UNIVERSIDAD CENTROAMERICANA JOSÉ SIMEÓN CAÑAS
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO III

CÁLCULO VECTORIAL

POR:

YOCEMAN ADONY SIFONTES RIVAS

SAN SALVADOR , EL SALVADOR, JUNIO DE 2020.

Índice

1. Caminos

En esta sección vamos a generalizar la definición de integración de una función en una variable sobre un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, para obtener un nuevo tipo de integrales que estarán asociadas con curvas que llamaremos caminos en $\mathbb{R}^n$, un camino en $\mathbb{R}^n$ será una función diferenciable y continua $\sigma : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}^n$. El camino $\sigma : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}^n$ diremos que es liso si $\sigma'(t) \neq 0$ para cualquier $t \in [a, b]$. El significado de la condición $\sigma \neq 0$ es que la dirección de un camino con primera derivada continua no pueda cambiar bruscamente si su vector velocidad nunca se anula.

Ejemplo 1. Considere $\sigma = (x_1(t), y(t)) : \quad \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$ definido por

$$x_1(t) = t^3, \quad y_2(t) = \begin{cases} t^3 & t \geq 0 \\ -t^3 & t \leq 0 \end{cases}$$

la imagen de σ es el gráfico de $y = |x|$, el único vértice ocurre en el origen, que es cuando la imagen del punto $t = 0$ en el que $\sigma'(t) = 0$.

Teorema 1.1. *Si $\sigma : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}^n$ es un camino con primera derivada continua, entonces su longitud existe y además*

$$l(\sigma) = \int_a^b |\sigma'(t)| dt.$$

2. Integrales de línea

En esta parte del curso vamos a estudiar el proceso de integración sobre curvas y sobre superficies, la idea central en adelante será estudiar tres importantes teoremas: Teorema de Green's, Teorema de Gauss (conocido como el teorema de la divergencia) y el Teorema de Stoke, los tres teoremas están estrechamente relacionados al Teorema Fundamentarl del Cálculo Integral y podemos recordar la siguiente situación

una integral sobre un conjunto S= una integral relacionada sobre la frontera de S.

Definición 2.1. *Una función que asigna un vector a cada punto de S (podría ser la velcidad en un punto o el gradiente de una función f en un punto) es llamado un campo vectorial.*

Definición 2.2. *Sea $F(t) = F_1(t)\overrightarrow{i} + F_2(t)\overrightarrow{j} + F_3(t)\overrightarrow{k}$ es un campo vectorial continuo sobre una curva lisa*

$$C : \quad \sigma(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k} \quad t \in [a, b].$$

La integral de F sobre σ es el número

$$\int_\sigma F(\sigma) d\sigma = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

Teorema 2.1. *Sea F es un campo vectorial continuo sobre una curva lisa σ. La integral de línea*

$$\int_\sigma F(\sigma) d\sigma = \int_a^b F(\sigma(t))\sigma'(t) dt$$

es invariante por cualquier cambio de parámetros que preserva la dirección.

Ejemplo 2. Calcular $\int_\sigma F(\sigma)d\sigma$ dada por

$$F(x,y) = xy\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \quad \text{y} \quad C: \quad t\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} \quad t \in [0,1].$$

Solución. Se tiene que $x(t) = t$ y $y(t) = t^2$, por tanto

$$\begin{aligned}
F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) &= [x(t)y(t)\overrightarrow{i} + [y(t)^2\overrightarrow{j}] \cdot [x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{i}] \\
&= x(t)y(t)x'(t) + [y(t)]^2y'(t) \\
&= t \cdot t^2 \cdot 1 + t^4 \cdot (2t) \\
&= t^3 + 2t^5 \\
\int_\sigma F(\sigma)d\sigma &= \int_0^1 (t^3 + 2t^5)dt \\
&= \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Integra el campo vectorial $F(x,y,z) = xy\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} + xz\overrightarrow{k}$ sobre $\sigma(t) = t\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + t^3\overrightarrow{k}$ que va desde el punto $(-1,1,-1)$ al punto $(1,1,1)$

Solución. El camino de integración inicia en $t = -1$ y termina en $t = 1$. En este caso

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3$$

luego

$$\begin{aligned}
F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) &= [x(t)y(t)\overrightarrow{i} + y(t)z(t)\overrightarrow{j} + x(t)z(t)\overrightarrow{k}] \cdot [x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}] \\
&= x(t)y(t)x'(t) + y(t)z(t)y'(t) + x(t)z(t)z'(t) \\
&= t(t^2)(1) + t^2(t^3)(2t) + t(t^3)(3t^2) \\
&= t^3 + 5t^6 \\
\int_C F(\sigma) \cdot d\sigma &= \int_{-1}^1 (t^3 + 5t^6)dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\right]_{-1}^1 = \frac{10}{7}.
\end{aligned}$$

Si una curva C no es una curva lisa, pero está compuesta por un número finito de curvas lisas $C_1, C_2, \ldots, C_n$, entonces podemos definir la integral de C como la suma de integrales de línea sobre C_i :

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \ldots + \int_{C_n}.$$

En el caso anterior, se dice que la curva C es una curva lisa a trozos o por pedazos, la siguiente figura describe tal situación

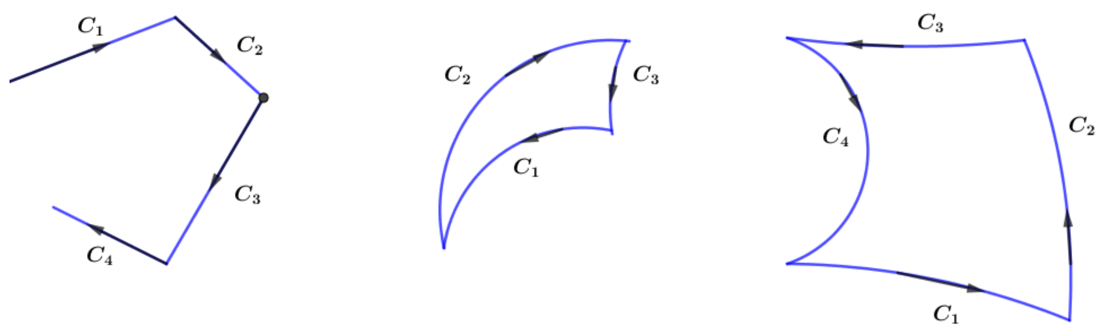


Figura 1: Ejemplos de curvas no lisas.

Todos los caminos poligonales son curvas lisas a trozos, el siguiente ejemplo se integrará sobre un triángulo, para esto integramos sobre cada lado y sumamos cada resultado. Nótese además que el segmento de recta dirigido que inica en A y termina en B puede ser parametrizado por

$$\sigma(t) = (1-t)A + tB, \quad t \in [0,1].$$

Ejemplo 4. Evalúa la integral de línea $\displaystyle\int_C F(\sigma)d\sigma$ si $F(x,y) = e^y \overrightarrow{i} - \operatorname{sen}(\pi x)\overrightarrow{j}$, C es el triángulo con vértices $(2,0)$, $(0,2)$ y $(-2,0)$ y se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Solución. La curva a trozos C puede ser parametrizada por los segmentos

$$\begin{aligned}
C_1: &\quad \sigma_1(t) = (1-t)2\overrightarrow{i} + 2t\overrightarrow{j}, \quad t \in [0,1] \\
C_2: &\quad \sigma_2(t) = (1-t)2\overrightarrow{j} - 2t\overrightarrow{i}, \quad t \in [0,1] \\
C_3: &\quad \sigma_3(t) = (1-t)(-2\overrightarrow{i}) + 2t\overrightarrow{i} = (4t-1)\overrightarrow{i}, \quad t \in [0,1]
\end{aligned}$$

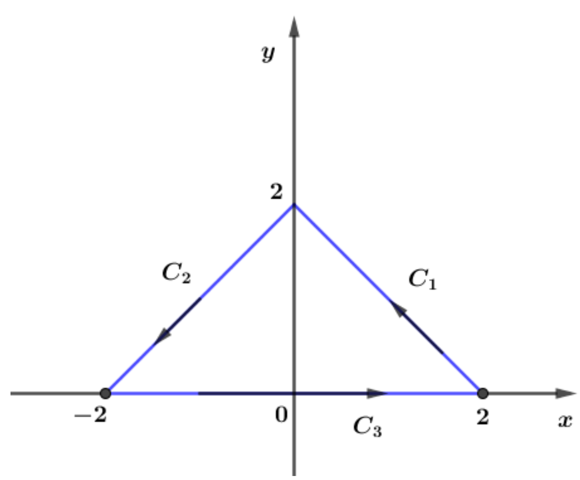


Figura 2: Triángulo de vértices $(2,0)$, $(0,2)$ y $(-2,0)$.

luego,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} F(\sigma)d\sigma &= \int_0^1 \left[e^{y(t)}x'(t) - \operatorname{sen}[\pi x(t)]y'(t)\right] dt\\ &= \int_0^1 \left[-2e^{2t} - \operatorname{sen}[2\pi(1-t)\right] dt\\ &= \left[-e^{2t} - \frac{\cos(2\pi(1-t)}{2\pi}\right]_0^1\\ &= -e^2 - \frac{1}{2\pi} + 1 + \frac{1}{2\pi}\\ &= 1 - e^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} F(\sigma)d\sigma &= \int_0^1 \left[e^{y(t)}x'(t) - \operatorname{sen}[\pi x(t)]y'(t)\right] dt\\ &= \int_0^1 \left[-2e^{2(1-t)} - \operatorname{sen}[2\pi t]\right] dt\\ &= \left[e^{2(1-t)} + \frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1\\ &= 1 + \frac{1}{2\pi} - e^2 - \frac{1}{2\pi}\\ &= 1 - e^2,\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}\int_{C_3} F(\sigma)d\sigma &= \int_0^1 \left[e^{y(t)}x'(t) - \operatorname{sen}[\pi x(t)]y'(t)\right] dt\\ &= \int_0^1 4dt = 4.\end{aligned}$$

luego, la integral sobre el triángulo es la suma de esas integrales

$$\int_C F(\sigma)d\sigma = (1-e^2) + (1-e^2) + 4 = 6 - 2e^2 = 2(3-e^2).$$

Cuando se integra sobre una curva parametrizada, se integra en la dirección determinada por la parametrización, pero si integramos en la dirección opuesta, nuestro resultado se verá alterado por el factor -1. Si C es una curva cotinua a trozos, denotaremos por $-C$ a la misma curva pero en la dirección opuesta. Si C está parametrizada por una función vectorial σ definida sobre $[a,b]$ entonces la curva $-C$ estará parametrizada por

$$\alpha(s) = \sigma(a+b-s), \quad s \in [a,b]$$

en resumen se tiene

$$\int_{-C} F(\alpha)\cdot d\alpha = -\int_C F(\sigma)\cdot d\sigma.$$

Definición 2.3. *Si F es una fuerza que se aplica continuamente a un objeto que se mueve sobre una curva lisa a trozos C, entonces el trabajo realizado por F es la integral de línea sobre C:*

$$W = \int_C F(\sigma) \cdot d\sigma$$

Ejemplo 5. Sobre un objeto actúan varias fuerzas cuando se mueve a lo largo de la parábola $y = 2x^2$ desde el origen al punto $(1, 2)$. Una de las fuerzas está dada por $F(x, y) = x^3 \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j}$. Calcula el trabjo realizado por la fuerza F

Solución.

$$C : \quad \sigma(r) = t\overrightarrow{i} + 2t^2\overrightarrow{j}, \quad t \in [0, 1]$$

en este caso $x(t) = t$, $y(t) = 2t^2$ y

$$\begin{aligned} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) &= [x(t)]^3 x'(t) + y(t)y'(t) \\ &= t^3 + 2t^2 \cdot 4t \\ &= 9t^3 \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$W = \int_C F(\sigma) \cdot d\sigma = \int_0^1 9t^3 dt = \frac{9}{4}.$$

3. El teorema fundamental para integrales de línea

En general, si se integra un campo vectorial F desde un un punto a otro, el valor de la integral de línea depende del camino elegido. Existe una importante excepción: si el campo vectorial es gradiente, esto es

$$F = \nabla f,$$

en este caso, el valor de la integral de línea depende únicamente de los extremos del camino, este resultado se resume en el siguiente teorema:

Teorema 3.1. El teorema fundamental para integrales de líneas. *Sea $C : \quad \sigma = \sigma(t), t \in [a, b]$, es una curva lisa a trozos que inicia en $A = \sigma(a)$ y termina en $B = \sigma(b)$. Si el campo escalar f es continuamente diferenciable sobre un conjunto abierto que contiene a la cura C, entonces*

$$\int_C \nabla f(\sigma) d\sigma = f(b) = f(a).$$

En el caso que la curva C sea una curva cerrada, es decir , si $A = B$ entonces

$$\int_C \nabla f(\sigma) d\sigma = 0$$

Ejemplo 6. Integra el campo $F(x, y) = y^2\overrightarrow{i} + (2xy - e^{2y})\overrightarrow{j}$ sobre el arco

$$C : \quad \sigma = \cos t\,\overrightarrow{i} + \operatorname{sen} t\,\overrightarrow{j}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

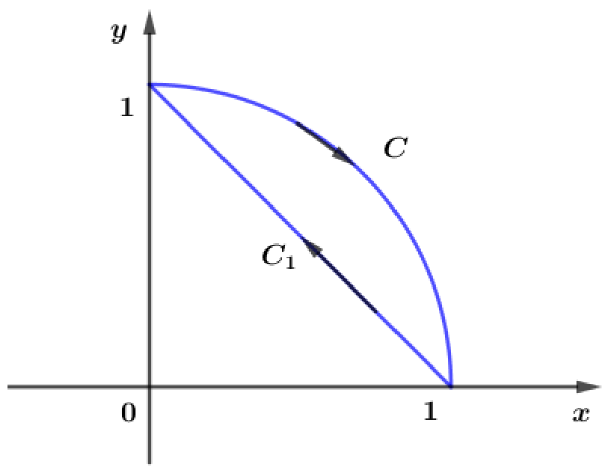
Solución. Primero determinamos si el campo F es gradiente, para esto hacemos

$$P(x,y) = y^2 \quad \text{y} \quad Q(x,y) = 2xy - e^{2y}.$$

y puesto que P y Q son funciones continuas y diferenciables en cualquier parte y además

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

concluimos que F es gradiente. Luego, como la integral depende únicamente de los extremos de la curva C, podemos simplificar los cálculos sobre el segmento C_1 que tiene los mismos puntos extremos tal como se muestra en la siguiente figura



La parametrización para C_1 está dada por

$$\sigma(t) = (1-t)\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j}, \quad t \in [0,1]$$

así:

$$\begin{aligned}
\int_C F(\sigma)d\sigma &= \int_{C_1} F(\sigma)\cdot d\sigma \\
&= \int_0^1 [F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)]dt \\
&= \int_0^1 [y(t)^2x'(t) + [2x(t)y(t) - e^{2y(t)}]y'(t)]dt \\
&= \int^1 [t^2(-1) + [2(1-t)t - e^{2t}(1)]dt \\
&= \int_0^1 [2t - 3t^2 - e^{2t}]dt = \left[t^2 - t^3 - \frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}.
\end{aligned}$$