Fuzzy logic

Логика высших порядков

P **является биекцией из** A **в** B

$$\forall x \forall y \forall z \ P(x,y) \wedge P(x,z) \to Eq(y,z)$$

$$\forall x \exists y \ A(x) \wedge B(y) \wedge P(x,y)$$

$$\forall y \exists x \ A(x) \wedge B(y) \wedge P(x,y)$$

$$\forall x \forall y \ \forall z P(x,z) \wedge P(y,z) \to Eq(x,y)$$

Логика высших порядков

P **является биекцией из** A **в** B

$$\forall x \forall y \forall z \; P(x,y) \wedge P(x,z) \to Eq(y,z)$$

$$\forall x \exists y \;\; A(x) \wedge B(y) \wedge P(x,y)$$

$$\forall y \exists x \;\; A(x) \wedge B(y) \wedge P(x,y)$$

$$\forall x \forall y \; \forall z P(x,z) \wedge P(y,z) \to Eq(x,y)$$

Равномощность A **и** B:

$$\exists P \left[\forall x \forall y \forall z \; P(x,y) \wedge P(x,z) \to Eq(y,z)\right] \wedge \ldots$$

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$
- Предположим, что $\forall x \neg P(x)$

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$
- Предположим, что $\forall x \neg P(x)$
- Придем к противоречию

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$
- Предположим, что $\forall x \neg P(x)$
- Придем к противоречию
- Следовательно, $\exists x P(x)$

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$
- Предположим, что $\forall x \neg P(x)$
- Придем к противоречию
- Следовательно, $\exists x P(x)$

Но чему равен x?

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	**Принцип объективности знания**	$KA \to A$
A2	**Дистрибутивность знания и конъюнкции**	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	**Принцип познаваемости мира**	$A \to \diamond KA$

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	Принцип объективности знания	$KA \to A$
A2	Дистрибутивность знания и конъюнкции	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	Принцип познаваемости мира	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	**Принцип объективности знания**	$KA \to A$
A2	**Дистрибутивность знания и конъюнкции**	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	**Принцип познаваемости мира**	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$
- По **A3**, $\diamond K(A \wedge \neg KA)$

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	**Принцип объективности знания**	$KA \to A$
A2	**Дистрибутивность знания и конъюнкции**	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	**Принцип познаваемости мира**	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$
- По **A3**, $\diamond K(A \wedge \neg KA)$
- По **A2**, $\diamond(KA \wedge K(\neg KA))$

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	Принцип объективности знания	$KA \to A$
A2	Дистрибутивность знания и конъюнкции	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	Принцип познаваемости мира	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$
- По A3, $\diamond K(A \wedge \neg KA)$
- По A2, $\diamond(KA \wedge K(\neg KA))$
- По A1, $\diamond(KA \wedge \neg KA)$

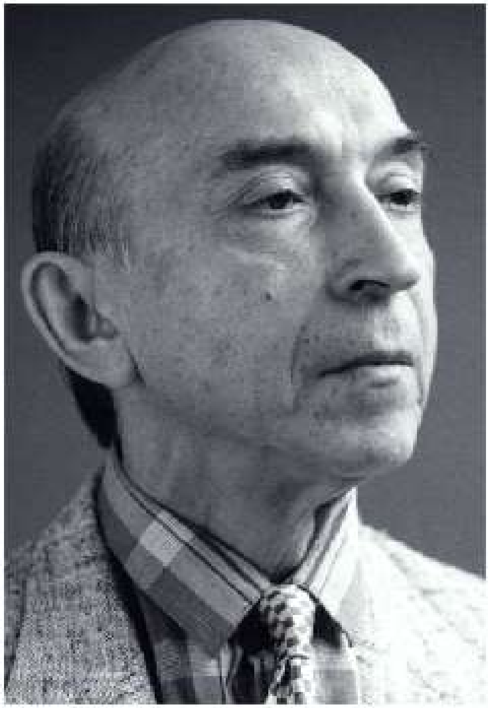
Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	Принцип объективности знания	$KA \to A$
A2	Дистрибутивность знания и конъюнкции	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	Принцип познаваемости мира	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$
- По A3, $\diamond K(A \wedge \neg KA)$
- По A2, $\diamond(KA \wedge K(\neg KA))$
- По A1, $\diamond(KA \wedge \neg KA)$
- Противоречие. Все уже познано.



Lotfi Zadeh
Fuzzy sets (1965)

Crisp logic vs Fuzzy Logic

Нечеткие логические связки

$$x, y \in \{0, 1\}$$

Нечеткие логические связки

$$x, y \in \{0, 1\} \qquad\qquad u, v \in [0, 1]$$

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$ $\qquad$ $u, v \in [0, 1]$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

$u, v \in [0, 1]$

$\neg u = (1 - u)$

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

$u, v \in [0, 1]$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

$$\neg u = (1 - u)$$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

$u, v \in [0, 1]$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

$\neg u = (1 - u)$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$$u \widetilde{\wedge} v = \min(u, v)$$
$$u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

Нечеткие логические связки

$$
\begin{aligned}
x \vee y \qquad\qquad & u \widetilde{\vee} v = \max(u, v) \\
x \wedge y \qquad\qquad & u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)
\end{aligned}
$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad\qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \min(u, v) = \min(u, v)$$

Нечеткие логические связки

$$
\begin{array}{cc}
x \vee y & u \widetilde{\vee} v = \max(u, v) \\
x \wedge y & u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v) \\
& \\
x \vee y = y \vee x & \max(u, v) = \max(v, u) \\
& \\
x \wedge y = y \wedge x & \min(u, v) = \min(u, v) \\
& \\
x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w)
\end{array}
$$

Нечеткие логические связки

$$
\begin{array}{cc}
x \vee y & u \widetilde{\vee} v = \max(u, v) \\
x \wedge y & u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v) \\
x \vee y = y \vee x & \max(u, v) = \max(v, u) \\
x \wedge y = y \wedge x & \min(u, v) = \min(u, v) \\
x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w) \\
x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z & \min(u, \min(v, w)) = \min(\min(u, v), w)
\end{array}
$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \min(u, v) = \min(u, v)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w)$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad \min(u, \min(v, w)) = \min(\min(u, v), w)$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad 1 - \max(u, v) = \min(1 - u, 1 - v)$$

Нечеткие логические связки

$$
\begin{array}{cc}
x \vee y & u \widetilde{\vee} v = \max(u, v) \\
x \wedge y & u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v) \\
 & \\
x \vee y = y \vee x & \max(u, v) = \max(v, u) \\
 & \\
x \wedge y = y \wedge x & \min(u, v) = \min(u, v) \\
 & \\
x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w) \\
 & \\
x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z & \min(u, \min(v, w)) = \min(\min(u, v), w) \\
 & \\
\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} & 1 - \max(u, v) = \min(1 - u, 1 - v) \\
 & \\
\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} & 1 - \min(u, v) = \max(1 - u, 1 - v)
\end{array}
$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$
$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$
$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \tilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \tilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \tilde{\vee} v = u + v - uv$$
$$x \wedge y \qquad u \tilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} &u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ &= u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \tilde{\vee} v = u + v - uv$$
$$x \wedge y \qquad u \tilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} & u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ & = u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad u(vw) = (uv)w$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \tilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \tilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{gathered} u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ = u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{gathered}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad u(vw) = (uv)w$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad \begin{gathered} 1 - (u + v - vw) = 1 - u - v + vw = \\ = (1 - u)(1 - v) \end{gathered}$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \tilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \tilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} &u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ &= u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad u(vw) = (uv)w$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad \begin{aligned} &1 - (u + v - vw) = 1 - u - v + vw = \\ &= (1 - u)(1 - v) \end{aligned}$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} \qquad \begin{aligned} &(1 - u) + (1 - v) - (1 - u)(1 - v) = \\ &= 1 - u + 1 - v - 1 + u + v + uv = \\ &= 1 - uv \end{aligned}$$

Нормы и конормы

Функции $T, S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ называют нормой и конормой, если они:

1. монотонны;
2. ассоциативны;
3. коммутативны;
4. связаны соотношениями де Моргана $1 - T(u, v) = S(1 - u, 1 - v)$ и $1 - S(u, y) = T(1 - u, 1 - v)$;
5. удовлетворяют граничным условиям $T(0,0) = T(0,1) = T(1,0) = 0$, $T(1,1) = 1$, $S(1,1) = S(0,1) = T(1,0) = 1$, $S(0,0) = 0$

Нечеткие множества

$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A$ $\quad$ $\mathbb{M},\ M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ m \widetilde{\in} M$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\}$$

$$\mathbb{M},\ M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ m \widetilde{\in} M$$

$$(m, M) \xrightarrow{\widetilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\ \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A \qquad \mathbb{M},\ M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ m \widetilde{\in} M$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\} \qquad (m, M) \xrightarrow{\widetilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\ \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \qquad M = \left(\frac{\mu(m_1)}{m_1} + \frac{\mu(m_2)}{m_2} + \ldots + \frac{\mu(m_n)}{m_n}\right)$$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A \qquad \mathbb{M},\ M \tilde{\subset} \mathbb{M},\ m \tilde{\in} M$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\} \qquad (m, M) \xrightarrow{\tilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\ \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \qquad M = \left(\frac{\mu(m_1)}{m_1} + \frac{\mu(m_2)}{m_2} + \ldots + \frac{\mu(m_n)}{m_n}\right)$$

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall b\ (b \in B \to b \in A) \qquad N \tilde{\subset} M \Leftrightarrow \forall m\ \mu_N(m) \le \mu_M(m)$$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A \qquad \mathbb{M},\ M \tilde{\subset} \mathbb{M},\ m \tilde{\in} M$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\} \qquad (m, M) \xrightarrow{\tilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\ \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \qquad M = \left(\frac{\mu(m_1)}{m_1} + \frac{\mu(m_2)}{m_2} + \ldots + \frac{\mu(m_n)}{m_n}\right)$$

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall b\ (b \in B \to b \in A) \qquad N \tilde{\subset} M \Leftrightarrow \forall m\ \mu_N(m) \leq \mu_M(m)$$

$$c \in A \cap B \Leftrightarrow c \in A \wedge c \in B \qquad \mu_{M \tilde{\cap} N}(m) = \mu_M(m) \tilde{\wedge} \mu_N(m) = T(\mu_M(m), \mu_N(m))$$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A \qquad \mathbb{M},\ M \tilde{\subset} \mathbb{M},\ m \tilde{\in} M$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\} \qquad (m, M) \xrightarrow{\tilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\ \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

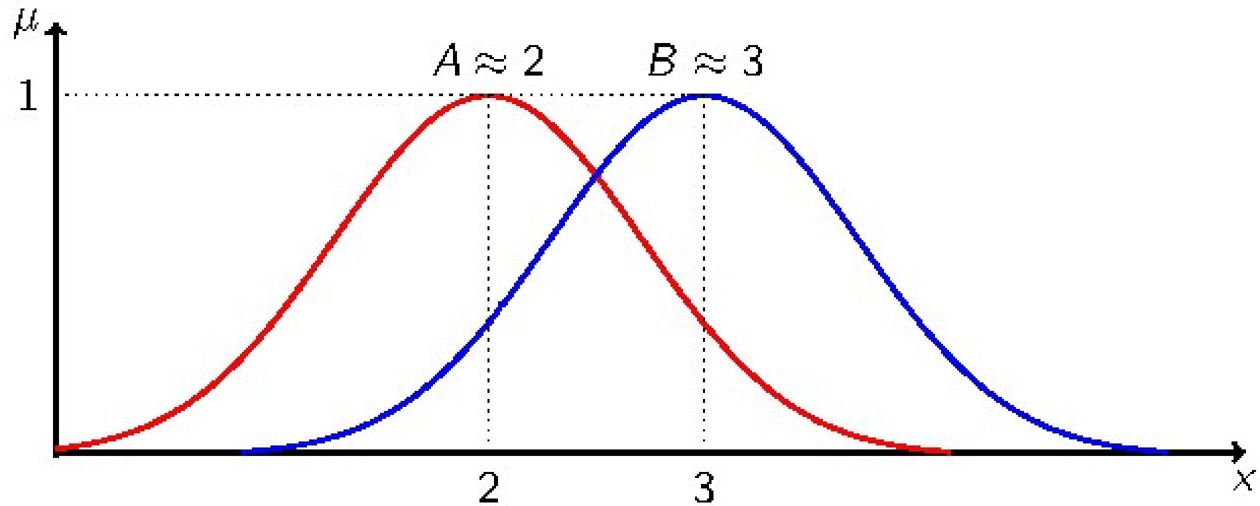
$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \qquad M = \left(\frac{\mu(m_1)}{m_1} + \frac{\mu(m_2)}{m_2} + \ldots + \frac{\mu(m_n)}{m_n}\right)$$

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall b\ (b \in B \to b \in A) \qquad N \tilde{\subset} M \Leftrightarrow \forall m\ \mu_N(m) \le \mu_M(m)$$

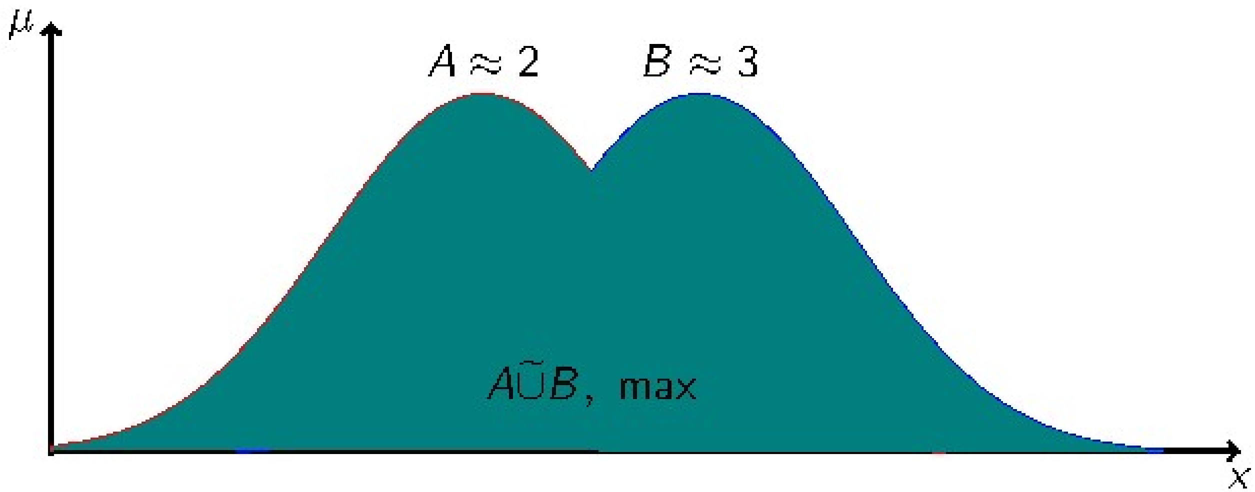
$$c \in A \cap B \Leftrightarrow c \in A \wedge c \in B \qquad \mu_{M \tilde{\cap} N}(m) = \mu_M(m) \tilde{\wedge} \mu_N(m) = T(\mu_M(m), \mu_N(m))$$

$$c \in A \cup B \Leftrightarrow c \in A \vee c \in B \qquad \mu_{M \tilde{\cup} N}(m) = \mu_M(m) \tilde{\vee} \mu_N(m) = S(\mu_M(m), \mu_N(m))$$

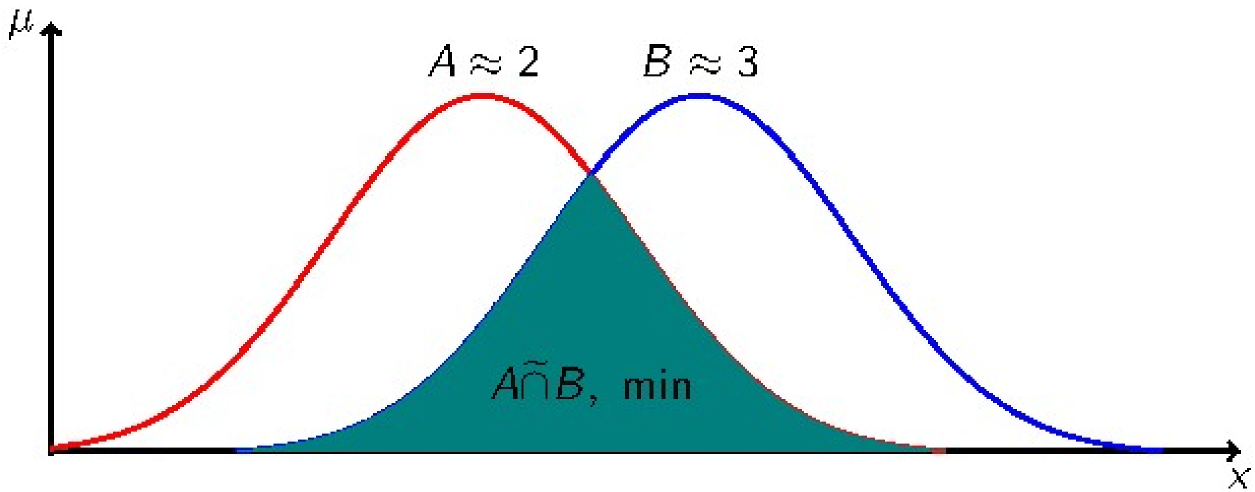
Объединение и пересечение



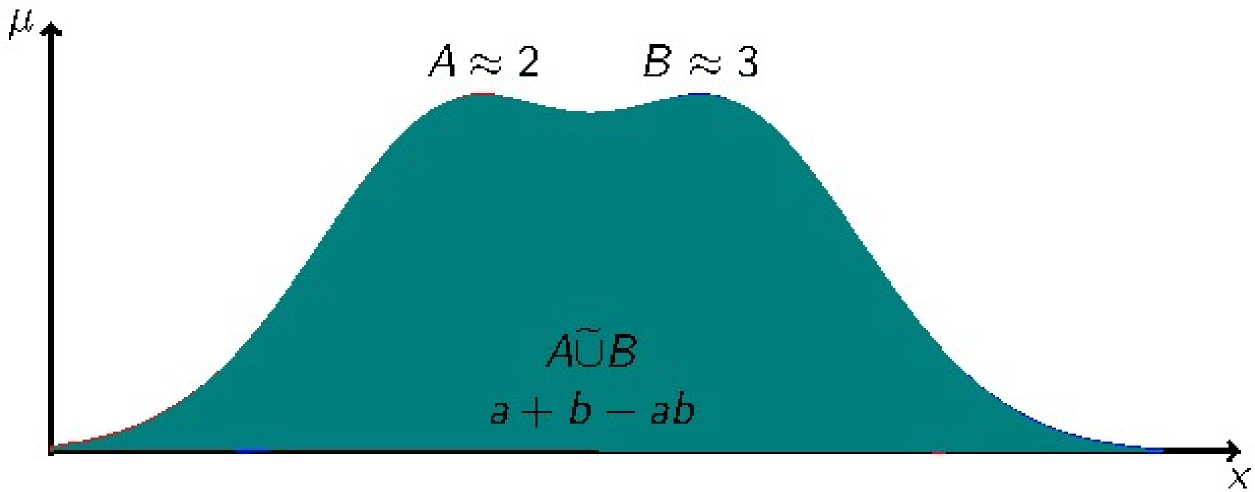
Объединение и пересечение



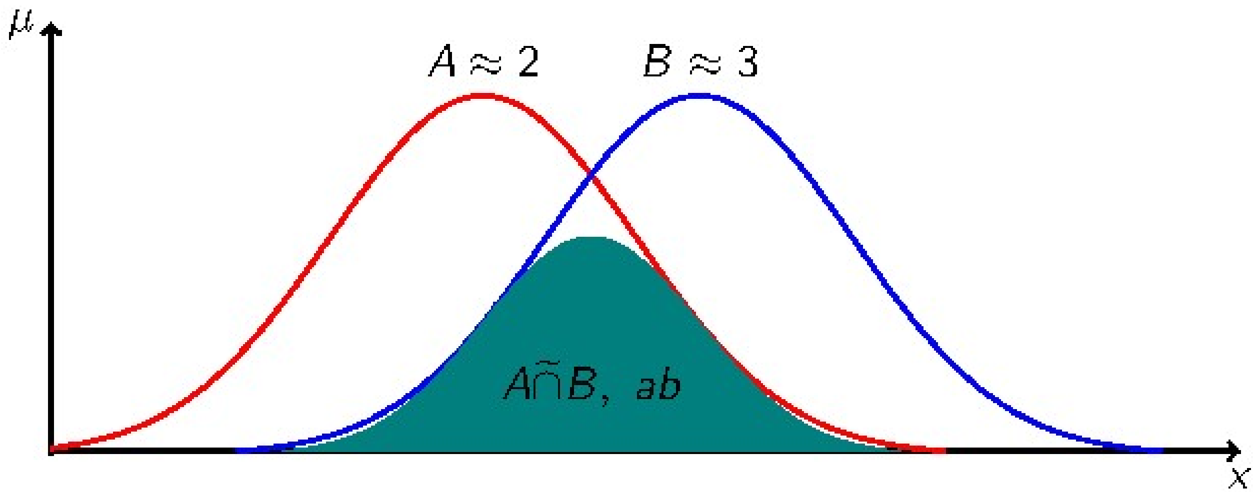
Объединение и пересечение



Объединение и пересечение



Объединение и пересечение



Отношения и отображения

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$,
$B = \{b_1, b_2, b_3\}$,
$C = \{c_1, c_2\}$

$$\rho \subset A \times B = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\sigma \subset B \times C = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 1 \end{array}$$

Отношения и отображения

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$,
$B = \{b_1, b_2, b_3\}$,
$C = \{c_1, c_2\}$

$$\rho \subset A \times B = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\sigma \subset B \times C = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 1 \end{array}$$

$\rho(a) = \{b \;:\; (a, b) \in \rho\}$

$\rho(a_1) = \{b_2\}$
$\rho(a_2) = \{b_1, b_3\}$
$\rho(a_3) = \emptyset$

$\sigma(b_1) = c_1$
$\sigma(b_2) = c_2$
$\sigma(b_3) = c_2$

$\rho \neq \rho : A \to B$
$\sigma = \sigma : B \to C$

Отношения и отображения

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$,
$B = \{b_1, b_2, b_3\}$,
$C = \{c_1, c_2\}$

$$\rho \subset A \times B = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\sigma \subset B \times C = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\sigma^{-1} = \{(c, b) \ : \ (b, c) \in \sigma\}$$

$\sigma^{-1}(c_1) = b_1$
$\sigma^{-1}(c_2) = \{b_2, b_3\}$

$\rho^{-1}(b_1) = a_2$
$\rho^{-1}(b_2) = a_1$
$\rho^{-1}(b_3) = a_2$

$\rho^{-1} = \rho^{-1} : B \to A$
$\sigma^{-1} \neq \sigma^{-1} : C \to B$

Отношения и отображения

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$,
$B = \{b_1, b_2, b_3\}$,
$C = \{c_1, c_2\}$

$$\rho \subset A \times B = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\sigma \subset B \times C = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\rho \circ \sigma = \{ \quad (a, c) \ : \ \exists b \quad (a, b) \in \rho, \ (b, c) \in \sigma \}$$

$$\rho \circ \sigma = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline a_1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{array}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \{\underbrace{b,\ a \in A \wedge (a, b) \in \rho}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}\}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \underbrace{\{b,\ a \in A \wedge (a, b) \in \rho\}}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}$$

$$b \in \rho(A/a) \Leftrightarrow a \in A\ \wedge\ (a, b) \in \rho$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a,b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \{\underbrace{b,\ a \in A \wedge (a,b) \in \rho}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}\}$$

$$b \in \rho(A/a) \Leftrightarrow a \in A\ \wedge\ (a,b) \in \rho$$

$$M \tilde{\subset} \mathbb{M},\ \sigma \tilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a,b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \underbrace{\{b,\ a \in A \wedge (a,b) \in \rho\}}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}$$

$$b \in \rho(A/a) \Leftrightarrow a \in A\ \wedge\ (a,b) \in \rho$$

$$M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ \sigma \widetilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$n \widetilde{\in} \sigma(M/m) = m \widetilde{\in} M\ \widetilde{\wedge}\ (m,n) \widetilde{\in} \sigma$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \underbrace{\{b,\ a \in A \wedge (a, b) \in \rho\}}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}$$

$$b \in \rho(A/a) \Leftrightarrow a \in A\ \wedge\ (a, b) \in \rho$$

$$M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ \sigma \widetilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$n \widetilde{\in} \sigma(M/m) = m \widetilde{\in} M\ \widetilde{\wedge}\ (m, n) \widetilde{\in} \sigma$$

$$\mu_{\sigma(M/m)}(n) = T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \underbrace{\{b,\ a \in A \wedge (a, b) \in \rho\}}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}$$

$$M \tilde{\subset} \mathbb{M},\ \sigma \tilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$\mu_{\sigma(M/m)}(n) = T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)$$

$$\sigma(M) = \widetilde{\bigcup_{m \in \mathbb{M}}} \sigma(M/m)$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \underbrace{\{b,\ \ a \in A \wedge (a, b) \in \rho\}}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}$$

$$M \tilde{\subset} \mathbb{M},\ \ \sigma \tilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$\mu_{\sigma(M/m)}(n) = T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)$$

$$\sigma(M) = \widetilde{\bigcup_{m \in \mathbb{M}}} \sigma(M/m)$$

$$\mu_{\sigma(M)}(n) = \mathop{S}_{m \in \mathbb{M}} \left[T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)\right]$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A}, \ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B} \ : \ \exists a \in A, (a,b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \underbrace{\{b, \ a \in A \wedge (a,b) \in \rho\}}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}$$

$$M \tilde{\subset} \mathbb{M}, \ \sigma \tilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$\mu_{\sigma(M/m)}(n) = T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m,n)\right)$$

$$\sigma(M) = \widetilde{\bigcup_{m \in \mathbb{M}}} \sigma(M/m)$$

$$\mu_{\sigma(M)}(n) = \mathop{S}_{m \in \mathbb{M}} \left[T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m,n)\right)\right]$$

$$\mu_{\sigma(M)}(n) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_M(m) \mu_\sigma(m,n)\right]$$

$$\mu_B(b) = \max_{a \in A} \{ \min\{ \mu_A(a), \ \mu_{\tilde{R}}(a,b) \} \}, \qquad b \in B = A.$$

Нечеткие отношения

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \widetilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \,\tilde{\subseteq}\, \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

Нечеткие отношения

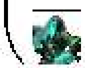
$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c) \mu_\rho(c, m)]$$

$\rho \left(\frac{1}{\text{}} \right)$  $= \left(\frac{0.8}{\text{}} \right.$  $+ \frac{0.2}{\text{}}$  $\left. \right)$

Нечеткие отношения

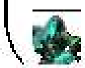
$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho \left(\frac{1}{\text{}} \right)$  $= \left(\frac{0.8}{\text{}} \right.$  $+ \frac{0.2}{\text{}}$  $\left. \right)$

$\rho \left(\frac{1}{\text{}} \right)$  $= \left(\frac{0.8}{\text{}} \right.$  $+ \frac{0.8}{\text{}}$  $\left. \right)$

Нечеткие отношения

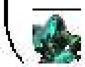
$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

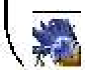
$$\rho \tilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c) \mu_\rho(c, m)]$$

$\rho \left(1 / \right.$  $\left. \right) = \left(0.8 / \right.$  $+ \; 0.2 /$  $\left. \right)$

$\rho \left(1 / \right.$  $\left. \right) = \left(0.8 / \right.$  $+ \; 0.8 /$  $\left. \right)$

$\rho \left(1 / \right.$  $\left. \right) = \left(0.2 / \right.$  $+ \; 0.2 /$  $\left. \right)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \,\tilde{\subseteq}\, \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

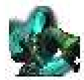
ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c\in\mathbb{C}}\left[\mu_C(c)\mu_\rho(c,m)\right]$$

$\rho\Big(\frac{0.7}{\text{}}$  $+ \frac{0.3}{\text{}}$  $\Big) =$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho\left(\frac{0.7}{\square} + \frac{0.3}{\square}\right) =$ (denominators:  , )

$\max(0.7 \cdot 0.2, 0.3 \cdot 0.2)$ / 

$\max(0.7 \cdot 0.2, 0.3 \cdot 0.8)$ / 

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

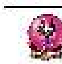
ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho \left(\frac{0.7}{} \right.$  $+ \frac{0.3}{}$  $\left. \right) =$

$\left(\frac{\max(0.7 \cdot 0.2, 0.3 \cdot 0.2)}{} \right.$ 

$\left. \frac{\max(0.7 \cdot 0.2, 0.3 \cdot 0.8)}{} \right)$ 

$= \left(\frac{0.16}{} \right.$  $+ \frac{0.24}{}$  $\left. \right)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho\left(\frac{0.8}{\cdot}\right.$  $+ \frac{0.2}{\cdot}$  $\left.\right) =$

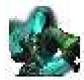
$\left(\frac{\max(0.8 \cdot 0.2, 0.2 \cdot 0.2)}{\cdot}\right.$ 

$\frac{\max(0.8 \cdot 0.2, 0.2 \cdot 0.8)}{\cdot}$  $\left.\right)$

$= \left(\frac{0.16}{\cdot}\right.$  $+ \frac{0.16}{\cdot}$  $\left.\right)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \widetilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \underset{c \in \mathbb{C}}{S} \left[\mu_C(c) \mu_\rho(c, m) \right]$$

$\rho\Big($ 0.8 /  $+$ 0.2 /  $\Big) =$

$\Big($ $0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 -$
$- 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2$ / 

$0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.8 -$
$- 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2$ /  $\Big)$

$= \Big($ 0.1936 /  $+$ 0.2944 /  $\Big)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho\left(\frac{0.4}{\cdot} + \frac{0.5}{\cdot}\right) =$, where the denominators are  and 

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

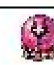
$$\rho \widetilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} \left[\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)\right]$$

$\rho\Big(\dfrac{0.4}{}$  $+ \dfrac{0.5}{}$  $\Big) =$

$\Big(\dfrac{\max(0.4 \cdot 0.2, 0.5 \cdot 0.8)}{}$ 

$\dfrac{\max(0.4 \cdot 0.8, 0.5 \cdot 0.2)}{}$  $\Big)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho\left(\frac{0.4}{\cdot} + \frac{0.5}{\cdot}\right) =$ (denominators: , )

$\left(\frac{\max(0.4 \cdot 0.2, 0.5 \cdot 0.8)}{\cdot}\right.$ 

$\left.\frac{\max(0.4 \cdot 0.8, 0.5 \cdot 0.2)}{\cdot}\right)$ 

$= \left(\frac{0.4}{\cdot} + \frac{0.32}{\cdot}\right)$ (denominators: , )

Композиция нечетких отношений

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$\mathbb{H} = \{$  ,  ,  $\}$

$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$\sigma \tilde{\subseteq} \mathbb{M} \times \mathbb{H}$

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$\tau = \rho \circ \sigma, \ \tau \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{H}$

τ			
			
			
			
			

Композиция нечетких отношений

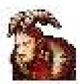
ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c,h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c,m)\mu_\sigma(m,h)\right]$$

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

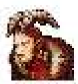
$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} [\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)]$$

$\mu_\tau\Big($  ,  $\Big) =$

$\max [0.8 \cdot 0.7, 0.2 \cdot 0.3] = 0.56$

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c,h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c,m)\mu_\sigma(m,h)\right]$$

$\mu_\tau\Big($  ,  $\Big) =$

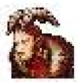
$\max\left[0.8 \cdot 0.7, 0.2 \cdot 0.3\right] = 0.56$

$\mu_\tau\Big($  ,  $\Big) =$

$\max\left[0.8 \cdot 0.3, 0.2 \cdot 0.7\right] = 0.24$

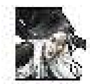
Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

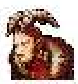
$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c,h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c,m)\mu_\sigma(m,h)\right]$$

τ			
			
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

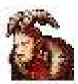
$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c,h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c,m)\mu_\sigma(m,h)\right]$$

τ			
			
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c,h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c,m)\mu_\sigma(m,h)\right]$$

τ			
	0.4		
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

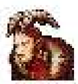
$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} [\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)]$$

τ			
	0.4	0.56	
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

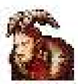
$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c, m) \mu_\sigma(m, h) \right]$$

τ			
	0.4	0.56	0.56
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

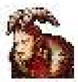
$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} [\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)]$$

τ			
	0.4	0.56	0.56
	0.4	0.58	0.24
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

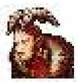
$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c,h) = \max_{m \in \mathbb{M}} [\mu_\rho(c,m)\mu_\sigma(m,h)]$$

τ			
	0.4	0.56	0.56
	0.4	0.58	0.24
	0.4	0.24	0.58
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c,h) = \max_{m \in \mathbb{M}} [\mu_\rho(c,m)\mu_\sigma(m,h)]$$

τ			
	0.4	0.56	0.56
	0.4	0.58	0.24
	0.4	0.24	0.58
	0.1	0.14	0.14