3. Considere el siguiente problema,

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Muestre que la forma variacional es

$$(u', v') + (u, v) = (f, v) \quad \forall v(x) \in H_0^1(0,1),$$

donde,

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\, dx,$$

$$H_0^1(0,1) = \left\{ v(x), v(0) = v(1) = 0, \int_0^1 v^2\, dx < \infty, \int_0^1 (v')^2\, dx < \infty \right\}.$$

a) Dada la ED $\begin{cases} -u'' + u = f(x) & 0<x<1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Defino una función test $v(x)$ tal que cumpla las mismas condiciones de borde de la ED, ie, $v(0) = v(1) = 0$, y también deberá ser de cuadrado integrable en $[0,1]$, a su vez, su derivada también supondré que es de cuadrado integrable.

Defino $H_0^1(0,1)$ como el espacio que esta formado por todas estas funciones, ie

$$H_0^1(0,1) = \left\{ v(x),\ v(0) = v(1) = 0,\ \int_0^1 v^2\, dx < \infty,\ \int_0^1 (v')^2\, dx < \infty \right\}$$

Ahora multiplico ambos lados de la ED por $v(x)$ e integro de 0 a 1

$$\underbrace{-\int_0^1 u'' v\, dx}_{*} + \int_0^1 uv\, dx = \int_0^1 fv\, dx \quad \leftarrow \text{Forma variacional}$$

Integro por partes a $*$

$$\int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx = \underbrace{v(x)\, u'(x)\Big|_0^1}_{=0 \text{ ya que } v(0) = v(1) = 0} - \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx$$

$$\therefore \int_0^1 u'' v\, dx = \int_0^1 u' v'\, dx$$

Luego la forma variacional del problema queda

$$\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx + \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx$$

ó:

$$(u', v') + (u, v) = (f, v)$$

$\forall \; v \in H_0^1(0,1)$, donde $(u,v) = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, dx$ //

(b) Derive el sistema lineal de las ecuaciones para la aproximación con elementos finitos

$$u_h = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \phi_j(x),$$

con la siguiente información:

- $f(x) = 1$.
- Los puntos nodales y los elementos están indexados como

$$x_0 = 0, \quad x_2 = \tfrac{1}{4}, \quad x_3 = \tfrac{1}{2}, \quad x_1 = \tfrac{3}{4}, \quad x_4 = 1.$$

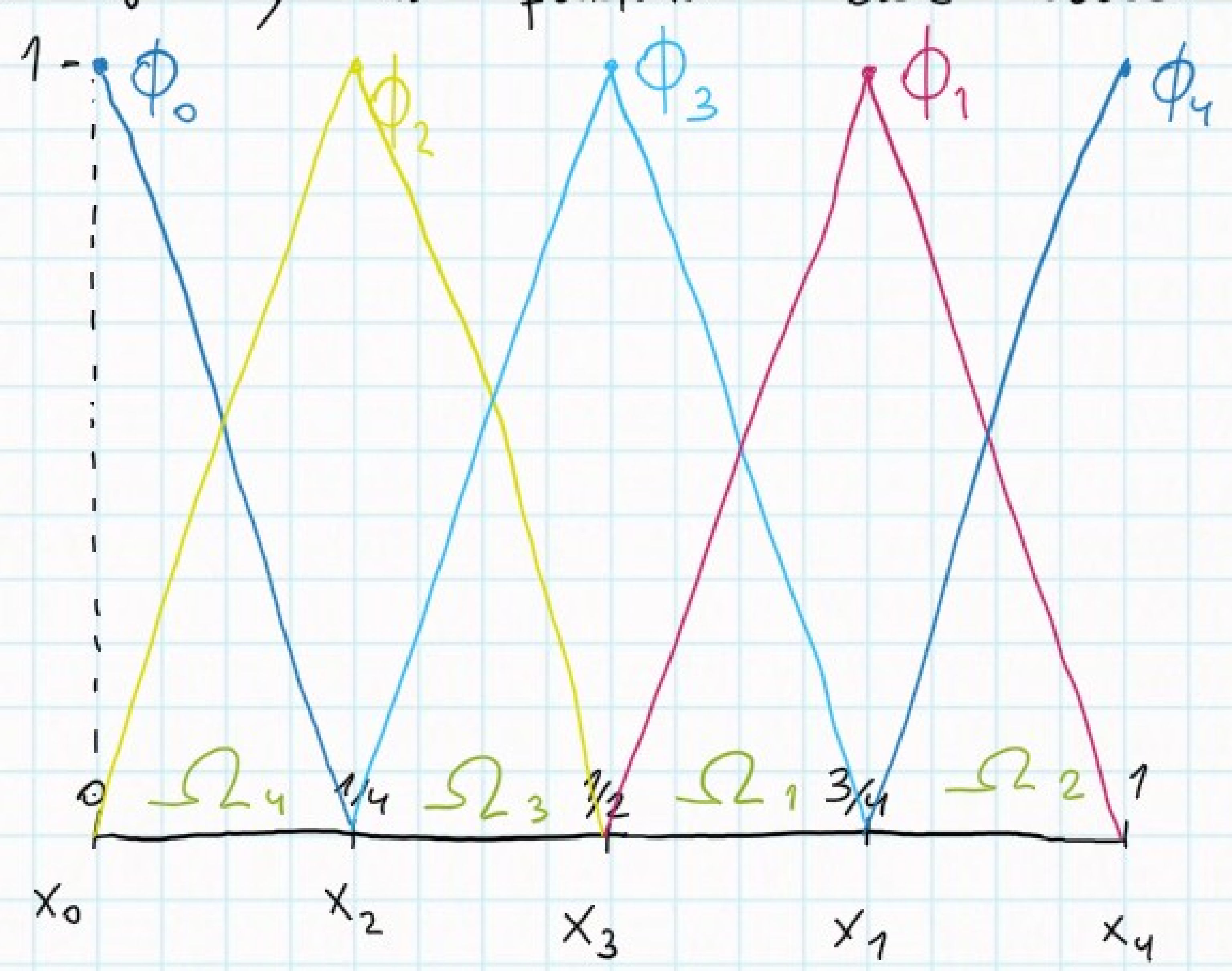
$$\Omega_1 = [x_3, x_1], \quad \Omega_2 = [x_1, x_4], \quad \Omega_3 = [x_2, x_3], \quad \Omega_4 = [x_0, x_2].$$

- Las funciones bases son

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

- Ensamblar la matriz de rigidez y el vector de carga elemento a elemento.

b) Con la y las funciones base dadas:



Ahora represento la solución aproximada por elementos finitos de la ED como una combinación lineal de las funciones base

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{3} c_j \phi_j(x)$$

Ahora si en la formulación variacional reemplazo u por u_h tengo

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{3} c_j \phi_j' v' \, dx + \int_0^1 \sum_{j=1}^{3} c_j \phi_j v \, dx = \int_0^1 f \, v \, dx$$

Ahora tomo la función test v como ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 susecivamente:

$$c_1\left(\int_0^1 \phi_1' \phi_1' \, dx + \int_0^1 \phi_1 \phi_1 \, dx\right) + \cdots + c_3\left(\int_0^1 \phi_1' \phi_3' \, dx + \int_0^1 \phi_1 \phi_3 \, dx\right) = \int_0^1 f \phi_1 \, dx$$

$$\vdots$$

$$c_1\left(\int_0^1 \phi_3' \phi_1' \, dx + \int_0^1 \phi_3 \phi_1 \, dx\right) + \cdots + c_3\left(\int_0^1 \phi_3' \phi_3' \, dx + \int_0^1 \phi_3 \phi_3 \, dx\right) = \int_0^1 f \phi_3 \, dx$$

Como dice el enunciado de la entrega, solo daré la primer fila de la matriz de rigidez:

$$\phi_1'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x_3 < x < x_1 \\ -\frac{1}{h} & x_1 < x < x_4 \\ 0 & c.c \end{cases} \qquad \phi_2'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x_0 < x < x_2 \\ -\frac{1}{h} & x_2 < x < x_3 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$$\phi_3'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x_2 < x < x_3 \\ -\frac{1}{h} & x_3 < x < x_1 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$$\int_0^1 \phi_1' \phi_1' = \int_{x_3}^{x_1} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_4} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx = \int_{x_3}^{x_4} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{h^2}(x_4 - x_3) = \frac{1}{2h^2}$$

$$\int_0^1 \phi_1 \phi_1 = \int_{x_3}^{x_1} \left(\frac{x - x_3}{h}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{x_4} \left(\frac{x_4 - x}{h}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{x - x_3}{h}\right)^3 \Big|_{x_3}^{x_1} + \left(-\left(\frac{x_4 - x}{h}\right)^3\right)\right]\Big|_{x_1}^{x_4} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{x_1 - x_3}{h}\right)^3 + \left(\frac{x_4 - x_1}{h}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{4h}\right)^3 + \left(\frac{1}{4h}\right)^3\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{(4h)^3}$$

$$\int_0^1 \phi_1' \phi_2' = 0$$

$$\int_0^1 \phi_1 \phi_2 = 0$$

$$\int_0^1 \phi_1' \phi_3' = \int_{x_3}^{x_1} \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{h}\right) dx = -\left(\frac{1}{h}\right)^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4h^2}$$

$$\int_0^1 \phi_1 \phi_3 = \int_{x_3}^{x_1} \left(\frac{x-x_3}{h}\right)\left(\frac{x_1-x}{h}\right) dx = \frac{1}{h^2}\int_{1/2}^{3/4} (x x_1 - x^2 - x_3 x_1 + x x_3)\, dx$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\frac{x^2 x_1}{2} - \frac{x^3}{3} - x\, x_3 x_1 + \frac{x^2 x_3}{2}\Bigg|_{1/2}^{3/4}\right)$$

Calculo con computadora

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{384}$$

Luego la primer fila de la matriz de rigidez queda:

$$\left[\frac{1}{2h^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{(4h)^3} \qquad 0 \qquad \frac{1}{h}\frac{1}{384} - \frac{1}{4h^2}\right]$$

teniendo en cuenta que $h = \frac{1}{4}$ queda:

$$\left[8 + \frac{2}{3} \qquad 0 \qquad \frac{4}{384} - 4\right]$$

Ahora el vector de carga será:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 1 \cdot \phi_1 \\ \int_0^1 1 \cdot \phi_2 \\ \int_0^1 1 \cdot \phi_3 \end{bmatrix}$$

Todas estas integrales seran iguales

$$\int_0^1 \phi_2(x)\, dx = \int_0^{1/4} \frac{x-x_0}{h}\, dx + \int_{1/4}^{1/2} \frac{x_3-x}{h}\, dx =$$

$$= \frac{(x-x_0)^2}{2h}\Bigg|_0^{1/4} - \frac{(x_3-x)^2}{2h}\Bigg|_{1/4}^{1/2} = \frac{(1/4)^2}{2h} + \frac{(1/2-1/4)^2}{2h} = \frac{(1/4)^2}{h} = \frac{1}{4}$$

Finalmente, el vector de carga será:

$$\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

//

6. Asuma que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\,dx = \frac{h}{6},$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$, y ϕ_i y ϕ_{i+1} son las funciones sombrero centradas en x_i y x_{i+1} respectivamente. Modifique el código del ejercicio 1 para resolver

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Utilice la grilla uniforme de nodos $x_i = ih$, con $i = 0, \ldots, 10$ y $h = \frac{1}{10}$. Para las soluciones exactas $u(x)$ tales que,

(a) $u(x) = \sin(\pi x)$, ¿cuál es $f(x)$?

(b) $u(x) = x(1-x)/2$, ¿cuál es $f(x)$?

a) $u''(x) = -\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)$

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$-1 +$

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \Rightarrow \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) + \operatorname{sen}(\pi x) = f(x)$$

$$\therefore \boxed{f(x) = (\pi^2+1)\operatorname{sen}(\pi x)}$$

La matriz $\begin{bmatrix} a(\phi_1,\phi_1) & \cdots & a(\phi_1,\phi_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ a(\phi_{n-1},\phi_1) & \cdots & a(\phi_{n-1},\phi_{n-1}) \end{bmatrix}$ será igual a

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \\ & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \ddots \\ & & \ddots & -1/h \\ 0 & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b(\phi_1) & \frac{h}{6} & \cdots & 0 \\ \frac{h}{6} & b(\phi_2) & \frac{h}{6} & \vdots \\ & \frac{h}{6} & \ddots & \\ & & \ddots & h/6 \\ 0 & & h/6 & b(\phi_{n-1}) \end{bmatrix}$$

(Las subdiagonales tienen ese valor por lo asumido en el enunciado)

donde $b(\phi_i) = \int_0^1 \phi_i\,\phi_i\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)^2 dx$

$$= \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^3 \cdot \frac{h}{3}\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} - \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)^3 \cdot \frac{h}{3}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{h}{3}\left(\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{h}\right)^3 + \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{h}\right)^3\right) = \frac{h}{3}\left(\left(\frac{h}{h}\right)^3 + \left(\frac{h}{h}\right)^3\right) = \frac{2h}{3}$$

Aclaración: Me base en la forma variacional encontrada en el ejercicio (3b)