2018.

EJEMPLO MODELACIÓN DETERMINÍSTICA Y DIFUSA

CASO: OPERACIÓN DE UN EMBALSE.

SALVADOR DÍAZ MALDONADO

Vucetic, D y Simonovic, S.P. Water Resources Research Report. Water Resources Decision Making under Uncertainty. Reporte No 073. Abril 2011

salva.gestion@gmail.com

Ejemplo operación de un embalse modelando determinística y difusamente[1].

El caso de estudio de optimización es el embalse Fanshawe en el North Thames River localizado en Ontario, Canadá (justo fuera de la Ciudad de Londres). El problema de optimización está formulado para períodos de tiempo de 12 meses (t=12). Los datos correspondientes consisten de restricciones físicas para el embalse, tal como la capacidad máxima y mínima del embalse.

El problema de operación del embalse es resuelto usando:

a) Aproximación de optimización determinística
b) Aproximación de optimización difusa.

Los datos son:

Capacidad máxima del embalse, C = 0.22503x10^8 m^3

Volumen muerto, $S_{mín}$ = 0.055x10^8 m^3

NAMO = 0.1235x10^8 m^3

Almacenamiento inicial, S_0 = 0.1482x10^8 m^3

Extracción máxima para condiciones sin avenidas, $R_{máx}$ = 370 m^3/s = 9.5904 m^3/mes

Las extracciones se transforman en unidades consistentes con el resto de las variables por encontrar la extracción máxima permitida en cada mes, en la tabla 1.

Tabla 1. Extracciones máximas mensuales (10^8 m^3)

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
$R_{máx}$	9.91008	8.95104	9.91008	9.5904	9.91008	9.5904	9.91008	9.91008	9.5904	9.91008	9.5904	9.91008
m^3/s	382.3606	345.3329	382.3329	369.9996	382.3329	369.9996	382.3329	382.3329	369.9996	382.3329	369.9996	382.3329

- *Como se aprecia, la extracción máxima permitida es 382.3329 m^3/s, mientras que la máxima para condiciones sin avenida es de 370.00 m^3/s. Es decir, tal vez se reserva un margen de 12.33 m^3/s o más, para el caso de una avenida.*

Para ilustrar la aproximación determinística de los datos históricos 2009 se usan como entrada para la optimización dados en la Tabla 2.

Tabla 2. Escurrimientos mensuales (10^8 m^3)

Mes, T	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Esc. 2009	0.34284	1.80472	1.21867	0.72058	0.54104	0.20062	0.12133	0.09508	0.07206	0.12294	0.10446	0.38033

[1] Vucetic, D y Simonovic, S.P. Water Resources Research Report. Water Resources Decision Making under Uncertainty. Reporte No 073. Abril 2011. Adaptado por Salvador Díaz Maldonado.

A) APROXIMACIÓN DE OPTIMIZACIÓN DETERMINÍSTICA.

A continuación, se muestra el modelo matemático:

- Función objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad Z = S$$

Sujeto a:

- Restricción de continuidad,

$$S_{t-1} + i_t - R_t - D_t = S_t \,, \quad t = 1,2,\ldots,12$$

- Restricción de extracción,

$$0 \leq R_t \leq R_{máx} \;, \quad t = 1,2,\ldots,12$$

- Restricción de estacionareidad,

$$S_0 \leq S_n$$

- Restricción de almacenamiento,

$$S_{mín} \leq S_t \leq C \;, \quad t = 1,2,\ldots,12$$

Expresado y resuelto en código de LINGO:

```
! Modelo de aproximación determinística;
! "C:\Mocúzari\Mocuzari 2022\GitHub\Lingo1.lg4";

min=S1+S2+S3+S4+S5+S6+S7+S8+S9+S10+S11+S12;

Z =S1+S2+S3+S4+S5+S6+S7+S8+S9+S10+S11+S12;
R =R1+R2+R3+R4+R5+R6+R7+R8+R9+R10+R11+R12;

S0+0.34284-R1 = S1;           ! Continuidad;
S1+1.80472-R2 = S2;
S2+1.21867-R3 = S3;
S3+0.72058-R4 = S4;
S4+0.54104-R5 = S5;
S5+0.20062-R6 = S6;
S6+0.12133-R7 = S7;
S7+0.09508-R8 = S8;
S8+0.07206-R9 = S9;
S9+0.12294-R10 = S10;
S10+0.10446-R11 = S11;
S11+0.38033-R12 = S12;


S0=0.1482;           ! Almacenamiento inicial;
C=0.22503;           ! Almacenamiento útil;


R1 <= 9.91008;        ! Extracción mensual máxima;
R2 <= 8.95104;
R3 <= 9.91008;
R4 <= 9.5904;
```

```
R5 <= 9.91008;
R6 <= 9.5904;
R7 <= 9.91008;
R8 <= 9.91008;
R9 <= 9.5904;
R10 <= 9.91008;
R11 <= 9.5904;
R12 <= 9.91008;

S1 >= 0.055;                ! Almacenamiento mínimo;
S2 >= 0.055;
S3 >= 0.055;
S4 >= 0.055;
S5 >= 0.055;
S6 >= 0.055;
S7 >= 0.055;
S8 >= 0.055;
S9 >= 0.055;
S10 >= 0.055;
S11 >= 0.055;
S12 >= 0.055;

S1 <= C;                    ! Almacenamiento máximo;
S2 <= C;
S3 <= C;
S4 <= C;
S5 <= C;
S6 <= C;
S7 <= C;
S8 <= C;
S9 <= C;
S10 <= C;
S11 <= C;
S12 <= C;

S12 = S0;                   ! Estacionareidad;
```

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.7532000
  Infeasibilities:                               0.000000
  Total solver iterations:                              5

  Model Class:                                         LP

  Total variables:                     25
  Nonlinear variables:                  0
  Integer variables:                    0

  Total constraints:                   51
  Nonlinear constraints:                0

  Total nonzeros:                     104
  Nonlinear nonzeros:                   0

                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      S1        0.5500000E-01        0.000000
                                      S2        0.5500000E-01        0.000000
                                      S3        0.5500000E-01        0.000000
                                      S4        0.5500000E-01        0.000000
                                      S5        0.5500000E-01        0.000000
                                      S6        0.5500000E-01        0.000000
                                      S7        0.5500000E-01        0.000000
                                      S8        0.5500000E-01        0.000000
                                      S9        0.5500000E-01        0.000000
                                     S10        0.5500000E-01        0.000000
                                     S11        0.5500000E-01        0.000000
                                     S12        0.1482000            0.000000
```

salva.gestion@gmail.com

Z	0.7532000	0.000000
R	**5.724670**	**0.000000**
R1	0.4360400	0.000000
R2	1.804720	0.000000
R3	1.218670	0.000000
R4	0.7205800	0.000000
R5	0.5410400	0.000000
R6	0.2006200	0.000000
R7	0.1213300	0.000000
R8	0.9508000E-01	0.000000
R9	0.7206000E-01	0.000000
R10	0.1229400	0.000000
R11	0.1044600	0.000000
R12	0.2871300	0.000000
S0	0.1482000	0.000000
C	0.2250300	0.000000

Resumen de la optimización (10^8 m^3)		
Función objetivo = 0.7532		
Extracción total = 5.72467		
Mes	Almacenamiento	Extracción
Ene	0.0550	0.4360
Feb	0.0550	1.8047
Mar	0.0550	1.2187
Abr	0.0550	0.7206
May	0.0550	0.5410
Jun	0.0550	0.2006
Jul	0.0550	0.1213
Ago	0.0550	0.0951
Sep	0.0550	0.0721
Oct	0.0550	0.1229
Nov	0.0550	0.1045
Dic	0.1482	0.2871

B) SOLUCIÓN USANDO APROXIMACIÓN DE OPTIMIZACIÓN DIFUSA.

En la aproximación difusa, se considera que los tomadores de decisiones quieren tener un margen de error en las restricciones para la incertidumbre del conocimiento, lo cual no es posible con los requerimientos de las restricciones clásicas del modelo determinístico. Además, los tomadores de decisiones evaluaron que el almacenamiento anual máximo combinado aceptable para evitar daños costosos debido a la inundación no debería exceder de $1.6x10^8$ m^3. Es decir, mayor que el obtenido con el modelo determinístico, $0.7532x10^8$ m^3. Debido a que los tomadores de decisiones sintieron que se vieron forzados a especificar restricciones precisas, a pesar del hecho que ellos hubieran dado algunos intervalos debido a la imprecisión en los datos hidrológicos y otras incertidumbres, el modelo de programación lineal difusa fue seleccionado como satisfactorio con el fin de tomar en cuenta estas percepciones.

A continuación se muestran el objetivo y las restricciones difusas que componen el modelo de aproximación difusa.

Los límites inferiores y los límites superiores de los intervalos de tolerancia, d_i y el margen la tolerancia, p_i, se estimaron como se muestra en las tablas incluidas en cada restricción.

Entonces, usando la aproximación difusa de optimización para programación lineal se obtiene el siguiente detalle:

- Función objetivo:

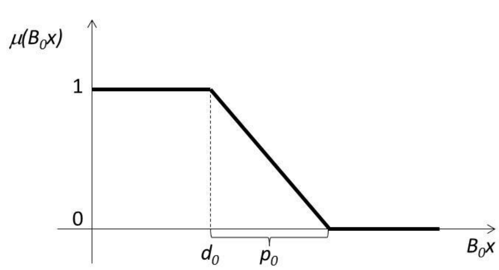
Max λ

s.a.

- Restricción de la función objetivo (≤):

Como se mencionó anteriormente, se considera que el volumen de almacenamiento acumulado no debe exceder $1.6x10^8$ m^3. Aquí se propone que puede variar entre 1.1 y $1.6x10^8$ m^3 de la manera mostrada en la siguiente gráfica. Como se aprecia, el modelo tratará de siempre trabajar con un máximo de $1.1x10^8$ m^3 (mantenerse con ponderación o pertenencia de 1), pero puede tener un margen de tolerancia p_0 = $0.5x10^8$ m^3 con una variación lineal decrementada desde 1 hasta cero.

i	d_i ($x10^8$ m^3)	p_i ($x10^8$ m^3)	Comentarios
0	1.1000	0.5000	Correspondiente a la función objetivo.



$$\frac{B_0x}{p_0} + \lambda \le 1 + \frac{d_0}{p_0}$$

$$\frac{\sum_{t=1}^{12} S_t}{0.5} + \lambda \le 1 + \frac{1.1}{0.5} \le 3.20$$

$d_0 = 1.1\text{x}10^8\ \text{m}^3$, $p_0 = 0.5\text{x}10^8\ \text{m}^3$.

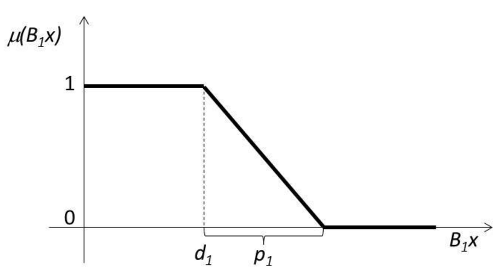
- Restricción de continuidad (≤):

Para simular difusamente continuidad, se trabajará con la variable de escurrimiento o aportación mensual dada como dato.

Mes, T	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Esc. 2009	0.34284	1.80472	1.21867	0.72058	0.54104	0.20062	0.12133	0.09508	0.07206	0.12294	0.10446	0.38033

En la gráfica se muestra que el modelo tratará de mantenerse con una ponderación de 1 mensualmente, sin embargo, tendrá un margen de tolerancia de hasta un 20% más que la aportación mensual. Es decir, $p_1(i) = 0.2*d_1(i)$.

i	d_i (x10^8 m^3)	p_i (x10^8 m^3)	**Comentarios**
1	0.3428	0.0686	
2	1.8047	0.3609	
3	1.2187	0.2437	
4	0.7206	0.1441	
5	0.5410	0.1082	
6	0.2006	0.0401	
7	0.1213	0.0243	
8	0.0951	0.0190	
9	0.0721	0.0144	Correspondiente al escurrimiento (ecuación de estado), con base en los datos del 2009 de inexactitud potencial. Nota: la primer entrada representa el primer mes y la última el doceavo mes.
10	0.1229	0.0246	
11	0.1045	0.0209	
12	0.3803	0.0761	



$$\frac{B_1 x}{p_{1_i}} + \lambda \leq 1 + \frac{d_{1_i}}{p_{1_i}}$$

$$\frac{S_t - S_{t-1} + R_t}{p_{1_i}} + \lambda \leq 1 + \frac{d_{1_i}}{p_{1_i}}$$

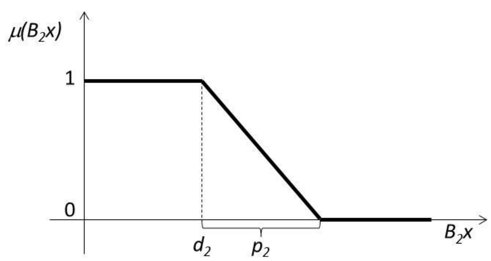
$$t = 1,\ldots,12\,,\quad i = 1,\ldots,12$$

$d_1(i)$ = aportación mensual ($i*10^8$ m^3) y $p_1(i) = 0.2*\ d_1(i)$ ($i*10^8$ m^3).

- Restricción de almacenamiento máximo (≤)

En cuanto al almacenamiento máximo, se procurará mantener en NAMO = $0.22503\text{x}10^3$ m^3. Sin embargo, se propone un margen de hasta $0.0001\text{x}10^8$ m^3 más. Como se observa, el volumen de almacenamiento máximo se conserva muy estable.

13	0.22503	0.0001	
14	0.22503	0.0001	
15	0.22503	0.0001	
16	0.22503	0.0001	
17	0.22503	0.0001	
18	0.22503	0.0001	
19	0.22503	0.0001	
20	0.22503	0.0001	
21	0.22503	0.0001	
22	0.22503	0.0001	Capacidad máxima del embalse, con base en
23	0.22503	0.0001	restricciones físicas. Nota: la primer entrada representa
24	0.22503	0.0001	el primer mes y la última el doceavo mes.



$$\frac{B_2x}{p_{2_i}} + \lambda \leq 1 + \frac{d_{2_i}}{p_{2_i}}$$

$$\frac{S_t}{0.0001} + \lambda \leq 1 + \frac{0.22503}{0.0001} \leq 2251.30$$

$$t = 1, \dots, 12, \qquad i = 13, \dots, 24$$

$d_2(i) = 0.22503\text{x}10^8$ m^3, $p_2(i) = 0.0001\text{x}10^8$ m^3.

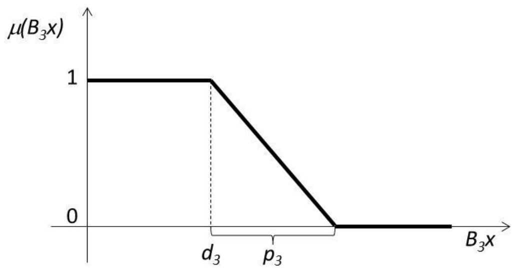
- Restricción de extracción mensual máxima (≤)

La extracción mensual máxima se da como dato.

Mes, T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R_{máx}$	9.91008	8.95104	9.91008	9.5904	9.91008	9.5904	9.91008	9.91008	9.5904	9.91008	9.5904	9.91008

En la gráfica se muestra que esta extracción se procura mantener acorde con los datos, sin embargo, puede disminuir hasta solamente $0.0001\text{x}10^8$ m^3 menos.

25	9.9101	0.0001	
26	8.9510	0.0001	
27	9.9101	0.0001	
28	9.5904	0.0001	
29	9.9101	0.0001	
30	9.5904	0.0001	
31	9.9101	0.0001	
32	9.9101	0.0001	
33	9.5904	0.0001	Correspondiente a la máxima extracción posible para
34	9.9101	0.0001	condiciones sin avenida, con base a restricciones
35	9.5904	0.0001	físicas. Nota: la primer entrada representa el primer
36	9.9101	0.0001	mes y la última el doceavo mes.



$$\frac{B_3 x}{p_{3_i}} + \lambda \ \leq \ 1 + \frac{d_{3_i}}{p_{3_i}}$$

$$\frac{R_t}{p_{3_1}} + \lambda \ \leq \ 1 + \frac{d_{3_i}}{p_{3_i}}$$

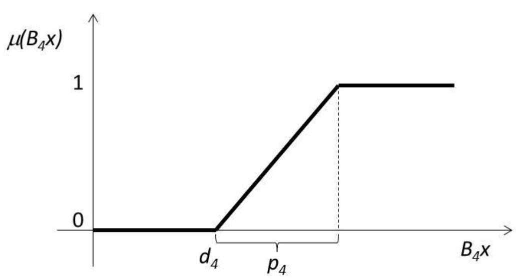
$$t = 1,\ldots,12, \ \ i = 25, \ldots, 36$$

$d_3(i)$ = extracción mensual (10^8 m^3) y $p_3(i)$ = 0.0001 (10^8 m^3).

- Almacenamiento mínimo (≥)

El almacenamiento mínimo tiene un margen de tolerancia de 0.09x10^{-8} hm^3 menor.

i	***d*** *i* **(x10^8 m^3)**	***p*** *i* **(x10^8 m^3)**	**Comentarios**
37	0.1235	0.0900	
38	0.1235	0.0900	
39	0.1235	0.0900	
40	0.1235	0.0900	
41	0.1235	0.0900	
42	0.1235	0.0900	
43	0.1235	0.0900	
44	0.1235	0.0900	Correspondiente al volumen muerto o mínimo del
45	0.1235	0.0900	embalse, restricción física. Nota: la primer entrada
46	0.1235	0.0900	representa el primer mes y la última el doceavo mes. El
47	0.1235	0.0900	valor de 0.1482 corresponde al último almacenamiento
48	0.1482	0.0900	mensual requerido siendo menos que el nivel inicial.



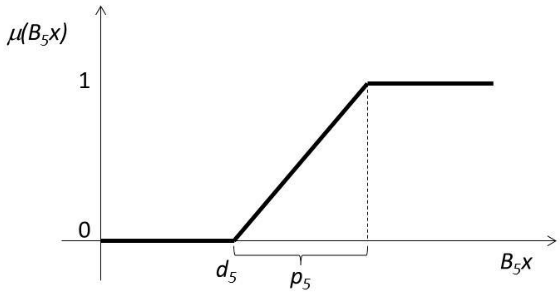
$$\frac{B_4 x}{p_{4_i}} - \lambda \geq \frac{d_{4_i}}{p_{4_i}}$$

$$\frac{S_t}{0.09} - \lambda \ \geq \ \frac{d_{4_i}}{0.09}$$

$$t = 1,\ldots,12, \ \ i = 37, \ldots, 48$$

$d4_i$ = 0.1235x10^8 m^3, $p4_i$ = 0.09x10^8 m^3.

- Continuidad (≥)



$$\frac{B_5 x}{p_{5_i}} - \lambda \geq \frac{d_{5_i}}{p_{5_i}}$$

$$\frac{S_t - S_{t-1} + R_t}{p_{5_i}} - \lambda \geq \frac{d_{5_i}}{p_{5_i}}$$

$$t = 1, \ldots, 12, \quad i = 49, \ldots, 60$$

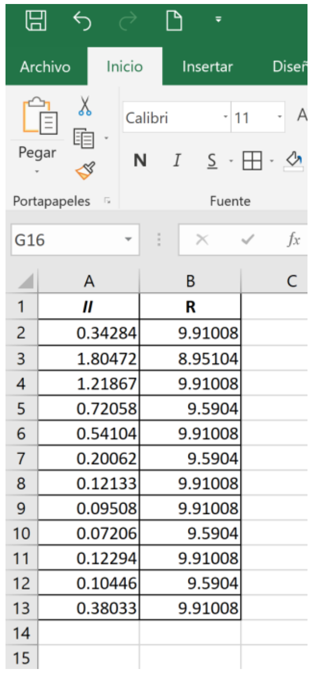
$d_5(i)$ = aportación mensual (i*10^8 m^3) y $p_5(i)$ = 0.25* ($d1_i$ -0.2* $d1_i$) (i*10^8 m^3).

49	0.2742	0.0686	
50	1.4438	0.3609	
51	0.9750	0.2437	
52	0.5765	0.1441	
53	0.4328	0.1082	
54	0.1605	0.0401	
55	0.0970	0.0243	
56	0.0761	0.0190	
57	0.0577	0.0144	Correspondiente al escurrimiento (ecuación de estado),
58	0.0983	0.0246	con base a los datos del 2009 de inexactitud potencial.
59	0.0836	0.0209	Nota: la primer entrada representa el primer mes y la
60	0.3042	0.0761	última el doceavo mes.

Entonces, el modelo lineal de aproximación difusa se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
&\text{maximizar } \lambda \\
&\text{sujeto a la restricción de la función objetivo} \\
&\frac{\sum_{t=1}^{12} S_t}{p_i} + \lambda \leq 1 + \frac{d_i}{p_i} \quad , \quad i = 0 \\
&\textit{otras restricciones} \\
&\frac{(S_t + R_t - S_{t-1})}{p_i} + \lambda \leq 1 + \frac{d_i}{p_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, 12, \qquad t = 1, \ldots, 12 \\
&\frac{S_t}{p_i} + \lambda \leq 1 + \frac{d_i}{p_i} \quad , \quad i = 13, \ldots, 24, \quad t = 1, \ldots, 12 \\
&\frac{R_t}{p_i} + \lambda \leq 1 + \frac{d_i}{p_i} \quad , \quad 1 = 25, \ldots, 36, \quad t = 1, \ldots, 12 \\
&\frac{S_t}{p_i} - \lambda \geq \frac{d_i}{p_i} \quad , \quad i = 37, \ldots, 48, \quad t = 1, \ldots, 12 \\
&\frac{(S_t + R_t - S_{t-1})}{p_i} - \lambda \geq \frac{d_i}{p_i} \quad , \quad i = 49, \ldots, 60, \qquad t = 1, \ldots, 12 \\
&R_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, 12
\end{aligned}$$

Por otro lado, para ejecutar el modelo en LINGO se elabora con Excel un archivo denominado, para este ejemplo, Tabla_1_2022.xlsx, conteniendo las aportaciones y las extracciones máximas mensuales,



	A	B
1	ii	R
2	0.34284	9.91008
3	1.80472	8.95104
4	1.21867	9.91008
5	0.72058	9.5904
6	0.54104	9.91008
7	0.20062	9.5904
8	0.12133	9.91008
9	0.09508	9.91008
10	0.07206	9.5904
11	0.12294	9.91008
12	0.10446	9.5904
13	0.38033	9.91008
14		
15		

```
! Modelo de aproximación difusa;
! Archivo: "C:\Mocúzari\Mocuzari 2022\GitHub\Lingo2.lg4";


SETS:

        ! Variables:
        ! DD vector para el derrame+desfogue mensual, hm³;
        ! S volumen de almacenamiento mensual, hm³;
        ! RR extracción mensual, hm³;
        ! ii valores de la aportación mensual (dato), hm³;
        ! R valores de la extracción mensual (dato), hm³;
        ! di frontera inferior del intervalo de tolerancia;
        ! pi margen de tolerancia del intervalo de tolerancia;
        SET_t/1..12/: S,RR,ii,R,p1,p2,p3,p4,p5;

ENDSETS

DATA:

        ii = @OLE('C:\Mocúzari\Mocuzari 2022\GitHub\Tabla_1_2022.xlsx', '_ii');
         R = @OLE('C:\Mocúzari\Mocuzari 2022\GitHub\Tabla_1_2022.xlsx', '_R');
ENDDATA

! Datos generales;
VMAX = 0.22503;   VMIN = 0.055;   VNAMO = 0.1235;
S0 = 0.1482; ! Volumen inicial;
S(12) = S0;


! ***  Función objetivo;
MAX = L;


Rtot = @sum(SET_t(t): (RR(t)));


! ***  Objetivo determinístico fusificado;
```

```
p0 = 0.5 ;  d0 = 1.1 ;
@sum(SET_t(t): (S(t)))/p0 + L <= 1 + d0/p0;


! *** Continuidad (<=);
p1(1)=0.2*ii(1);   ! Margen de 20% del escurrimiento de entrada;
(S(1)-S0+RR(1))/p1(1) + L <= ii(1)+1/p1(1); ! t = 1;
@FOR(SET_t(t)|t#GE#2 #AND# t#LE#12:
       p1(t) = 0.2*ii(t);   ! Margen de 20% del escurrimiento de entrada;
       (S(t)-S(t-1)+RR(t))/p1(t) + L <= ii(t)+1/p1(t);    ! t=2,...,12;
);


! ***  Almacenamiento máximo (<=);
@FOR(SET_t(t)|t#GE#1 #AND# t#LE#12:  ! t=1,...,12;
       p2(t) = 0.0001;    ! Margen de error del almacenamiento;
       S(t)/p2(t) + L <= 1+VMAX/p2(t);
);


! ***  Extracción mensual máxima (<=);
@FOR(SET_t(t)|t#GE#1 #AND# t#LE#12:  ! t=1,...,12;
       p3(t) = 0.0001;    ! Margen de error del almacenamiento;
       RR(t)/p3(t) + L <= 1+R(t)/p3(t);
);


! ***  Almacenamiento mínimo (>=);
@FOR(SET_t(t)|t#GE#1 #AND# t#LE#12:  ! t=2,...,12;
       p4(t) = 0.09;    ! Margen de error del almacenamiento;
       S(t)/p4(t) - L >= VNAMO/p4(t);
);


! *** Continuidad (>=);
p5(1)=0.25*(ii(1)-p1(1));    ! Margen de 20% del (escurrimiento de entrada - p1(t));
(S(1)-S0+RR(1))/p5(1) - L >= (ii(1)-p1(1))/p5(1);   ! t = 1;
@FOR(SET_t(t)|t#GE#2 #AND# t#LE#12:  ! t=2,...,12;
       p5(t) = 0.25*(ii(t)-p1(t));
       (S(t)-S(t-1)+RR(t))/p5(t) - L >= (ii(t)-p1(t))/p5(t);      ! t=2,...,12;
);


0 <= L;  L <= 1;
```

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.6261745E-01
  Infeasibilities:                               0.000000
  Total solver iterations:                             30

  Model Class:                                         LP

  Total variables:                     25
  Nonlinear variables:                  0
  Integer variables:                    0

  Total constraints:                   65
  Nonlinear constraints:                0

  Total nonzeros:                     190
  Nonlinear nonzeros:                   0

                                Variable           Value        Reduced Cost
                                    VMAX       0.2250300            0.000000
                                    VMIN       0.5500000E-01        0.000000
                                   VNAMO       0.1235000            0.000000
```

S0	0.1482000	0.000000
L	0.6261745E-01	0.000000
RTOT	**5.392078**	**0.000000**
P0	0.5000000	0.000000
D0	1.100000	0.000000
S(1)	0.1291356	0.000000
S(2)	0.1291356	0.000000
S(3)	0.1291356	0.000000
S(4)	0.1291356	0.000000
S(5)	0.1291356	0.000000
S(6)	0.1291356	0.000000
S(7)	0.1291356	0.000000
S(8)	0.1291356	0.000000
S(9)	0.1291356	0.000000
S(10)	0.1291356	0.000000
S(11)	0.1291356	0.000000
S(12)	0.1482000	0.000000
RR(1)	1.038279	0.000000
RR(2)	1.466377	0.000000
RR(3)	0.9901980	0.000000
RR(4)	0.5854882	0.000000
RR(5)	0.4396077	0.000000
RR(6)	0.1630085	0.000000
RR(7)	0.9858348E-01	0.000000
RR(8)	0.7725473E-01	0.000000
RR(9)	0.5855044E-01	0.000000
RR(10)	0.9989164E-01	0.000000
RR(11)	0.8487620E-01	0.000000
RR(12)	0.2899626	0.000000
II(1)	0.3428400	0.000000
II(2)	1.804720	0.000000
II(3)	1.218670	0.000000
II(4)	0.7205800	0.000000
II(5)	0.5410400	0.000000
II(6)	0.2006200	0.000000
II(7)	0.1213300	0.000000
II(8)	0.9508000E-01	0.000000
II(9)	0.7206000E-01	0.000000
II(10)	0.1229400	0.000000
II(11)	0.1044600	0.000000
II(12)	0.3803300	0.000000
R(1)	9.910080	0.000000
R(2)	8.951040	0.000000
R(3)	9.910080	0.000000
R(4)	9.590400	0.000000
R(5)	9.910080	0.000000
R(6)	9.590400	0.000000
R(7)	9.910080	0.000000
R(8)	9.910080	0.000000
R(9)	9.590400	0.000000
R(10)	9.910080	0.000000
R(11)	9.590400	0.000000
R(12)	9.910080	0.000000
P1(1)	0.6856800E-01	0.000000
P1(2)	0.3609440	0.000000
P1(3)	0.2437340	0.000000
P1(4)	0.1441160	0.000000
P1(5)	0.1082080	0.000000
P1(6)	0.4012400E-01	0.000000
P1(7)	0.2426600E-01	0.000000
P1(8)	0.1901600E-01	0.000000
P1(9)	0.1441200E-01	0.000000
P1(10)	0.2458800E-01	0.000000
P1(11)	0.2089200E-01	0.000000
P1(12)	0.7606600E-01	0.000000
P2(1)	0.1000000E-03	0.000000
P2(2)	0.1000000E-03	0.000000
P2(3)	0.1000000E-03	0.000000
P2(4)	0.1000000E-03	0.000000
P2(5)	0.1000000E-03	0.000000
P2(6)	0.1000000E-03	0.000000

```
  P2( 7)     0.1000000E-03     0.000000
  P2( 8)     0.1000000E-03     0.000000
  P2( 9)     0.1000000E-03     0.000000
 P2( 10)     0.1000000E-03     0.000000
 P2( 11)     0.1000000E-03     0.000000
 P2( 12)     0.1000000E-03     0.000000
  P3( 1)     0.1000000E-03     0.000000
  P3( 2)     0.1000000E-03     0.000000
  P3( 3)     0.1000000E-03     0.000000
  P3( 4)     0.1000000E-03     0.000000
  P3( 5)     0.1000000E-03     0.000000
  P3( 6)     0.1000000E-03     0.000000
  P3( 7)     0.1000000E-03     0.000000
  P3( 8)     0.1000000E-03     0.000000
  P3( 9)     0.1000000E-03     0.000000
 P3( 10)     0.1000000E-03     0.000000
 P3( 11)     0.1000000E-03     0.000000
 P3( 12)     0.1000000E-03     0.000000
  P4( 1)     0.9000000E-01     0.000000
  P4( 2)     0.9000000E-01     0.000000
  P4( 3)     0.9000000E-01     0.000000
  P4( 4)     0.9000000E-01     0.000000
  P4( 5)     0.9000000E-01     0.000000
  P4( 6)     0.9000000E-01     0.000000
  P4( 7)     0.9000000E-01     0.000000
  P4( 8)     0.9000000E-01     0.000000
  P4( 9)     0.9000000E-01     0.000000
 P4( 10)     0.9000000E-01     0.000000
 P4( 11)     0.9000000E-01     0.000000
 P4( 12)     0.9000000E-01     0.000000
  P5( 1)     0.6856800E-01     0.000000
  P5( 2)     0.3609440         0.000000
  P5( 3)     0.2437340         0.000000
  P5( 4)     0.1441160         0.000000
  P5( 5)     0.1082080         0.000000
  P5( 6)     0.4012400E-01     0.000000
  P5( 7)     0.2426600E-01     0.000000
  P5( 8)     0.1901600E-01     0.000000
  P5( 9)     0.1441200E-01     0.000000
 P5( 10)     0.2458800E-01     0.000000
 P5( 11)     0.2089200E-01     0.000000
 P5( 12)     0.7606600E-01     0.000000
```

Resumen de la optimización (10^8 m^3)		
Función objetivo Z = 0.6261745E-01		
Extracción total = 5.392078		
Mes, t	Almacenamiento	Extracción
1. Ene	0.1291349	1.038279
2. Feb	0.1291349	1.466377
3. Mar	0.1291349	0.9901980
4. Abr	0.1291349	0.5854882
5. May	0.1291349	0.4396077
6. Jun	0.1291349	0.1630085
7. Jul	0.1291349	0.9858348E-01
8. Ago	0.1291349	0.7725473E-01
9. Sep	0.1291349	0.5855044E-01
10. Oct	0.1291349	0.9989164E-01
11. Nov	0.1291349	0.8487620E-01
12. Dic	0.1482000	0.2899626

COMENTARIOS FINALES.

Con la aproximación determinística el volumen acumulado fue de **$0.7532x10^8$ m^3** y con este modelo es de **$1.5687x10^8$** m^3. Además, se extraen **$5.724670x10^8$ m^3** y con la difusa **$5.392078x10^8$ m^3**. También se observa que, con la aproximación difusa, aunque se extrae menos que con la aproximación determinística, el volumen de almacenamiento mensual permanece casi en el mínimo nivel, acercándose mucho más al almacenamiento meta de $0.1235x10^{-8}m^3$ y además disminuye el riesgo de no poder responder en caso de presentarse escurrimientos muy bajos (tal vez esto se debe a que el modelo asigna al menos la aportación observada).

La principal ventaja, comparada con la formulación no fuzificada del problema, es el hecho de que el tomador de decisiones no es forzado a una formulación precisa debido a razones matemáticas, sino que se puede ser capaz o estar dispuesto a describir el problema en términos difusos. Las funciones de membresía lineales monótonas pueden ser reemplazadas por otras más complejas si es que se justifica según la experiencia de los tomadores de decisiones.