洗牌算法

相关推荐：

- 二叉搜索树操作集锦
- 动态规划解题套路框架

读完本文，你不仅学会了算法套路，还可以顺便去 LeetCode 上拿下如下题目：

384.打乱数组

我知道大家会各种花式排序算法，但是如果叫你打乱一个数组，你是否能做到胸有成竹？即便你拍脑袋想出一个算法，怎么证明你的算法就是正确的呢？乱序算法不像排序算法，结果唯一可以很容易检验，因为「乱」可以有很多种，你怎么能证明你的算法是「真的乱」呢？

所以我们面临两个问题：

1. 什么叫做「真的乱」？
2. 设计怎样的算法来打乱数组才能做到「真的乱」？

这种算法称为「随机乱置算法」或者「洗牌算法」。

本文分两部分，第一部分详解最常用的洗牌算法。因为该算法的细节容易出错，且存在好几种变体，虽有细微差异但都是正确的，所以本文要介绍一种简单的通用思想保证你写出正确的洗牌算法。第二部分讲解使用「蒙特卡罗方法」来检验我们的打乱结果是不是真的乱。蒙特卡罗方法的思想不难，但是实现方式也各有特点的。

一、洗牌算法

此类算法都是靠随机选取元素交换来获取随机性，直接看代码（伪码），该算法有 4 种形式，都是正确的：

```
// 得到一个在闭区间 [min, max] 内的随机整数
int randInt(int min, int max);

// 第一种写法
void shuffle(int[] arr) {
    int n = arr.length();
    /******** 区别只有这两行 ********/
    for (int i = 0 ; i < n; i++) {
```

```
            // 从 i 到最后随机选一个元素
            int rand = randInt(i, n - 1);
            /************************/
            swap(arr[i], arr[rand]);
        }
    }

    // 第二种写法
        for (int i = 0 ; i < n - 1; i++)
            int rand = randInt(i, n - 1);

    // 第三种写法
        for (int i = n - 1 ; i >= 0; i--)
            int rand = randInt(0, i);

    // 第四种写法
        for (int i = n - 1 ; i > 0; i--)
            int rand = randInt(0, i);
```

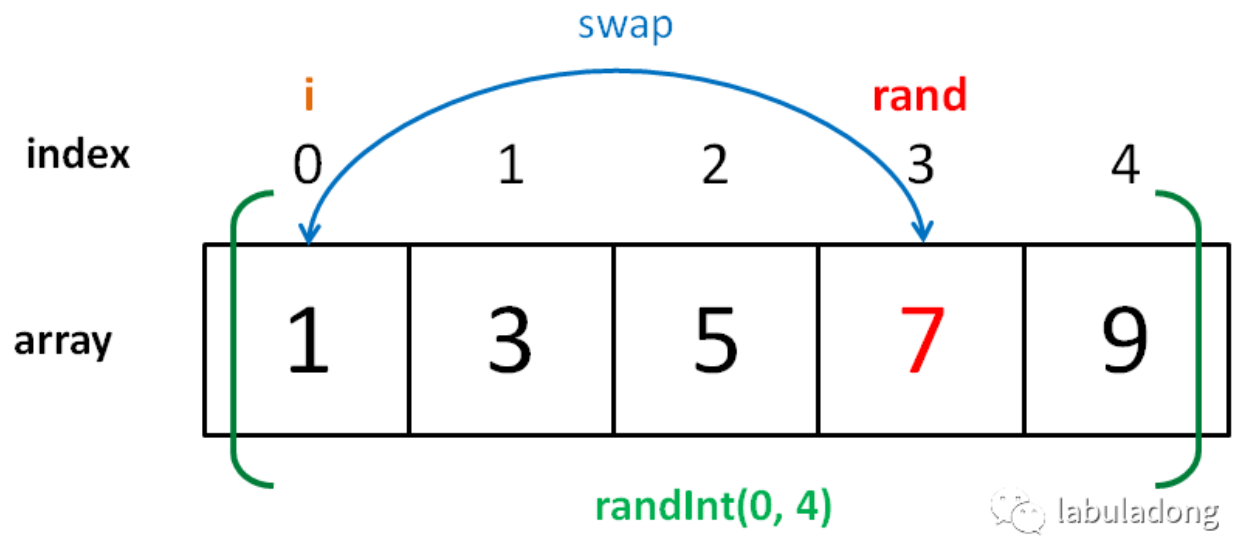
分析洗牌算法正确性的准则：产生的结果必须有 n! 种可能，否则就是错误的。这个很好解释，因为一个长度为 n 的数组的全排列就有 n! 种，也就是说打乱结果总共有 n! 种。算法必须能够反映这个事实，才是正确的。

我们先用这个准则分析一下**第一种写法**的正确性：

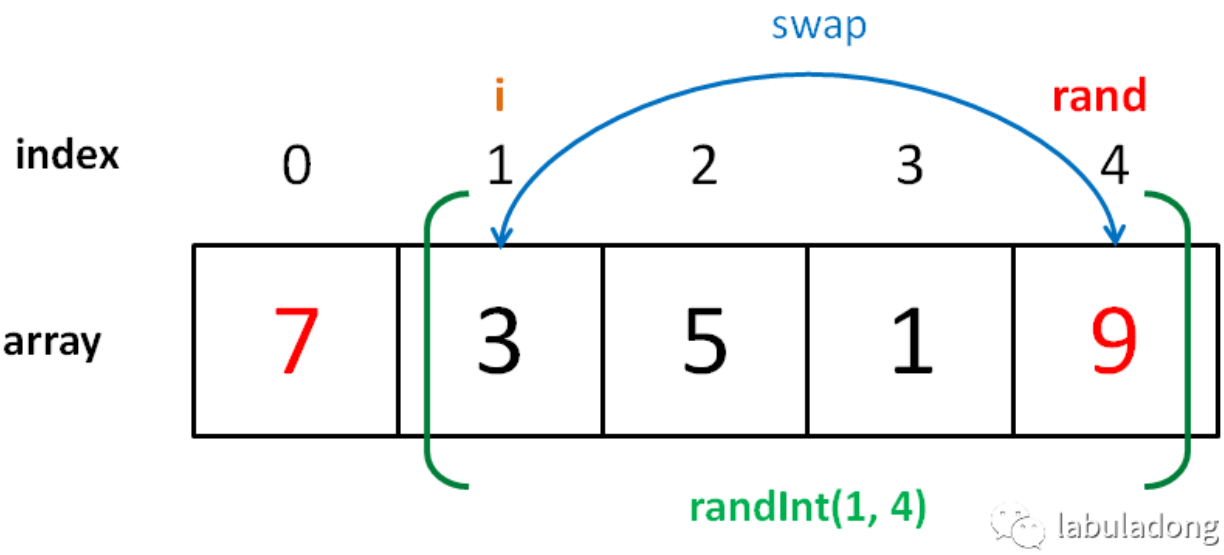
```
// 假设传入这样一个 arr
int[] arr = {1,3,5,7,9};

void shuffle(int[] arr) {
    int n = arr.length(); // 5
    for (int i = 0 ; i < n; i++) {
        int rand = randInt(i, n - 1);
        swap(arr[i], arr[rand]);
    }
}
```

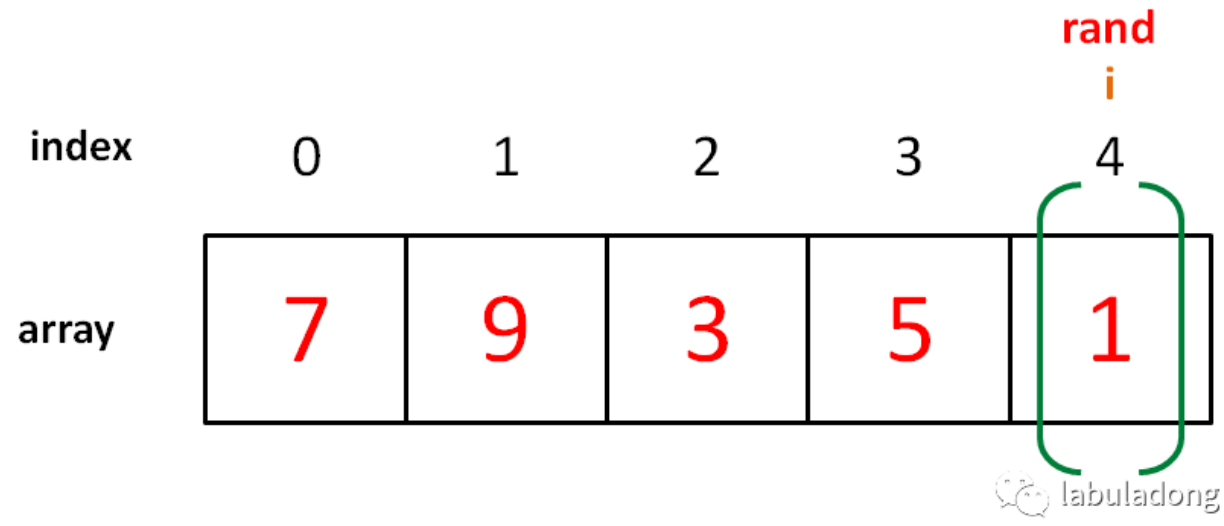
for 循环第一轮迭代时，`i = 0`，`rand` 的取值范围是 `[0, 4]`，有 5 个可能的取值。



for 循环第二轮迭代时，`i = 1`，`rand` 的取值范围是 `[1, 4]`，有 4 个可能的取值。



后面以此类推，直到最后一次迭代，`i = 4`，`rand` 的取值范围是 `[4, 4]`，只有 1 个可能的取值。



可以看到，整个过程产生的所有可能结果有 `n! = 5! = 5*4*3*2*1` 种，所以这个算法是正确的。

分析**第二种写法**，前面的迭代都是一样的，少了一次迭代而已。所以最后一次迭代时 `i = 3`，`rand` 的取值范围是 `[3, 4]`，有 2 个可能的取值。

```
// 第二种写法
// arr = {1,3,5,7,9}, n = 5
    for (int i = 0 ; i < n - 1; i++)
        int rand = randInt(i, n - 1);
```

所以整个过程产生的所有可能结果仍然有 `5*4*3*2 = 5! = n!` 种，因为乘以 1 可有可无嘛。所以这种写法也是正确的。

如果以上内容你都能理解，那么你就能发现**第三种写法**就是第一种写法，只是将数组从后往前迭代而已；**第四种写法**是第二种写法从后往前来。所以它们都是正确的。

如果读者思考过洗牌算法，可能会想出如下的算法，但是**这种写法是错误的**：

```
void shuffle(int[] arr) {
    int n = arr.length();
    for (int i = 0 ; i < n; i++) {
        // 每次都从闭区间 [0, n-1]
        // 中随机选取元素进行交换
        int rand = randInt(0, n - 1);
        swap(arr[i], arr[rand]);
    }
}
```

现在你应该明白这种写法为什么会错误了。因为这种写法得到的所有可能结果有 `n^n` 种，而不是 `n!` 种，而且 `n^n` 不可能是 `n!` 的整数倍。

比如说 `arr = {1,2,3}`，正确的结果应该有 `3!= 6` 种可能，而这种写法总共有 `3^3 = 27` 种可能结果。因为 27 不能被 6 整除，所以一定有某些情况被「偏袒」了，也就是说某些情况出现的概率会大一些，所以这种打乱结果不算「真的乱」。

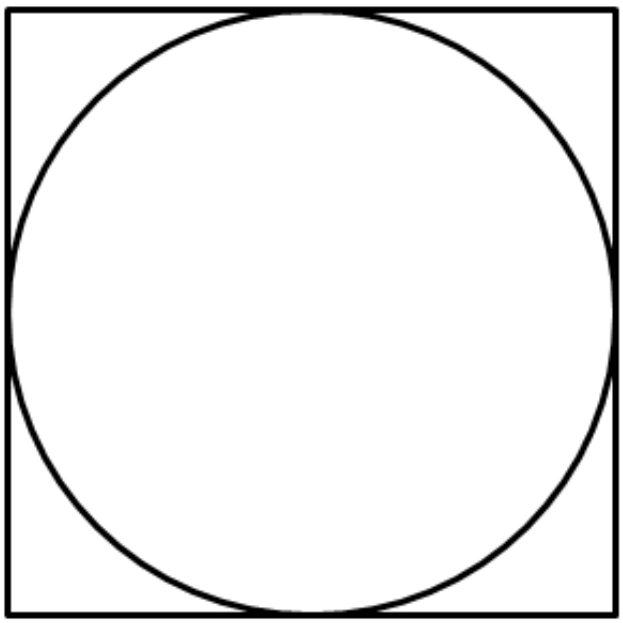
上面我们从直觉上简单解释了洗牌算法正确的准则，没有数学证明，我想大家也懒得证明。对于概率问题我们可以使用「蒙特卡罗方法」进行简单验证。

二、蒙特卡罗方法验证正确性

洗牌算法，或者说随机乱置算法的**正确性衡量标准是：对于每种可能的结果出现的概率必须相等，也就是说要足够随机。**

如果不用数学严格证明概率相等，可以用蒙特卡罗方法近似地估计出概率是否相等，结果是否足够随机。

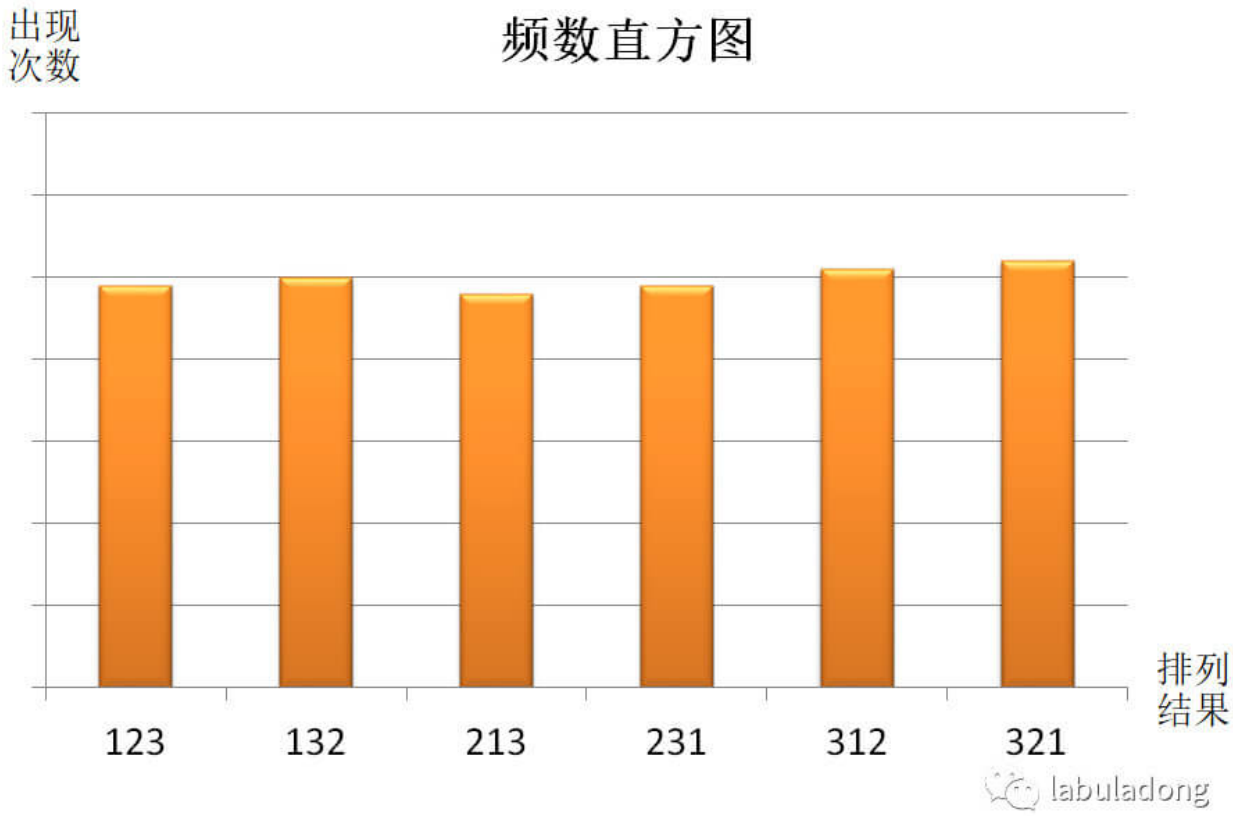
记得高中有道数学题：往一个正方形里面随机打点，这个正方形里紧贴着一个圆，告诉你打点的总数和落在圆里的点的数量，让你计算圆周率。



这其实就是利用了蒙特卡罗方法：当打的点足够多的时候，点的数量就可以近似代表图形的面积。通过面积公式，由正方形和圆的面积比值是可以很容易推出圆周率的。当然打的点越多，算出的圆周率越准确，充分体现了大力出奇迹的真理。

类似的，我们可以对同一个数组进行一百万次洗牌，统计各种结果出现的次数，把频率作为概率，可以很容易看出洗牌算法是否正确。整体思想很简单，不过实现起来也有些技巧的，下面简单分析几种实现思路。

第一种思路，我们把数组 arr 的所有排列组合都列举出来，做成一个直方图（假设 arr = {1,2,3}）：



每次进行洗牌算法后，就把得到的打乱结果对应的频数加一，重复进行 100 万次，如果每种结果出现的总次数差不多，那就说明每种结果出现的概率应该是相等的。写一下这个思路的伪代码：

```
void shuffle(int[] arr);

// 蒙特卡罗
int N = 1000000;
HashMap count; // 作为直方图
for (i = 0; i < N; i++) {
    int[] arr = {1,2,3};
    shuffle(arr);
    // 此时 arr 已被打乱
    count[arr] += 1;
}
for (int feq : count.values())
    print(feq / N + " "); // 频率
```

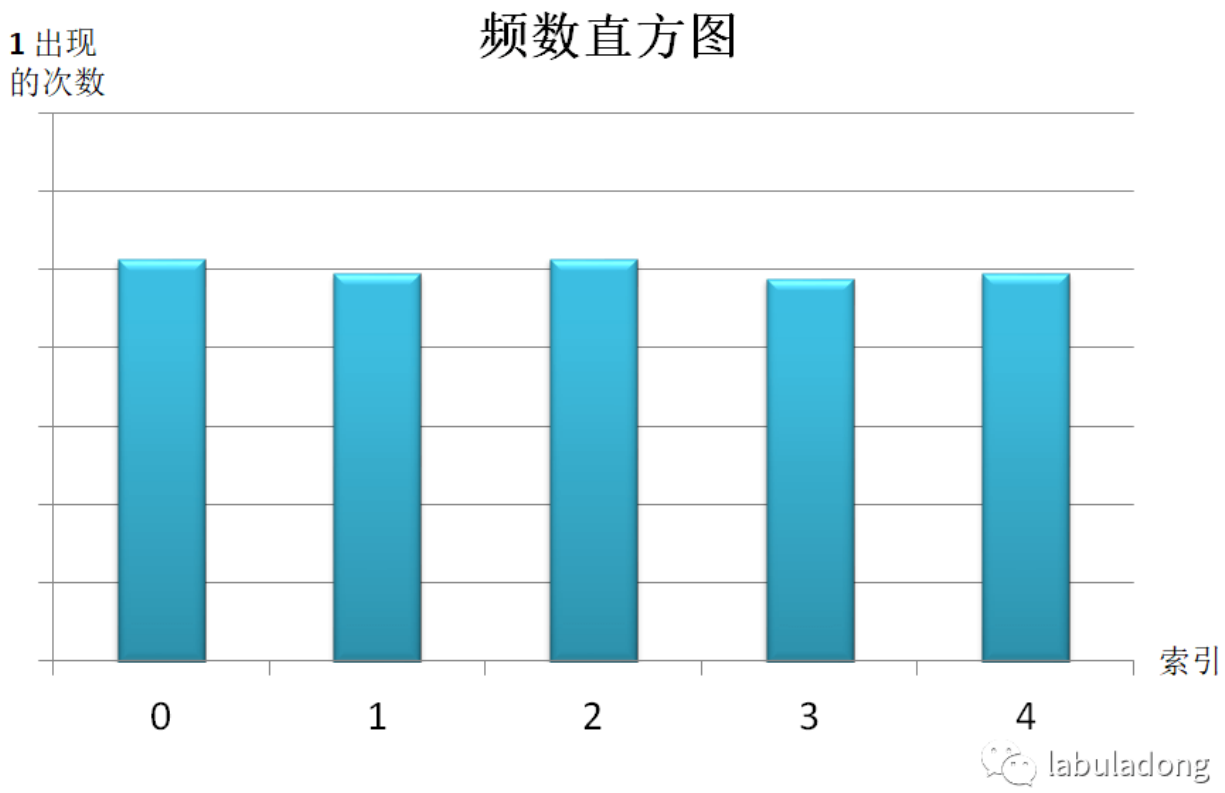
这种检验方案是可行的，不过可能有读者会问，arr 的全部排列有 n! 种（n 为 arr 的长度），如果 n 比较大，那岂不是空间复杂度爆炸了？

是的，不过作为一种验证方法，我们不需要 n 太大，一般用长度为 5 或 6 的 arr 试下就差不多了吧，因为我们只想比较概率验证一下正确性而已。

第二种思路，可以这样想，arr 数组中全都是 0，只有一个 1。我们对 arr 进行 100 万次打乱，记录每个索引位置出现 1 的次数，如果每个索引出现的次数差不多，也可以说明每种打乱结果的概率是相等的。

```
void shuffle(int[] arr);

// 蒙特卡罗方法
int N = 1000000;
int[] arr = {1,0,0,0,0};
int[] count = new int[arr.length];
for (int i = 0; i < N; i++) {
    shuffle(arr); // 打乱 arr
    for (int j = 0; j < arr.length; j++)
        if (arr[j] == 1) {
            count[j]++;
            break;
        }
}
for (int feq : count)
    print(feq / N + " "); // 频率
```



这种思路也是可行的，而且避免了阶乘级的空间复杂度，但是多了嵌套 for 循环，时间复杂度高一点。不过由于我们的测试数据量不会有多大，这些问题都可以忽略。

另外，细心的读者可能发现一个问题，上述两种思路声明 arr 的位置不同，一个在 for 循环里，一个在 for 循环之外。其实效果都是一样的，因为我们的算法总要打乱 arr，所以 arr 的顺序并不重要，只要元素不变就行。

三、最后总结

本文第一部分介绍了洗牌算法（随机乱置算法），通过一个简单的分析技巧证明了该算法的四种正确形式，并且分析了一种常见的错误写法，相信你一定能够写出正确的洗牌算法了。

第二部分写了洗牌算法正确性的衡量标准，即每种随机结果出现的概率必须相等。如果我们不用严格的数学证明，可以通过蒙特卡罗方法大力出奇迹，粗略验证算法的正确性。蒙特卡罗方法也有不同的思路，不过要求不必太严格，因为我们只是寻求一个简单的验证。

==其他语言代码==