ANÁLISIS NUMÉRICO III – 2023
Práctico N$^{\underline{o}}$ 4

Objetivos

- Estudiar métodos de elementos finitos y sus distintas formulaciones, para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno.
- Revisar fundamentos teóricos de estos métodos.

1. Escriba una función que implemente el esquema de elementos finitos con funciones base lineales a trozos, para resolver el problema de valores de contorno

$$-u''(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

   La función debe llamarse `fem1d` y tener como entrada los argumentos `(f,x)`. Donde `f` es la función externa y `x` el vector de nodos. El argumento de salida debe ser `U`$= (U_0, \ldots, U_n)$, la solución aproximada en los puntos nodales.

2. Utilice la función del punto anterior para resolver los siguientes problemas.

   (a) Encontrar numericamente la solución del problema

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

   tomando como grillas $x = [0, 0.1, 0.3, 0.333, 0.5, 0.75, 1]$ y una grilla igualmente espaciada. Grafique las soluciones obtenidas numericamente y la solución exacta. Grafique la diferencia entre la solución exacta y numérica en cada punto de la grilla (para ambos casos).

   (b) Considere el problema

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 \quad \text{si} \quad \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ 0 \qquad \text{caso contrario.} \end{cases}$$

   Encuentre una solución numérica utilizando una grilla igualmente espaciada (pruebe distintos valores para n). Grafique las soluciones obtenidas.

3. Considere el siguiente problema,

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Muestre que la forma variacional es

$$(u', v') + (u, v) = (f, v) \quad \forall v(x) \in H_0^1(0,1),$$

donde,

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\, dx,$$
$$H_0^1(0,1) = \left\{ v(x), v(0) = v(1) = 0, \int_0^1 v^2\, dx < \infty, \int_0^1 (v')^2\, dx < \infty \right\}.$$

(b) Derive el sistema lineal de las ecuaciones para la aproximación con elementos finitos

$$u_h = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \phi_j(x),$$

con la siguiente información:

- $f(x) = 1$.
- Los puntos nodales y los elementos están indexados como

$$x_0 = 0, \quad x_2 = \tfrac{1}{4}, \quad x_3 = \tfrac{1}{2}, \quad x_1 = \tfrac{3}{4}, \quad x_4 = 1.$$

$$\Omega_1 = [x_3, x_1], \quad \Omega_2 = [x_1, x_4], \quad \Omega_3 = [x_2, x_3], \quad \Omega_4 = [x_0, x_2].$$

- Las funciones bases son

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

- Ensamblar la matriz de rigidez y el vector de carga elemento a elemento.

4. Use el código del ejercicio 1 para resolver

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

utilizando dos grillas diferentes.

- Los puntos nodales $0, 0.1, 0.3, 0.333, 0.5, 0.75, 1$.
- La grilla uniforme de nodos $x_i = ih$ para $i = 0, \ldots, M$, tomando $M = 10$.

Use ambas grillas para resolver el problema dado, con las siguientes $f(x)$ y $u(x)$ solución exacta:

(a) dado $u(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, ¿cuál es $f(x)$?
(b) dado $f(x) = x^3$, ¿cuál es $u(x)$?
(c) dada $f(x) = \delta(x - \frac{1}{2})$, donde $\delta(x)$ es la función (distribución) Delta de Dirac, ¿cuál es u(x)?

Ayuda: Si $u''(x) = -\delta_{x_0}(x)$ entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u'(x) = -H(x - x_0) + a$, donde H es la función de Heaviside usual.

5. Considere el siguiente problema con coeficientes variables,

$$-(a(x)u'(x))' = f(x), \quad 0 < x < L,$$

y condiciones de contorno mixtas,

$$a(0)u'(0) = \kappa_0(u(0) - g_0),$$
$$-a(L)u'(L) = \kappa_L(u(L) - g_L),$$

donde $a > 0$ y f son funciones dadas, y $\kappa_0 \geq 0$, $\kappa_L \geq 0$, g_0 y g_L parámetros del problema.

(a) Derive la formulación variacional del problema (utilice las condiciones de borde para reescribir los términos correspondientes al contorno)

(b) Plantee el sistema lineal asociado, es decir, la matriz de rigidez y el vector de carga. ¿Cuál será una base para el espacio V_h?

(c) Escriba una función para resolver el problema planteado. La función debe llamarse `fem1d_coeffs` y tener como entrada los argumentos `(f,a,x,p)`. Donde `f` es la función externa, `a` el coeficiente variable (función), `x` el vector de nodos y `p` la lista ordenada `[`κ_0`,`g_0`,`κ_L`,`g_L`]`. El argumento de salida debe ser `U=` $(U_0,\ldots,U_n)$, la solución aproximada en los puntos nodales.

(d) Utilice la función anterior para calcular la temperatura T en una varilla de longitud $L = 6$ m, de sección transversal $A = 0.1$ m^2, con coeficiente de conductividad térmica $\kappa = 5 - 0.6x$ [J/(Ksm)] y una fuente de calor dada por $f = 0.03(x-6)^4$ [J/sm]. La varilla se mantiene a una temperatura constante $T = -1$ [K] en $x = 2$ y aislado térmicamente en $x = 8$. Grafique la solución obtenida.

Ayuda: La temperatura de una varilla de área de sección transversal A y de conductividad térmica κ, sometido a una fuente de calor de intensidad f (durante un tiempo prologando, de manera que la transferencia de calor dentro de la varilla sea constante), es modelado con la ecuación $-(A\kappa T')' = f$.

6. Asuma que
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)\,dx = \frac{h}{6},$$
donde $h = x_{i+1} - x_i$, y ϕ_i y ϕ_{i+1} son las funciones sombrero centradas en x_i y x_{i+1} respectivamente. Modifique el código del ejercicio 1 para resolver
$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$
Utilice la grilla uniforme de nodos $x_i = ih$, con $i = 0,\ldots,10$ y $h = \frac{1}{10}$. Para las soluciones exactas $u(x)$ tales que,

   (a) $u(x) = \sin(\pi x)$, ¿cuál es $f(x)$?

   (b) $u(x) = x(1-x)/2$, ¿cuál es $f(x)$?

7. Considere la función $v(x) = |x|^\alpha$ en $\Omega = (-1,1)$ con α real.

   (a) ¿Para qué valores de α, $v \in H^0(\Omega)$?

   (b) ¿Para qué valores de α, $v \in H^1(\Omega)$? y ¿$v \in H^m(\Omega)$?

8. Considere el problema
$$-((1+x)u'(x))' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1.$$
Divida el intervalo $[0,1]$ en 3 subintervalos de igual longitud, $h = \frac{1}{3}$, y sea V_h el espacio de las funciones lineales a trozo que se anulan en $x = 0$.

   (a) Determine la solución de forma analítica.

   (b) Use V_h para formular un método de elementos finitos.

   (c) Verifique que la matriz de rigidez A y el vector de carga b están dados por:
$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 16 & -9 & 0 \\ -9 & 20 & -11 \\ 0 & -11 & 11 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(d) Verifique que A es simétrica y definida positiva.

9. Considere el siguiente problema.

$$-u'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = u'(1) = 1.$$

Calcule la matriz de rigidez asociada al problema en una grilla uniforme con dos elementos. ¿Por qué la matriz es singular?