, si un martien souhaiterait entreprendre le même projet depuis la planète Mars, le coût total minimal d'installation changerait-il ? Justifiez votre réponse. (1 point) : Non.

Exercice 4 : (5 points)

Une usine à gaz (g) alimente une ville (V_1) par l'intermédiaire du réseau de distribution ci-dessous. Les nombres associés aux arcs représentent les capacités de transport.



1) Peut-on appliquer sur ce graphe l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum ? Justifiez votre réponse. (1 point) : Oui.
2) Quelle est la quantité maximale de gaz que l'usine peut tranmettre à la ville (V_1) ? Développez les étapes intermédiaires. (3 points) : $\varphi_{max} = 10$
3) Déterminez la coupe minimale associée au flot maximal distribué. (1 point) : $S = \{g, 1, 2, 3, 4\}$, $T = \{5, 6, V_1\}$.