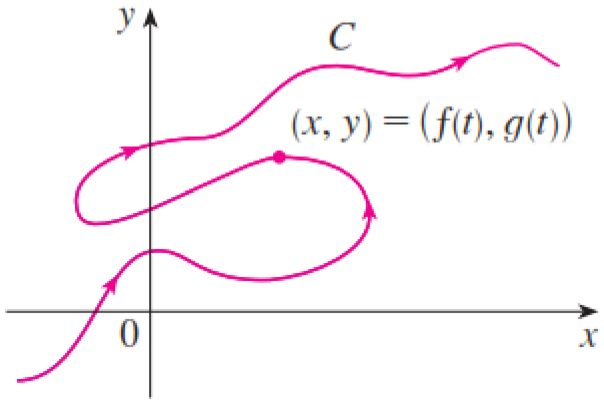
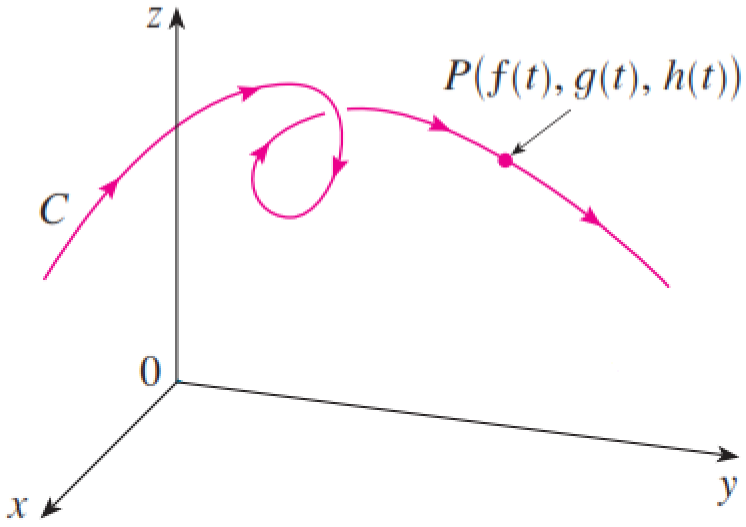
Cálculo Vectorial

- Parametrización de curvas
- Campos vectoriales
- Integrales de línea

Parametrización de curvas

Imagine que una partícula se mueve a lo largo de la curva C mostrada en la figura. Es imposible describir C por una ecuación de la forma $y = f(x)$ porque C falla en la prueba de la recta vertical. Pero las coordenadas x y y de la partícula son funciones del tiempo t y, por tanto, se puede escribir por medio de $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Este par de ecuaciones suele ser una forma más conveniente de describir una curva y da lugar a la siguiente definición.





Parametrización de curvas

Definición Curva plana

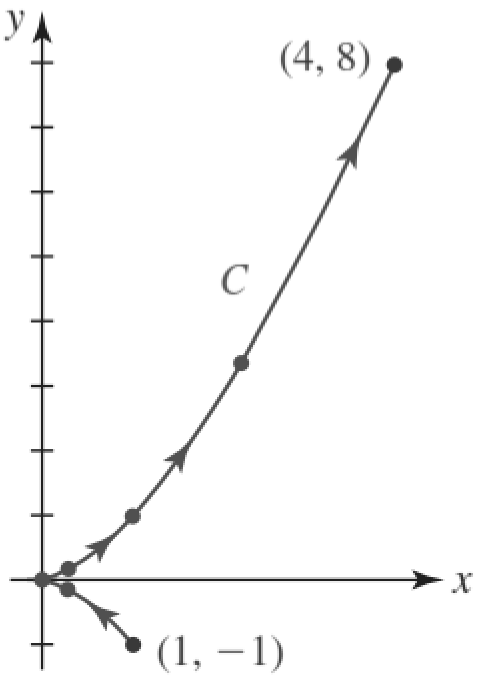
Si f y g son funciones continuas definidas sobre un intervalo común I, entonces $x = f(t)$, $y = g(t)$ se llaman **ecuaciones paramétricas** y t recibe el nombre de **parámetro**. El conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$ cuando t varía sobre I se denomina una **curva plana**.

Es una práctica común referirse al conjunto de ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, para t en I, como una **parametrización** de C. De aquí en adelante, haremos referencia a una curva plana C como una **curva paramétrica** o como una **curva parametrizada**. La **gráfica** de una curva paramétrica C es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano de coordenadas correspondientes al par ordenado $(f(t), g(t))$. Por simplicidad, no se establecerá la distinción entre una *curva paramétrica* y una *gráfica de una curva*.

Parametrización de curvas

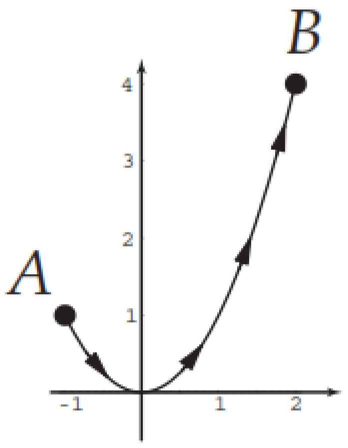
Grafique la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas

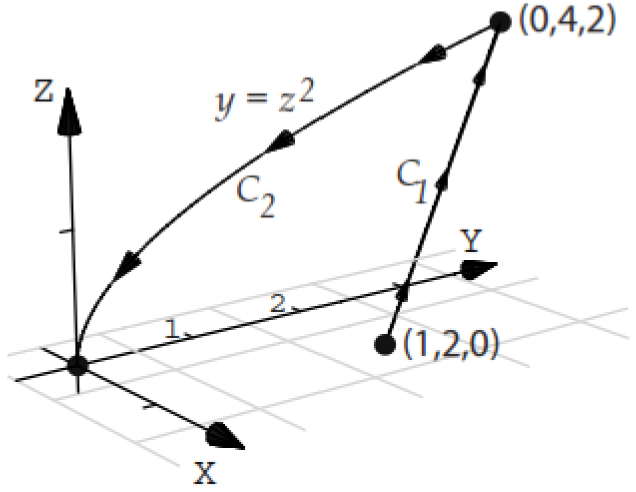
$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad -1 \le t \le 2.$$



Parametrización de curvas

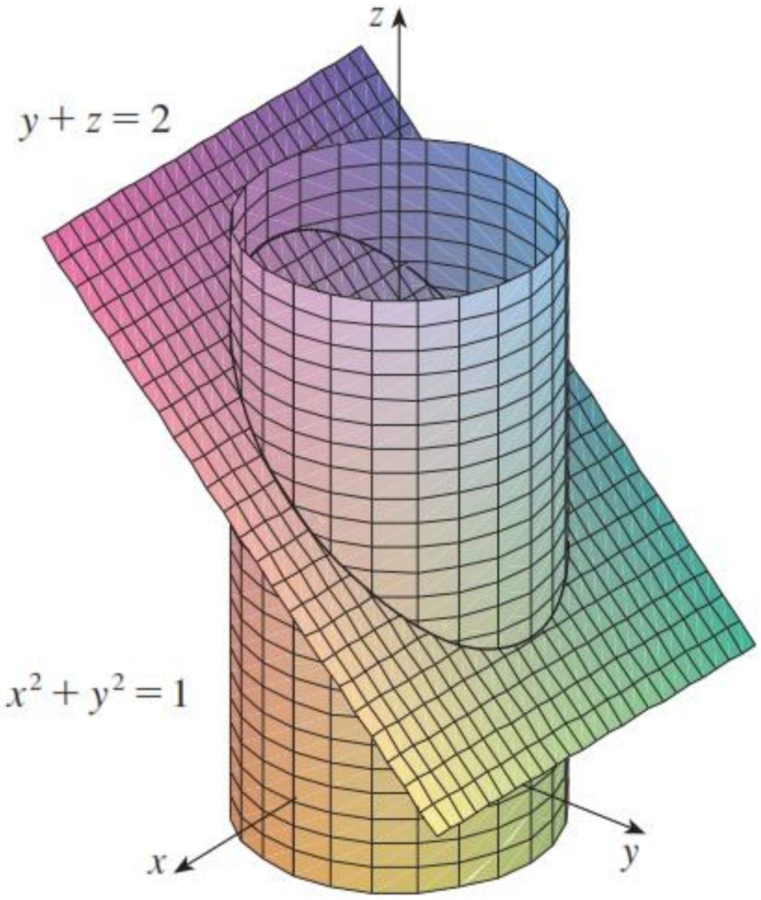
Determine una parametrización para las siguientes curvas

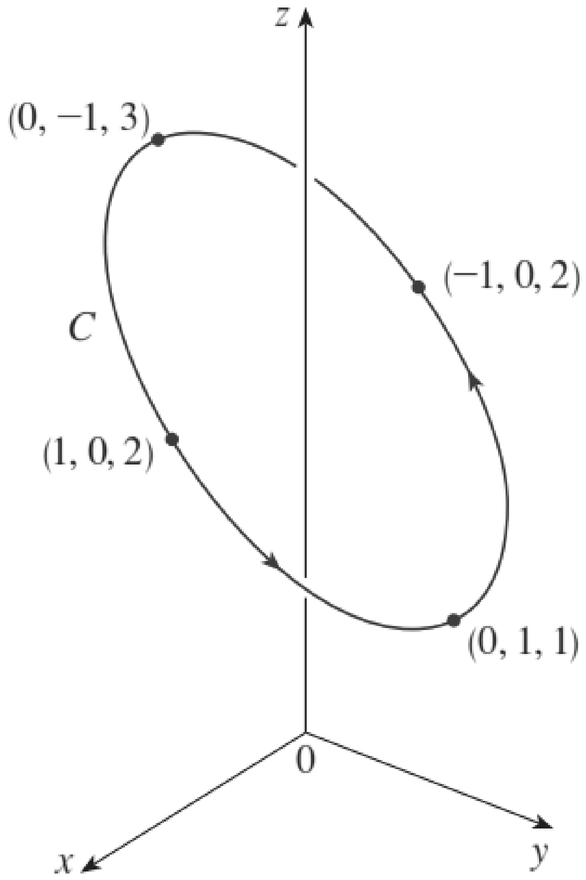




Parametrización de curvas

Determine una función vectorial que represente la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$.





Campos Vectoriales

DEFINICIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Un **campo vectorial sobre una región plana** $\boldsymbol{R}$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y)$ a cada punto en R.

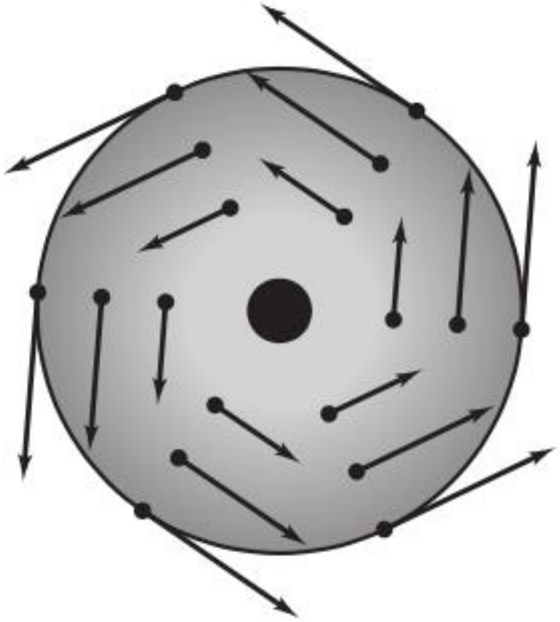
Un **campo vectorial sobre una región sólida** $\boldsymbol{Q}$ **en el espacio** es una función $\mathbf{F}$ que asigna un vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ a cada punto en Q.

Aunque un campo vectorial está constituido por infinitos vectores, se puede obtener una idea aproximada de su estructura dibujando varios vectores representativos $\mathbf{F}(x, y)$, cuyos puntos iniciales son (x, y).

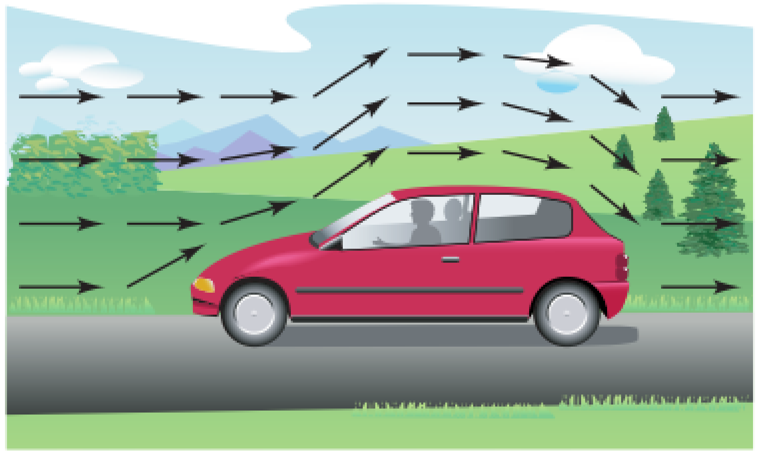
Campos Vectoriales

Algunos ejemplos *físicos* comunes de campos vectoriales son los **campos de velocidades**, los **gravitatorios** y los **de fuerzas eléctricas**.

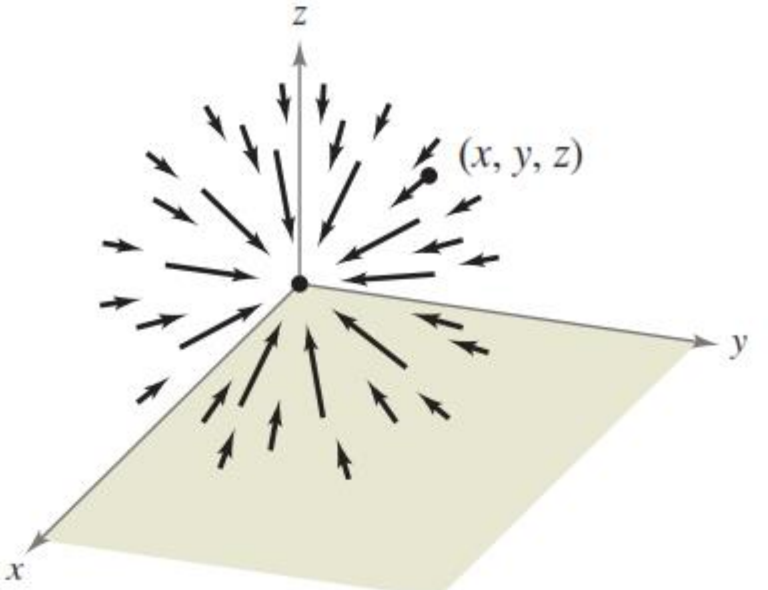
Campo de velocidades



Campo vectorial de flujo del aire



Campo de fuerzas gravitatorio



m_1 se localiza en (x, y, z).
m_2 se localiza en $(0, 0, 0)$.

Campos Vectoriales

Dibujar algunos vectores del campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

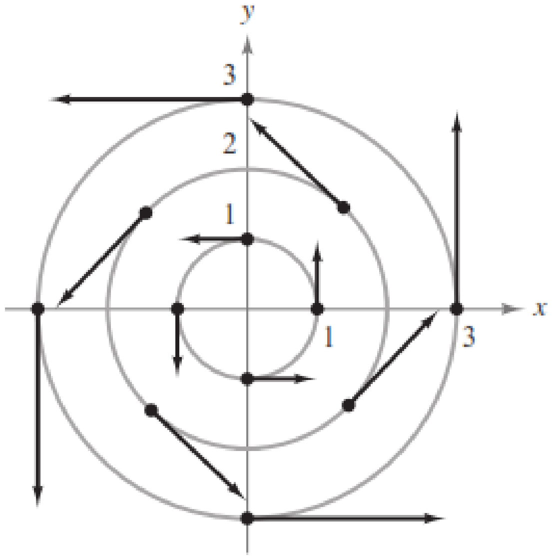
Solución Se podrían trazar los vectores en varios puntos del plano, al azar. Sin embargo, es más ilustrativo trazar vectores de magnitud igual. Esto corresponde a encontrar curvas de nivel en los campos escalares. En este caso, vectores de igual magnitud se encuentran en círculos.

$$\|\mathbf{F}\| = c \qquad \text{Vectores de longitud } c.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad \text{Ecuación del círculo.}$$

Para empezar a hacer el dibujo, se elige un valor de c y se dibujan varios vectores en la circunferencia resultante. Por ejemplo, los vectores siguientes se encuentran en la circunferencia unitaria.



Punto	*Vector*
$(1, 0)$	$\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$
$(0, 1)$	$\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$
$(-1, 0)$	$\mathbf{F}(-1, 0) = -\mathbf{j}$
$(0, -1)$	$\mathbf{F}(0, -1) = \mathbf{i}$

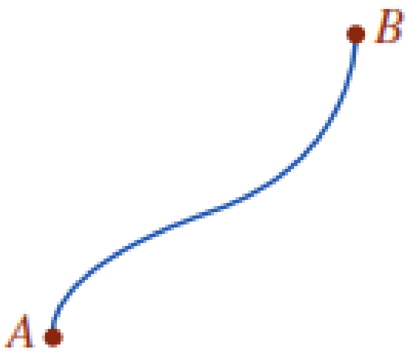
Integrales de Línea

La noción de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, esto es, *integración de una función de una sola variable definida sobre un intervalo*, puede generalizarse a la *integración de una función de varias variables definidas a lo largo de una curva*. Para este fin necesitamos introducir cierta terminología acerca de curvas.

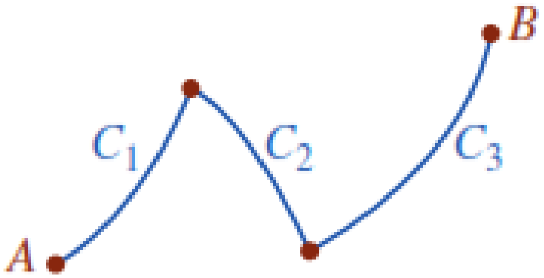
Terminología Suponga que C es una curva parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, y que A y B son los puntos inicial y terminal $(x(a), y(a))$ y $(x(b), y(b))$, respectivamente. Afirmamos que:

- C es una **curva suave** si $x'(t)$ y $y'(t)$ son continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y no son simultáneamente cero sobre el intervalo abierto (a, b).
- C es una **curva suave por partes** si consiste en un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$ unidas extremo por extremo; esto es, $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$.
- C es una **curva cerrada** si $A = B$.
- C es una **curva simple** si no se cruza a sí misma entre A y B.
- C es una **curva cerrada simple** si $A = B$ y la curva no se cruza a sí misma.
- Si C no es una curva cerrada, entonces la **orientación** impuesta sobre C es la dirección que corresponde a los valores crecientes de t.

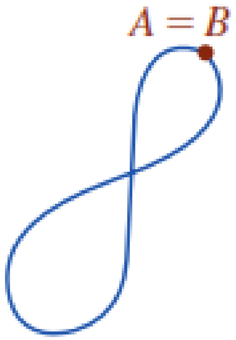
Integrales de Línea



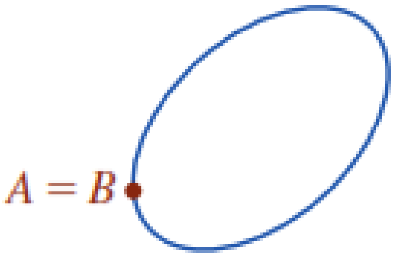
a) Curva suave



b) Curva suave por partes



c) Cerrada pero no simple



d) Curva cerrada simple

Integrales de Línea sobre curvas de funciones escalares

Sea f una función de dos variables x y y definida en una región del plano que contiene una curva suave C.

La **integral de línea de f con respecto a x** a lo largo de C de A a B es

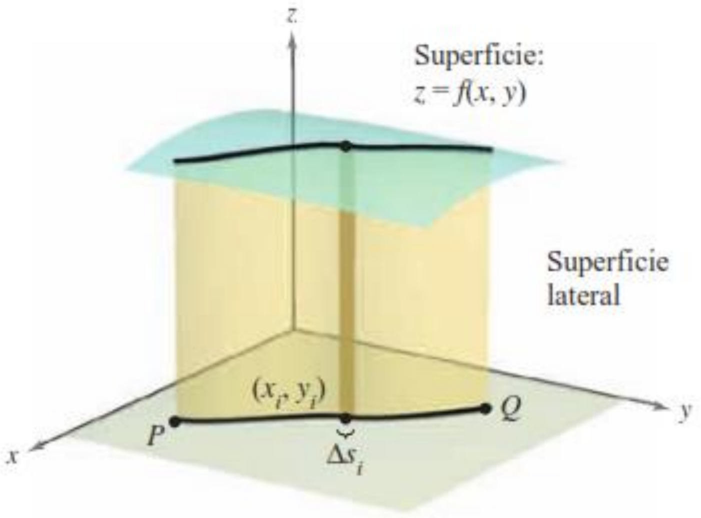
$$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k.$$

La **integral de línea de f con respecto a y** a lo largo de C de A a B es

$$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k.$$

La **integral de línea de f con respecto a la longitud de arco s** a lo largo de C de A a B es

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k.$$



Integrales de Línea sobre curvas de funciones escalares

TEOREMA **EVALUACIÓN DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA COMO INTEGRAL DEFINIDA**

Sea f continua en una región que contiene una curva suave C. Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

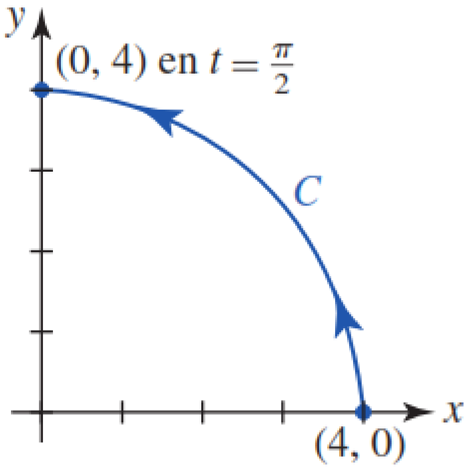
Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, donde $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Integrales de Línea sobre curvas de funciones escalares

Evalúe sobre el cuarto de círculo C definido por $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\, t$, $0 \le t \le \pi/2$.

a) $\int_C xy^2\,dx$, ***b***) $\int_C xy^2\,dy$, **c**) $\int_C xy^2\,ds$



Solución

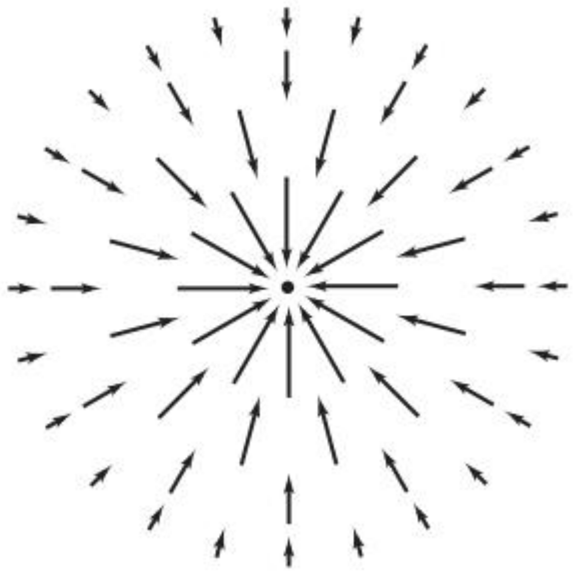
a)
$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{(-4\,\text{sen}\, t\,dt)}^{dx}$$
$$= -256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 t\cos t\,dt$$
$$= -256\left[\frac{1}{4}\text{sen}^4 t\right]_0^{\pi/2} = -64.$$

b)
$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{(4\cos t\,dt)}^{dy}$$
$$= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos^2 t\,dt \quad \leftarrow \text{use la fórmula del ángulo doble para el seno}$$
$$= 256\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\text{sen}^2 2t\,dt \quad \leftarrow \text{use la fórmula del ángulo mitad para el seno}$$
$$= 64\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\,dt$$
$$= 32\left[t - \frac{1}{4}\text{sen}\, 4t\right]_0^{\pi/2} = 16\pi.$$

c)
$$\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{\sqrt{16(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}\,dt}^{ds}$$
$$= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t\cos t\,dt$$
$$= 256\left[\frac{1}{3}\text{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}.$$

Integrales de Línea de campos vectoriales sobre curvas

Una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales de línea es la de hallar el **trabajo** realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas. Por ejemplo, la figura muestra un campo de fuerzas cuadrático inverso similar al campo gravitatorio del Sol. Obsérvese que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria circular en torno al centro es constante, mientras que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria parabólica varía de un punto a otro.



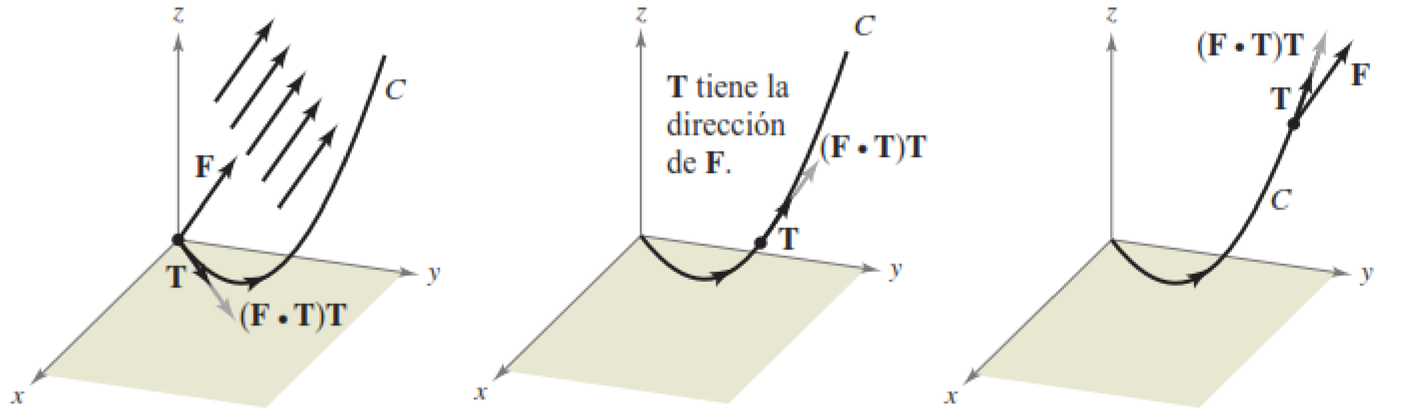
Campo de fuerzas cuadrático inverso **F**

Integrales de Línea de campos vectoriales sobre curvas

Para ver cómo puede utilizarse una integral de línea para hallar el trabajo realizado en un campo de fuerzas **F**, considérese un objeto que se mueve a lo largo de una trayectoria C en el campo, como se muestra en la figura. Para determinar el trabajo realizado por la fuerza, sólo se necesita considerar aquella parte de la fuerza que actúa en la dirección en que se mueve el objeto (o en la dirección contraria). Esto significa que en cada punto de C, se puede considerar la proyección $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ del vector fuerza **F** sobre el vector unitario tangente **T**. En un subarco pequeño de longitud Δs_i, el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned}\Delta W_i &= (\text{fuerza})(\text{distancia})\\ &\approx [\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathbf{T}(x_i, y_i, z_i)]\,\Delta s_i\end{aligned}$$

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds$$



Integrales de Línea de campos vectoriales sobre curvas

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. La **integral de línea** de $\mathbf{F}$ sobre C está dada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),\ y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Integrales de Línea de campos vectoriales sobre curvas

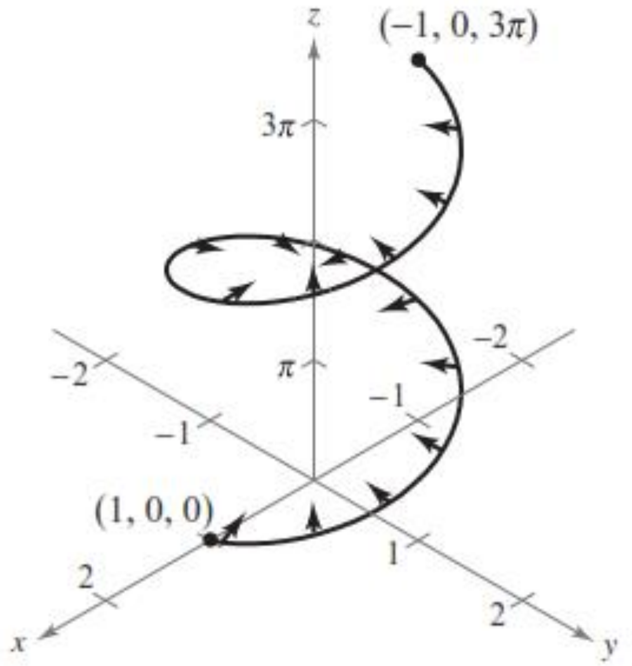
Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x\mathbf{i} - \frac{1}{2}y\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}$$ Campo de fuerzas $\mathbf{F}$.

sobre una partícula que se mueve a lo largo de la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$ Curva C en el espacio.

desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(-1, 0, 3\pi)$, como se muestra en la figura



Solución Como

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\\ &= \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}\end{aligned}$$

se sigue que $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$ y $z(t) = t$. Por tanto, el campo de fuerzas puede expresarse como

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}.$$

Integrales de Línea de campos vectoriales sobre curvas

Para hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas al moverse la partícula a lo largo de la curva C, se utiliza el hecho de que

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y se escribe lo siguiente.

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{3\pi} \left(-\frac{1}{2}\cos t\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}\right) \cdot (-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt \\
&= \int_0^{3\pi} \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + \frac{1}{4}\right) dt = \int_0^{3\pi} \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}t\Big]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

Referencias bibliográficas

- THOMAS, George. Cálculo Varias Variables, Decimosegunda Edición (Pearson, 2010)
- LARSON-HOSTETLER-EDWARS. Cálculo. Tomo 2. 10ª Edición (Cengage Learning, 2014)
- ZILL, Dennis G. Cálculo Trascendentes Tempranas, 4ª Edición. McGrawHill
- STEWART, James. El cálculo, Trascendentes tempranas, 7ª edición (Cengage Learning, 2012)