1. $\int_0^4 x\sin 2x\,dx$

$f(x)=x\sin 2x$

$f'(x)=2x\cos 2x+\sin(2x)$ $f'(0)=0$

$f''(x)=4x\sin(2x)+4\cos(2x)$ $f''(0)=4$

$f'''(x)=-8\cos 2x-12\sin 2x$ $f'''(0)=0$

$f^{IV}(x)=x16\sin 2x-32\cos 2x$ $f^{IV}(0)=-32$

$f^{V}(x)=32x\cos 2x+80\sin 2x$ $f^{V}(0)=0$

$f^{VI}(x)=-64x\sin 2x+192\cos 2x$ $f^{VI}(0)=192$

$$x\sin 2x=\frac{4}{2!}x^2+\frac{-32}{4!}x^4+\frac{192}{6!}x^6+\dots$$

Torga

$$\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{4}{2!}x^2+\frac{-32x^4}{4!}+\frac{192}{6!}x^6=\frac{4x^3}{6}-\frac{32x^5}{5!}+\frac{192x^7}{7!}\Big|_0^{\pi}=$$

$=54{,}124$

$$\int x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}-0=-\frac{\pi}{2}=-1{,}5707$$

1. Вычислить приближенное значение определенного интеграл $\int_0^{\pi} x \sin 2x\,dx$ с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.
Вычислить аналитически

1. Воспользуемся разложением

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} \ldots (|u|<\infty)$$

Получим

$$x \sin 2x = x\left(2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} - \frac{128x^7}{7!}\right)\ldots (|u|<\infty)$$

$$x \sin 2x = 2x^2 - \frac{4x^4}{3} + \frac{4x^6}{15} - \frac{8x^8}{2520} + \frac{512x^{10}}{362880} + \ldots (|u|<\infty)$$

Тогда

$$\int_0^{\pi} x \sin 2x\,dx = \int_0^{1}\left(2x^2 - \frac{8x^4}{6} + \frac{32x^6}{120} - \frac{128x^8}{\cancel{40320}\ 5040} + \frac{512x^{10}}{362880}\right)dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^5}{30} + \frac{32}{120}\frac{x^7}{7} - \frac{128}{\cancel{40320}\ 5040}\cdot\frac{x^9}{9} + \frac{512}{362880}\frac{x^{11}}{11}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3 - \frac{4}{15}\pi^5 + \frac{4}{15}\frac{\pi^7}{7} -$$

$$- \frac{8}{2520}\frac{\pi^9}{9} + \frac{16}{11340}\cdot\frac{\pi^{11}}{11} = 54{,}124$$

$$\int x \sin 2x\,dx = \sin 2x - \frac{2x\cos 2\pi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 0 - \frac{2\pi\cos 2\pi}{2} - 0 = -\frac{2\pi}{2}$$

Найти оптимальную стратегию

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 25 \\ 10 & 31 \\ -3 & 35 \end{pmatrix}$$

Находим нижнюю цену игры

$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{5, 10, -3\} = 10$

Верхнюю цену игры

$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{10, 35\} = 10$

Имеем $\alpha = \beta = 10$ игра имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях

Общее решение рекуррентного соотношения 4-го порядка

$x_{n+4} = 5x_{n+3} - x_{n+2} - 21x_{n+1} + 18x_n$

Составим характеристическое уравнение

$\lambda^4 = 5\lambda^3 - \lambda^2 - 21\lambda + 18$ Находим корни методом делителей свободного члена

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$

$$x_n = C_1 \cdot (-2)^n + (C_2 + nC_3) \cdot 1^n + 3^n (C_1 + C_2 + nC_3)$$

Максимальный путь

$$\begin{pmatrix} - & 10 & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & 8 & 11 & 17 \\ \infty & \infty & - & 5 & 6 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

$d\nu_1 = 0$

$d\nu_2 = 10$

$d\nu_3 = \max(11, 10+13) = 23$

$d\nu_4 = \max\{6, 10+13+5, 11+8\} = 28$

$d\nu_5 = \max\{28+7, 17+9+7\} = 35$

$d\nu_6 = \max\{23+15, 35+9\} = 44$

Длина максимального пути от ν_1 к $\nu_6 = 44$

Методом последовательного возвращения найдем сам путь:

$d(\nu_6) = 44 = 9 + 35 = d(\nu_5) + 9 \qquad d\nu_5 = 35 = 28 + 7 = d\nu_4 + 7 \qquad d\nu_4 = 28 = 23 + 5 = d\nu_3 + 5$

$d\nu_3 = 23 = 13 + 10 = d\nu_2 + 13 \qquad d\nu_2 = 10 = 0 + 10 = d\nu_1 + 10$

Максимальный путь $\nu_1 - \nu_2,\ \nu_2 - \nu_3,\ \nu_3 - \nu_4,\ \nu_4 - \nu_5,\ \nu_5 - \nu_6$

Минимальный путь

1. $d(\nu_1) = 0 \quad d\nu_j = \infty \quad j = 2 \ldots 6$

2. $\tilde{S} = \{\nu_2, \nu_3, \nu_4\}$

$d_{нов}(\nu_2) = \min\{d_{стар}(\nu_2), d\nu_1 + w(\nu_1, \nu_2)\} = \min\{\infty, 10\} = 10$

$d_{нов}\ \nu_3 = \min\{\infty, 11\} = 11$

$d_{нов}\ \nu_4 = \min\{\infty, 6\}$

$d_{нов}(v_5) = \min\{\infty, 6+7, 11+5, 10+11\} = 13$

4^2 $\tilde{v} \neq v_6$

2^3 $\tilde{S} = \{v_6\}$

$d_{нов} = \min\{\infty, 13+9, 10+17, 11+15\} = 22$

4^3 $v = v_6$ Длина кратчайшего пути от v_1 к $v_6 = 22$

Восстанавливаем путь

$d(v_5) + w(v_5, \tilde{v}) = 9 + 13 = 22$ Включаем дугу $(v_5 v_6)$ в путь и полагаем $\tilde{v} \approx v_5$

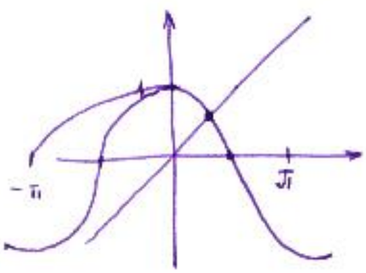
$d v_4 + w(v_4, \tilde{v}) = 6 + 7 = 13$ Включ дуги (v_4, v_5) в путь и полагаем $\tilde{v} \approx v_5$

$d v_4 + w(v_4 v_1) = 0 + 6 = 6$ Включаем дугу (v_1, v_4)

Кратчайший путь $v_1 - v_4, v_4 - v_5, v_5 - v_6$

$x - \cos x = 0$ Метод Ньютона

$x = \cos x$



Диапазон $[0, \frac{\pi}{2}]$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$f'(x) = 1 + \sin x$. $f''(x) = \cos x$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$

?

	x_n	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$\left\lvert\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right\rvert$
0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	2	0	0
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,0189
2	0,73953	-0,2603	1,01291	0,99992	0,2537
3					

<1

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} : 2 = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}} =$

$= \frac{\sqrt{2}\pi - 4}{8} \cdot \frac{1}{1,5 + \sqrt{2}} =$

$= \frac{0,44}{12 + 11,31} < 1$

$\frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx \frac{\pi}{4} - \frac{0,0783}{1,7071} =$

$= 0,73953$

$x_3 = \cancel{0,2603}\ 0,73953 + \frac{0,2603}{1,01291} =$

$-0,2603 \cdot 0,99992$

	x_n	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$	
0	0	-1	1	1	1	$0-\frac{-1}{1}=1$
1	1	0,4596	1,84147	0,5403	0,073	$1-\frac{0,4596}{1,84147}=$
2	0,7504	0,01898	1,6819	0,7314	0,0049 < 0,01	
3	0,7391	$2{,}48\cdot10^{-5}$	1,65587	0,7391	$6{,}68\cdot10^{-6}$	$0{,}7504-\frac{0{,}01898}{1{,}6819}$

Ответ

Метод наименьшего квадрата

$y=f(x)$

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

1. Строим график
2. Выбираем линейную зависимость
3. $ax+b$ $~~a,b~~$

Заполним таблицу

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$f(x)$	$(f(x)-y_i)^2$
...	...	...	...	...	...
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i y_i$		

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=$$

$$=\frac{\sum y_i-a\sum x_i}{n}$$

Градиентный спуск

$f(x)=x_1^2-x_1x_2+x_2^2-2x_1+3x_2-4\to\min$

Шаг $x_{n+1}=x_n-\alpha\frac{\partial f}{\partial x_n}$ или $x=x-\alpha\nabla f$

$\nabla f=(2x_1-x_2-2,\ -x_1+2x_2+3)$

$X_0=0$ $\Delta f_0=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ Проверим критерий остановки: $|\nabla f(x_0)|=\sqrt{2^2+3^2}=3{,}606>0{,}1$

~~Сделаем шаг:~~

$~~x_0~~-\ x_1=x_0-\alpha\Delta f=$

$\alpha=\arg\min_\alpha f(x_0-\alpha\,\mathrm{grad}f(x_0))$

$\nabla f(x_1)\to\min\ \to$ ...

Найдём

$g(\alpha) = f(2\alpha, -3\alpha) = (2\alpha)^2 - 2\alpha\cdot(-3\alpha) + (-3\alpha)^2 - 2\alpha - 9\alpha - 4 =$

$= 4\alpha^2 + 6\alpha^2 + 9\alpha^2 - 4\alpha - 9\alpha - 4 = 19\alpha^2 - 13\alpha - 4$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 + 4\cdot 19\cdot 4}}{19\cdot 2} = \frac{13 \pm 21{,}74856}{38} = 0{,}91443$

$g(\alpha) = f(2\alpha, -3\alpha) = 4\alpha^2 + 6\alpha^2 + 9\alpha^2 - 4\alpha - 9\alpha - 4 = 19\alpha^2 - 13\alpha - 4$

Вычисляем следующую точку

$x_1 = x_0 - \alpha\,grad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}91443 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}82886 \\ -2{,}74329 \end{pmatrix}$

$f(x_1) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$

$f(x_1) = 3{,}344929 + 5{,}01709 + 7{,}52564 - 3{,}65772 - 8{,}22987 - 4 = 0{,}00013$

Проверка условий:

$\max(|x_1^1 - x_1^0|, |x_2^1 - x_2^0|) = \max(|1{,}8286 + 2|, |-2{,}74329 - 3|) > 0{,}01$

Вычисление следующей точки

$X_2 = \begin{pmatrix} 1{,}82886 \\ -2{,}74329 \end{pmatrix}$ $\quad grad f = ($

$g'(\alpha) = 38\alpha - 13 = 0 \qquad \alpha = 0{,}3421$

$X_1 = x_0 - grad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}3421 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6842 \\ -1{,}0263 \end{pmatrix}$

Проверка условия окончания

$|\nabla f(x_1)| = \sqrt{0{,}6842^2 + (-1{,}0263)^2} \geq 0.1$

~~Найдем~~ Транспортная задача — узнать мин затраты или max прибыль

	D	E	предложение
A	80	215	1000
B	100	108	1300
C	102	68	1200
Ф	~~1000~~	0	1200 200
спрос	2300 +200	1400	3500

1. Определим равен ли спрос и предложение

$\neq$

$2300 + 1400 \neq 3500$

Добавляем фиктивного поставщика

2. Метод наименьшей стоимости

68 мин $1200 < 1400 \Rightarrow$

68 меняем на 1200

A	80	215	
B	100	108	
C	102	68	1200
ф	~~200~~	0	200
	2300	1400	

A	80	215	1000
B	100	108	1300
C	~~102~~	1200	0
ф	~~100~~	~~200~~	200
	2300	~~1400~~ 200 -1200	

Анализ продолж

A	80	x	0	0
B	100	108	130 0	10
C	x	68	0	
ф	~~1000~~ 0	200	~~1000~~ 200	
	2300 -1000			

2300 > 1000

A	80	x	0
B	100	x	0
C	x	68	0
ф	200	0	200
	1300-130 0	200	

→

A	80	x	0
B	100	x	0
C	x	68	0
ф	200	0	200
	0	200	

Искомый элем

$C_{42} = 0$

Далее среди невычеркнутых ищем минимальный $= 102$

Новый план

A	80 (1000)	215	1000
B	100 (1300)	108	1300
C	102 (0)	68 (1200)	1200
ф			

число занятых клеток $= 5$

$F(x) = 80 \cdot 1000 + 100 \cdot 1300 + 68 \cdot 1200 + 0 \cdot 200 = 291600$

Симплекс метод

X_1, X_2 - модели

$2x_1 + 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 < 1700 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 < 160 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 + x_4 = 160 \end{cases}$$

Базисное решение на максимум

	B	X_1	X_2	X_3	X_4	min
X_3	1700	3	4	1	0	425
X_4	160	0,2	0.5	0	1	320
F(x)	0	-2	-4	0	0	
X_3						
X_2						

1700 : 4
1600 : 0,5

на минимум

	B	X_1	X_2	X_3	X_4
X_3	1700	3	4	1	0
X_4	160	0,2	0,5	0	1
F(x)	0	-2	-4	0	0

$НЭ = СЭ - \frac{A \cdot B}{РЭ}$ $\quad РЭ = 0{,}5$ $\quad$ AB - старые э-ты образующие прямоугольник
Используем метод прямоугольника

Получаем новую таблицу

$$\begin{matrix} 1700 & 4 \\ 160 & 0.5 \end{matrix} \qquad \frac{1700 \cdot 0{,}5 - 160 \cdot 4}{0{,}5} = 420$$

Базис

	B	X_1	X_2	X_3	X_4	min
X_3	420	1.4	0	1	-8	300
X_4	320	0,4	1	0	2	800
F(x)	1280	-0,4	0	0	8	

$$x_{13} = \begin{matrix} 3 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{matrix} \qquad \frac{3 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot 0{,}2}{0{,}5} = 1{,}4$$

$$x_{14} = \begin{matrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ -2 & -4 \end{matrix} = \frac{0{,}2 \cdot -4 + 2 \cdot 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}4$$

Опред. из
Пересчет таблицы $\quad \frac{420}{320} \quad 1{,}4$

Базис x_1

	B1	X_1	X_2	X_3	X_4
X_3	300	1	0	0.71	-5.71
X_4	200	0	1	-0.29	4.29

Проверка:
Среди значений нет отрицательных => план оптимален

$x_1 = 300 \quad x_2 = 200$