ANÁLISIS NUMÉRICO III – 2023
Primera Entrega

¡Para tener en cuenta!

- La actividad cierra el día martes 26 de septiembre a las 23:59 hs. Deberá ser entregada como una tarea en el aula virtual de la materia.
- Entregar un único archivo de nombre **apellido**.py o **apellido**.ipynb.
- Utilice docstrings para comentar el código.
- Al mostrar gráficos, colocar títulos y legenda (minimamente).
- Modularizar el código.

1. Los ingenieros ambientales modelan diversos problemas que implican sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Nos concentraremos en un problema que se relaciona con los modelos llamados depredador-presa, que se utilizan en el estudio de ciclos de nutrientes y contaminantes tóxicos en las cadenas alimenticias, y de sistemas de tratamiento biológicos.

   Los modelos depredador-presa se desarrollaron de manera independiente en la primera parte del siglo XX, gracias al trabajo del matemático italiano Vito Volterra y del biólogo estadounidense Alfred J. Lotka. Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Lotka-Volterra. El siguiente sistema describe un sistema depredador-presa de tres especies, la especie x, y y z,

$$\begin{cases} x' &= 0.35x - 0.6xz \\ y' &= 0.3y - 0.5yz \\ z' &= -0.37z + 0.04xz + 0.035yz \end{cases}$$

   Las poblaciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ se expresan en miles y t en años. Resuelva el sistema por medio del método de Runge-Kutta de cuarto orden. Este modelado debe compararse con una función de la librería scipy de Python. Analice las poblaciones en un periodo de 100 años, para las siguientes condiciones:

   a) $x(0) = 0.8$, $y(0) = 2.4$ y $z(0) = 0.2$.
   b) $x(0) = 2$, $y(0) = 1.4$ y $z(0) = 1$.
   c) Describa lo que sucede en cada una de las situaciones.
   d) Elabore un gráfico para cada una de las condiciones iniciales dadas.

2. Para modelar la deflexión del mástil de un bote (deformación del mastil por unidad de longitud en función de la distancia z sobre la cubierta del bote), sujeto a la fuerza del viento, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{f}{2EI}(L - z)^2$$

   donde f representa fuerza del viento, E el módulo de elasticidad, L la longitud del mástil, e I representa el momento de inercia.

a) Utilizando alguno de los métodos programados en clase, calcule la deflexión si $y = y'' = 0$ en $z = 0$. Para su cálculo utilice valores de parámetro de $f = 60$, $L = 30$, $E = 1.25 \times 10^8$, e $I = 0.05$.

b) En vez de usar una fuerza del viento constante, emplee una fuerza que varíe con la altura de acuerdo a la ecuación:

$$f(z) = \frac{200z}{5+z} e^{-2z/30}.$$

c) Grafique en conjunto los resultados obtenidos en a) y b).

3. La ecuación diferencial para la velocidad de alguien que practica el salto del *bungee* es diferente según si el saltador ha caído una distancia en la que la cuerda está extendida por completo y comienza a encogerse. Así, si la distancia recorrida es menor que la longitud de la cuerda, el saltador sólo está sujeto a las fuerzas gravitacional y de arrastre. Una vez que la cuerda comienza a encogerse, también deben incluirse las fuerzas del resorte y del amortiguamiento de la cuerda. Estas dos condiciones se expresan con las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} v' &= g - sign(v)\frac{c_d}{m}v^2 & x \leq L \\ v' &= g - sign(v)\frac{c_d}{m}v^2 - \frac{k}{m}(x-L) - \frac{\gamma}{m}v & x > L \end{aligned}$$

donde v es la velocidad (m/s), t el tiempo (s), g la constante gravitacional ($9.81 m/s^2$), $sign(x)$ es la función que devuelve -1, 0 y 1, para x negativa, cero y positiva, respectivamente, c_d es el coeficiente de arrastre de segundo orden (kg/m), m la masa (kg), k la constante de resorte de la cuerda (N/m), γ el coeficiente de amortiguamiento de la cuerda (N $\cdot$ s/m), y L = longitud de la cuerda (m).

a) Use alguno de los métodos programados en clase para determinar la velocidad del saltador dadas por los parámetros siguientes: $L = 30$ m, $m = 68.1$ kg, $c_d = 0.25$ kg/m, $k = 40$ N/m, y $\gamma = 8$ kg/s. Haga el cálculo de $t = 0$ a $t = 50$ s y suponga que las condiciones iniciales son $v(0) = 0$.

b) ¿Qué pasa si la longitud de la cuerda es de $L = 20$ m?

c) Grafique los resultados obtenidos.

4. El modelo de Hardenberg permite con sencillez y eficacia la obtención de los distintos tipos de patrones de vegetación que se desarrollan en suelo llano para diferentes condiciones de humedad. Originalmente este modelo se desarrolló pensando en las zonas áridas, donde naturalmente los patrones de vegetación toman distintas formas como "manchas", "bandeados" y "laberintos". El modelo predice este comportamiento con éxito, pero también predice correctamente la distribución de los patrones de vegetación para condiciones de alta humedad. El modelo de Hardenberg involucra dos variables: la densidad de vegetación o biomasa n y humedad del suelo w. En este caso, trabajaremos con una adaptación de este modelo para dos especies y considerando unicamente la evolución en el tiempo:

$$\begin{cases} n_1' &= \dfrac{\gamma w}{1+\sigma w} n_1 - n_1^2 \pm \mu_1 n_1 n_2 \\ n_2' &= \dfrac{\gamma w}{1+\sigma w} n_2 - n_2^2 \pm \mu_2 n_1 n_2 \\ w' &= p - (1 - (\rho_1 n_1 + \rho_2 n_2))w - (n_1 + n_2)w^2 \end{cases}$$

Los términos $\pm\mu_1 n_1 n_2, \pm\mu_2 n_1 n_2$ se corresponden con mutualismo $(+)$ o competencia $(-)$ entre las especies.

a) Aplique un método numérico para encontrar la solución de este sistema para los valores $p = 0.4$, $\sigma = 1.6$, $\gamma = 1.6$, $w_1 = w_2 = 0.5$, $\rho_1 = 0.5$ y $\mu_1 = 0.2$, $\rho_2 = 1$ y $\mu_2 = 0.6$. Considerar valores iniciales en el intervalo $(0, 0.5)$.

b) Pruebe con distintos valores de p, por ejemplo $p = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$. ¿Qué puede decir al respecto?

c) Grafique los resultados obtenidos en b).

5. Las dinámicas del crecimiento de la población son importantes en varios estudios de planeación tales como el transporte y la ingeniería de los recursos hidráulicos. Uno de los modelos más simples de dicho crecimiento incorpora la suposición de que la tasa de cambio de la población p es proporcional a la que existe en cualquier momento t:

$$\frac{dp}{dt} = Gp$$

donde G es la tasa de crecimiento (anual). Este modelo tiene sentido intuitivo porque entre mayor sea la población más grande será el número de padres potenciales.

Aunque el modelo anterior funciona en forma adecuada cuando el crecimiento de la población es ilimitado, falla ante la existencia de factores tales como falta de comida, contaminación y falta de espacio, los cuales inhiben el crecimiento. En tales casos, la tasa de crecimiento se considera que es inversamente proporcional a la población. Un modelo de se desprende de esta relación es

$$\frac{dp}{dt} = G'(p_{max} - p)p$$

donde p_{max} es la población máxima sostenible y G' es la tasa de crecimiento dependiente de la población. Al tiempo $t = 0$, una isla tiene una población de 6000 personas.

a) Si $G = 0.075$ por año, emplee el método de Euler y Taylor de orden 2 para predecir la población en $t = 20$ años, con el uso de un tamaño de paso de 0.5 años. Use el primer modelo.

b) Para el segundo modelo, emplee el método de Euler y el método de Adams-Bashforth de cuarto orden junto con el método de Runge-Kutta para predecir la población en $t = 20$ años, con el uso de un tamaño de paso de 0.5 años. Emplee valores de $G' = 10^{-5}$ por persona-año y $p_{max} = 20000$ personas.

c) Comparar los resultados y mostrarlos en un gráfico.