1.- $\bar{p} = 34.08$

$\bar{d} = 34.8238$

$p(t) = 30 \cdot e^{(a_1 t)}$

$d(t) = 4 \cdot e^{-(B_1 t)}$

	p(t)	d(t)
1907	21.4	13
1908	22	8.3

p(t)	d(t)
21.4	13
22	8.3

$p(7) = 30e^{7a_1} = 21.4$

$p(8) = 30e^{8a_1} = 22$

$e^{7a_1} = .7\overline{133}$

$e^{8a_1} = .7\overline{33}$

$e^{7a_1} \cdot e^{a_1} = .7\overline{33}$

$.7\overline{133} \cdot e^{a_1} = .7\overline{33}$

$e^{a_1} = 1.027$

$a_1 = \ln|1.0276|$

$= .02722$

$d(7) = 4e^{-7B_1} = 13$

$d(8) = 4e^{-8B_1} = 8.3$

$e^{-7B_1} = 4.\overline{66}$

$e^{-8B_1} = 2.075$

$e^{-B_1} = \frac{2.075}{4.66}$

$e^{-B_1} = .4452$

$B_1 = -\ln|.4452|$

$= .8$

$\bar{p} = \frac{B_1}{B_2}$

$B_2 = \frac{B_1}{\bar{p}} = \frac{.8}{34.08} = .008$

$\bar{d} = \frac{a_1}{a_2}$ $\quad \bar{d} = 20.1\overline{66}$

Resultado correcto

$a_2 = \frac{.02}{34.8238} = .0005$ $\quad a_2 = \frac{.02}{20.16} = .0009$

2.-

Fase 1 – Actividad 2 - Estudiar la estabilidad del sistema.

Considerando las ecuaciones de Lotka-Volterra, donde p(t) representa las presas y d(t) los depredadores:

$$\{p'(t) = \alpha_1 p(t) - \alpha_2 p(t)d(t)\ d'(t) = -\beta_1 d(t) + \beta_2 p(t)d(t)$$

para estudiar la estabilidad hay que "linerizar" las ecuaciones en un entorno de los puntos de equilibrio. Los puntos de equilibrio son $P_1=(p,d)=(0,0)$ y $P_2=(p,d)=(\beta_1/\beta_2, \alpha_1/\alpha_2)$. Considerando las funciones:

$$f(p,d) = \alpha_1 p(t) - \alpha_2 p(t)d(t)$$

$$g(p,d) = -\beta_1 d(t) + \beta_2 p(t)d(t)$$

construya la matriz Jacobiana como:

$$J(p,q) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial g}{\partial x}\ \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

Calculando las derivadas parciales. Una vez escrita la matriz en función de p(t) y d(t), calcule la matriz Jacobiana en los puntos de equilibrio, J(0,0) y $J(\beta_1/\beta_2, \alpha_1/\alpha_2)$.

Para estas dos matrices calcule los eigenvalores y eigenvectores. En base a los valores de los eigenvalores, clasifique el tipo de punto crítico en base a los criterios siguientes:

1. Si λ1 < λ2 < 0, entonces (x0, y0) es un nodo asintóticamente estable.
2. Si λ1 > λ2 > 0, entonces (x0, y0) es un nodo inestable.
3. Si λ1 < 0 < λ2, entonces (x0, y0) es un punto de silla.
4. Si λ1 no es real y Re(λ1) < 0, entonces (x0, y0) es un foco asintóticamente estable.
5. Si λ1 no es real y Re(λ1) > 0, entonces (x0, y0) es un foco inestable.
6. Si los autovalores son imaginarios puros el punto crítico es un centro. Las trayectorias son curvas cerradas que rodean al origen, que en general tienen forma de elipses, de modo que ninguna trayectoria tiende a él cuando t → +∞ o t → −∞. Por ello, el punto crítico es estable, pero no asintóticamente estable.

3:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\beta_1 y + \beta_2 xy}{a_1 x - a_2 xy}$$

$$dy = \frac{(-\beta_1 + \beta_2 x)y}{(a_1 - a_2 y)x} dx$$

$$\frac{(a_1 - a_2 y)}{y} dy = \frac{(-\beta_1 + \beta_2 x)}{x} dx$$

$$\left(\frac{a_1}{y} - a_2\right) dy = \left(-\frac{\beta_1}{x} + \beta_2\right) dx$$

$$\left(\frac{.4}{y} - .1\right) dy = \left(-\frac{.8}{x} + .02\right) dx$$

$$\underbrace{a_1 \ln|y| - a_2 y}_{G(y)} = \underbrace{-\beta_1 \ln|x| + \beta_2 x}_{F(x)} + C$$

$$.4 \ln|y| - .01 y = -.8 \ln|x| + .02x + C$$

$$\left(\frac{.4}{y} - .1\right) dy = \left(-\frac{.8}{x} + .02\right) dx$$

$.4 - .1y = 0$ $\quad$ $-.8 + .02x = 0$

$-.1y = -.4$ $\quad$ $.02x = .8$

$y = \frac{.4}{.01} = 40$ $\quad$ $x = \frac{.8}{.02} = 40$

$(40, 40)$

Máximo y mínimo

Curvas de fase (elipses concentricas) Pag. 494

$$\frac{u^2}{b_1 a_2^2} + \frac{v^2}{a_1 b_2^2} = c^2$$

$$\frac{x^2}{.00008 \cdot c^2} + \frac{y^2}{.00016 \cdot c^2} = 1$$

$a_1 = .4$ $a_2 = .01$ $B_1 = .8$ $B_2 = .02$

Pag. 493 (ED aplicadas → Murray R. Spiegel)

$$x = \frac{b_1}{b_2} + c_1 \cos\sqrt{a_1 b_1}\, t + c_2 \sin\sqrt{a_1 b_1}\, t$$

$$y = \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_2}{a_2}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\left(c_1 \sin\sqrt{a_1 b_1}\, t - c_2 \cos\sqrt{a_1 b_1}\, t\right)$$

$$x = \frac{.8}{.02} + c_1 \cos\sqrt{.4 \cdot .8}\, t + c_2 \sin\sqrt{.4 \cdot .8}\, t$$

$$= 40 + c_1 \cos\sqrt{.32}\, t + c_2 \sin\sqrt{.32}\, t$$

$$y = \frac{.4}{.01} + \frac{.02}{.01}\sqrt{\frac{.4}{.8}}\left(c_1 \sin\sqrt{.4 \cdot .8}\, t - c_2 \cos\sqrt{.4 \cdot .8}\, t\right)$$

$$= 40 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(c_1 \sin\sqrt{.32}\, t - c_2 \cos\sqrt{.32}\, t\right)$$

$$40 + \sqrt{2}\left(c_1 \sin\sqrt{.32}\, t - c_2 \cos\sqrt{.32}\, t\right)$$

Número de presas (x)

Min: (6.942, 38.586)

Max: (1.388, 41.414)

(t, x)

Número de depredadores (y)

Min: (4.165, 38)

Max: (9.719, 42)

(t, y)

Falta determinar la frecuencia

Fase 1 – Actividad 4 - Cálculo del número promedio de depredadores y presas.

Considerando las ecuaciones de Lotka-Volterra, donde p(t) representa las presas y d(t) los depredadores:

$$\{p'(t) = \alpha_1 p(t) - \alpha_2 p(t)d(t)\ d'(t) = -\beta_1 d(t) + \beta_2 p(t)d(t)$$

Considerando que:

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = (ln(p(t))' = \alpha_1 - \alpha_2 d(t)$$

Encontrar una expresión para d(t).

El valor promedio sobre un intervalo [0,T] es dado por:

$$\frac{1}{T}\int_0^T d(t)dt$$

Calcular el valor promedio del número de depredadores. Con un razonamiento similar, encontrar en valor promdedio del número de presas (promedio de p(t)).

Expresión

$$(\ln p(t))' = a_1 - a_2 dt$$

$$\frac{a_1}{a_2}$$

$$dt = \frac{(\ln p(t))' - a_1}{-a_2}$$

$$d(t) = \frac{a_1}{a_2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{a_1}{a_2} dt$$

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot T$$

$$\frac{a_1}{a_2}$$

Expresión

$$(\ln d(t))' = -\beta_1 + \beta_2 pt$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$p(t) = \frac{(\ln d(t))' + \beta_1}{\beta_2}$$

$$p(t) = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot T$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2}$$