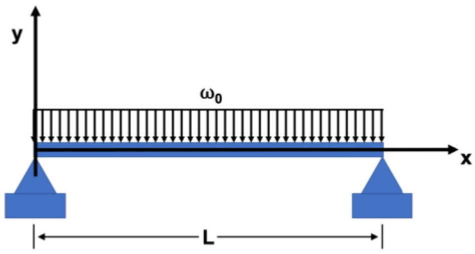
ANÁLISIS NUMÉRICO III – 2023
Segunda Entrega

¡Para tener en cuenta!

- La actividad cierra el día lunes 6 de noviembre a las 23:59 hs. Deberá ser entregada como una tarea en el aula virtual de la materia.
- Entregar un único archivo con código de nombre **apellido**.py o **apellido**.ipynb. Además, para el problema del primer práctico (P1), subir un archivo formato pdf con el planteo de la función a minimizar.
- Utilice docstrings para comentar el código.
- Al mostrar gráficos, colocar títulos y legenda (minimamente).
- Modularizar el código.

Lista 1

P1. Una viga simplemente apoyada soporta una carga uniforme de intensidad ω_0, como se muestra en la siguiente figura.



La deflexión de la viga, $y(x)$, está gobernada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$EIy'' = \frac{1}{2}\omega_0(Lx - x^2)\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

donde EI es la rigidez flexural.

Si $L = 5\,m$ y las dos condiciones de contorno son $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$, $EI = 1.8 \times 10^7\,Nm^2$ y $\omega_0 = 15 \times 10^3\,N/m$, determine y grafique la deflexión de la viga en función de x.

Observación. Para resolver este problema debe aplicar un esquema de diferencias finitas y el método de Newton para encontrar una solución numérica al modelo presentado. Pruebe diferentes puntos iniciales.

P2. Utilice el esquema de Crank-Nicolson para resolver el siguiente problema.

$$\begin{gathered} u_{xx}(t,x) = u_t(t,x), \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0 \\ u(0,x) = sin(\pi x), \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0. \end{gathered}$$

a) Use $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.005125$ y $M = 200$, (siendo M la cantidad de iteraciones en el tiempo).

b) Realice nuevamente el experimento para $\Delta t = 0.006$ y $M = 171$.

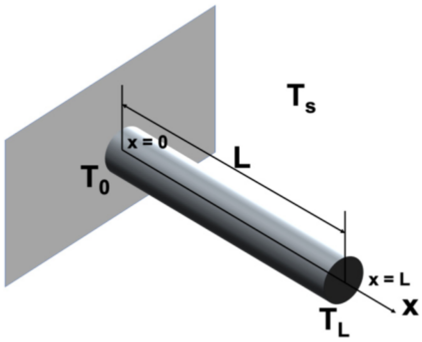
c) Grafique los resultados obtenidos en los items anteriores.

Lista 2

P1. Las aletas de pasador se utilizan en muchas aplicaciones para aumentar la transferencia de calor desde superficies. En este problema modelamos la distribución de temperatura en una aleta como se muestra en la siguiente figura, donde la longitud de la aleta es L, y el inicio y el final de la aleta son $x = 0$ y $x = L$, respectivamente. Las temperaturas en los dos extremos son T_0 y T_L, mientras que T_s es la temperatura del entorno circundante. Si consideramos tanto la convección como la radiación, la distribución de temperatura en estado estacionario de la aleta de pasador $T(x)$ entre $x = 0$ y $x = L$ se puede modelar con la siguiente ecuación:

$$T'' - \alpha_1(T - T_s) - \alpha_2(T^4 - T_s^4) = 0,$$

con las condiciones de contorno $T(0) = T_0$ y $T(L) = T_L$, y α_1 y α_2 son coeficientes. Se definen como $\alpha_1 = \dfrac{h_c P}{k A_c}$ y $\alpha_2 = \dfrac{\epsilon \sigma_{SB} P}{k A_c}$, donde h_c es el coeficiente de transferencia de calor por convección, P es el perímetro que limita la sección transversal de la aleta, ϵ es la emisividad radiativa de la superficie de la aleta, k es la conductividad térmica del material de la aleta, A_c es el área de la sección transversal de la aleta y $\sigma_{SB} = 5.67 \times 10^{-8}\, W/(m^2K^2)$ es la constante de Stefan-Boltzmann.



Determine la distribución de temperatura si $L = 0.2\,m$, $T(0) = 475\,K$, $T(0.1) = 290K$ y $Ts = 290K$. Utilize los siguientes valores para los parámetros: $h_c = 40\,W/m^2/K$, $P = 0.015\,m$, $\epsilon = 0.4$, $k = 240\,W/m/K$, y $A_c = 1.55 \times 10^{-5} m^2$. Grafique la solución encontrada.

Observación. Para resolver este problema debe aplicar un esquema de diferencias finitas y el método de Newton para encontrar una solución numérica al modelo presentado. Pruebe diferentes puntos iniciales.

P2. Utilice el método de líneas (y el esquema de Runge-Kutta de orden 4) para resolver el siguiente problema.

$$u_{xx}(t,x) = u_t(t,x), \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0$$
$$u(0,x) = (x - x^2)e^x, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0.$$

a) Use $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.05$ y $M = 50$, (siendo M la cantidad de iteraciones en el tiempo).

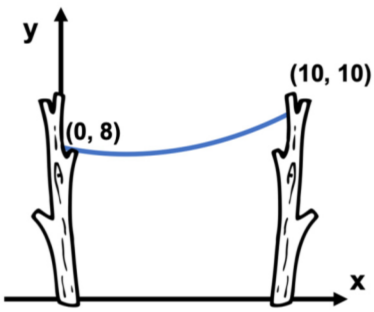
b) Grafique la solución numérica encontrada en el item anterior.

Lista 3

P1. Un cable flexible está suspendido entre dos puntos, como se muestra en la siguiente figura. La densidad del cable es uniforme. La forma del cable $y(x)$ se rige por la ecuación diferencial:

$$y'' = C\sqrt{1 + (y')^2},$$

donde C es una constante que es igual a la relación entre el peso por unidad de longitud del cable y la magnitud de la componente horizontal de la tensión en el cable en su punto más bajo. El cable cuelga entre dos puntos dados por $y(0) = 8\,m$ y $y(10) = 10\,m$, y $C = 0.039\,m^{-1}$. ¿Puede determinar y graficar la forma del cable entre $x = 0$ y $x = 10$?



Observación. Para resolver este problema debe aplicar un esquema de diferencias finitas y el método de Newton para encontrar una solución numérica al modelo presentado. Pruebe diferentes puntos iniciales.

P2. Utilice el esquema de Lax-Wendroff para resolver la siguiente ecuación.

$$u_t = 2u_x, \quad 1 < x < 2, \quad t \geq 0$$
$$u(x, 0) = (1 - x^2),$$

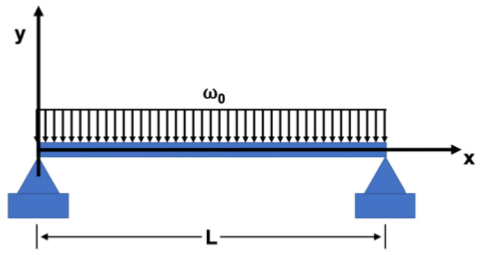
con la condición de borde $u(1, t) = 0$

a) Use $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$ y $t_{final} = 1$.

b) Grafique la solución numérica encontrada en el item anterior.

Lista 4

P1. Una viga simplemente apoyada soporta una carga uniforme de intensidad ω_0, como se muestra en la siguiente figura.



La deflexión de la viga, $y(x)$, está gobernada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$EIy'' = \frac{1}{2}\omega_0(Lx - x^2)\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

donde EI es la rigidez flexural.

Si $L = 7\,m$ y las dos condiciones de contorno son $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$, $EI = 1.5 \times 10^7\,Nm^2$ y $\omega_0 = 15 \times 10^3\,N/m$, determine y grafique la deflexión de la viga en función de x.

P2. Utilice el esquema de Lax-Wendroff para resolver la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} u_t &= -u_x, \quad 0 < x < 10, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) &= e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2}, \end{aligned}$$

con la condición de borde $u(0,t) = 0$

a) Use $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.8\Delta x$ y $t_{final} = 17$.

b) Grafique la solución numérica encontrada en el item anterior.

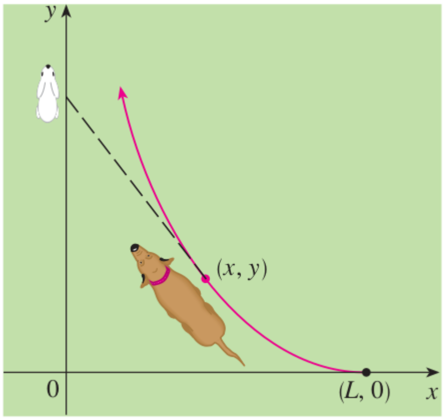
Lista 5

P1. Un perro ve un conejo que corre en línea recta en un campo abierto y lo persigue. En un sistema coordenado rectangular (como el mostrado en la figura), si suponemos que:

i) El conejo está en el origen y el perro en el punto (L, 0) en el instante en que el perro ve por vez primera al conejo.

ii) El conejo corre en la dirección positiva del eje y y el perro siempre directo hacia el conejo.

iii) El perro corre con la misma rapidez que el conejo.



Entonces, la trayectoria del perro es la gráfica de la función $y = f(x)$, donde y satisface la ecuación diferencial:

$$xy'' = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

a) Determine la solución de la ecuación que satisface las condiciones iniciales $y = y' = 0$ cuando $x = L$.

b) ¿Alguna vez el perro alcanza al conejo?

Observación. Para resolver este problema debe aplicar un esquema de diferencias finitas y el método de Newton para encontrar una solución numérica al modelo presentado. Pruebe diferentes puntos iniciales.

P2. Utilice el esquema Up-Wind para resolver la siguiente ecuación.

$$u_t = -u_x, \quad 0 < x < 10, \quad t \geq 0$$
$$u(x, 0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2},$$

con la condición de borde $u(0, t) = 0$

a) Use $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.8\Delta x$ y $t_{final} = 17$.

b) Grafique la solución numérica encontrada en el item anterior.