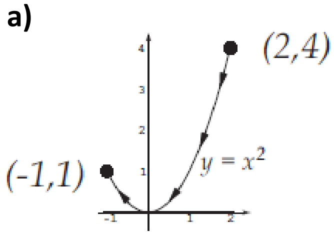
Universidad Centroamericana “José Simeón Cañas”
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Matemática
Cálculo III Ciclo 01/2020
Ing. Daniel Sosa , Ing, Daniel Juarez, Lic. Yoceman Sifontes

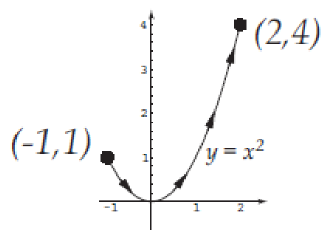
Parametrización e Integrales de Línea

1. Determine una parametrización para las siguientes curvas

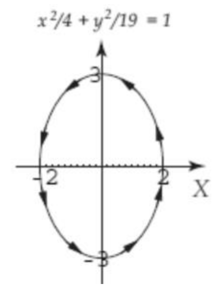
a)



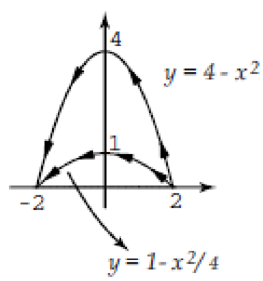
b)



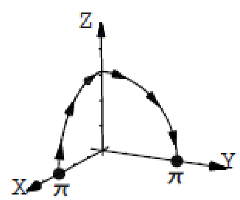
c)



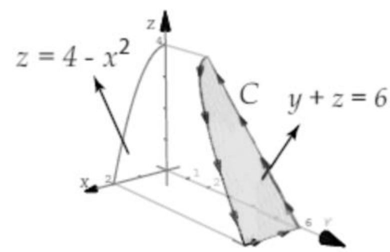
d)



e) Circunferencias de radio π con centro en el origen



f)



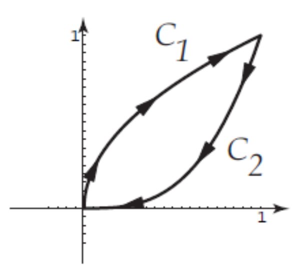
2. Evalué las siguientes integrales de línea:

a) $\int_C \left(x^2+y^2\right)^5 ds$ donde C es la circunferencia $x(t)=2\cos(t),\ y(t)=2\sin(t)$, $t\in[0,2\pi]$

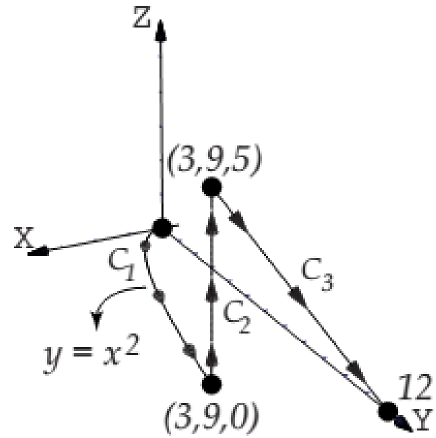
b) $\int_C \left(\dfrac{z^2}{x^2+y^2}\right) ds$ donde C es la espiral de la hélice $x(t)=2\cos(t),\ y(t)=2\sin(t),\ z=2t$, $t\in[0,2\pi]$

c) $\int_C y^2dx+x^2dy$ donde C es la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ recorrida en sentido anti horario

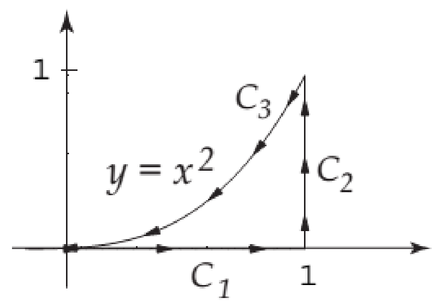
3. Considere las curvas $C_1 : x = y^2$ y $C_2 : y = x^3$. Calcular la integral de línea $\int_C xdy - ydx$ donde $C = C_1 \cup C_2$



4. Evalué $\int_C x^2 z\, dx - x^2 y\, dy + 3xz\, dz$ con $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ donde C_1, C_2, C_3 se muestran en la siguiente figura.

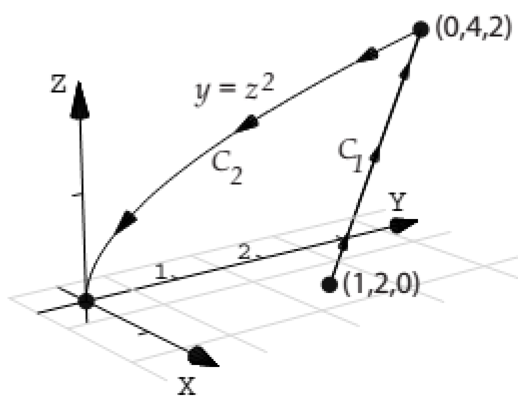


5. Calcule $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ con $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ donde C_1, C_2, C_3 son las curvas que se muestran en la figura.



6. Evalué la integral de línea $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, si se sabe que: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \sin(x)\, \hat{\boldsymbol{i}} + \cos(y)\, \hat{\boldsymbol{j}} + xz\, \hat{\boldsymbol{k}}$ donde C está definida por la función vectorial $\boldsymbol{r}(t) = t^3\, \hat{\boldsymbol{i}} + t^2\, \hat{\boldsymbol{j}} + t\, \hat{\boldsymbol{k}}$, $t \in [0,1]$

7. Sea $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + y)\hat{\boldsymbol{i}} + (y - z)\hat{\boldsymbol{j}} + (x + z)\hat{\boldsymbol{k}}$ y sea C la curva de la figura, calcule $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$



8. Determine el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\boldsymbol{F}(x, y) = x\, \hat{\boldsymbol{i}} + (y + 2)\, \hat{\boldsymbol{j}}$ al mover un objeto a lo largo del arco de la cicloide: $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin(t))\hat{\boldsymbol{i}} + (1 - \cos(t))\, \hat{\boldsymbol{j}}$, $t \in [0, 2\pi]$

9. Evalué la integral de línea $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, siendo:

a) $\boldsymbol{F}(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{\boldsymbol{i}}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\hat{\boldsymbol{j}}$, donde C es la parábola $y=1+x^2$ entre los puntos $(-1,2)$ y $(1,2)$

b) $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(2x\ln(yz)-5ye^x\right)\hat{\boldsymbol{i}}+\left(\dfrac{x^2}{y}-5e^x\right)\hat{\boldsymbol{j}}+\left(\dfrac{x^2}{z}+2z\right)\hat{\boldsymbol{k}}$, donde C es el segmento de recta entre los puntos $A=(2,2,1)$ y $B=(3,1,e)$

10. Para los siguientes campos vectoriales, determine si son o no conservativos, los que lo sean, determine su respectiva función potencial.

a) $\boldsymbol{F}(x,y)=xy^2\,\hat{\boldsymbol{i}}+x^2y\,\hat{\boldsymbol{j}}$

b) $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(y+z)\,\hat{\boldsymbol{i}}+(x+z)\,\hat{\boldsymbol{j}}+(x+y)\,\hat{\boldsymbol{k}}$

c) $\boldsymbol{F}(x,y,z)=e^{y+2z}\,\hat{\boldsymbol{i}}+x\,e^{y+2z}\,\hat{\boldsymbol{j}}+2x\,e^{y+2z}\,\hat{\boldsymbol{k}}$

d) $\boldsymbol{F}(x,y,z)=y\sin(z)\,\hat{\boldsymbol{i}}+x\sin(z)\,\hat{\boldsymbol{j}}+x\,y\cos(z)\hat{\boldsymbol{k}}$

11. Considere la siguiente integral de línea $\int_C (4x+2y-z)\,dx+(2x-2y+z)\,dy+(y-x+2z)\,dz$, demuestre que la integral no depende de la trayectoria seleccionada.

12. Sea $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\sin(yz)\hat{\boldsymbol{i}}+x\,z\cos(yz)\,\hat{\boldsymbol{j}}+\left(xy\cos(yz)+e^z\right)\hat{\boldsymbol{k}}$

a) Probar que el campo vectorial es conservativo

b) Encuentre una función potencial para $\boldsymbol{F}$

c) Calcule la integral $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ donde C es la curva que une los puntos $(0,0,0)$ y $(2,1/2,\pi)$

13. Determine la circulación del campo $\boldsymbol{F}(x,y)=2xy^3\,\hat{\boldsymbol{i}}+x^2\,\hat{\boldsymbol{j}}$ donde C es la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ recorrida en sentido anti horario.

14. Encuentre la circulación y el flujo del campo $\boldsymbol{F}(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\hat{\boldsymbol{i}}+\ln\left(x^2+y^2\right)\hat{\boldsymbol{j}}$ donde C es el cuadrado delimitado en el primer octante por las rectas $x=1$ e $y=1$

15. Utilice el Teorema de Green para calcular la circulación bajo las condiciones indicadas:

a) $\boldsymbol{F}(x,y)=\dfrac{x}{1+y^2}\,\hat{\boldsymbol{i}}+\tan^{-1}(y)\,\hat{\boldsymbol{j}}$ siendo C la circunferencia $x^2+y^2=1$ recorrida de forma horaria

b) $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(x+e^x\sin(y)\right)\hat{\boldsymbol{i}}+\left(x+e^x\cos(y)\right)\hat{\boldsymbol{j}}$ siendo C el lazo derecho de la lemniscata $r^2=\cos(2\theta)$