

# Esercizi Fondamenti dell'Informatica

`federico.serafini@studenti.unipr.it`

2021/2022

## Sommario

Lo scopo principale di questo testo è di fornire alcune possibili soluzioni a una parte degli esercizi presenti nel libro di testo<sup>1</sup> del corso di Fondamenti dell'Informatica. L'autore di questo documento è uno studente che ha cercato di seguire quanto più possibile *the KISS principle* con l'intenzione di rivolgersi ad un pubblico di studenti.

**Attenzione:** vista l'inesperienza dell'autore è possibile che ci siano alcuni errori e/o imprecisioni, per uno studio adeguato della materia è fondamentale riferirsi principalmente al materiale fornito dal docente e ad i libri di testo consigliati, quindi consultare con cautela questo elaborato.

---

<sup>1</sup>A. Dovier, R. Giacobazzi. Fondamenti dell'informatica: Linguaggi formali, calcolabilità e complessità. Bollati Boringhieri, ISBN9788833933795, 2020.

# Indice

<b>1</b>	<b>Nozioni Preliminari</b>	<b>4</b>
1.1	Definizioni, Teoremi e Lemmi . . . . .	4
1.2	Principio di Induzione Matematica . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Alfabeti e Linguaggi</b>	<b>7</b>
2.1	Definizioni, Teoremi e Lemmi . . . . .	7
2.2	Esercizi . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Automi</b>	<b>22</b>
3.1	Rappresentazione dei Linguaggi . . . . .	22
3.2	DFA: automi a stati finiti deterministici . . . . .	23
3.2.1	Definizioni, Teoremi e Lemmi . . . . .	24
3.2.2	Esercizi . . . . .	29
3.3	NFA: automi a stati finiti non deterministici . . . . .	45
3.3.1	Definizioni, Teoremi e Lemmi . . . . .	45
3.3.2	Costruzione per sottoinsiemi . . . . .	46
3.3.3	Esercizi . . . . .	49
3.4	$\epsilon$ -NFA: automi a stati finiti non deterministici con $\epsilon$ -transizioni . . . . .	51
3.4.1	Definizioni, Teoremi e Lemmi . . . . .	52
3.4.2	Eliminazione delle $\epsilon$ -transizioni . . . . .	57
3.4.3	Esercizi . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Espressioni Regolari</b>	<b>63</b>
4.1	Operazioni su Linguaggi . . . . .	63
4.2	Espressioni Regolari . . . . .	68
4.2.1	Definizioni, Teoremi e Lemmi . . . . .	68
4.2.2	Costruzione di Ken Thompson . . . . .	72
4.3	Esercizi . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Linguaggi Regolari</b>	<b>91</b>
5.1	Relazioni e Classi di Equivalenza . . . . .	91
5.1.1	Minimizzazione di DFA . . . . .	95
5.1.2	Esercizi . . . . .	98
5.2	Risultati di decidibilità . . . . .	100
5.2.1	Esercizi . . . . .	101
5.3	Risultati di Decidibilità . . . . .	104

5.4	Pumping Lemma . . . . .	104
5.4.1	Esercizi . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Grammatiche</b>	<b>114</b>
6.1	Grammatiche Libere dal Contesto . . . . .	114
6.1.1	Esercizi . . . . .	117
6.1.2	Alberi di derivazione . . . . .	122
6.2	Forme Normali . . . . .	125
6.2.1	Eliminazione variabili improduttive . . . . .	125
6.2.2	Eliminazione simboli irraggiungibili . . . . .	128
6.2.3	Eliminazione delle $\epsilon$ -produzioni . . . . .	131
6.2.4	Eliminazione Produzioni Unitarie . . . . .	133

# 1 Nozioni Preliminari

## 1.1 Definizioni, Teoremi e Lemmi

**Definizione 1.1** (Cardinalità di un insieme). *Sia  $S$  un insieme, la cardinalità di  $S$  si indica con  $|S|$  e corrisponde al numero di elementi in  $S$ .*

**Esempio.** Sia  $S = \{0, 1\}$ ,  $|S| = 2$ .

**Definizione 1.2** (Insieme enumerabile). *Sia  $S$  un insieme,  $S$  è enumerabile se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di  $S$  e gli elementi dell'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ .*

Enumerare un insieme significa quindi stabilire un primo, secondo, terzo, etc. elemento. Notare che, essendo  $\mathbb{N}$  un insieme infinito, se un insieme  $S$  è enumerabile allora  $S$  è anche un insieme infinito.

**Definizione 1.3** (Cardinalità insiemi enumerabili). *La cardinalità degli insiemi enumerabili si indica con  $\aleph_0$  (aleph zero).*

Sia  $S$  un insieme, allora:

- $S$  è finito se  $|S| < \aleph_0$ ,
- $S$  è enumerabile se  $|S| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ .

In quanto informatici, siamo interessati agli insiemi enumerabili perché i dati in informatica, essendo rappresentati da numeri, sono enumerabili.

**Definizione 1.4** (Insieme delle parti). *Sia  $S$  un insieme, l'insieme delle parti o insieme potenza di  $S$  si indica con  $\mathcal{P}(S)$  ed è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di  $S$ .*

**Esempio.** Sia  $S = \{0, 1\}$ , allora  $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ .

**Teorema 1.1** (Cantor). *Sia  $S$  un insieme, allora*

$$\begin{aligned}|S| &< |\mathcal{P}(S)|, \\ |\mathcal{P}(S)| &= 2^{|S|}, \\ |\mathbb{N}| = \aleph_0 &< |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|.\end{aligned}$$

## 1.2 Principio di Induzione Matematica

**Definizione induttiva.** La definizione per induzione viene utilizzata quando si vuole definire un “qualcosa”  $Q$  che è parametrico sui naturali. La definizione è composta da:

1. *caso base*,  $Q(0) = k_0$  definisce il valore  $k_0$  che assume  $Q$  nel caso base che spesso si indica con 0;
2. *passo induttivo*,  $Q(n) = k_n \implies Q(n+1) = f(k_n)$  definisce  $Q(n+1)$  in termini di  $Q(n)$  che è ipotizzato vero.

**Esempio.** Cos'è un numero naturale? Definiamo l'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali definendo in maniera induttiva gli elementi che vi fanno parte.

**Caso base:**  $0 \in \mathbb{N}$ .

**Passo induttivo:**  $\forall n \in U : n \in \mathbb{N} \implies n+1 \in \mathbb{N}$ .

Nel caso base della definizione induttiva di  $\mathbb{N}$  diciamo che è sempre vero che 0 è un numero naturale, il caso base non fa riferimento a nessun'altra nozione. Il passo induttivo è tipicamente in forma di implicazione: se un elemento  $n$  appartiene ad  $\mathbb{N}$ , allora anche il suo successore appartiene ad  $\mathbb{N}$ . Se conosciamo il valore per  $n$  possiamo ricavare il valore anche di  $n+1$ , in altre parole,  $n+1$  è definito in termini di  $n$ .

Per definire le implicazioni nei linguaggi di programmazione si utilizza la *notazione semantica* in cui si utilizza una linea orizzontale per separare le *precondizioni* o *premesse* dalle *conclusioni*:

$$\text{Caso base: } \frac{}{0 \in \mathbb{N}}$$

$$\text{Passo induttivo: } \frac{n \in \mathbb{N}}{n+1 \in \mathbb{N}}$$

**Dimostrazione per induzione.** Una dimostrazione per induzione si utilizza quando si vuole mostrare che una certa proprietà  $P$  vale per tutti i numeri naturali. Si procede mostrando che la proprietà è vera per il caso base 0. Poi si mostra che se la proprietà è vera per  $n$  allora è vera anche per  $n+1$ .

Caso base:  $\frac{}{P(0)}$

Passo induttivo:  $\frac{P(n)}{P(n+1)}$

1. *Caso base:*  $P(0)$ , mostriamo che  $P$  vale nel caso base indicato con 0;
2. *Passo induttivo:*

$$\underbrace{P(n)}_{\text{antecedente}} \stackrel{?}{\implies} \underbrace{P(n+1)}_{\text{conseguente}}.$$

Il passo induttivo è tipicamente in forma di implicazione e la proposizione antecedente prende il nome di *ipotesi induttiva* proprio perché viene ipotizzata vera. A questo punto si deve mostrare che vale l'implicazione; ipotizzando vero l'antecedente è necessario mostrare che è vero anche il conseguente.

Quella vista fino ad ora viene detta *induzione matematica semplice*. Esistono anche *induzione matematica completa* ed *induzione strutturale*.

**Induzione Matematica completa.** L'induzione matematica completa ha una ipotesi induttiva più forte: dice che una certa proprietà  $P(m)$  vale per  $m$  e anche per tutti i suoi predecessori, quindi da 0 a  $m$  compreso. Non è più potente dell'induzione semplice ma a volte è più conveniente da utilizzare.

**Induzione strutturale.** Il principio su cui si basa l'induzione strutturale è il seguente: *per mostrare che una proprietà  $P$  è vera per tutte le espressioni, è sufficiente mostrare che è vera per tutte le espressioni atomiche ed è preservata da tutti i metodi utilizzati per generare nuove espressioni a partire da quelle esistenti.*

Proseguire nella lettura per esempi di induzione semplice, completa e strutturale.

## 2 Alfabeti e Linguaggi

### 2.1 Definizioni, Teoremi e Lemmi

**Definizione 2.1** (Simbolo). *Un simbolo è un'entità primitiva astratta non meglio definita.*

**Esempio.** Tra i simboli troviamo ad esempio: lettere, caratteri numerici, ideogrammi, bandiere per segnalazioni nautiche.

**Notazione.** Utilizzeremo  $a, b, c, d$  (prime lettere del nostro alfabeto) per indicare simboli.

**Definizione 2.2** (Alfabeto). *Un alfabeto (spesso indicato con  $\Sigma$ ) è un insieme finito di simboli.*

La finitezza dell'alfabeto è necessaria per poter distinguere i simboli gli uni con gli altri in tempo finito e con una quantità finita di memoria cosa che non sarebbe possibile se l'alfabeto preso in considerazione fosse infinito.

**Esempio.**  $\Sigma_{bin} = \{0, 1\}$ ,  $\Sigma_{hexa} = \{1, 2, \dots, 9, A, B, \dots, F\}$  sono alfabeti.

**Definizione 2.3** (Definizione informale di stringa). *Una stringa è una sequenza finita di simboli giustapposti (posti uno dietro l'altro).*

**Esempio.** Se  $a, b, c$  sono simboli,  $abcba$  è una stringa.

**Osservazione 2.1** (Definizione formale di stringa). *E' possibile definire formalmente una stringa di lunghezza  $n \in \mathbb{N}$  per mezzo di una funzione parziale  $x : \{0, \dots, n-1\} \mapsto \Sigma$  definita come*

$$x(i) := \begin{cases} a_i, & \text{se } 0 \leq i < n, x = a_0 \cdots a_{n-1}; \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Definizione 2.4** (Definizione informale di lunghezza di una stringa). *Sia  $x$  una generica stringa, la sua lunghezza si indica con  $|x|$  e corrisponde al numero di occorrenze dei simboli che la compongono. C'è una sola stringa di lunghezza 0, la stringa vuota  $\epsilon$ .*



**Esempio.** Sia la stringa  $x = aba$ .  $|x| = |aba| = 3$ .

**Osservazione 2.2** (Definizione formale di lunghezza di una stringa). *E' possibile definire formalmente la lunghezza di una stringa per mezzo di una funzione totale. Sia  $x$  una stringa.  $|x| : \Sigma^* \mapsto \mathbb{N}$  è definita come*

$$|x| := \begin{cases} 0, & \text{se } \forall i \in \mathbb{N} : x(i) = \uparrow; \\ 1 + \max\{i \in \mathbb{N} \mid x(i) = \downarrow\} & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

Notare che come dominio è stato messo  $\Sigma^*$ . Dal momento che l'operazione "lunghezza di una stringa" prende come parametri stringhe, possiamo già intuire che  $\Sigma^*$  è un insieme di stringhe. Proseguire nella lettura per ulteriori approfondimenti.

**Osservazione 2.3** (Definizione ricorsiva della lunghezza di una stringa). *Sia  $x \in \Sigma^*$ , un'altra definizione formale (equivalente) per la funzione "lunghezza di una stringa"  $|x| : \Sigma^* \mapsto \mathbb{N}$  è la seguente:*

$$|x| := \begin{cases} 0, & \text{se } x = \epsilon; \\ 1 + |y|, & \text{se } x = ay. \end{cases}$$

**Definizione 2.5** (Prefisso, suffisso, sottostringa). *Sia  $x = a_1 \cdots a_n$  una stringa di lunghezza  $n$ :*

- *prefisso:  $a_1 \cdots a_i$ , con  $1 \leq i \leq n$ ;*
- *suffisso:  $a_i \cdots a_n$ , con  $1 \leq i \leq n$ ;*
- *sottostringa:  $a_i \cdots a_j$ , con  $1 \leq i \leq j \leq n$ ;*
- *$\epsilon$  è prefisso, suffisso e sottostringa di ogni stringa, compresa di se stessa.*

*Quando i prefissi o suffissi di una stringa non sono uguali alla stringa stessa, vengono detti propri.*

**Esempio.** Sia  $abc$  una stringa, i suoi prefissi sono  $\epsilon$ ,  $a$ ,  $ab$ ,  $abc$ , mentre i suffissi sono  $\epsilon$ ,  $c$ ,  $bc$ ,  $abc$ ,

**Definizione 2.6** (Definizione informale di concatenazione). *Siano  $x, y$  stringhe, la loro concatenazione si indica con  $x \cdot y$  ed è la stringa ottenuta facendo seguire alla prima la seconda.*

Come accade per la moltiplicazione nell'aritmetica, spesso il ‘ $\cdot$ ’ viene omissso e la concatenazione tra due stringhe  $x$  e  $y$  viene semplicemente indicata con  $xy$ .

**Osservazione 2.4** (Definizione formale di concatenazione). *Siano  $x, y \in \Sigma^*$ . E' possibile definire formalmente la concatenazione tra stringhe  $xy$  per mezzo di una funzione parziale  $(xy) : \{ 0, \dots, |x + y| - 1 \} \mapsto \mathbb{N}$  definita come*

$$(xy)(i) := \begin{cases} x(i), & \text{se } 0 \leq i < |x|; \\ y(i - |x|), & \text{se } |x| \leq i < |xy|; \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Osservazione 2.5** (Definizione induttiva di concatenazione). *Siano  $x, y \in \Sigma^*$ , è possibile definire la concatenazione  $xy$  per induzione strutturale su  $y$ .*

$$\text{Caso base: } \frac{y = \epsilon}{x\epsilon = x}$$

$$\text{Passo induttivo: } \frac{y = wa}{x(wa) = (xw)a}$$

**Lemma 2.1** (Proprietà associativa della concatenazione). *Siano  $x, y, z$  tre stringhe, allora*

$$(xy)z = x(yz).$$

*Dimostrazione.* Siano  $x, y, z \in \Sigma^*$ . Mostriamo che  $(xy)z = x(yz)$  per induzione sulla strutturale su  $z$  utilizzeremo quindi la definizione induttiva della concatenazione.

**Caso base:** se  $z = \epsilon$  abbiamo che

$$\begin{aligned} (xy)z &= (xy)\epsilon & [z = \epsilon] \\ &= xy & [\text{def. concat. (caso base)}] \\ &= x(y\epsilon) & [\text{def. concat. (caso base)}]. \end{aligned}$$

**Implicazione:** siano  $u, v, w \in \Sigma^*$ ,

$$(uv)w = u(vw) \stackrel{?}{\implies} (uv)wa = u(vwa).$$

**Passo induttivo:** se  $z = wa$  abbiamo che

$$\begin{aligned}
(xy)z &= (xy)(wa) & [z = wa] \\
&= ((xy)w)a & [\text{def. concat.}] \\
&= (x(yw))a & [\text{ip. ind.}] \\
&= x((yw)a) & [\text{def. concat.}] \\
&= x(y(wa)) & [\text{def. concat.}] \\
&= x(yz) & [z = wa].
\end{aligned}$$

□

*Dalla validità del lemma segue che*

$$(xy)z = x(yz) = xyz.$$

**Lemma 2.2** (Identità della concatenazione). *Sia  $x$  una stringa, allora*

$$\epsilon x = x = x \epsilon.$$

*Dimostrazione.* Sia  $x$  una generica stringa e  $i \in \mathbb{N}$ . Mostriamo che  $(\epsilon x)(i) = x(i) = (x \epsilon)(i)$ .

$$\begin{aligned}
(\epsilon x)(i) &= \begin{cases} \epsilon(i), & \text{se } 0 \leq i < |\epsilon|; \\ x(i - |\epsilon|), & \text{se } |\epsilon| \leq i < |\epsilon| + |x|; \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases} & [\text{def. concat.}] \\
&= \begin{cases} \epsilon(i), & \text{se } 0 \leq i < 0; \\ x(i - 0), & \text{se } 0 \leq i < 0 + |x|; \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases} & [|\epsilon| = 0] \\
&= \begin{cases} x(i), & \text{se } 0 \leq i < |x|; \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases} & [\nexists i \in \mathbb{N} . 0 \leq i < 0] \\
&= x(i). & [\text{def. stringa}].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x\epsilon)(i) &= \begin{cases} x(i), & \text{se } 0 \leq i < |x|; \\ \epsilon(i - |x|), & \text{se } |x| \leq i < |x| + |\epsilon|; \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases} & [\text{def. concat.}] \\
&= \begin{cases} x(i), & \text{se } 0 \leq i < |x|; \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases} & [\forall i \in \mathbb{N} : \epsilon[i] = \uparrow] \\
&= x(i) & [\text{def. stringa}].
\end{aligned}$$

□

**Definizione 2.7** (Stringhe su un alfabeto). *Sia  $\Sigma$  un alfabeto, le stringhe su  $\Sigma$  sono le stringhe di lunghezza  $n \in \mathbb{N}$  (arbitraria ma finita) formate dalla giustapposizione dei simboli che compaiono in  $\Sigma$ , dunque una generica stringa  $x$  su  $\Sigma$  è definita come:*

$$x = a_1 a_2 \cdots a_n, \text{ con } a_i \in \Sigma, n \geq 0.$$

**Definizione 2.8** (Insieme di tutte le stringhe su un alfabeto). *Sia  $\Sigma$  un alfabeto, l'insieme di tutte le stringhe su  $\Sigma$ , denotato con  $\Sigma^*$  è dunque:*

$$\Sigma^* := \{ a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in \Sigma, n \geq 0 \} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ 0, \dots, n-1 \} \mapsto \Sigma.$$

*Siano  $\Sigma$  un alfabeto e  $n \in \mathbb{N}$ , è possibile dare una definizione di forma induttiva per  $\Sigma^n$ :*

$$\Sigma^n := \begin{cases} \{ \epsilon \}, & \text{se } n = 0; \\ \{ a \cdot x \mid a \in \Sigma, x \in \Sigma^{n-1} \}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Osservazione 2.6.** *Notare che  $\Sigma^n$  è l'insieme formato da tutte le stringhe di lunghezza  $n$  su  $\Sigma$ .*

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Sigma^n : |x| = n.$$

Procediamo quindi per induzione matematica semplice sull'esponente  $n$  di  $\Sigma$  e di conseguenza sulla lunghezza delle stringhe, con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** Se  $n = 0$  dobbiamo mostrare che  $|x| = 0$ .

$$\begin{aligned}\Sigma^n &= \Sigma^0 & [n = 0] \\ &= \{ \epsilon \} & [\text{def. } \cdot^0].\end{aligned}$$

Sia  $x \in \Sigma^n$ , allora  $x = \epsilon$ ,  $|x| = 0 = n \checkmark$ .

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall u \in \Sigma^m : |x| = m \stackrel{?}{\implies} \forall v \in \Sigma^{m+1} : |v| = m + 1.$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned}\Sigma^n &= \Sigma^{m+1} & [n = m + 1] \\ &= \{ ax \mid a \in \Sigma, x \in \Sigma^m \} & [\text{def. } \cdot^n].\end{aligned}$$

Sia  $y \in \Sigma^{m+1}$ , dunque  $y = aw$  con  $a \in \Sigma, w \in \Sigma^m$ .

$$\begin{aligned}|y| &= |a| + |w| & [y = aw] \\ &= 1 + |w| & [a \in \Sigma] \\ &= 1 + m \checkmark & [w \in \Sigma^m, \text{ ip. ind.}].\end{aligned}$$

□

*Secondo quanto appena visto, è possibile dare un'altra definizione per  $\Sigma^*$ :*

$$\Sigma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

**Esempio.** Siano  $\Sigma = \{ 0 \}, n = 3$ , allora

$$\Sigma^n = \{ 000 \}, \Sigma^* = \{ \epsilon, 0, 00, 000, 0000, \dots \}.$$

Siano  $\Sigma = \{ 0, 1 \}, n = 2$ , allora

$$\Sigma^n = \{ 00, 01, 10, 11 \}, \Sigma^* = \{ \epsilon, 0, 1, 00, 01, 11, 000, \dots \}.$$

**Definizione 2.9** (Linguaggio formale). *Sia  $\Sigma$  un alfabeto, un linguaggio formale (spesso indicato con  $L$ ), è un insieme formato dalle stringhe su  $\Sigma$ , quindi vale che:*

$$L \subseteq \Sigma^*.$$

Notare che:

- $\Sigma^*$  è esso stesso un linguaggio, il linguaggio formato da *tutte* le stringhe su  $\Sigma$ ;
- essendo  $\emptyset$  sottoinsieme di qualsiasi altro insieme,  $\emptyset \subseteq \Sigma^*$  dunque  $\emptyset$  è un linguaggio su qualsiasi alfabeto;
- essendo  $\epsilon$  la stringa nulla su qualsiasi alfabeto  $\Sigma$ ,  $\{\epsilon\} \subseteq \Sigma^*$  dunque  $\{\epsilon\}$  è un linguaggio su qualsiasi alfabeto.

**Osservazione 2.7.** *Sia  $\Sigma$  un alfabeto. Sia  $L \subseteq \Sigma^*$  il linguaggio formato dall'insieme di tutte le stringhe di lunghezza 1 su  $\Sigma$ , allora*

$$L \cong \Sigma, \text{ (} L \text{ e } \Sigma \text{ sono isomorfi)}$$

*ed è possibile dare una definizione induttiva di  $\Sigma^n$  equivalente a quella già vista in precedenza:*

$$\text{Caso base: } \frac{}{\Sigma^0 = \{\epsilon\}}$$

$$\text{Passo induttivo: } \frac{\Sigma^n = L}{\Sigma^{n+1} = \Sigma \cdot L}$$

*da cui segue da definizione di concatenazione di due linguaggi  $L, M$*

$$L \cdot M = \{x \cdot y \mid x \in L, y \in M\}.$$

## 2.2 Esercizi

### Esercizio 2.1

Definire i predicati  $\text{prefix}(x, y)$ ,  $\text{suffix}(x, y)$ ,  $\text{substr}(x, y)$  su stringhe.

**Soluzione.**

$$\text{prefix}(x, y) \begin{cases} \text{true,} & \text{se } x = \epsilon; \\ \text{true,} & \text{se } \forall i, 0 \leq i < |x| : x(i) = y(i); \\ \text{false,} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\text{suffix}(x, y) \begin{cases} \text{true,} & \text{se } x = \epsilon; \\ \text{true,} & \text{se } \forall i, 0 \leq i < |x| : x(i) = y(i + k), k = |y| - |x|; \\ \text{false,} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\text{substr}(x, y) \begin{cases} \text{true}, & \text{se } x = \epsilon; \\ \text{true}, & \text{se } \exists k, 0 \leq k < |y| \cdot \forall i, 0 \leq i < |x| : x(i) = y(i+k); \\ \text{false}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

## Esercizio 2.2

Sia  $x$  una stringa con  $|x| = n$ . Qual'è il numero di prefissi, suffissi e sottostringhe di  $x$ ? Quanti sono i prefissi dei suoi suffissi? E i suffissi dei suoi prefissi?

**Soluzione.** Scegliamo una stringa di esempio  $x = abc$  ed elenchiamo i prefissi:

$$\epsilon, a, ab, abc.$$

Con  $|x| = 3$  otteniamo 4 prefissi, con una generica stringa  $s$  di lunghezza  $n$  otteniamo  $|s| + 1$  prefissi. Ragionamento analogo si applica ai suffissi. Per quanto riguarda le sottostringhe dobbiamo ragionare un po' di più, elenchiamo le sottostringhe:

- $\epsilon$  (1 sottostringa di lunghezza 0);
- $abc$  (1 sottostringa di lunghezza 3);
- $ab, bc$  (2 sottostringhe di lunghezza 2);
- $a, b, c$  (3 sottostringhe di lunghezza 1).

Notiamo che, fatta eccezione per la sottostringa  $\epsilon$ , il numero di sottostringhe trovate diminuisce quando la lunghezza delle sottostringhe cercate aumenta. Il numero di sottostringhe di una stringa di lunghezza 3 é  $1 + 1 + 2 + 3$ . Generalizzando ad una stringa  $x$  di lunghezza  $n$ , il numero delle sue sottostringhe è la somma dei numeri naturali da 1 a  $n$ , incrementata di 1, ovvero, se chiamiamo  $\text{substr}(x)$  l'insieme formato da tutte e sole le sottostringhe di  $x$  abbiamo:

$$|\text{substr}(x)| = 1 + \sum_{i=1}^{|x|} i = 1 + \frac{|x|(|x| + 1)}{2} \quad [\text{Gauss}].$$

Questa è la nostra ipotesi, proviamo a dimostrarne la validità con una dimostrazione formale per induzione.

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Sigma^n : |\text{substr}(x)| = 1 + \sum_{i=1}^n i$$

Dimostreremo per induzione matematica semplice sulla lunghezza della stringa  $n$  con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0 = |x|$  abbiamo  $x = \epsilon$ . La stringa  $\epsilon$  ha solo se stessa come sottostringa quindi

$$\begin{aligned} |\text{substr}(x)| &= |\text{substr}(\epsilon)| & [n = 0 = |x|] \\ &= 1 \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{|x|} i \checkmark & [|x| = n = 0]. \end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall u \in \Sigma^m : |\text{subs}(u)| = 1 + \sum_{i=1}^m i \stackrel{?}{\implies} \forall v \in \Sigma^{m+1} : |\text{subs}(v)| = 1 + \sum_{i=1}^{m+1} i.$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1 = |y|$  abbiamo  $y = wa$ , con  $|w| = m$  e vale



che

$$\begin{aligned}
|\text{substr}(y)| &= |\text{substr}(wa)| && [y = wa] \\
&= |\text{substr}(w)| + |\text{suffix}(wa)| - 1 && [-1 \text{ rimuove } \epsilon \text{ duplicato}] \\
&= 1 + \sum_{i=1}^m i + |\text{suffix}(wa)| - 1 && [|w| = m, \text{ ip. ind.}] \\
&= 1 + \frac{m(m+1)}{2} + |\text{suffix}(wa)| - 1 && [\text{Gauss}] \\
&= 1 + \frac{m(m+1)}{2} + ((m+1) + 1) - 1 && [|wa| = m+1] \\
&= 1 + \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 \\
&= 1 + \frac{m(m+1) + 2m + 2}{2} && [m.c.m] \\
&= 1 + \frac{m^2 + m + 2m + 2}{2} \\
&= 1 + \frac{(m+1)(m+2)}{2} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{m+1} i \checkmark && [\text{Gauss}].
\end{aligned}$$

□

Quanti sono i suffissi dei prefissi e i prefissi dei suffissi? Prendiamo una stringa di esempio  $x = abc$  con lunghezza  $n = 3$ . Elenchiamo i suoi prefissi  $\epsilon, a, ab, abc$  con il relativo numero di suffissi (che sappiamo essere  $|x| + 1$ ):

- $abc : 3 + 1$  suffissi;
- $ab : 2 + 1$  suffissi;
- $a : 1 + 1$  suffissi;
- $\epsilon : 0 + 1$  suffissi.

Sommando i “+1” di ogni riga otteniamo  $|x| + 1$  perchè il numero di righe è proprio il numero di prefissi di  $x$  che è  $|x| + 1$ . Ciò che rimane è una somma

da 0 a  $|x|$ . Quindi, il numero di suffissi dei prefissi di una stringa  $x$  é

$$|x| + 1 + \sum_{i=1}^{|x|} i = \sum_{i=1}^{|x|+1} i.$$

Dimostrare formalmente per esercizio.

### Esercizio 2.3

Sia  $\Sigma \neq \emptyset$  un alfabeto, qual'è la cardinalità di  $\Sigma^n$ ? Dimostrare la propria affermazione.

**Soluzione.** Lavoriamo ad esempio con le stringhe binarie, quindi sia  $\Sigma = \{0, 1, \}$  il nostro alfabeto di riferimento, quindi  $|\Sigma| = 2$ . Con  $n$  bit disponibili (quindi stringhe lunghe  $n$ ) possiamo contare da 0 fino a  $2^n - 1$ , un totale di  $2^n$  elementi.

Preso un generico  $\Sigma \neq \emptyset$ , vediamo la lunghezza  $n$  delle stringhe come i bit disponibili, quindi con  $|\Sigma|$  simboli possiamo ottenere  $|\Sigma|^n$  stringhe di lunghezza  $n$ . Quindi ipotizziamo che:

$$|\Sigma^n| = |\Sigma|^n,$$

proviamo a dimostrarne la validità con una dimostrazione formale per induzione.

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\Sigma^n| = |\Sigma|^n.$$

Procederemo per induzione matematica semplice sull'esponente  $n$ , con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned} |\Sigma^n| &= |\Sigma^0| & [n = 0] \\ &= |\{\epsilon\}| & [\text{def. } \cdot^0] \\ &= 1 \\ &= |\Sigma|^0 & [\forall i \in \mathbb{N}, i^0 = 1] \\ &= |\Sigma|^n \checkmark & [n = 0]. \end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$|\Sigma^m| = |\Sigma|^m \stackrel{?}{\implies} |\Sigma^{m+1}| = |\Sigma|^{m+1}.$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} |\Sigma^n| &= |\Sigma^{m+1}| && [n = m + 1] \\ &= |\Sigma \cdot \Sigma^m| && [\text{def. } \cdot^n] \\ &= |\Sigma| |\Sigma^m| && [\text{def. concat., prop. potenze}] \\ &= |\Sigma| |\Sigma|^m && [\text{ip. ind.}] \\ &= |\Sigma|^{m+1} \checkmark && [\text{prop. potenze}] \end{aligned}$$

□

## Esercizio 2.4

Trovare gli alfabeti  $\Sigma$  per i quali l'insieme  $\Sigma^*$  è esso stesso un alfabeto.

**Soluzione.** Per definizione, un alfabeto è un insieme finito di simboli.  $\Sigma^*$  è l'insieme formato da tutte le stringhe di lunghezza arbitraria ma finita su  $\Sigma$ . Per ogni  $\Sigma \neq \emptyset$ , l'insieme  $\Sigma^*$  essendo infinito non può essere un alfabeto, l'unica eccezione è proprio  $\Sigma = \emptyset \implies \Sigma^* = \{\epsilon\}$ .

*Dimostrazione.* Utilizziamo le definizioni viste in questo capitolo per costruire una catena di relazioni (uguaglianze in questo caso) che parte da  $\Sigma^*$  ed arriva a  $\{\epsilon\}$ , ricordandoci che abbiamo posto  $\Sigma = \emptyset$  perché ad un certo

punto tornerà utile:

$$\begin{aligned}
\Sigma^* &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= \Sigma^0 \cup \bigcup_{i \geq 1} \Sigma^i && [0 \in \mathbb{N}] \\
&= \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i \geq 1} \Sigma^i && [\text{def. } \cdot^0] \\
&= \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i \geq 1} \{ax \mid a \in \Sigma, x \in \Sigma^{i-1}\} && [\text{def. } \cdot^i] \\
&= \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i \geq 1} \{ax \mid a \in \emptyset, x \in \Sigma^{i-1}\} && [\Sigma = \emptyset] \\
&= \{\epsilon\} \cup \emptyset && [\nexists a \in \emptyset] \\
&= \{\epsilon\} \checkmark && [\text{def. } \cup].
\end{aligned}$$

□

## Esercizio 2.5

Una definizione non induttiva di concatenazione è la seguente: siano  $i, j \in \mathbb{N}$ , siano  $x = a_1 \cdots a_i$  e  $y = b_1 \cdots b_j$  due stringhe su  $\Sigma^*$  allora  $xy = a_1 \cdots a_i b_1 \cdots b_j$ . Mostrare l'equivalenza con la definizione induttiva.

*Dimostrazione.* Mostriamo per induzione matematica semplice sulla lunghezza  $n$  della stringa  $y$  applicando la definizione induttiva, con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo

$$\begin{aligned}
xy &= x\epsilon && [|y| = n = 0] \\
&= x && [\text{def. ind. concat.}] \\
&= xb_1 \cdots b_n \checkmark && [|y| = n = 0].
\end{aligned}$$

**Implicazione:** siano  $u, v \in \Sigma^*$  tali che,

$$uv = ub_1 \cdots b_m \stackrel{?}{\implies} u(vb) = ub_1 \cdots b_m b.$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo  $y = wb$  con  $|w| = m$  e vale che

$$\begin{aligned}
 xy &= x(wb) & [|y| = n = m + 1] \\
 &= (xw)b & [\text{def. ind. concat.}] \\
 &= xb_1 \cdots b_m b & [\text{ip. ind.}] \\
 &= xb_1 \cdots b_{m+1}. \checkmark
 \end{aligned}$$

□

## Esercizio 2.6

Verificare che se  $\Sigma \neq \emptyset$ , allora  $\Sigma^*$  è numerabile.

**Soluzione.** Un insieme è enumerabile quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'insieme e l'insieme dei numeri naturali. Scegliamo un alfabeto di esempio su cui lavorare, sia  $\Sigma = \{a, b, c\}$ .  $\Sigma^*$  è l'insieme formato da tutte le stringhe su  $\Sigma$ , ovvero  $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, \dots\}$ . Ciò che vorremo fare è associare ad ogni elemento di  $\Sigma^*$  un numero naturale. Iniziamo enumerando le stringhe di lunghezza 0 (soltanto  $\epsilon$ ), procediamo poi con le stringhe di lunghezza 1, 2, etc. (se le stringhe lunghezza  $n$  sono più di una, occorre ordinarle secondo un qualche criterio, noi utilizzeremo l'ordine alfanumerico):

- $\epsilon \rightsquigarrow 0$ ;
- $a \rightsquigarrow 1, b \rightsquigarrow 2, c \rightsquigarrow 3$ ;
- $aa \rightsquigarrow 4, ab \rightsquigarrow 5, ac \rightsquigarrow 6, \dots, cc \rightsquigarrow 12$ ;
- $\dots$

Cerchiamo di formalizzare questo processo:  $\forall i \in \mathbb{N}$ , ordiniamo le stringhe  $x \in \Sigma^i$  per poi associare alla stringa in posizione  $j$ -esima dell'ordinamento il seguente numero naturale:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}, k=0}^{i-1} |\Sigma|^k + j - 1.$$

$\sum_{k=0}^{i-1} |\Sigma|^k$  corrisponde all'ultimo numero naturale associato al “passo”  $i - 1$  perché  $|\Sigma|^k$  corrisponde al numero di elementi nell'insieme  $\Sigma^k$ , facendo la somma dei  $|\Sigma|^k$ , con  $0 \leq k \leq i - 1$ , otteniamo il numero totale delle stringhe di lunghezza compresa tra 0 e  $i - 1$ . Il “-1” è perché vogliamo iniziare a contare da 0.

**Esempio.** Consideriamo  $\Sigma = \{a, b, c\}, k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}$  :

- $i = 0$ ,  
 $\Sigma^i = \Sigma^0 = \{\epsilon\}$  :  
  - $j = 1, \epsilon \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{i-1} |\Sigma|^k + j - 1 = \sum_{k=0}^{-1} |\Sigma|^k + j - 1 = j - 1 = 0$ .
- $i = 1$ ,  
 $\Sigma^i = \Sigma = \{a, b, c\}$  :  
  - $j = 1, a \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{i-1} |\Sigma|^k + j - 1 = |\Sigma|^0 + j - 1 = 1$ ;
  - $j = 2, b \rightsquigarrow |\Sigma|^0 + j - 1 = 2$ ;
  - $j = 3, c \rightsquigarrow |\Sigma|^0 + j - 1 = 3$ .
- $i = 2$ ,  
 $\Sigma^i = \Sigma^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$  :  
  - $j = 1, aa \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{i-1} |\Sigma|^k + j - 1 = |\Sigma|^0 + |\Sigma| + j - 1 = 4$ ;
  - ...
  - $j = 9, cc \rightsquigarrow |\Sigma|^0 + |\Sigma| + j - 1 = 12$ ;
- $i = 3$   
...

## 3 Automi

### 3.1 Rappresentazione dei Linguaggi

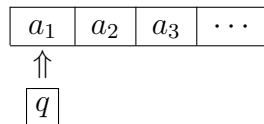
La rappresentazione finita di linguaggi infiniti è affrontabile da tre punti di vista:

1. *riconoscitivo-analitico*, in cui un linguaggio è visto come un insieme di stringhe accettate da strutture finite come gli automi;
2. *algebrico*, in cui il linguaggio è rappresentato da un'espressione algebrica o è la soluzione di un sistema di relazioni algebriche;
3. *generativo-sintetico*, in cui il linguaggio è visto come l'insieme delle stringhe *generate* da strutture finite dette *grammatiche*.

Gli *automi*, che ora vedremo, ricadono nell'approccio di tipo riconoscitivo-analitico.

Un automa è un oggetto composto da:

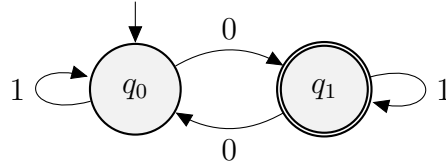
- una *testina*  $\uparrow$  che legge, da sinistra verso destra, simboli posti su un nastro di lunghezza illimitata. A seguito della lettura di un simbolo, la testina si sposta di una posizione verso destra per leggere il simbolo successivo;
- uno *stato* interno  $q$  che a seguito della lettura di un simbolo può modificarsi o rimanere lo stesso, a seconda di come è stato definito il “comportamento” dell'automa.



La lettura termina quando sul nastro non rimangono più simboli da leggere, ovvero, sul nastro giace la stringa vuota  $\epsilon$ . A questo punto, l'automa si può trovare in uno stato di accettazione o di rifiuto della stringa che, un simbolo alla volta, è stata letta per intero.

### 3.2 DFA: automi a stati finiti deterministici

Sia  $\Sigma = \{0, 1\}$  un alfabeto. La descrizione informale di un automa a stati finiti deterministico  $M$  tramite *grafo di transizione* è la seguente:



Descrizione dell'automa a stati finiti deterministico  $M$  tramite *matrice di transizione*:

	0	1
$q_0$	$q_1$	$q_0$
$\dot{q}_1$	$q_0$	$q_1$

- nella prima colonna troviamo i diversi stati  $q_i$  dell'automa: per definizione  $q_0$  è lo stato iniziale, mentre lo stato finale (che può cambiare di automa in automa) viene identificato (in questo documento) ponendo un puntino sopra il nome dello stato ( $\dot{q}_1$ );
- nella prima riga troviamo i simboli in ingresso  $a \in \Sigma$ .

In questo caso particolare quindi, se lo stato attuale dell'automa è  $q$  e il prossimo simbolo da leggere sul nastro è  $a$ , lo stato in cui si troverà l'automa dopo la lettura del simbolo  $a$  è indicato nella cella  $[q, a]$ . La matrice di transizione (ed equivalentemente il grafo di transizione corrispondente), possono essere visti come la definizione di una funzione, che prende il nome di *funzione di transizione* e si indica con  $\delta$ .

**Esempio.** Sia  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Sia  $Q = q_0, q_1$  l'insieme di stati dell'automa presentato sopra. Allora la funzione  $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$  è definita come

$$\delta(q_0, 0) = q_1, \delta(q_0, 1) = q_0, \delta(q_1, 0) = q_0, \delta(q_1, 1) = q_1.$$

La funzione di transizione  $\delta$  quindi ha:

- due argomenti in ingresso:



- $q$ , lo stato attuale del DFA;
- $a$ , il prossimo simbolo da leggere,
- uno ed un solo stato in uscita  $q'$ .

Il fatto che la funzione di transizione  $\delta$  restituisce un solo ed unico stato in uscita è la motivazione dell'aggettivo *deterministico* nel nome dell'automa che descrive; infatti, per ogni coppia  $\langle q, a \rangle$  in ingresso alla funzione di transizione  $\delta$ , è sempre possibile determinare quale sarà il  $q'$  che si otterrà in uscita.

**Notazione.** Utilizzeremo la seguente notazione:

- $p, q, r, s, t$  per indicare stati degli automi;
- $P, Q, R, S, T$  per indicare insiemi di stati.
- $\overbrace{aa \cdots a}^n = a^n$  indica la stringa composta dalla giustapposizione del simbolo  $a$  con se stesso  $n$  volte;
- $a_1 a_2 \cdots a_n$  indica la stringa composta dalla giustapposizione di simboli  $a_i$ , anche diversi tra loro;
- $\overbrace{xx \cdots x}^n = x^n$  indica la stringa composta dalla concatenazione della stringa  $x$  con se stessa  $n$  volte;
- $x_1 x_2 \cdots x_n$  indica la stringa composta dalla concatenazione delle stringhe  $x_i$ , anche diverse tra loro.

### 3.2.1 Definizioni, Teoremi e Lemmi

**Definizione 3.1** (DFA: automa a stati finiti deterministico). *Un DFA è una quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , dove:*

- $Q$  è un insieme finito di stati;
- $\Sigma$  è l'alfabeto di input;
- $\delta : Q \times \Sigma \mapsto Q$  è la funzione di transizione;
- $q_0 \in Q$  è lo stato iniziale;

- $F \subseteq Q$  è l'insieme degli stati finali (o stati accettanti).

Per definizione, una stringa è una giustapposizione di simboli, ciò che vedremo ora è una nuova funzione che applica più volte la  $\delta$  per leggere intere stringhe dal nastro di input.

**Definizione 3.2** (Funzione di transizione su stringhe). *Sia  $M$  il DFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Sia  $x$  una stringa su  $\Sigma^*$ . La funzione di transizione su stringhe  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$  è comunemente definita come:*

$$\hat{\delta}(q, x) := \begin{cases} q, & \text{se } x = \epsilon; \\ \delta(\hat{\delta}(q, y), a), & \text{se } x = ya. \end{cases}$$

**Osservazione 3.1** (Definizione induttiva della funzione di transizione su stringhe tramite notazione semantica).

$$\frac{\overline{\hat{\delta}(q, \epsilon) = q}}{\frac{\hat{\delta}(q, xa) = q'}{\delta(q', a)} a \in \Sigma}$$

**Osservazione 3.2.** *Nella definizione di  $\hat{\delta}$  vi è un elemento di arbitrarietà. Si può infatti dimostrare che,  $\hat{\delta}$  si può sostituire con la funzione  $\check{\delta}$  così definita:*

$$\check{\delta}(q, x) := \begin{cases} q, & \text{se } x = \epsilon; \\ \check{\delta}(\delta(q, a), y), & \text{se } x = ay. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Sia  $M$  il DFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Dimostriamo che, per ogni  $x \in \Sigma^*$  e ogni  $q \in Q$ , abbiamo  $\hat{\delta}(q, x) = \check{\delta}(q, x)$ . Sia  $q$  arbitrario. Per il caso  $x = \epsilon$  abbiamo, banalmente

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q = \check{\delta}(q, \epsilon).$$

Sia ora  $x \neq \epsilon$ ,  $x = a_1 \dots a_n$ . Dimostreremo per induzione matematica su lunghezza  $n \geq 1$  della stringa, con caso base  $n = 1$  e passo induttivo  $n = m + 1$  con  $m \geq 1$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva:

$$\hat{\delta}(q, a_1 \dots a_m) = \underbrace{\delta(\dots \delta(q, a_1) \dots a_m)}_m = \check{\delta}(q, a_1 \dots a_m).$$

**Caso base:** con  $n = 1$  abbiamo

$$\hat{\delta}(q, a_1) = \delta(\hat{\delta}(q, \epsilon), a_1) = \delta(q, a_1) = \check{\delta}(\delta(q, a_1), \epsilon) = \check{\delta}(q, a_1).$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\hat{\delta}(q, a_1 \cdots a_m) = \underbrace{\delta(\cdots \delta(q, a_1) \cdots a_m)}_m \xrightarrow{?} \hat{\delta}(q, a_1 \cdots a_{m+1}) = \underbrace{\delta(\cdots \delta(q, a_1) \cdots a_{m+1})}_{m+1}$$

**Passo inuttivo:** con  $n = m + 1$  abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, a_1 \cdots a_m a_{m+1}) &= \delta(\hat{\delta}(q, a_1 \cdots a_m), a_{m+1}) && [\text{def. } \hat{\delta}] \\ &= \delta(\underbrace{\delta(\cdots \delta(q, a_1) \cdots a_m)}_m, a_{m+1}) && [\text{ip. ind.}] \\ &= \underbrace{\delta(\cdots \delta(q, a_1) \cdots a_{m+1})}_{m+1} && [\text{raggruppando}]. \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \check{\delta}(q, a_1 a_2 \cdots a_{m+1}) &= \check{\delta}(\delta(q, a_1), a_2 \cdots a_{m+1}) && [\text{def. } \check{\delta}] \\ &= \underbrace{\delta(\cdots \delta(\delta(q, a_1), a_2) \cdots a_{m+1})}_m && [\text{ip. ind.}] \\ &= \underbrace{\delta(\cdots \delta(q, a_1) \cdots a_{m+1})}_{m+1} && [\text{raggruppando}]. \end{aligned}$$

□

**Definizione 3.3** (Accettazione di una stringa). *Sia  $M$  il DFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Sia  $x$  una stringa su  $\Sigma^*$ . La stringa  $x$  è accettata da  $M$  se e solo se:*

$$\hat{\delta}(q_0, x) \in F.$$

Una stringa  $x$  quindi è accettata da un DFA  $M$  se, partendo dallo stato iniziale  $q_0$  e leggendo  $x$ , il DFA termina in uno degli stati accettanti.

Se durante il processo di lettura viene letto un simbolo che non sta in  $\Sigma$ , la lettura termina immediatamente con il DFA in uno stato di “errore” che ha come conseguenza il rifiuto della stringa.

**Definizione 3.4** (Linguaggio accettato da un DFA). Sia  $M$  il DFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , il linguaggio accettato da  $M$  si indica con  $L(M)$  ed è l'insieme di tutte le stringhe accettate da  $M$ , ovvero:

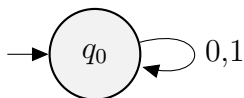
$$L(M) := \{ x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in F \}.$$

**Teorema 3.1** (Linguaggio regolare). Un linguaggio  $L$  è regolare se esiste almeno un DFA  $M$  che accetta  $L$ , ovvero:

$$L = L(M).$$

**Esempio.** DFA  $M = \langle Q = \{ q_0 \}, \Sigma = \{ 0, 1 \}, \delta, q_0, F = \emptyset \rangle$  che accetta il linguaggio (regolare)  $L = \emptyset$  ovvero “nessuna stringa è accettata”:

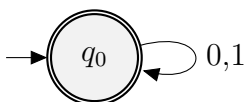
$$L(M) = \emptyset$$



	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>q0</b>	$q_0$	$q_0$

DFA  $M' = \langle Q = \{ q_0 \}, \Sigma = \{ 0, 1 \}, \delta, q_0, F = \{ q_0 \} \rangle$  che accetta il linguaggio (regolare)  $L = \Sigma^*$  ovvero “tutte le stringhe su  $\Sigma$  sono accettate”:

$$L(M') = \Sigma^*$$



	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>q0</b>	$q_0$	$q_0$

**Lemma 3.1** (Proprietà funzione di transizione su stringhe). *Sia  $M$  il DFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Siano  $x, y \in \Sigma^*$  due stringhe e  $q \in Q$  uno stato, allora*

$$\hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y)$$

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che

$$\forall x, y \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y).$$

Dimostriamo per induzione matematica semplice sulla lunghezza  $n$  della stringa  $y$ , con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, xy) &= \hat{\delta}(q, x\epsilon) && [|y| = 0] \\ &= \hat{\delta}(q, x) && [\epsilon \text{ è identità}] \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), \epsilon) && [\text{def. } \hat{\delta}] \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y) \checkmark && [|y| = 0]. \end{aligned}$$

**Implicazione:** siano  $u, v \in \Sigma^*$ ,

$$\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v) \stackrel{?}{\implies} \hat{\delta}(q, uva) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), va).$$

**Passo induttivo:** Se  $n = m + 1, y = wa$  abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, xy) &= \hat{\delta}(q, xwa) && [y = wa] \\ &= \delta(\hat{\delta}(q, xw), a) && [\text{def. } \hat{\delta}] \\ &= \delta(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), w), a) && [\text{ip. ind.}] \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), wa) && [\text{def. } \hat{\delta}] \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y) \checkmark && [y = wa]. \end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Esercizi

#### Esercizio 3.1

Siano  $xz, yz$  due stringhe e  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un DFA, dimostrare che vale:

$$\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) \implies \hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(q_0, yz).$$

**Soluzione.**

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, xz) &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) && [\text{prop. di } \hat{\delta}] \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, y), z) && [\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)] \\ &= \hat{\delta}(q_0, yz) && [\text{prop. di } \hat{\delta}]. \end{aligned}$$

#### Esercizio 3.2

Siano  $x, y$  stringhe e  $q$  uno stato, dimostrare che vale:

$$\hat{\delta}(q, x) = q_1, \hat{\delta}(q, xy) = q_2 \implies \hat{\delta}(q_1, y) = q_2.$$

**Soluzione.**

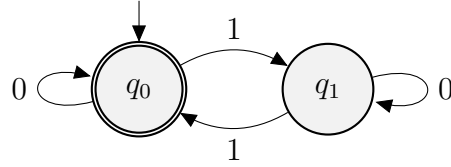
$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_1, y) &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, x), y) && [q_1 = \hat{\delta}(q, x)] \\ &= \hat{\delta}(q, xy) && [\text{prop. di } \hat{\delta}] \\ &= q_2. \end{aligned}$$

#### Esercizio 3.3

Determinare il DFA che accetta il seguente linguaggio:  $L = \{ x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ contiene un numero pari di '1'} \}$ .

**Soluzione.** Costruiamo un DFA  $M = \langle Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{0, 1\}, \delta, q_0, F = \{q_0\} \rangle$  che tiene traccia della lettura del simbolo '1'. L'idea è di passare dallo stato iniziale accettante  $q_0$  al non accettante  $q_1$  quando viene letto '1' e viceversa, così da tenere sempre traccia se il numero di '1' che sono stati letti è pari ( $M$  in  $q_0$ ) o dispari ( $M$  in  $q_1$ ).

Descrizione del DFA tramite grafo di transizione:



Descrizione del DFA tramite matrice di transizione:

	0	1
$q_0$	$q_0$	$q_1$
$q_1$	$q_1$	$q_0$

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che il comportamento del DFA è stato definito correttamente e fa quello che deve. Per fare questo, dimostriamo che:

1. il DFA accetta le stringhe di interesse;
2. il DFA rifiuta tutte le stringhe non di interesse.

Notiamo che, in qualunque stato il DFA si trova, leggere ‘0’ non comporta modifiche dello stato, ovvero

$$\forall q \in Q : \delta(q, 0) = q,$$

per semplificare il nostro lavoro possiamo considerare le sole stringhe della forma  $1^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , tenendo a mente che potranno apparire degli ‘0’ ovunque senza modificare lo stato dell’automata.

**Accettazione.** Una generica stringa accettata dal DFA è della forma:

$$1^{2n}, n \in \mathbb{N}.$$

Vogliamo mostrare che, applicando la funzione di transizione su stringhe  $\hat{\delta}$  sullo stato iniziale  $q_0$  e una stringa della forma  $1^{2n}$ , arriviamo in uno stato  $q \in F$  che è accettante, ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N} : \hat{\delta}(q_0, 1^{2n}) = q_0 \in F.$$

Dimostriamo la per induzione matematica semplice su  $n$ , con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l’ipotesi induttiva (antecedente dell’implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0, 1^{2n}) &= \hat{\delta}(q_0, 1^0) & [n = 0] \\ &= \hat{\delta}(q_0, \epsilon) & [\text{def. } \cdot^0] \\ &= q_0 \in F \checkmark & [\text{def. } \hat{\delta}].\end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\hat{\delta}(q_0, 1^{2m}) = q_0 \xrightarrow{?} \hat{\delta}(q_0, 1^{2(m+1)}) = q_0.$$

**Passo induttivo:** Se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0, 1^{2n}) &= \hat{\delta}(q_0, 1^{2(m+1)}) = \hat{\delta}(q_0, 111^{2m}) & [n = m + 1] \\ &= \hat{\delta}(\delta(q_0, 1), 11^{2m}) & [\text{def. } \hat{\delta}] \\ &= \hat{\delta}(q_1, 11^{2m}) & [\text{def. } \delta] \\ &= \hat{\delta}(\delta(q_1, 1), 1^{2m}) & [\text{def. } \hat{\delta}] \\ &= \hat{\delta}(q_0, 1^{2m}) & [\text{def. } \delta] \\ &= q_0 \in F \checkmark & [\text{ip. ind.}].\end{aligned}$$

**Rifiuto.** Una generica stringa rifiutata dal DFA è della forma:

$$1^{2n+1}, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Vogliamo mostrare che, applicando la funzione di transizione su stringhe  $\hat{\delta}$  sullo stato iniziale  $q_0$  e una stringa della forma (1), arriviamo in uno stato  $q \notin F$  di rifiuto, ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N} : \hat{\delta}(q_0, 1^{2n+1}) = q_1 \notin F,$$

Dimostriamo per induzione matematica semplice su  $n$ , con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (antecedente dell'implicazione). In breve:

$$\hat{\delta}(q_0, 1^{2(m+1)+1}) = \hat{\delta}(q_0, 111^{2m}1) = \hat{\delta}(q_0, 1) = q_1 \notin F.$$

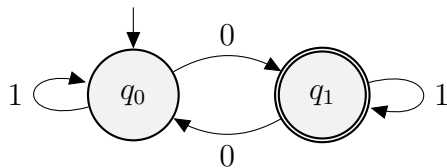
(Dimostrare con passaggi nel dettaglio per esercizio). □

### Esercizio 3.4

Determinare il DFA che accetta il seguente linguaggio:  $L = \{ x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ contiene un numero dispari di '0'} \}$ .



**Soluzione.** Descrizione del DFA  $M = \langle Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{0, 1\}, \delta, q_0, F = \{q_1\} \rangle$  tramite grafo di transizione:



Descrizione del DFA tramite matrice di transizione:

	0	1
$q_0$	$q_1$	$q_0$
$q_1$	$q_0$	$q_1$

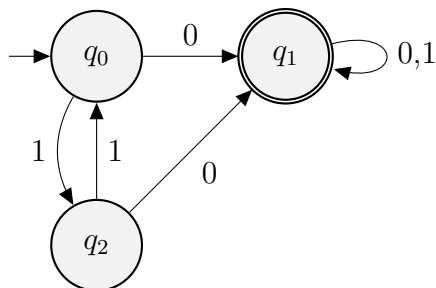
(Spiegare il ragionamento per la costruzione del DFA e dimostrare il corretto funzionamento per esercizio, notare che è tutto estremamente simile all'esercizio precedente).

### Esercizio 3.5

Determinare il linguaggio accettato dal DFA descritto tramite la seguente matrice di transizione:

	0	1
$q_0$	$q_1$	$q_2$
$q_1$	$q_1$	$q_1$
$q_2$	$q_1$	$q_0$

**Soluzione.** Grafo di transizione del DFA:



Osservando il DFA notiamo che: a partire dagli stati  $q_0, q_2$ , la lettura del simbolo '1' fa ciclare tra gli stati  $q_0, q_2$  stessi, mentre la lettura del simbolo '0' porta dentro allo stato  $q_1 \in F$ . Lo stato  $q_1$  non avendo archi uscenti è detto stato *assorbente*, quindi:

$$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid x \text{ contiene almeno uno '0'} \}.$$

*Dimostrazione.* Constatiamo che a partire dagli stati  $q_0$  e  $q_2$ , la lettura del simbolo '1' fa ciclare tra gli stati  $q_0, q_2$  stessi:

$$\forall q \in \{ q_0, q_2 \} : \delta(q, 1) = q' \in \{ q_0, q_2 \} \quad [\text{def. } \delta],$$

da cui deriva che

$$\forall q \in \{ q_0, q_2 \}, \forall n \in \mathbb{N} : \hat{\delta}(q, 1^n) = q' \in \{ q_0, q_2 \}. \quad (2)$$

Constatiamo che  $q_1$  è uno stato assorbente:

$$\forall a \in \Sigma : \delta(q_1, a) = q_1 \quad [\text{def. } \delta].$$

da cui deriva che

$$\forall x \in \Sigma^*, \forall n \in \mathbb{N} : \hat{\delta}(q_1, x) = q_1. \quad (3)$$

**Rifiuto.** Una generica stringa rifiutata dal DFA è della forma:

$$1^n, n \in \mathbb{N}.$$

$$\forall q \in \{ q_0, q_2 \}, \forall n \in \mathbb{N} : \hat{\delta}(q, 1^n) \notin F \quad [(2)].$$

**Accettazione.** Una generica stringa accettata dal DFA è della forma:

$$1^n 0 y, n \in \mathbb{N}, y \in \Sigma^*.$$

Dal momento che  $q_0 \in \{ q_0, q_2 \}$ , abbiamo appena dimostrato che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \hat{\delta}(q_0, 1^n 0 y) = \hat{\delta}(q', 0 y), \text{ con } q' \in \{ q_0, q_2 \},$$

proseguiamo

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q', 0 y) &= \hat{\delta}(\delta(q', 0), y) && [\text{def. } \hat{\delta}] \\ &= \hat{\delta}(q_1, y) && [\text{def. } \delta] \\ &= q_1 \in F && [(3)]. \end{aligned}$$

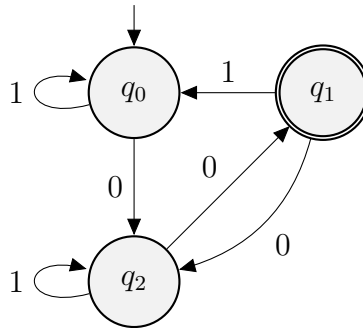
□

### Esercizio 3.6

Determinare il linguaggio accettato dal DFA descritto tramite la seguente matrice di transizione:

	0	1
$q_0$	$q_2$	$q_0$
$q_1$	$q_2$	$q_0$
$q_2$	$q_1$	$q_2$

**Soluzione.** Disegniamo il grafo di transizione del DFA:



Notiamo che l'unico modo per entrare in  $q_2$  è con la lettura di uno '0' e nel momento in cui un'altro viene letto, si passa da  $q_2$  a  $q_1 \in F$ . Da  $q_1$  si esce e si torna in  $q_2$  con la lettura di '0'. Le osservazioni fatte fino ad ora fanno pensare che le stringhe devono contenere un numero pari di '0'. Da  $q_1$  però con la lettura di '1' si va in  $q_0$ , quindi le stringhe devono anche terminare con '0'.

$$L(M) = \{ x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ contiene un numero pari di '0' e termina con '0'} \}.$$

*Dimostrazione.* Mostriamo che il DFA accetta tutte e sole le stringhe.

**Accettazione.** Una generica stringa accettata dal DFA è della forma:

$$x_1 x_2 \cdots x_n \text{ con } n \geq 1, x_i = 1^j 0 1^k 0, j, k \in \mathbb{N}.$$

In questo esercizio, con  $x_i$  intendiamo una stringa della forma appena vista. E' facile dimostrare che dagli stati  $q_0, q_1$  la lettura di una generica  $x_i$  porta

in  $q_1 \in F$ , ovvero

$$\forall q \in \{q_0, q_1\} : \hat{\delta}(q, x) = q_1 \in F. \quad (4)$$

Vogliamo mostrare che dallo stato iniziale  $q_0$ , leggendo una concatenazione di generiche  $x_i$  si arriva in  $q_1 \in F$ , ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \hat{\delta}(q_0, x_1 x_2 \cdots x_n) = q_1 \in F,$$

Dimostreremo per induzione matematica semplice su  $n \in \mathbb{N}$  che è il numero di concatenazioni di stringhe  $x_i$ , con caso base  $n = 1$ , passo induttivo  $n = m + 1$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, x_1 \cdots x_n) &= \hat{\delta}(q_0, x) & [n = 1] \\ &= q_1 \in F & [(4)]. \end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\hat{\delta}(q_0, x_1 \cdots x_m) = q_1 \xRightarrow{?} \hat{\delta}(q_0, x_1 \cdots x_{m+1}) = q_1.$$

**Passo induttivo:** Se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, x_1 \cdots x_n) &= \hat{\delta}(q_0, x_1 \cdots x_{m+1}) & [n = m + 1] \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x_1 \cdots x_m), x_{m+1}) & [\text{prop. di } \hat{\delta}] \\ &= \hat{\delta}(q_1, x_{m+1}) & [\text{ip. ind.}] \\ &= q_1 \in F & [(4)]. \end{aligned}$$

**Rifiuto.** Una generica stringa rifiutata dal DFA ha tutte o alcune delle seguenti caratteristiche:

- stringhe che non terminano con '0', ovvero

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) \notin F, \forall x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, x1) \notin F.$$

*Dimostrazione.*

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0 \notin F \quad [\text{def. } \hat{\delta}].$$

$$\forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w1) = \hat{\delta}(q', 1) \notin F \quad [\nexists q \in Q . \delta(q, 1) \in F].$$

□

- stringhe che contengono un numero dispari di ‘0’, ovvero

$$\forall n \in \mathbb{N} : \hat{\delta}(q_0, 0^{2n+1}) \notin F,$$

considerando il fatto che potrebbero esserci degli ‘1’ ovunque ma non sono rilevanti per questo particolare caso perché chiaramente non entrano in gioco nel conteggio degli ‘0’ e il caso in cui la stringa termini con ‘1’ è già stato coperto da punto precedente.

$$\hat{\delta}(q_0, 0^{2n+1}) = \hat{\delta}(q_0, 0^{2n}0) = \hat{\delta}(q_1, 0) = q_2 \notin F.$$

□

### Esercizio 3.7

Sia  $Q$  un insieme di stati. Sia  $\Sigma$  un alfabeto. Quanti sono i DFA che si possono costruire fissati  $Q$  e  $\Sigma$ ?

**Soluzione.** Un DFA è una quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , se  $Q$  possiamo contare i possibili DFA nel seguente modo:

- numero di modi in cui possiamo scegliere lo stato iniziale  $q_0$  è

$$|Q|;$$

- numero di modi in cui possiamo scegliere l’insieme degli stati finali  $F \subseteq Q$  è

$$|\mathcal{P}(Q)| = 2^{|Q|};$$

- numero di modi in cui possiamo definire la funzione di transizione  $\delta$  è

$$|Q|^{|Q||\Sigma|},$$

perché ogni in ogni cella della matrice di transizione possiamo inserire  $|Q|$  valori differenti, e le dimensioni della matrice sono  $|Q||\Sigma|$ .

Quindi, fissati  $Q$  e  $\Sigma$ , è possibile costruire

$$|Q| \cdot 2^{|Q|} \cdot |Q|^{|Q||\Sigma|} = 2^{|Q|} \cdot |Q|^{|Q||\Sigma|+1}$$

differenti DFA.

### Esercizio 3.8

Sia  $L$  il linguaggio accettato dal DFA  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , dimostrare che esiste un DFA  $M' = \langle Q', \Sigma', \delta', q'_0, F' \rangle$  tale che  $\Sigma = \Sigma'$  e  $L(M) = L(M')$ .

**Soluzione.** Sia  $M' = \langle Q', \Sigma', \delta', q'_0, F' \rangle$  il DFA definito come segue:

- $Q' = Q \cup \{q_\emptyset\}$  (stiamo aggiungendo uno stato “spazzatura”  $q_\emptyset$  che renderemo irraggiungibile tramite la definizione che daremo a  $\delta'$ .)
- $\Sigma' = \Sigma$ ;

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} q_\emptyset & \text{se } q = q_\emptyset; \\ \delta(q, a) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(abbiamo definito la  $\delta' = \delta$  per ogni stato, fatta eccezione per  $q_\emptyset$ ).

- $q'_0 = q_0$ ;
- $F' = F$ .

Mostriamo l'equivalenza tra  $M'$  ed  $M$ , ovvero:

$$\forall x \in \Sigma^* : \hat{\delta}'(q'_0, x) = \hat{\delta}(q_0, x).$$

Procediamo per induzione matematica semplice sulla lunghezza  $n$  della stringa accettata, con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** con  $|x| = 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}'(q'_0, x) &= \hat{\delta}'(q'_0, \epsilon) & [|x| = 0] \\
 &= q'_0 & [\text{def. } \hat{\delta}] \\
 &= q_0 & [q'_0 = q_0] \\
 &= \hat{\delta}(q_0, \epsilon) & [\text{def. } \hat{\delta}] \\
 &= \hat{\delta}(q_0, x) \checkmark & [x = \epsilon].
 \end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $u \in \Sigma^*$ ,

$$\hat{\delta}'(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, u) \stackrel{?}{\implies} \hat{\delta}'(q_0, ua) = \hat{\delta}(q_0, ua).$$

**Passo induttivo:** con  $n = m + 1$  abbiamo che  $x = wa$ , con  $|w| = m$  e vale che

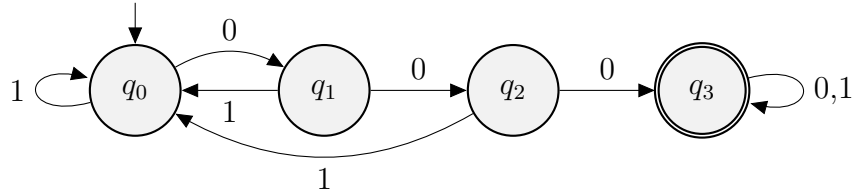
$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}'(q'_0, x) &= \hat{\delta}'(q'_0, wa) & [x = wa] \\
 &= \delta'(\hat{\delta}'(q'_0, w), a) & [\text{def. } \hat{\delta}'] \\
 &= \delta'(\hat{\delta}(q_0, w), a) & [\text{ip. ind.}] \\
 &= \delta(\hat{\delta}(q_0, w), a) & [\text{def. } \delta'] \\
 &= \hat{\delta}(q_0, wa) & [\text{def. } \hat{\delta}] \\
 &= \hat{\delta}(q_0, x) \checkmark & [x = wa].
 \end{aligned}$$

### Esercizio 3.9

Verificare che il seguente linguaggio su  $\Sigma = \{0, 1\}$  è regolare: insieme delle stringhe binarie aventi tre ‘0’ consecutivi.

**Soluzione.** Per verificare che un linguaggio è regolare, dobbiamo trovare un DFA che lo accetta e dimostrarne il corretto funzionamento (le dimostrazioni del corretto funzionamento sono lasciate per esercizio).

Costruiamo un DFA in cui ogni stato rappresenta il numero di ‘0’ consecutivi che sono stati letti. Lo stato iniziale è  $q_0$ . Per ogni stato  $q_i, 0 \leq i \leq 2$ , quando viene letto ‘1’ si va nello stato  $q_{i+1}$ , mentre se viene letto ‘0’ si torna nello stato  $q_0$ . Nel caso si leggano tre ‘0’ consecutivi si arriva dunque in  $q_3$  che è stato accettante ed assorbente.



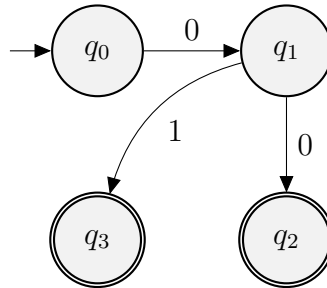
### Esercizio 3.10

Verificare che il seguente linguaggio su  $\Sigma = \{0, 1\}$  è regolare: insieme delle stringhe binarie aventi ‘0’ come penultimo simbolo.

**Soluzione.** Sia  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Sia  $x$  una generica string su  $\Sigma$ . Le stringhe accettate sono del tipo:

1.  $x00$ ;
2.  $x01$ .

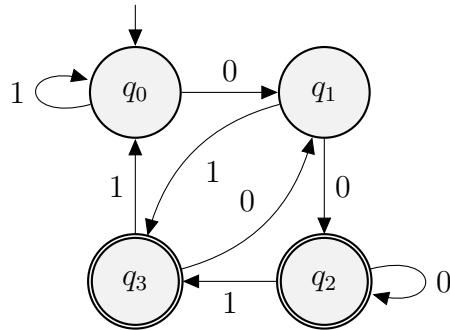
Le transizioni  $q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} \dot{q}_2$  “rilevano” che gli ultimi due simboli letti sono stati “00”; questa informazione viene poi “memorizzata” avendo  $\dot{q}_2$  come stato finale. Le transizioni  $q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} \dot{q}_3$  rilevano che gli ultimi due simboli letti sono stati “01” e questa informazione viene memorizzata con  $\dot{q}_3$  come stato finale.



A questo punto,  $\forall q \in Q$  andiamo ad aggiungere le transizioni mancanti rispettando le proprietà degli stati  $\dot{q}_2, \dot{q}_3$ , ovvero:

1. partendo da  $q$  arriviamo in  $\dot{q}_2 \iff$  viene letto “00”;
2. partendo da  $q$  arriviamo in  $\dot{q}_3 \iff$  viene letto “01”.



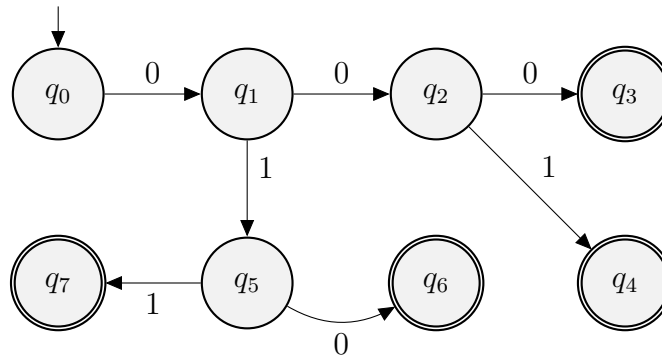


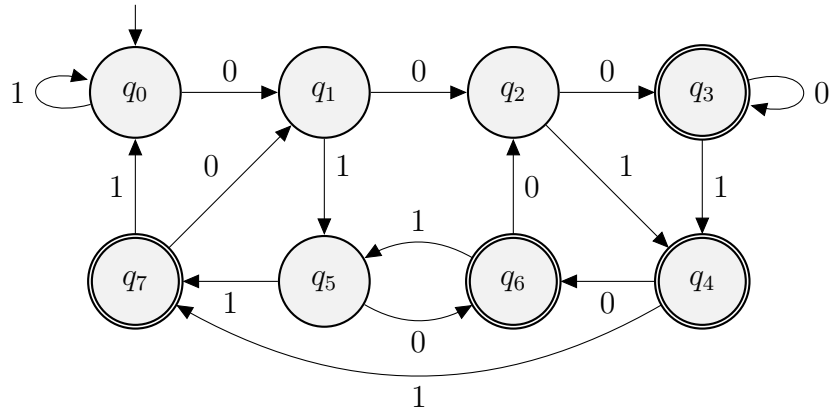
### Esercizio 3.11

Verificare che il seguente linguaggio su  $\Sigma = \{0, 1\}$  è regolare: insieme delle stringhe binarie aventi '0' come terzultimo simbolo.

**Soluzione.** Sia  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Sia  $x$  una generica string su  $\Sigma$ . La logica è identica al DFA precedente, solo che le stringhe accettate e quindi anche gli stati aumentano (esponenzialmente):

1.  $x000, (q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{0} \dot{q}_3);$
2.  $x001, (q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{1} \dot{q}_4);$
3.  $x010, (q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_5 \xrightarrow{0} \dot{q}_6);$
4.  $x011, (q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_5 \xrightarrow{1} \dot{q}_7);$





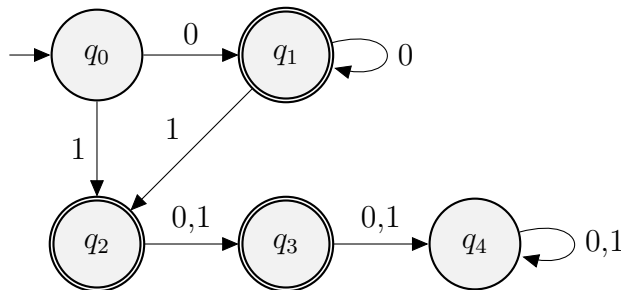
### Esercizio 3.12

Verificare che il seguente linguaggio su  $\Sigma = \{0, 1\}$  è regolare: insieme delle stringhe binarie tali che, se interpretate come numero decimale, hanno un valore minore o uguale a 3.

**Soluzione.** Stringhe accettate:

- $0_2 \mapsto 0_{10} : q_0 \xrightarrow{0} q_1;$
- $1_2 \mapsto 1_{10} : q_0 \xrightarrow{1} q_2;$
- $10_2 \mapsto 2_{10} : q_0 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_3;$
- $11_2 \mapsto 3_{10} : q_0 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{1} q_3.$

Utilizziamo  $q_4$  come stato assorbente non finale, in modo da rifiutare tutte le stringhe con valore maggiore di 3.



### Esercizio 3.13

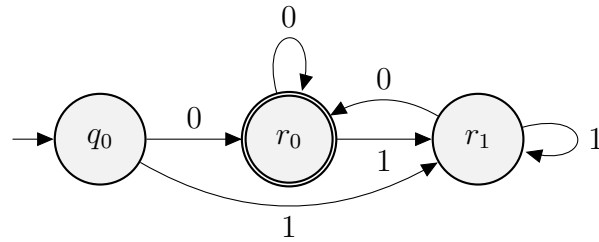
Verificare che il seguente linguaggio su  $\Sigma = \{0, 1\}$  è regolare: insieme delle stringhe binarie tali che, se interpretate come numero decimale, sono divisibili per 2.

**Soluzione.** Avremo lo stato iniziale  $q_0$  non accettante perché non vogliamo accettare la stringa  $\epsilon$  visto che non ha interpretazione nei numeri interi senza segno. Da  $q_0$  ci spostiamo in  $r_0$  o  $r_1$  a seconda se viene letto ‘0’ o ‘1’ rispettivamente. La  $r$  nel nome degli stati sta per “resto”; negli stati  $r_0, r_1$  infatti, vi si arriva quando, interpretando come numero intero la stringa letta e facendone il modulo 2, si ottiene resto 0 e resto 1 rispettivamente.



Facciamo un “mapping” dei numeri da 0 a  $n$ , in accordo con quanto detto sopra, fino a che tutte le transizioni non sono state definite (raggiunto un *punto fisso*):

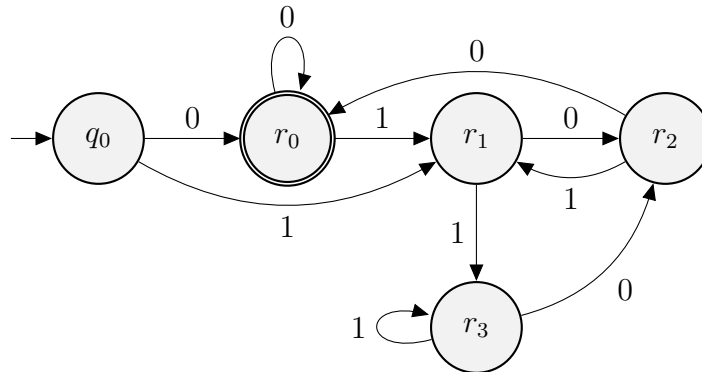
- $0_2 \mapsto 0_{10} \pmod{2} = 0 : q_0 \xrightarrow{0} r_0;$
- $1_2 \mapsto 1_{10} \pmod{2} = 1 : q_0 \xrightarrow{1} r_1;$
- $10_2 \mapsto 2_{10} \pmod{2} = 0 : q_0 \xrightarrow{1} r_1 \xrightarrow{0} r_0;$
- $11_2 \mapsto 3_{10} \pmod{2} = 1 : q_0 \xrightarrow{1} r_1 \xrightarrow{1} r_1;$
- $100_2 \mapsto 4_{10} \pmod{2} = 0 : q_0 \xrightarrow{1} r_1 \xrightarrow{0} r_0 \xrightarrow{0} r_0;$
- $101_2 \mapsto 5_{10} \pmod{2} = 1 : q_0 \xrightarrow{1} r_1 \xrightarrow{0} r_0 \xrightarrow{1} r_1.$
- $110_2 \mapsto 6_{10} \pmod{2} = 0 : q_0 \xrightarrow{1} r_1 \xrightarrow{1} r_1 \xrightarrow{0} r_0$  (nessuna nuova transazione aggiunta, punto fisso raggiunto).



### Esercizio 3.14

Verificare che il seguente linguaggio su  $\Sigma = \{0, 1\}$  è regolare: insieme delle stringhe binarie tali che, se interpretate come numero decimale, sono divisibili per 4.

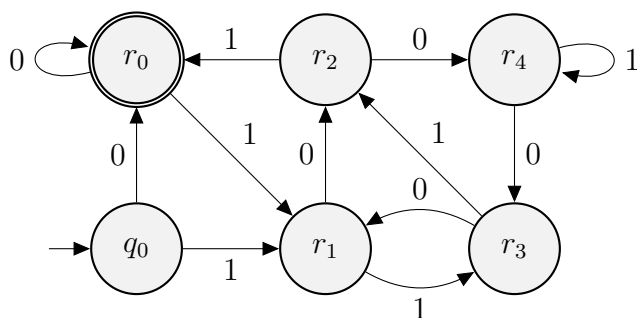
**Soluzione.** Ragionamento identico a quello dell'esercizio precedente.



### Esercizio 3.15

Verificare che il seguente linguaggio su  $\Sigma = \{0, 1\}$  è regolare: insieme delle stringhe tali che, se interpretate come numero decimale, sono divisibili per 5.

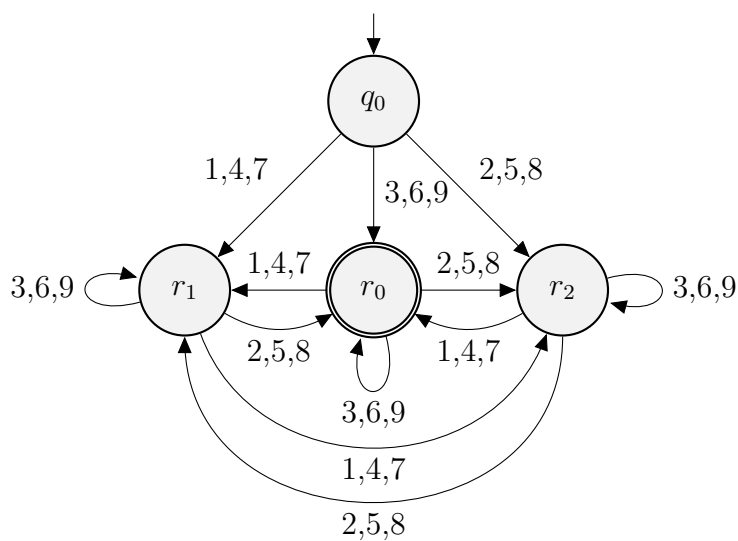
**Soluzione.** Ragionamento simile a quello dell'esercizio precedente.



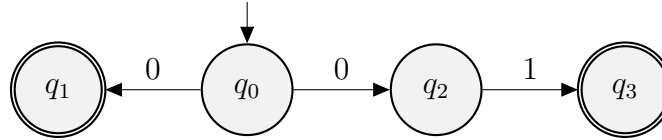
### Esercizio 3.16

Verificare che il seguente linguaggio su  $\Sigma = \{0, 1\}$  è regolare: insieme delle stringhe di cifre decimali tali che, sono divisibili per 3. [*Suggerimento*: un numero decimale è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3.]

**Soluzione.** Seguendo il suggerimento, costruiamo un DFA che si muove tra gli stati  $r_0, r_1, r_2$  a seconda se la somma delle cifre che compongono la stringa divisa per 3 da resto 0, resto 1 o resto 2 rispettivamente.



### 3.3 NFA: automi a stati finiti non deterministici



	0	1
$q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$q_1$	$\emptyset$	$\emptyset$
$q_2$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
$q_3$	$\emptyset$	$\emptyset$

Per come sono definiti gli NFA, a partire da uno stato  $q \in Q$ , con la lettura un simbolo  $a \in \Sigma$ , è possibile transire verso nessuno stato, verso uno solo stato  $q' \in Q$  o verso più stati contemporaneamente (un insieme di stati  $S \subseteq Q$ ). Questo equivale a dire che, negli NFA, a partire da uno stato  $q \in Q$ , con la lettura di un simbolo  $a \in \Sigma$ , si transita in un insieme di stati  $S \in \mathcal{P}(Q)$ .

#### 3.3.1 Definizioni, Teoremi e Lemmi

**Definizione 3.5** (NFA: automa a stati finiti non deterministico). *Un NFA è una quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , la cui definizione differisce dalla quintupla dei DFA solo nella funzione di transizione che è definita come:*

$$\delta : Q \times \Sigma \mapsto \mathcal{P}(Q).$$

La differenza è che, negli NFA, la funzione di transizione  $\delta$  non restituisce in uscita un singolo stato che sta in  $Q$  ma invece restituisce un *sottoinsieme* degli stati che stanno in  $Q$ , ovvero un elemento di  $\mathcal{P}(Q)$ . L'aggettivo *non deterministico* nel nome è dovuto proprio a questo; l'NFA, a seguito della lettura di un simbolo può transitare verso più stati e quindi trovarsi in più stati contemporaneamente ovvero, non è più deterministico.

Come per i DFA, anche per gli NFA è possibile utilizzare la funzione di transizione  $\delta$  per la definizione della funzione di transizione su stringhe  $\hat{\delta}$ .

**Definizione 3.6** (Funzione di transizione su stringhe). *Sia  $M$  l'NFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Sia  $x$  una stringa su  $\Sigma^*$ . La funzione di transizione su stringhe  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \mapsto \mathcal{P}(Q)$  è definita come:*

$$\hat{\delta}(q, x) := \begin{cases} \{q\} & \text{se } x = \epsilon; \\ \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, y)} \delta(p, a) & \text{se } x = ya. \end{cases}$$

**Osservazione 3.3.** *Nella definizione di  $\hat{\delta}$  vi è un elemento di arbitrarietà.  $\hat{\delta}$  si può sostituire con la funzione  $\check{\delta}$  così definita:*

$$\check{\delta}(q, x) := \begin{cases} \{q\} & \text{se } x = \epsilon; \\ \bigcup_{p \in \delta(q, a)} \hat{\delta}(p, y) & \text{se } x = ay. \end{cases}$$

**Definizione 3.7** (Accettazione di una stringa). *Sia  $M$  un NFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Sia  $x$  una stringa su  $\Sigma^*$ . La stringa  $x$  è accettata da  $M$  se e solo se:*

$$\hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset.$$

Una stringa  $x$  quindi è accettata da un NFA  $M$  se, partendo dallo stato iniziale  $q_0$  e leggendo  $x$ , l'automa termina in un insieme di stati che ha intersezione non nulla con  $F$ .

**Definizione 3.8** (Linguaggio accettato da un NFA). *Sia  $M$  l'NFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Il linguaggio accettato da  $M$  si indica con  $L(M)$  ed è l'insieme di tutte le stringhe accettate da  $M$ , ovvero:*

$$L(M) := \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset\}.$$

**Teorema 3.2** (Rabin-Scott: equivalenza tra NFA e DFA). *Sia  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un NFA, allora esiste un DFA  $M'$  tale che*

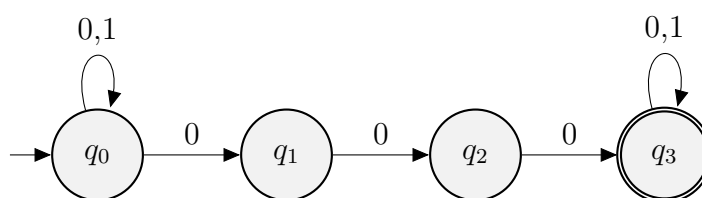
$$L(M) = L(M').$$

### 3.3.2 Costruzione per sottoinsiemi

Dato un NFA  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  è possibile applicare un algoritmo che permette di trovare il DFA equivalente, questo algoritmo prende il nome di *costruzione per sottoinsiemi*. Come abbiamo visto, la funzione di transizione

$\delta$  su NFA restituisce in uscita un elemento che sta in  $\mathcal{P}(Q)$ , quindi restituisce un insieme di stati e questo comporta che l’NFA si può trovare contemporaneamente in più stati. L’idea è di costruire un DFA  $M'$  che ha uno stato per ogni possibile elemento in  $\mathcal{P}(Q)$ , così facendo, in ogni momento è possibile “riassumere” l’insieme di stati in cui si trova l’NFA  $M$  con un singolo stato del DFA  $M'$ . Notare che, il DFA  $M'$  rispetto all’equivalente NFA  $M$  avrà un numero di stati che può risultare esponenzialmente più grande, infatti nel caso pessimo possono servire proprio  $|\mathcal{P}(Q)| = 2^{|Q|}$  stati.

**Esempio.** Sia  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Grafo e matrice di transizione per un NFA che accetta il linguaggio  $L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x = w000y, w, y \in \Sigma^*\}$  (stringhe aventi almeno tre ‘0’ consecutivi”):



	0	1
$q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$q_2$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$q_3$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

Costruzione per sottoinsiemi:

1. per definizione di NFA, all’interno delle celle della matrice di transizione troviamo insiemi di stati  $S_1 \cdots S_n$ . Tra questi identifichiamo gli stati  $S_i$  tali che  $|S_i| \geq 2$  (ad esempio  $\{q_0, q_1\}$ ) e sono raggiungibili da  $q_0$ . Se questi non sono già stati “etichettati”, etichettiamo questi insiemi di stati, ovvero associamo ad ognuno di questi un nuovo e singolo stato che li rappresenta, ad esempio  $\{q_0, q_1\} = q_{01}$ .

Se all’interno dell’insieme di stati che si sta etichettando è presente almeno uno stato finale, lo stato che si utilizza come etichetta diventa anche stato finale del DFA equivalente che stiamo costruendo.

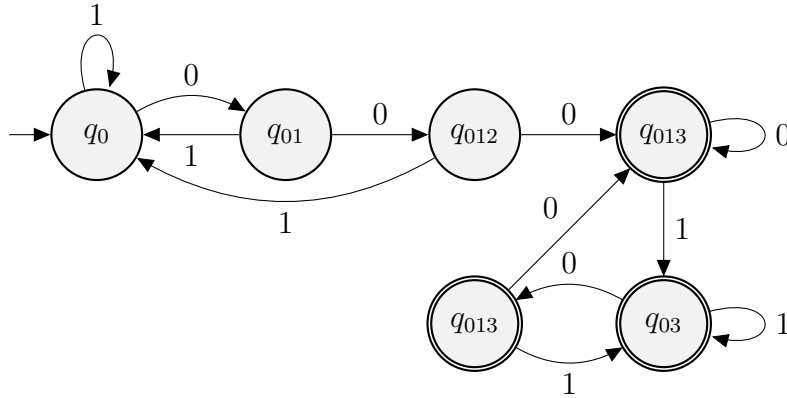


Per ogni nuovo insieme di stati trovato ed etichettato, aggiungiamo una riga alla matrice con tutte le celle vuote tranne la prima (che conterrà proprio l'insieme di stati oppure in maniera equivalente il nuovo stato-etichetta che gli abbiamo associato);

2. riempire le celle vuote, univocamente identificabili dalla coppia  $(S, a)$ , inserendovi dentro  $\bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$ .
3. ripetere dal punto 1 fino a che non si raggiunge un punto fisso.

	0	1
<b><math>q_0</math></b>	$q_{01}$	$q_0$
<b><math>q_{01}</math></b>	$q_{012}$	$q_0$
<b><math>q_{012}</math></b>	$q_{0123}$	$q_0$
<b><math>\dot{q}_{0123}</math></b>	$q_{0123}$	$q_{03}$
<b><math>\dot{q}_{03}</math></b>	$q_{013}$	$q_{03}$
<b><math>\dot{q}_{013}</math></b>	$q_{0123}$	$q_{03}$

Grafo di transizione del DFA equivalente con i soli stati raggiungibili a partire da  $q_0$ :



Notare che gli stati  $q_{013}, q_{03}$  potrebbero essere eliminati, il DFA generato utilizzando la costruzione per sottoinsiemi quindi non è *minimo*.

### 3.3.3 Esercizi

#### Esercizio 3.17

Sia  $Q$  un insieme di stati. Sia  $\Sigma$  un alfabeto. Quanti sono gli NFA che si possono costruire fissati  $Q$  e  $\Sigma$ ?

**Soluzione.** Un NFA è una quintupla  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , se  $Q$  possiamo contare i possibili NFA nel seguente modo:

- numero di modi in cui possiamo scegliere lo stato iniziale  $q_0$  è

$$|Q|;$$

- numero di modi in cui possiamo scegliere l'insieme degli stati finali  $F \subseteq Q$  è

$$|\mathcal{P}(Q)| = 2^{|Q|};$$

- numero di modi in cui possiamo definire la funzione di transizione  $\delta$  è

$$(2^{|Q|})^{|Q||\Sigma|},$$

perché ogni in ogni cella della matrice di transizione possiamo inserire  $2^{|Q|}$  valori differenti, e le dimensioni della matrice sono  $|Q||\Sigma|$ .

Quindi, fissati  $Q$  e  $\Sigma$ , è possibile costruire

$$|Q| \cdot 2^{|Q|} \cdot (2^{|Q|})^{|Q||\Sigma|} = |Q| \cdot 2^{|Q|} \cdot 2^{|Q|^2|\Sigma|} = |Q| \cdot 2^{|Q|^2|\Sigma|+|Q|} = |Q| \cdot 2^{|Q|(|Q||\Sigma|+1)}$$

differenti NFA.

#### Esercizio 3.18

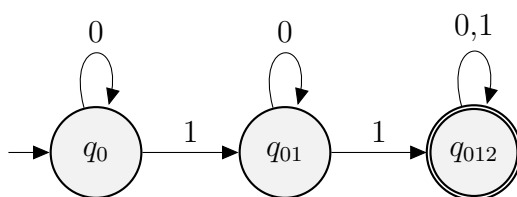
Determinare il DFA equivalente al seguente NFA e il linguaggio accettato.

	<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>q_0</math></b>	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
<b><math>q_1</math></b>	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
<b><math>q_2</math></b>	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

**Soluzione.** Applichiamo la costruzione per sottoinsiemi:

	<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>q_0</math></b>	$q_0$	$q_{01}$
<b><math>q_{01}</math></b>	$q_{01}$	$q_{012}$
<b><math>\dot{q}_{012}</math></b>	$q_{012}$	$q_{012}$

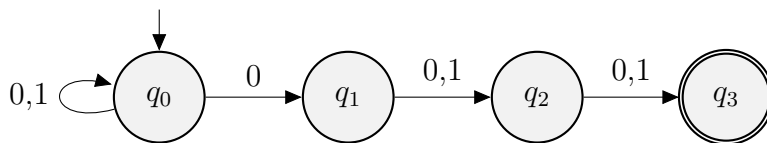
Grafo di transizione dei soli stati raggiungibili a partire da  $q_0$ :



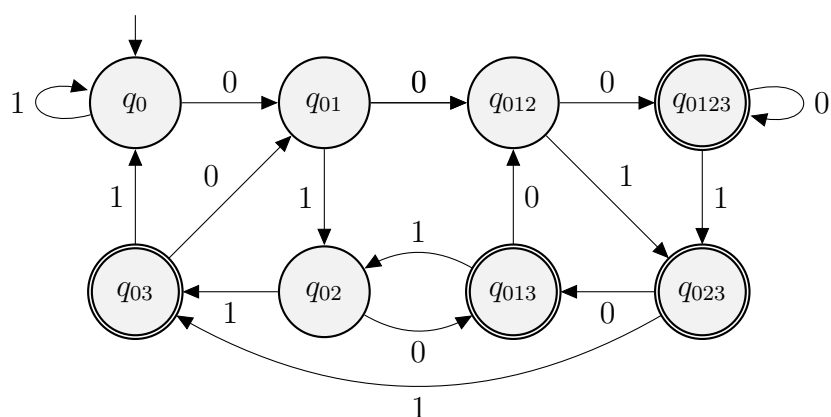
$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ contiene almeno due occorrenze del simbolo '1'}\}.$$

### Esercizio 3.19

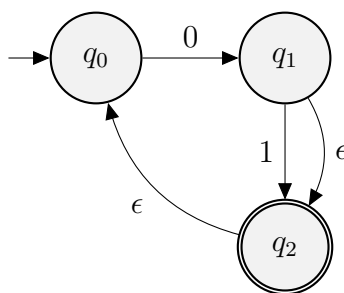
Costruire un NFA con 4 stati che accetta il seguente linguaggio:  $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ ha '0' come terzultimo simbolo}\}$  e trovare il DFA equivalente.



	0	1
$q_0$	$q_{01}$	$q_0$
$q_{01}$	$q_{012}$	$q_{02}$
$q_{012}$	$q_{0123}$	$q_{023}$
$q_{02}$	$q_{013}$	$q_{03}$
$\dot{q}_{0123}$	$q_{0123}$	$q_{023}$
$\dot{q}_{023}$	$q_{013}$	$q_{03}$
$\dot{q}_{013}$	$q_{012}$	$q_{02}$
$\dot{q}_{03}$	$q_{01}$	$q_0$



### 3.4 $\epsilon$ -NFA: automi a stati finiti non deterministici con $\epsilon$ -transizioni



	$\epsilon$	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>q<sub>0</sub></b>	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
<b>q<sub>1</sub></b>	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
<b>q<sub>2</sub></b>	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Per come sono definiti gli  $\epsilon$ -NFA, a partire da uno stato  $q \in Q$ , è possibile transire verso un insieme di stati  $S \in \mathcal{P}(Q)$  anche senza aver letto nessun simbolo, questo è possibile grazie a particolari transizioni, le  $\epsilon$ -transizioni.

### 3.4.1 Definizioni, Teoremi e Lemmi

**Definizione 3.9** ( $\epsilon$ -NFA: automa a stati finiti non deterministico con  $\epsilon$ -transizioni). *Un  $\epsilon$ -NFA è una quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , la cui definizione differisce dalla quintupla degli NFA solo nella funzione di transizione che è definita come:*

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \mapsto \mathcal{P}(Q).$$

La funzione di transizione negli  $\epsilon$ -NFA quindi può prendere in ingresso sia simboli dell'alfabeto che il simbolo  $\epsilon$  da cui derivano le  $\epsilon$ -transizioni. Prima di definire la funzione di transizione su stringhe, definiamo formalmente  $\epsilon$ -step ed  $\epsilon$ -closure che consistono nell'applicare delle  $\epsilon$ -transizioni ad insiemi di stati.

**Definizione 3.10** (Operatore). *Una funzione  $f$  è detta operatore se dominio e codominio di  $f$  sono lo stesso insieme.*

E' lecito chiedersi cosa succede applicando più volte un operatore.

**Definizione 3.11** (Applicazione iterata di un operatore). *Sia  $S$  un insieme e  $a \in S$ . Sia  $f : S \mapsto S$ .*

$$f^n(a) := \begin{cases} a, & \text{se } n = 0; \\ f(f^{n-1}(a)), & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Definizione 3.12** (UCO: operatore di chiusura superiore). *Sia  $(S, \subseteq)$  un insieme ordinato dalla relazione  $\subseteq$ .  $f : S \mapsto S$  è un UCO se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

1.  $f$  è monotono:  $\forall x, y \in S : x \subseteq y \implies f(x) \subseteq f(y)$ ;
2.  $f$  è estensivo:  $\forall x \in S : x \subseteq f(x)$ ;
3.  $f$  è idempotente:  $\forall x \in S : f(x) = f(f(x))$ .

**Definizione 3.13** ( $\epsilon$ -step). *Sia  $M$  un  $\epsilon$ -NFA definito dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  e sia  $S \in \mathcal{P}(Q)$ . L'operatore  $\epsilon$ -step:  $\mathcal{P}(Q) \mapsto \mathcal{P}(Q)$  è definito come:*

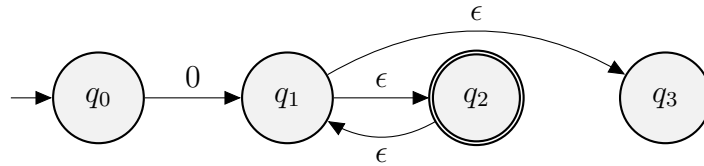
$$\epsilon\text{-step}(S) = \{ q \in Q \mid \exists p \in S . q \in \delta(p, \epsilon) \}.$$

L' $\epsilon$ -step applicata ad un insieme  $S$  di stati quindi ritorna come risultato un insieme di stati che è ottenuto applicando le *epsilon*-transizioni a tutti gli elementi di  $S$ .

**Definizione 3.14** ( $\epsilon$ -step iterati). *Sia  $M$  un  $\epsilon$ -NFA definito dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  e sia  $S \in \mathcal{P}(Q)$ ,*

$$\epsilon\text{-step}^n(S) := \begin{cases} S & \text{se } n = 0; \\ \epsilon\text{-step}(\epsilon\text{-step}^{n-1}(S)) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Esempio.** Grafo di transizione di un  $\epsilon$ -NFA  $M$ :



Alcuni  $\epsilon$ -step sugli stati di  $M$ :

$$\epsilon\text{-step}^0(\{ q_0 \}) = \{ q_0 \} \quad [\text{def. } \cdot^0].$$

$$\epsilon\text{-step}(\{q_0\}) = \emptyset \quad [\text{def. } \epsilon\text{-step}].$$

$$\epsilon\text{-step}(\{q_1\}) = \{q_2, q_3\} \quad [\text{def. } \epsilon\text{-step}].$$

$$\begin{aligned} \epsilon\text{-step}^2(\{q_1\}) &= \epsilon\text{-step}(\epsilon\text{-step}(\epsilon\text{-step}^0(\{q_1\}))) && [\text{def. } \cdot^n] \\ &= \epsilon\text{-step}(\epsilon\text{-step}(\{q_1\})) && [\text{def. } \cdot^0] \\ &= \epsilon\text{-step}(\{q_2, q_3\}) && [\text{def. } \epsilon\text{-step}] \\ &= \{q_1\} && [\text{def. } \epsilon\text{-step}]. \end{aligned}$$

**Definizione 3.15** ( $\epsilon$ -closure). Sia  $M$  un  $\epsilon$ -NFA definito dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Sia  $S \in \mathcal{P}(Q)$ . La  $\epsilon$ -closure :  $\mathcal{P}(Q) \mapsto \mathcal{P}(Q)$  è la chiusura riflessiva e transitiva dell' $\epsilon$ -step, ovvero:

$$\epsilon\text{-closure}(S) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \epsilon\text{-step}^i(S).$$

Per poter applicare la  $\epsilon$ -closure anche ad un singolo stato  $q$  senza dover per forza utilizzare la notazione insiemistica  $\{q\}$  definiamo  $\epsilon\text{-closure} : Q \mapsto \mathcal{P}(Q)$  come:

$$\epsilon\text{-closure}(q) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \epsilon\text{-step}^i(\{q\}).$$

**Esempio.**

$$\begin{aligned} \epsilon\text{-closure}(q_1) &= \epsilon\text{-step}^0(\{q_1\}) \cup \epsilon\text{-step}(\{q_1\}) \cup \epsilon\text{-step}^2 \dots && [\text{def. } \epsilon\text{-closure}] \\ &= \{q_1\} \cup \{q_2, q_3\} \cup \{q_1\} \cup \{q_2, q_3\} \cup \dots && [\text{def. } \epsilon\text{-step}] \\ &= \{q_1, q_2, q_3\} && [\text{def. } \cup]. \end{aligned}$$

Notare che anche se l' $\epsilon$ -closure è un unione su tutto  $\mathbb{N}$ , dal momento che gli stati dell'automa sono finiti e quindi anche il numero di transizioni sono finite, si arriva ad un certa  $i$  per la quale applicare  $\epsilon\text{-step}^i$  aggiunge soltanto duplicati al nostro insieme quindi il punto fisso è stato raggiunto e non serve continuare, nell'esempio il punto fisso si raggiunge per  $i = 1$ , ovvero per  $i = 2$  viene aggiunto un duplicato.

**Lemma 3.2** (Monotonia di  $\epsilon$ -closure). Sia  $Q$  un insieme di stati di un  $\epsilon$ -NFA. Siano  $R, S \subseteq Q$ .  $\epsilon$ -closure è un operatore monotono quindi vale che

$$(R \subseteq S) \implies (\epsilon\text{-closure}(R) \subseteq \epsilon\text{-closure}(S)).$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
\epsilon\text{-closure}(R) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \epsilon\text{-step}^i(R) && [\text{def. } \epsilon\text{-closure}] \\
&\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \epsilon\text{-step}^i(S) && [R \subseteq S, \text{ def. } \epsilon\text{-step}] \\
&= \epsilon\text{-closure}(S).
\end{aligned}$$

□

**Lemma 3.3** (Estensività di  $\epsilon$ -closure). *Sia  $S$  un insieme di stati di un  $\epsilon$ -NFA.  $\epsilon$ -closure è un operatore estensivo quindi vale che*

$$S \subseteq \epsilon\text{-closure}(S).$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
\epsilon\text{-closure}(S) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \epsilon\text{-step}^i(S) && [\text{def. } \epsilon\text{-closure}] \\
&= \epsilon\text{-step}^0(S) \cup \bigcup_{i \geq 1} \epsilon\text{-step}^i(S) && [\text{def. } \cup] \\
&= S \cup \bigcup_{i \geq 1} \epsilon\text{-step}^i(S) && [\text{def. } \cdot^0].
\end{aligned}$$

□

**Lemma 3.4** (Idempotenza di  $\epsilon$ -closure). *Sia  $q \in Q$  uno stato.*

$$\epsilon\text{-closure}(\epsilon\text{-closure}(q)) = \epsilon\text{-closure}(q).$$

*Dimostrazione.* Notiamo che

$$\forall S \subseteq Q, \forall i \in \mathbb{N} : \epsilon\text{-step}^i(S) \subseteq \epsilon\text{-closure}(S) \quad [\text{def. } \epsilon\text{-closure}]. \quad (5)$$



$$\begin{aligned}
\epsilon\text{-closure}(\epsilon\text{-closure}(q)) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \epsilon\text{-step}^i(\epsilon\text{-closure}(q)) && [\text{def. } \epsilon\text{-closure}] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \epsilon\text{-step}^i(\epsilon\text{-closure}(q)) && [\text{def. } \epsilon\text{-closure}] \\
&= \epsilon\text{-step}^0(\epsilon\text{-closure}(q)) \cup \bigcup_{i \geq 1} \epsilon\text{-step}^i(\epsilon\text{-closure}(q)) && [0 \in \mathbb{N}] \\
&= \epsilon\text{-closure}(q) \cup \underbrace{\bigcup_{i \geq 1} \epsilon\text{-step}^i(\epsilon\text{-closure}(q))}_{\subseteq \epsilon\text{-closure}} && [\text{def. } \cdot^0] \\
&= \epsilon\text{-closure}(q) && [(5), \text{Lemma 4.1}].
\end{aligned}$$

□

**Lemma 3.5** ( $\epsilon$ -closure è un UCO). *Per la  $\epsilon$ -closure valgono le seguenti condizioni:*

1. *monotonia;*
2. *idempotenza;*
3. *estensività.*

*Quindi  $\epsilon$ -closure è un UCO.*

**Lemma 3.6** (Additività di  $\epsilon$ -closure). *Sia  $Q$  l'insieme degli stati di un  $\epsilon$ -NFA. Siano  $R, S \subseteq Q$ .  $\epsilon$ -closure è un operatore additivo quindi vale che*

$$\epsilon\text{-closure}(R \cup S) = \epsilon\text{-closure}(R) \cup \epsilon\text{-closure}(S).$$

**Definizione 3.16** (Funzione di transizione su stringhe). *Sia  $M$  un  $\epsilon$ -NFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Sia  $x$  una stringa su  $\Sigma^*$ . La funzione di transizione su stringhe  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \mapsto \mathcal{P}(Q)$  è definita come:*

$$\hat{\delta}(q, x) := \begin{cases} \epsilon\text{-closure}(q) & \text{se } x = \epsilon; \\ \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, y)} \epsilon\text{-closure}(\delta(p, a)) & \text{se } x = ya. \end{cases}$$

**Osservazione 3.4.** *Nella definizione di  $\hat{\delta}$  vi è un elemento di arbitrarietà.  $\hat{\delta}$  si può sostituire con la funzione  $\check{\delta}$  così definita:*

$$\check{\delta}(q, x) := \begin{cases} \epsilon\text{-closure}(q) & \text{se } x = \epsilon; \\ \bigcup_{r \in \left( \bigcup_{p \in \epsilon\text{-closure}(q)} \delta(p, a) \right)} \hat{\delta}(r, y) & \text{se } x = ay \end{cases}$$

Nella pratica, se un  $\epsilon$ -NFA  $M$  si trova in un insieme di stati  $S$ , prima di leggere il prossimo simbolo in ingresso  $a$ , viene applicata la  $\epsilon$ -closure( $S$ ) che ha come conseguenza la transizione di  $M$  dall'insieme di stati  $S$  verso un insieme  $S' = \epsilon\text{-closure}(S)$ . Per ogni stato in  $S'$  è poi possibile procedere con la lettura del prossimo simbolo in ingresso  $a$  che farà transitare  $M$  verso un altro insieme di stati  $S'' = \bigcup_{s \in S'} \delta(s, a)$ , al quale verrà nuovamente applicata la  $\epsilon$ -closure prima di leggere il prossimo simbolo sul nastro. Si procede in questo modo finché tutti i simboli sul nastro sono stati letti, ovvero fino a che sul nastro di ingresso rimane la stringa vuota  $\epsilon$ . Con la sola stringa vuota sul nastro di ingresso, si applica un'ultima volta la  $\epsilon$ -closure ottenendo un ultimo insieme di stati  $T$ . Se  $T$  ha intersezione non vuota con  $F$ , allora la stringa che è stata letta un simbolo alla volta è accettata da  $M$ .

**Definizione 3.17** (Accettazione di una stringa). *Sia  $M$  un  $\epsilon$ -NFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Sia  $x$  una stringa su  $\Sigma^*$ . La stringa  $x$  è accettata da  $M$  se e solo se:*

$$\hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset.$$

Una stringa  $x$  quindi è accettata da un  $\epsilon$ -NFA  $M$  se, partendo dallo stato iniziale  $q_0$  e leggendo  $x$ , l'automa termina in un insieme di stati che ha intersezione non nulla con  $F$ .

**Definizione 3.18** (Linguaggio accettato da un NFA). *Sia  $M$  un  $\epsilon$ -NFA descritto dalla quintupla  $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ . Il linguaggio accettato da  $M$  si indica con  $L(M)$  ed è l'insieme di tutte le stringhe accettate da  $M$ , ovvero:*

$$L(M) := \{ x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset \}.$$

**Teorema 3.3** (Equivalenza tra  $\epsilon$ -NFA e NFA). *Sia  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un  $\epsilon$ -NFA, allora esiste un NFA  $M'$  tale che*

$$L(M) = L(M').$$

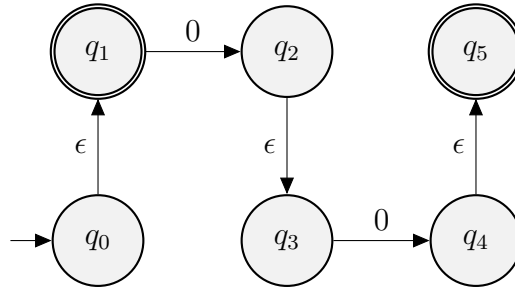
**Corollario 3.1** (Equivalenza tra DFA, NFA e  $\epsilon$ -NFA). *Le classi di linguaggi accettati da DFA, NFA ed  $\epsilon$ -NFA coincidono (linguaggi regolari).*

### 3.4.2 Eliminazione delle $\epsilon$ -transizioni

Dato un  $\epsilon$ -NFA, per trovare un NFA equivalente, è necessario eliminare le  $\epsilon$ -transizioni. Per fare questo, eseguiamo i seguenti passaggi  $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$ :

1. applichiamo  $\epsilon\text{-closure}(q)$ , ottenendo un insieme di stati  $S$ . Se  $q = q_0$  e  $\epsilon\text{-closure}(q_0) \cap F \neq \emptyset$  allora  $q_0$  oltre che stato iniziale diventa anche stato accettante nell'NFA equivalente che stiamo costruendo;
2.  $\forall s \in S$  applichiamo la  $\delta(s, a)$  e collezioniamo gli stati ottenuti in un insieme che chiameremo  $S'' = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$ ;
3. applichiamo la  $\epsilon\text{-closure}(S'') = S'''$  ottenendo un insieme di stati che, se stiamo costruendo una matrice di transizione, andremo a scrivere in corrispondenza della cella  $[q, a] = S'''$ .

**Esempio.** Descrizione di un  $\epsilon$ -NFA tramite grafo di transizione:



Per completare ad esempio la cella  $(q_0, 0)$  della matrice di transizione del NFA equivalente partiamo dallo stato  $q_0$  del  $\epsilon$ -NFA e applichiamo:

$$q_0 \xrightarrow{\epsilon\text{-closure}} \{q_0, q_1\} \xrightarrow{0} \{q_2\} \xrightarrow{\epsilon\text{-closure}} \{q_2, q_3\}.$$

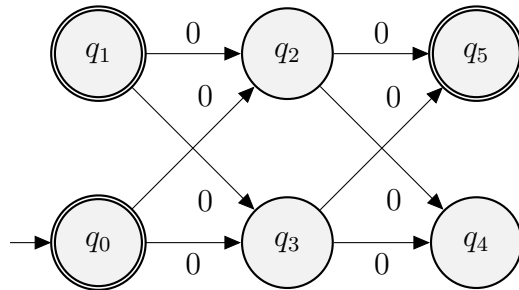
dal momento che nella  $\epsilon\text{-closure}(q_0)$  è presente lo stato finale  $q_1$ , lo stato  $q_0$  nel NFA equivalente diventa stato finale. Stesso procedimento per completare la cella  $(q_1, 0)$ :

$$q_1 \xrightarrow{\epsilon\text{-closure}} \{q_1\} \xrightarrow{0} \{q_2\} \xrightarrow{\epsilon\text{-closure}} \{q_2, q_3\}.$$

Ripetendo questo processo per ogni stato dell'  $\epsilon$ -NFA e ogni simbolo dell'alfabeto, si ottiene la matrice di transizione dell'NFA equivalente:

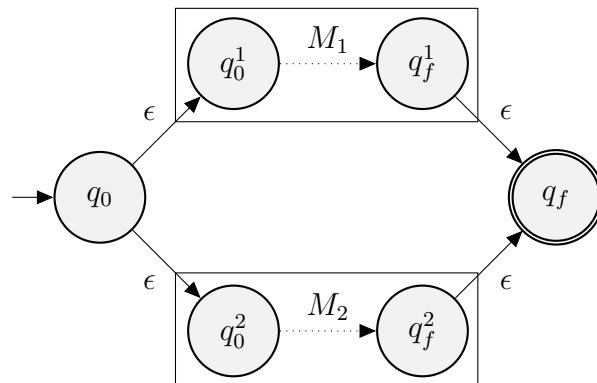
	0	1
$\dot{q}_0$	$\{q_2, q_3\}$	$\emptyset$
$\dot{q}_1$	$\{q_2, q_3\}$	$\emptyset$
$q_2$	$\{q_4, q_5\}$	$\emptyset$
$q_3$	$\{q_4, q_5\}$	$\emptyset$
$q_4$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\dot{q}_5$	$\emptyset$	$\emptyset$

Grafo di transizione del NFA equivalente:



**Nota su  $\epsilon$ -transizioni.** Le  $\epsilon$ -transizioni sono utili per “cucire” insieme diversi DFA. L’unica accortezza è quella che ciascun DFA deve avere un unico stato finale; nel caso un DFA abbia più stati finali basta collegarli con  $\epsilon$ -transizioni ad un nuovo stato che sarà l’unico finale. Siano ad esempio  $M_1, M_2$  DFA e  $L_1 = L(M_1), L_2 = L(M_2)$ .

E’ estremamente semplice costruire un  $\epsilon$ -NFA che accetta il linguaggio  $L_1 \cup L_2$ :



*Dimostrazione.* Per costruzione dell'automa vale che:

$$q_0^{(1)}, q_0^{(2)} \in \epsilon\text{-closure}(q_0). \quad (6)$$

$$q_f \in \epsilon\text{-closure}(q_f^{(1)}). \quad (7)$$

$$q_f \in \epsilon\text{-closure}(q_f^{(2)}). \quad (8)$$

**Mostriamo** ( $\implies$ ): sia  $x \in \Sigma^*$ , se vale

$$(\hat{\delta}(q_0^{(1)}, x) = q_f^{(1)} \vee \hat{\delta}(q_0^{(2)}, x) = q_f^{(2)})$$

allora vale anche che

$$\begin{aligned} & \left( \bigcup_{p \in \epsilon\text{-closure}(q_0)} \hat{\delta}(p, x) \right) \cap \{q_f^{(1)}, q_f^{(2)}\} && [(6)] \\ \iff & \hat{\delta}(q_0, \epsilon x) \cap \{q_f^{(1)}, q_f^{(2)}\} && [\text{def. } \hat{\delta}] \\ \iff & \hat{\delta}(q_0, x) \cap \{q_f^{(1)}, q_f^{(2)}\} && [\epsilon \text{ è ident.}.] \end{aligned}$$

Quindi abbiamo mostrato che

$$(\hat{\delta}(q_0^{(1)}, x) = q_f^{(1)} \vee \hat{\delta}(q_0^{(2)}, x) = q_f^{(2)}) \implies \hat{\delta}(q_0, x) \cap \{q_f^{(1)}, q_f^{(2)}\}. \quad (9)$$

allora vale anche

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, x) &= \hat{\delta}(q_0, x\epsilon) && [\epsilon \text{ è identità}] \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), \epsilon) && [\text{prop. di } \hat{\delta}] \\ &= \epsilon\text{-closure}(\hat{\delta}(q_0, x)) && [\text{def. } \hat{\delta}], \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} q_f &\in \epsilon\text{-closure}(\hat{\delta}(q_0, x)) && [(9), (7), (8)] \\ &= \hat{\delta}(q_0, x) && [\text{def. di } \hat{\delta}]. \end{aligned}$$

**Mostriamo** ( $\impliedby$ ): sia  $x = wa \in \Sigma^*$ , se vale

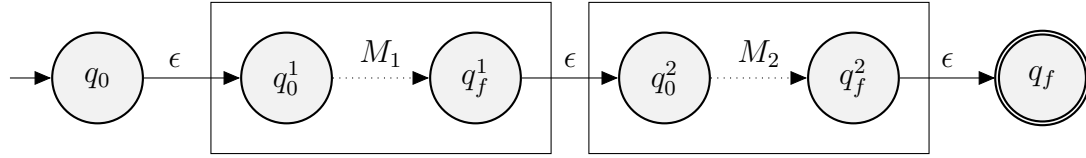
$$\hat{\delta}(q_0, x) \cap \{q_f\}$$

allora

$$\begin{aligned}
q_f &\in \hat{\delta}(q_0, wa) && [x = wa] \\
\iff q_f &\in \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, w)} \epsilon\text{-closure}(\delta(p, a)) && [\text{def. } \hat{\delta}] \\
\iff \exists p &\in \hat{\delta}(q_0, w) . q_f \in \epsilon\text{-closure}(\delta(p, a)) \\
\iff \exists p^{(i)} &\in \delta(q_0^{(i)}, w) . q_f^{(i)} \in \epsilon\text{-closure}(\delta(p^{(i)}, a)) && [(7), (8), i = 1 \vee i = 2] \\
\iff (\hat{\delta}(q_0^{(1)}, x) = q_f^{(1)} \vee \hat{\delta}(q_0^{(2)}, x) = q_f^{(2)}).
\end{aligned}$$

□

E' estremamente semplice anche costruire un altro  $\epsilon$ -NFA che accetta il linguaggio  $L_1 \cdot L_2$ :



*Dimostrazione.* Sia  $xy \in \Sigma^*$ . Vogliamo mostrare che  $xy$  è accettata da  $M$  se e solo se  $x$  è accettata da  $M_1$  e  $y$  è accettata da  $M_2$ , ovvero

$$(\hat{\delta}(q_0^1, x) = q_f^1 \wedge \hat{\delta}(q_0^2, y) = q_f^2) \iff (\hat{\delta}(q_0, xy) \cap q_f \neq \emptyset).$$

(Lasciato per esercizio).

□

### Nota su automi a stati finiti in generale.

1. Fornire a un DFA la possibilità di produrre output, eventualmente scrivendo sul nastro, non ne aumenta la capacità computazionale perché ciò che viene scritto non potrebbe essere mai letto.
2. Fornire a un DFA la possibilità di muovere la testina sia a sinistra che a destra non ne aumenta la capacità computazionale perché i dati letti rimarrebbero sempre gli stessi.
3. La combinazione dei punti 1 e 2 permette di passare a un formalismo più potente (*macchine di Turing*).

### 3.4.3 Esercizi

#### Esercizio 3.20

Sia  $Q$  un insieme di stati. Sia  $\Sigma$  un alfabeto. Quanti sono gli  $\epsilon$ -NFA che si possono costruire fissati  $Q$  e  $\Sigma$ ?

**Soluzione.** Un  $\epsilon$ -NFA è una quintupla  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , se  $Q$  possiamo contare i possibili  $\epsilon$ -NFA nel seguente modo:

- numero di modi in cui possiamo scegliere lo stato iniziale  $q_0$  è

$$|Q|;$$

- numero di modi in cui possiamo scegliere l'insieme degli stati finali  $F \subseteq Q$  è

$$|\mathcal{P}(Q)| = 2^{|Q|};$$

- numero di modi in cui possiamo definire la funzione di transizione  $\delta$  è

$$(2^{|Q|})^{|Q|(|\Sigma|+1)},$$

perché ogni in ogni cella della matrice di transizione possiamo inserire  $2^{|Q|}$  valori differenti, e le dimensioni della matrice sono  $|Q|(|\Sigma| + 1)$ .

Quindi, fissati  $Q$  e  $\Sigma$ , è possibile costruire

$$|Q| \cdot 2^{|Q|} \cdot (2^{|Q|})^{|Q|(|\Sigma|+1)} = |Q| \cdot 2^{|Q|} \cdot 2^{|Q|^2(|\Sigma|+1)} = |Q| \cdot 2^{|Q|^2(|\Sigma|+1)+|Q|}$$

differenti  $\epsilon$ -NFA.

## 4 Espressioni Regolari

### 4.1 Operazioni su Linguaggi

**Definizione 4.1** (Linguaggio formale). *Sia  $\Sigma$  un alfabeto, un linguaggio formale (in breve linguaggio, spesso indicato con  $L$ ), è un insieme formato dalle stringhe su  $\Sigma$ , quindi vale che:*

$$L \subseteq \Sigma^*.$$

Notare che:

- $\Sigma^*$  è esso stesso un linguaggio, il linguaggio formato da *tutte* le stringhe su  $\Sigma$ ;
- essendo  $\emptyset$  sottoinsieme di qualsiasi altro insieme,  $\emptyset \subseteq \Sigma^*$  dunque  $\emptyset$  è un linguaggio su qualsiasi alfabeto;
- essendo  $\epsilon$  la stringa nulla su qualsiasi alfabeto  $\Sigma$ ,  $\{\epsilon\} \subseteq \Sigma^*$  dunque  $\{\epsilon\}$  è un linguaggio su qualsiasi alfabeto.

**Definizione 4.2** (Concatenazione). *Siano  $\Sigma$  un alfabeto e  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  linguaggi, la concatenazione di  $L_1$  e  $L_2$ , denotata con  $L_1 \cdot L_2$ , è l'insieme:*

$$L_1 \cdot L_2 := \{x \cdot y \mid x \in L_1, y \in L_2\}.$$

**Definizione 4.3** (Concatenazione iterata). *Siano  $\Sigma$  un alfabeto,  $L \subseteq \Sigma^*$  un linguaggio e sia  $n \in \mathbb{N}$ , allora:*

$$L^n := \begin{cases} \{\epsilon\}, & \text{se } n = 0; \\ L \cdot L^{n-1}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Lemma 4.1.** *Sia  $I$  un insieme qualsiasi di indici, e sia  $\{S_i\}_{i \in I}$  una famiglia di insiemi indicizzata su  $I$ . Sia  $T$  un altro insieme. Se per ogni  $i \in I$  abbiamo  $S_i \subseteq T$ , allora  $\bigcup_{i \in I} S_i \subseteq T$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo mostrare che, preso un qualsiasi  $x \in \bigcup_{i \in I} S_i$ , abbiamo  $x \in T$ . Infatti, se  $x \in \bigcup_{i \in I} S_i$ , deve necessariamente esistere (almeno un)  $j \in I$  tale che  $x \in S_j$ . Ma allora, poiché  $S_j \subseteq T$ , abbiamo  $x \in T$ .  $\square$



**Lemma 4.2** (Proprietà distributiva della concatenazione sull'unione). *Sia  $I$  un insieme qualsiasi di indici, e sia  $\{L_i\}_{i \in I}$  una famiglia di linguaggi indicizzata su  $I$ . Sia  $M$  un altro linguaggio. Si ha che*

$$M \bigcup_{i \in I} L_i = \bigcup_{i \in I} (ML_i), \quad (10)$$

$$\left( \bigcup_{i \in I} L_i \right) M = \bigcup_{i \in I} (L_i M). \quad (11)$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (10):

$$\begin{aligned} M \bigcup_{i \in I} L_i &= \left\{ xy \mid x \in M, y \in \bigcup_{i \in I} L_i \right\} && [\text{def. concat.}] \\ &= \{ xy \mid x \in M, j \in I, y \in L_j \} && [\text{def. } \cup] \\ &= \bigcup_{i \in I} \{ xy \mid x \in M, y \in L_i \} && [\text{def. } \cup] \\ &= \bigcup_{i \in I} (ML_i) && [\text{def. concat.}] \end{aligned}$$

La dimostrazione della (11) è del tutto analoga.  $\square$

**Lemma 4.3** (Monotonia della concatenazione). *Siano  $L_1$ ,  $L_2$  e  $M$  tre linguaggi qualsiasi. Se*

$$L_1 \subseteq L_2, \quad (12)$$

*allora*

$$L_1 M \subseteq L_2 M, \quad (13)$$

$$ML_1 \subseteq ML_2. \quad (14)$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (13):

$$\begin{aligned} L_1 M &= \{ xy \mid x \in L_1, y \in M \} && [\text{def. concat.}] \\ &\subseteq \{ xy \mid x \in L_2, y \in M \} && [(12)] \\ &= L_2 M && [\text{def. concat.}] \end{aligned}$$

La dimostrazione della (14) è del tutto analoga.  $\square$

**Definizione 4.4** (Chiusura di Kleene). *Siano  $\Sigma$  un alfabeto e  $L \subseteq \Sigma^*$  un linguaggio, allora:*

$$L^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i.$$

**Lemma 4.4.** (Idempotenza della chiusura di Kleene). *Sia  $L$  un linguaggio, allora*

$$(L^*)^* = L^* L^* = L^*.$$

*Dimostrazione.* Dividiamo la dimostrazione in due parti:

1. da  $(L^*)^*$  in  $L^*$

$$\begin{aligned} (L^*)^* &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L^j \right)^i && [\text{def. } \cdot^*] \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L^{ij} && [\text{def. } L^m] \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k && [\{ij \mid i, j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}] \\ &= L^* && [\text{def. } \cdot^*]. \end{aligned}$$

2. da  $L^* L^*$  in  $L^*$

$$\begin{aligned} L^* L^* &= \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i \right) \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L^j \right) && [\text{def. } \cdot^*] \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left( L^i \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L^j \right) && [\text{p. distrib. di } \cdot] \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L^i L^j && [\text{p. distrib. di } \cdot] \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L^{i+j} && [\text{def. } L^m] \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k && [\{i+j \mid i, j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}] \\ &= L^* && [\text{def. } \cdot^*]. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.5** (Monotonia della chiusura di Kleene). *Siano  $L, M$  due linguaggi,*

$$L \subseteq M \implies L^* \subseteq M^*.$$

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che, se

$$L \subseteq M, \tag{15}$$

allora  $L^* \subseteq M^*$ , ovvero che

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i \subseteq M^*. \tag{16}$$

Mostreremo che

$$\forall n \in \mathbb{N} : L^n \subseteq M^*$$

che implica la (16) in virtù del Lemma 4.1. Dimostreremo per induzione matematica semplice su  $n$ , con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (parte antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned} L^n &= L^0 && [n = 0] \\ &= \{ \epsilon \} && [\text{def. } \cdot^0] \\ &= M^0 && [\text{def. } \cdot^0] \\ &\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M^i && [0 \in \mathbb{N}] \\ &= M^* \checkmark && [\text{def. } \cdot^*]. \end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$L^m \subseteq M^* \stackrel{?}{\implies} L^{m+1} \subseteq M^*.$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned}
L^n &= L^{m+1} && [n = m + 1] \\
&= LL^m && [\text{def. } \cdot^{m+1}] \\
&\subseteq LM^* && [\text{ip. ind. e monotonia di } \cdot] \\
&\subseteq MM^* && [(15) \text{ e monotonia di } \cdot] \\
&= M \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M^i && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (MM^i) && [\text{p. distrib. di } \cdot] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M^{i+1} && [\text{def. } \cdot^{i+1}] \\
&= \bigcup_{i \geq 1} M^i && [\text{def. } \cdot^{i+1}] \\
&\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M^i && [\text{def. } \cup] \\
&= M^* \checkmark && [\text{def. } \cdot^*].
\end{aligned}$$

□

**Lemma 4.6** (Estensività della chiusura di Kleene). *Sia  $L$  un linguaggio,*

$$L \subseteq L^*.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
L^* &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= L^0 \cup L \cup \bigcup_{i \geq 2} L^i && [0, 1 \in \mathbb{N}] \\
&\implies L \subseteq L^*.
\end{aligned}$$

□

**Lemma 4.7** (La chiusura di Kleene è un UCO). *Per la chiusura di Kleene valgono le seguenti condizioni:*

1. *monotonia;*

2. idempotenza;

3. estensività.

Quindi la chiusura di Kleene è un UCO.

## 4.2 Espressioni Regolari

Le *espressioni regolari*, che ora vedremo, tra i vari approcci di rappresentazione finita di linguaggi potenzialmente infiniti, ricadono in quello di tipo algebrico.

### 4.2.1 Definizioni, Teoremi e Lemmi

**Definizione 4.5** (Definizione informale della sintassi delle espressioni regolari). *Sia  $\Sigma$  un alfabeto:*

1. *Ogni simbolo  $a \in \Sigma$  è una espressione regolare su  $\Sigma$ .*
2.  *$\epsilon$  è una espressione regolare su  $\Sigma$ .*
3.  *$\emptyset$  è una espressione regolare su  $\Sigma$ .*
4. *Se  $r$  e  $s$  sono espressioni regolari su  $\Sigma$ ,  $r \cdot s$  è una espressione regolare su  $\Sigma$ .*
5. *Se  $r$  e  $s$  sono espressioni regolari su  $\Sigma$ ,  $r + s$  è una espressione regolare su  $\Sigma$ .*
6. *Se  $r$  è una espressione regolare su  $\Sigma$ ,  $r^*$  è una espressione regolare su  $\Sigma$ .*

*Viene spesso considerato pedante aggiungere la seguente clausola di chiusura.*

7. *Niente è un'espressione regolare su  $\Sigma$  se non in virtù dei punti 1–6 di cui sopra.*

**Definizione 4.6** (Definizione formale della sintassi di espressioni regolari, per mezzo di grammatica in forma BNF). *Sia  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$  un alfabeto. Un'espressione regolare su  $\Sigma$  è una qualunque stringa generata dalla seguente grammatica:*

$$E ::= a_1 \mid \dots \mid a_n \mid \epsilon \mid \emptyset \mid E_1 + E_2 \mid E_1 \cdot E_2 \mid E^*$$

**Definizione 4.7** (Definizione della semantica delle espressioni regolari, attraverso la definizione di “fa match”). *Sia  $\Sigma$  un alfabeto e sia  $r$  un'espressione regolare su  $\Sigma$ . Sia  $x \in \Sigma^*$ . Si dice che  $x$  fa match con  $r$ , scritto  $x \triangleleft r$  in ottemperanza alle seguenti regole:*

1.  $a \triangleleft a$ , se  $a \in \Sigma$ ;
2.  $\epsilon \triangleleft \underline{\epsilon}$ ;
3.  $x \not\triangleleft \underline{\emptyset}$ , per ogni  $x \in \Sigma^*$ ;
4.  $x \triangleleft r_1 + r_2$ , se  $x \triangleleft r_1$  o  $x \triangleleft r_2$ ;
5.  $x \triangleleft r_1 \cdot r_2$ , se esistono  $y, z \in \Sigma^*$  tali che  $x = y \cdot z$ ,  $y \triangleleft r_1$ ,  $z \triangleleft r_2$ ;
6.  $x \triangleleft r^*$ , se  $x \triangleleft \underline{\epsilon}$  oppure esistono  $y, z \in \Sigma^*$  tali che  $x = y \cdot z$ ,  $y \triangleleft r$ ,  $z \triangleleft r^*$ .

**Definizione 4.8** (Linguaggio denotato da un'espressione regolare). *Siano  $\Sigma$  un alfabeto ed  $r$  una espressione regolare su  $\Sigma$ , allora il linguaggio denotato da  $r$  è definito come:*

$$L(r) = \llbracket r \rrbracket := \{ x \in \Sigma^* \mid x \triangleleft r \}.$$

**Definizione 4.9** (Linguaggio regolare).  *$L$  è un linguaggio regolare se esiste almeno una espressione regolare  $r$  che lo denota, ovvero*

$$L = L(r).$$

Creiamo una tabella che riassume quanto detto fino ad ora riguardo a sintassi e semantica (il significato da associato alla sintassi) delle espressioni regolari:

Simbolo metalinguaggio ER	Sintassi	Semantica
$a$	$a$ , con $a \in \Sigma$	$\llbracket a \rrbracket = L(a) = \{ a \}$
$\underline{\emptyset}$	$\underline{\emptyset}$	$\llbracket \underline{\emptyset} \rrbracket = L(\underline{\emptyset}) = \emptyset$
$\underline{\epsilon}$	$\underline{\epsilon}$	$\llbracket \underline{\epsilon} \rrbracket = L(\underline{\epsilon}) = \{ \epsilon \}$
$\cdot$	$r \cdot s$	$\llbracket r \cdot s \rrbracket = L(r) \cdot L(s)$
$+$	$r + s$	$\llbracket r + s \rrbracket = L(r) \cup L(s)$
$*$	$r^*$	$\llbracket r^* \rrbracket = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i$
$\underline{()}$	$\underline{(r)}$	$\llbracket \underline{(r)} \rrbracket = L(\underline{(r)}) = L(r)$
$\underline{+}$	$\underline{r^+}$	$\llbracket \underline{r^+} \rrbracket = L(r) \cdot L(r)^*$

Tra espressioni regolari valgono alcune relazioni che ne permettono la manipolazione algebrica. Siano  $r, s$  espressioni regolari allora

$$\begin{aligned} r = s &\iff L(r) = L(s), \\ r \preceq s &\iff L(r) \subseteq L(s). \end{aligned}$$

**Lemma 4.8** (Identità del  $+$ ). *Sia  $r$  una generica espressione regolare allora*

$$r + \emptyset = r.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} L(r + \emptyset) &= L(r) \cup L(\emptyset) && [\text{def. } +] \\ &= L(r) && [\text{def. } \cup]. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.9** (Proprietà commutativa del  $+$ ). *Siano  $r, s$  espressioni regolari allora*

$$r + s = s + r.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} L(r + s) &= L(r) \cup L(s) && [\text{def. } +] \\ &= L(s) \cup L(r) && [\text{p. comm. di } \cup] \\ &= L(s + r) && [\text{def. } +]. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.10** (Proprietà associativa del  $+$ ). *Siano  $r, s, t$  espressioni regolari, allora*

$$(r + s) + t = r + (s + t).$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} L((r + s) + t) &= (L(r) \cup L(s)) \cup L(t) && [\text{def. } +] \\ &= L(r) \cup (L(s) \cup L(t)) && [\text{p. assoc. di } \cup] \\ &= L(r + (s + t)) && [\text{def. } +]. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.11** (Identità della concatenazione). *Sia  $r$  una generica espressione regolare allora*

$$\epsilon r = r = r \epsilon$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la prima uguaglianza

$$\begin{aligned} L(\epsilon r) &= L(\epsilon)L(r) && [\text{def. concat.}] \\ &= \{ xy \mid x \in L(\epsilon), y \in L(r) \} && [\text{def. concat.}] \\ &= \{ xy \mid x \in \{ \epsilon \}, y \in L(r) \} && [\text{def. concat.}] \\ &= \{ \epsilon y \mid y \in L(r) \} && [x = \epsilon] \\ &= \{ y \mid y \in L(r) \} && [\epsilon \text{ è identità}] \\ &= L(r) && [\text{def. concat.}] \end{aligned}$$

La dimostrazione di della seconda uguaglianza è analoga.  $\square$

**Lemma 4.12** (Elemento assorbente della concatenazione). *Sia  $r$  una espressione regolare, allora*

$$r\emptyset = \emptyset.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} L(r\emptyset) &= L(r)L(\emptyset) && [\text{def. conat.}] \\ &= \{ xy \mid x \in L(r), y \in L(\emptyset) \} && [\text{def. concat.}] \\ &= \{ xy \mid x \in L(r), y \in \emptyset \} && [\text{def. } \emptyset] \\ &= \emptyset && [\nexists y \in \emptyset]. \end{aligned}$$

$\square$

**Lemma 4.13** (Proprietà associativa della concatenazione). *Siano  $r, s, t$  espressioni regolari, allora*

$$(rs)t = r(st).$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} L((rs)t) &= L(rs)L(t) && [\text{def. concat.}] \\ &= (L(r)L(s))L(t) && [\text{def. concat.}] \\ &= L(r)(L(s)L(t)) && [\text{def. concat.}] \\ &= L(r)L(st) && [\text{def. concat.}] \\ &= L(r(st)) && [\text{def. concat.}] \end{aligned}$$



□

**Lemma 4.14** (Proprietà distributiva della concatenazione sul  $+$ ). *Siano  $r, s, t$  espressioni regolari, allora*

$$r(s + t) = rs + rt$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} L(r(s + t)) &= L(r)(L(s) \cup L(t)) && [\text{def. } +, \text{ def. concat.}] \\ &= (L(r)L(s)) \cup (L(r)L(t)) && [\text{p. distrib. concat.}] \\ &= L(rs) \cup L(rt) && [\text{def. concat.}] \\ &= L(rs + rt) && [\text{def. } +]. \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.1** (Equivalenza tra espressioni regolari e DFA). *Le espressioni regolari ed i DFA sono due formalismi equivalenti:*

1. *Sia  $r$  un'espressione regolare, allora esiste un DFA  $M$  tale che*

$$L(M) = L(r).$$

2. *Sia  $M$  un DFA, allora esiste un'espressione regolare  $r$ , tale che*

$$L(r) = L(M).$$

### 4.2.2 Costruzione di Ken Thompson

Ken Thompson è l'autore dello strumento `grep` e autore del sistema operativo UNIX insieme a Dennis Ritchie (creatore del C). Thompson definì anche un algoritmo per derivare un  $\epsilon$ -NFA da una qualunque espressione regolare dividendola nelle sue sottoespressioni elementari, che possono essere convertite direttamente per mezzo di un insieme di regole.

## 4.3 Esercizi

### Esercizio 4.1

Trovare le espressioni regolari che denotano i seguenti linguaggi:

1.  $\{x \in \{0, 1\}^* \mid |x| = 1\}$ ;
2.  $\{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ termina con '0'}\}$ ;
3.  $\{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ contiene un numero pari di '1'}\}$ ;
4.  $\{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ contiene un numero dispari di '0'}\}$ ;
5.  $\{x \in \{a, b\}^* \mid |x| \text{ è divisibile per } 3\}$ ;
6.  $\{x \in \{a, b, c\}^* \mid x \text{ non contiene } a \text{ o } b \text{ o } c\}$ ;
7.  $\{x \in \{a, b\}^* \mid \text{la sottostringa } ab \text{ occorre esattamente due volte ma non alla fine di } x\}$ .

**Soluzione.**

1.  $(0 + 1)$ ;
2.  $(0 + 1)^*0$ ;
3.  $0^*(10^*10^*)^*$ ;
4.  $1^*(01^*01^*)^*01^*$ ;
5.  $((a + b)(a + b)(a + b))^*$ ;
6.  $(a + b)^* + (a + c)^* + (b + c)^*$ ;
7.  $b^*a^+b^+a^+b(b^+a^* + b^*a^+)$ .

## Esercizio 4.2

Descrivere a parole le stringhe che fanno match con l'espressione regolare  $(aa^*b)^*a^*$ .

**Soluzione.** Sono le stringhe contenenti un numero arbitrario di  $a$  e di  $b$  e ogni occorrenza di  $b$  è direttamente preceduta da almeno una occorrenza di  $a$ .

## Esercizio 4.3

Sia  $\Sigma = \{a, b, c\}$ , trovare un'espressione regolare  $r$  su  $\Sigma$  tale che  $L(r)$  è formato da tutte le stringhe che contengono almeno un'occorrenza di ogni simbolo in  $\Sigma$ . Spiegare brevemente la risposta.

**Soluzione.** “Forziamo l’utente” a scrivere almeno un’occorrenza di ciascun simbolo dell’alfabeto, la nostra espressione regolare  $r$  quindi assomiglierà a qualcosa del tipo:  $(abc)^+$ . Stiamo però forzando anche l’ordine in cui compaiono  $a, b, c$ ; risolviamo esplicitando tutte le possibili permutazioni di  $abc$  per poi metterle in *or* tra loro:  $((abc) + (acb) + (bac) + (bca) + (cab) + (cba))^+$ . A questo punto aggiungiamo la possibilità di inserire qualsiasi cosa tra un simbolo e l’altro, ovvero  $(a + b + c)^*$ , per alleggerire la notazione definiamo

$$_{}^* = (a + b + c)^*.$$

L’espressione regolare finale è quindi

$$\begin{aligned} & ((_{}^*a_{}^*b_{}^*c_{}^*) \\ & + (_{}^*a_{}^*c_{}^*b_{}^*) \\ & + (_{}^*b_{}^*a_{}^*c_{}^*) \\ & + (_{}^*b_{}^*c_{}^*a_{}^*) \\ & + (_{}^*c_{}^*a_{}^*b_{}^*) \\ & + (_{}^*c_{}^*b_{}^*a_{}^*))^+ \end{aligned}$$

#### Esercizio 4.4

Descrivere il modo in cui le espressioni regolari sono costruite.

**Soluzione.** Le espressioni regolari sono costruite in maniera induttiva, applicando un numero di volte arbitrario ma finito le regole descritte precedentemente.

#### Esercizio 4.5

Se una espressione regolare  $r$  non contiene nessuna occorrenza del simbolo  $\emptyset$ , è possibile che  $L(r) = \emptyset$ ?

**Soluzione.** No, non è possibile creare un’espressione regolare  $r$  che denota il linguaggio  $L(r) = \emptyset$  con  $\emptyset \notin r$ ; tra le regole delle espressioni regolari definite in precedenza infatti, l’unico modo per denotare l’insieme vuoto è proprio tramite il simbolo del metalinguaggio  $\emptyset$ .

#### Esercizio 4.6

Se una espressione regolare  $r$  non contiene nessuna occorrenza del simbolo  $\epsilon$ , è possibile che  $L(r)$  contenga la stringa  $\epsilon$ ?

**Soluzione.** Si, preso un  $\Sigma$  qualsiasi ad una espressione regolare  $r^*$  su  $\Sigma$  abbiamo che:

$$\begin{aligned}
L(r)^* &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= L(r)^0 \cup \bigcup_{i \geq 1} L(r)^i && [0 \in \mathbb{N}] \\
&= \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i \geq 1} L(r)^i && [\text{def. } \cdot^0] \\
&\implies \{\epsilon\} \in L(r)^*.
\end{aligned}$$

### Esercizio 4.7

Siano  $r, s, t$  espressioni regolari, supponendo che  $s \preceq t$  e  $rt \preceq t$ , dimostrare per induzione che  $r^n s \preceq t$  è vera per tutte le  $n \geq 0$ ; si deduca che  $r^* s \preceq t$ .

**Soluzione.** Vogliamo mostrare che se

$$L(s) \subseteq L(t), \quad (17)$$

$$L(rt) \subseteq L(t), \quad (18)$$

allora  $L(r^n s) \subseteq L(t)$ . Mostriamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} : L(r^n s) \subseteq L(t),$$

per induzione matematica semplice su  $n$ , con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (parte antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned}
L(r^n s) &= L(r^0 s) && [n = 0] \\
&= L(r)^0 L(s) && [\text{def. concat.}] \\
&= L(s) && [\text{def. } L^n] \\
&\subseteq L(t) \checkmark && [(17)].
\end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$L(r^m s) \subseteq L(t) \stackrel{?}{\implies} L(r^{m+1} s) \subseteq L(t).$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned}
 L(r^n s) &= L(r^{m+1} s) && [n = m + 1] \\
 &= L(rr^m s) && [\text{def. } \cdot^{m+1}] \\
 &= L(r)L(r^m s) && [\text{def. concat.}] \\
 &\subseteq L(r)L(t) && [\text{ip. ind., monotonia di concat.}] \\
 &= L(rt) && [\text{def. concat.}] \\
 &\subseteq L(t) \checkmark && [(18)].
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\forall n \in \mathbb{N} : L(r^n s) \subseteq L(t),$$

che virtù del Lemma 4.1, implica

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r^i s) = L(r^* s) \subseteq L(t).$$

### Esercizio 4.8

Quali sono le differenze, se ci sono, tra i linguaggi denotati dalle seguenti espressioni regolari:

$$\emptyset, (\emptyset^*)^*, \emptyset(\emptyset)^*$$

**Soluzione.**

1.  $L(\emptyset) = \emptyset$ .
2.  $L((\emptyset^*)^*) = \{\epsilon\}$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
L((\emptyset^*)^*) &= L(\emptyset^*) && [\text{idempotenza } \cdot^*] \\
&= L(\emptyset)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(\emptyset)^i && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= L(\emptyset)^0 \cup \bigcup_{i \geq 1} L(\emptyset)^i && [0 \in \mathbb{N}] \\
&= \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i \geq 1} L(\emptyset)^i && [\text{def. } \cdot^0] \\
&= \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i \geq 1} \{xy \mid x \in L(\emptyset), y \in L(\emptyset)^{i-1}\} && [\text{def. } \cdot^n] \\
&= \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i \geq 1} \{xy \mid x \in \emptyset, y \in L(\emptyset)^{i-1}\} && [\text{def. } \emptyset] \\
&= \{\epsilon\} \cup \emptyset && [\nexists x \in \emptyset] \\
&= \{\epsilon\} && [\text{def. } \cup].
\end{aligned}$$

□

$$3. L(\emptyset\emptyset^*) = \emptyset.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
L(\emptyset\emptyset^*) &= L(\emptyset)L(\emptyset^*) && [\text{def. concat.}] \\
&= L(\emptyset)L(\emptyset)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= \{xy \mid x \in L(\emptyset), y \in L(\emptyset)^*\} && [\text{def. concat.}] \\
&= \{xy \mid x \in \emptyset, y \in L(\emptyset)^i\} && [\text{def. } \emptyset] \\
&= \emptyset && [\nexists x \in \emptyset]
\end{aligned}$$

□

### Esercizio 4.9

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$r^*r + \epsilon = r^*.$$

**Soluzione.**

$$\begin{aligned}
L(r^*r + \epsilon) &= L(r^*r) \cup L(\epsilon) && [\text{def. } +] \\
&= (L(r^*)L(r)) \cup L(\epsilon) && [\text{def. } +] \\
&= \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L(r)^i) L(r) \right) \cup L(\epsilon) && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i L(r) \right) \cup L(\epsilon) && [\text{p. distrib. concat.}] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^{i+1} \cup L(\epsilon) && [\text{def. } L^n] \\
&= \bigcup_{i \geq 1} L(r)^i \cup L(\epsilon) && [\text{def. } \cdot^{i+1}] \\
&= \bigcup_{i \geq 1} L(r)^i \cup \{\epsilon\} && [\text{def. } \epsilon] \\
&= \bigcup_{i \geq 1} L(r)^i \cup L(r)^0 && [\text{def. } L^0] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i && [\text{def. } \cup] \\
&= L(r)^* && [\text{def di } \cdot^*] \\
&= L(r^*) && [\text{def di } \cdot^*].
\end{aligned}$$

### **Esercizio 4.10**

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$(\epsilon + r)^* = r^*.$$

**Soluzione.**

$$\begin{aligned}
L((\epsilon + r)^*) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(\epsilon + r)^i && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L(\epsilon) \cup L(r))^i && [\text{def. } +] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\{\epsilon\} \cup L(r))^i && [\text{def. } \epsilon] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L(r)^0 \cup L(r))^i && [\text{def. } \cdot^0] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L(r)^{0i} \cup L(r)^i) && [\text{p. distrib. concat.}] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i \cup L(r)^0 && [\forall i \in \mathbb{N} : L^{0i} = L^0] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i && [0 \in \mathbb{N}] \\
&= L(r)^* && [\text{def. } \cdot^*]. \\
&= L(r^*) && [\text{def. } \cdot^*].
\end{aligned}$$

### Esercizio 4.11

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$(r + s)^* \preceq r^* + s^*.$$

**Soluzione.** Siano  $\Sigma = \{0, 1\}$  un alfabeto ed  $r = 0, s = 1$  espressioni regolari. Sia  $x = 01$ ,  $x \notin L(r^* + s^*) = L(0^* + 1^*)$ ,  $x \in L(r + s)^* = L(0 + 1)^*$ .

### Esercizio 4.12

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$r^* + s^* \preceq (r + s)^*.$$



**Soluzione.** Ragioniamo sulle sottoespressioni:

- $r^*$ :

$$\begin{aligned}
L(r^*) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i && [\text{def. } \cdot^*] \\
&\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L(r) \cup L(s))^i && [\text{def. } \cup] \\
&= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r + s)^i && [\text{def. } +] \\
&= L(r + s)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= L((r + s)^*) && [\text{def. } \cdot^*].
\end{aligned}$$

- $s^*$ :  $L(s^*) \subseteq L((r + s)^*)$  (procedimento analogo).

Dunque sappiamo che:

$$L(r^*), L(s^*) \subseteq L((r + s)^*). \quad (19)$$

Se, come dice la (19), i linguaggi denotati dalle due sottoespressioni sono sottoinsiemi di  $L((r + s)^*)$ , allora anche la loro unione lo è, ovvero:

$$\begin{aligned}
L(r^* + s^*) &= L(r^*) \cup L(s^*) && [\text{def. } +] \\
&\subseteq L((r + s)^*) \cup L((r + s)^*) && [(19) \text{ e monotonia di } \cup] \\
&\subseteq L((r + s)^*) && [\text{def. } \cup].
\end{aligned}$$

### Esercizio 4.13

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$(r^* s^*)^* \preceq (r + s)^*.$$

**Soluzione.**

$$\begin{aligned}
L(r^*s^*) &= L(r^*)L(s^*) && [\text{def. concat.}] \\
&= \{ xy \mid x \in L(r^*), y \in L(s^*) \} && [\text{def. concat.}] \\
&\subseteq \{ xy \mid x \in L((r+s)^*), y \in L((r+s)^*) \} && [(19), \text{monotonia } \cdot^*] \\
&= L((r+s)^*)L((r+s)^*) && [\text{def. concat.}] \\
&= L(r+s)^*L(r+s)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= L(r+s)^* && [\text{idempotenza di } \cdot^*] \\
&= L((r+s)^*) && [\text{def. } \cdot^*]
\end{aligned}$$

Quindi, sapendo che vale:

$$L(r^*s^*) \subseteq L((r+s)^*), \quad (20)$$

vogliamo mostrare che  $L((r^*s^*)^*) \subseteq L((r+s)^*)$ , ovvero

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r^*s^*)^i \subseteq L((r+s)^*). \quad (21)$$

Mostreremo che

$$\forall n \in \mathbb{N} : L((r^*s^*)^n) \subseteq L((r+s)^*)$$

che implica la (21) in virtù del Lemma 4.1. Dimostreremo per induzione matematica semplice su  $n$ , con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (parte antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned}
L((r^*s^*)^n) &= L((r^*s^*)^0) && [n = 0] \\
&= L(r^*s^*)^0 && [\text{def. } \cdot^0] \\
&= \{ \epsilon \} && [\text{def. } \cdot^0] \\
&= L(r+s)^0 && [\text{def. } \cdot^0] \\
&\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r+s)^i && [0 \in \mathbb{N}] \\
&= L(r+s)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= L((r+s)^*) \checkmark && [\text{def. } \cdot^*].
\end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$L((r^*s^*)^m) \subseteq L((r+s)^*) \stackrel{?}{\implies} L((r^*s^*)^{m+1}) \subseteq L((r+s)^*).$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} L((r^*s^*)^n) &= L((r^*s^*)^{m+1}) && [n=m+1] \\ &= L(r^*s^*)L(r^*s^*)^m && [\text{def. } \cdot^{m+1}] \\ &\subseteq L(r^*s^*)L((r+s)^*) && [\text{ip. ind., monotonia } \cdot] \\ &\subseteq L((r+s)^*)L((r+s)^*) && [(20), \text{monotonia } \cdot] \\ &= L(r+s)^*L(r+s)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\ &= L(r+s)^* && [\text{idempotenza } \cdot^*] \\ &= L((r+s)^*) \checkmark && [\text{def. } \cdot^*]. \end{aligned}$$

### Esercizio 4.14

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$(r^*s^*)^* = (r+s)^*.$$

**Soluzione.** Notare che nel punto precedente abbiamo dimostrato

$$(r^*s^*)^* \preceq (r+s)^*,$$

dimostreremo il “contenimento” anche in direzione opposta, ovvero

$$(r+s)^* \preceq (r^*s^*)^*,$$

da cui discende

$$(r^*s^*)^* = (r+s)^*.$$

Ragioniamo sulle sottoespressioni:

•  $r$ :

$$\begin{aligned}
L(r) &\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i && [1 \in \mathbb{N}] \\
&= L(r)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= L((r^*)^*) && [\text{idempotenza } \cdot^*] \\
&= \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i \right)^h && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \left( \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i \right) \{ \epsilon \} \right)^h && [\text{def. } \epsilon] \\
&\subseteq \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \left( \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r)^i \right) \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L(s)^j \right) \right)^h && [\forall s : \epsilon \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L(s)^j] \\
&= L(r^* s^*)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\
&= L((r^* s^*)^*) && [\text{def. } \cdot^*].
\end{aligned}$$

•  $s : L(s) \subseteq L((r^* s^*)^*)$  (procedimento analogo).

Dunque sappiamo che:

$$L(r), L(s) \subseteq L((r^* s^*)^*). \quad (22)$$

Se, come dice la (22), i linguaggi denotati dalle due sottoespressioni sono sottoinsiemi di  $L((r^* s^*)^*)$ , allora anche la loro unione lo è, ovvero:

$$\begin{aligned}
L(r + s) &= L(r) \cup L(s) && [\text{def. } +] \\
&\subseteq L((r^* s^*)^*) \cup L((r^* s^*)^*) && [(22)] \\
&= L((r^* s^*)^*) && [\text{def. } \cup].
\end{aligned}$$

Quindi

$$L(r + s) \subseteq L((r^* s^*)^*). \quad (23)$$

A questo punto vogliamo mostrare che  $L((r + s)^*) \subseteq L((r^* s^*)^*)$ , ovvero

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r + s)^i \subseteq L((r^* s^*)^*). \quad (24)$$

Mostreremo che

$$\forall n \in \mathbb{N}, L(r + s)^n \subseteq L((r^* s^*)^*),$$

che implica la (24) in virtù del Lemma 4.1. Dimostreremo per induzione matematica semplice su  $n$ , con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (parte antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned} L(r + s)^n &= L(r + s)^0 && [n = 0] \\ &= \{ \epsilon \} && [\text{def. } \cdot^0] \\ &\subseteq L(r^* s^*)^0 && [\text{def. } \cdot^0] \\ &\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r^* s^*)^i && [0 \in \mathbb{N}] \\ &= L(r^* s^*)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\ &= L((r^* s^*)^*) \checkmark && [\text{def. } \cdot^*]. \end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$L(r + s)^m \subseteq L((r^* s^*)^*) \stackrel{?}{\implies} L(r + s)^{m+1} \subseteq L((r^* s^*)^*).$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} L(r + s)^n &= L(r + s)^{m+1} && [n = m + 1] \\ &= L(r + s)L(r + s)^m && [\text{def. } \cdot^{m+1}] \\ &\subseteq L(r + s)L((r^* s^*)^*) && [\text{ip. ind., monotonia concat.}] \\ &\subseteq L((r^* s^*)^*)L((r^* s^*)^*) && [(23), \text{monotonia concat.}] \\ &= L(r^* s^*)^* L(r^* s^*)^* && [\text{def. } \cdot^*] \\ &= L(r^* s^*)^* && [\text{idempotenza } \cdot^*] \\ &= L((r^* s^*)^*) \checkmark && [\text{def. } \cdot^*] \end{aligned}$$

### Esercizio 4.15

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$(rs + r)^* r \preceq r(sr + r)^*.$$

**Soluzione.** Ragioniamo sulle sottoespressioni: vediamo se levando la stella di Kleene la relazione vale

$$\begin{aligned}
L((rs + r)r) &= (L(rs) \cup L(r))L(r) && [\text{def. } +, \text{ def. concat.}] \\
&= L(rs)L(r) \cup L(r)L(r) && [\text{p. distrib. } \cup] \\
&= L(rsr) \cup L(rr) && [\text{def. concat.}] \\
&= (L(r)L(sr)) \cup (L(r)L(r)) && [\text{def. concat.}] \\
&= L(r)(L(sr) \cup L(r)) && [\text{p. distrib. di } \cup] \\
&= L(r(sr + r)) && [\text{def. concat., def. } +] \\
&\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r(sr + r)^i) && [1 \in \mathbb{N}] \\
&= L(r(sr + r)^*) && [\text{def. } *].
\end{aligned}$$

Quindi, sapendo che vale:

$$L((rs + r)r) \subseteq L(r(sr + r)^*) \quad (25)$$

vogliamo reintrodurre la stella di Kleene e mostrare che

$$L((rs + r)^*r) \subseteq L(r(sr + r)^*),$$

ovvero

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L((rs + r)^i r) \subseteq L(r(sr + r)^*). \quad (26)$$

Mostreremo che

$$\forall n \in \mathbb{N} : L((rs + r)^n r) \subseteq L(r(sr + r)^*)$$

che implica la (26) in virtù del Lemma 4.1. Dimosteremo per induzione matematica semplice su  $n$ , con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$  con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva (parte antecedente dell'implicazione).

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned}
L((rs + r)^n r) &= L((rs + r)^0 r) && [n = 0] \\
&= L(r) && [\text{def. } ^0] \\
&= L(r(sr + r)^0) && [\text{def. } ^0] \\
&\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(r(sr + r)^i) && [0 \in \mathbb{N}] \\
&= L(r(sr + r)^*) \checkmark && [\text{def. } *].
\end{aligned}$$

**Implicazione:** sia  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$L((rs + r)^m r) \subseteq L(r(sr + r)^*) \stackrel{?}{\implies} L((rs + r)^{m+1} r) \subseteq L(r(sr + r)^*).$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} L((rs + r)^n r) &= L((rs + r)^{m+1} r) && [n=m+1] \\ &= L((rs + r)(rs + r)^m r) && [\text{def. } \cdot^{m+1}] \\ &\subseteq L((rs + r)r(sr + r)^*) && [\text{ip. ind., monotonia } \cdot^*] \\ &\subseteq L(r(sr + r)^*(sr + r)^*) && [(25), \text{monotonia di } \cdot^*] \\ &\subseteq L(r(sr + r)^*) \checkmark && [\text{idempotenza } \cdot^*]. \end{aligned}$$

### Esercizio 4.16

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$(rs + r)^* r = r(sr + r)^*.$$

**Soluzione.**

$$\begin{aligned} L((rs + r)^* r) &= (L(rs) \cup L(r))^* L(r) && [\text{def. concat., def. } +] \\ &= \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L(rs) \cup L(r))^i \right) L(r) && [\text{def. } \cdot^*] \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ((L(rs)L(r)) \cup (L(r)L(r)))^i && [\text{p. distrib. concat.}] \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L(rsr) \cup L(rr))^i && [\text{p. distrib. concat.}] \\ &= L(r) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L(sr) \cup L(r))^i && [\text{p. distrib. concat.}] \\ &= L(r) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L(sr + r)^i && [\text{def. } +] \\ &= L(r)L((sr + r)^*) && [\text{def. } \cdot^*] \\ &= L(r(sr + r)^*) && [\text{def. concat.}] \end{aligned}$$

### Esercizio 4.17

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$s(rs + s)^*r = rr^*s(rr^*s)^*.$$

**Soluzione.** Siano  $\Sigma = \{0, 1\}$  un alfabeto e  $r = 0, s = 1$  espressioni regolari su  $\Sigma$ . La stringa  $x = 10 \in L(s(rs + s)^*r), x \notin L(rr^*s(rr^*s)^*)$ .

### Esercizio 4.18

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$(r^* + s^*)^* = (rs)^*.$$

**Soluzione.** Siano  $\Sigma = \{0, 1\}$  un alfabeto e  $r = 0, s = 1$  espressioni regolari su  $\Sigma$ . La stringa  $x = 10 \in L((r^* + s^*)^*), x \notin L((rs)^*)$ .

### Esercizio 4.19

Dimostrare la validità della seguente espressione regolare o uno specifico esempio per il quale la relazione non è valida:

$$((a(a + b))^*\emptyset^*)^* = (ab + aa)^*.$$

**Soluzione.**

$$\begin{aligned} L((a(a + b))^*\emptyset^*)^* &= L(((aa + ab)^*\emptyset^*)^*) \\ &= L((aa + ab)^*\epsilon)^* \\ &= L((aa + ab)^*)^* \\ &= L((aa + ab)^*) \\ &= L((ab + aa)^*). \end{aligned}$$

### Esercizio 4.20

I linguaggi denotati dalle espressioni regolari prendono il nome di linguaggi regolari. Sia  $\Sigma$  un alfabeto, tutti i linguaggi  $L \subseteq \Sigma^*$  sono regolari?



**Soluzione.** La risposta è no, per ragioni di cardinalità: sia  $\Sigma_{01} = \{0, 1\}$ , utilizziamo il metalinguaggio delle espressioni regolari per descrivere il linguaggio delle le espressioni regolari sull'alfabeto  $\Sigma_{01}$ .

1. Creiamo un nuovo alfabeto  $\Sigma_{\text{ER}01}$  dato dall'unione dei simboli in  $\Sigma_{01}$  con i simboli del metalinguaggio delle espressioni regolari, (distinguiamo i simboli che possono creare ambiguità mettendo  $\hat{\cdot}$ ), ovvero:

$$\Sigma_{\text{ER}01} = \{0, 1, \hat{\epsilon}, \hat{\emptyset}, \hat{\cdot}, \hat{+}, \hat{*}\}.$$

2. Costruiamo la seguente espressione regolare che denota tutte le stringhe su  $\Sigma_{\text{ER}01}$ , ovvero l'insieme  $\Sigma_{\text{ER}01}^*$ :

$$r = (0 + 1 + \hat{\epsilon} + \hat{\emptyset} + \hat{\cdot} + \hat{+} + \hat{*})^*.$$

Notiamo anche che  $L(r) = \Sigma_{\text{ER}01}^*$ , quindi in  $L(r)$  ci sono sicuramente tutte le espressioni regolari su  $\Sigma_{01}$  in più ci stanno anche altre stringhe che non sono espressioni regolari, esempio  $\hat{+}\hat{*}$  ma non è un problema.

3. Trovare la cardinalità di  $L(r) = \Sigma_{\text{ER}01}^*$  equivale a trovare un limite superiore al numero di espressioni regolari su  $\Sigma_{01}$ .

Dato un generico  $\Sigma \neq \emptyset$ , abbiamo visto un algoritmo per enumerare  $\Sigma^*$ , quindi  $|\Sigma^*| = \aleph_0$ . Da questo segue che  $|L(r)| = |\Sigma_{\text{ER}01}^*| = \aleph_0$ .

Ora sappiamo che ci sono al più  $\aleph_0$  espressioni regolari su  $\Sigma_{01}$  e in generale su qualsiasi altro alfabeto.

4. Quanti sono i linguaggi formali  $L \subseteq \Sigma_{01}^*$ ? Ovvero, quanti sono i sottoinsiemi di  $\Sigma_{01}^*$ ?

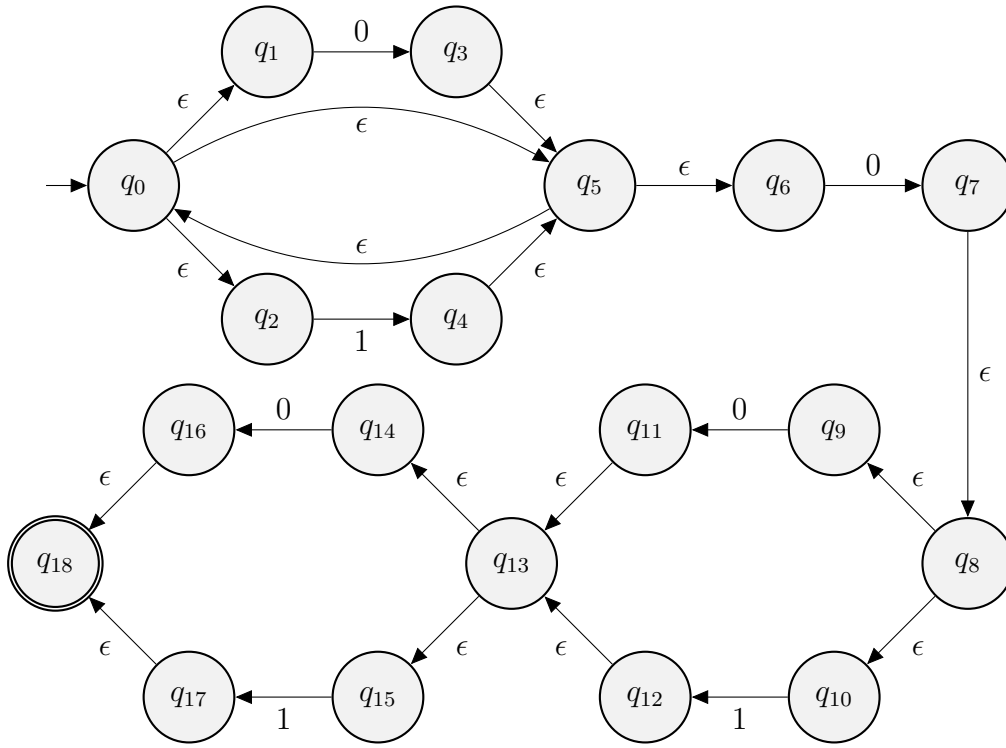
$$|\mathcal{P}(\Sigma_{01}^*)| = 2^{|\Sigma_{01}^*|} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0 = |\Sigma_{\text{ER}01}^*| \quad [\text{Teorema 1.1}].$$

Abbiamo mostrato che dato  $\Sigma$ , le espressioni regolari su  $\Sigma$  sono  $\aleph_0$ , quindi i linguaggi regolari su  $\Sigma$  sono  $\aleph_0$ . I linguaggi formali su  $\Sigma$  invece sono  $\aleph_1$ , questo significa che i linguaggi regolari sono soltanto una piccola parte dei linguaggi formali.

### Esercizio 4.21

Determinare, tramite la costruzione di Thompson, un  $\epsilon$ -NFA che riconosce il linguaggio denotato dalla seguente espressione regolare:

$$(0 + 1)^*0(0 + 1)(0 + 1).$$



### Esercizio 4.22

Siano  $x$  una stringa e  $r$  una espressione regolare, esiste un algoritmo per determinare se  $x \prec r$ ?

**Soluzione.** Sì, dal momento che espressioni regolari e DFA sono due formalismi equivalenti per la descrizione finita di linguaggi potenzialmente infiniti, è possibile determinare in maniera algoritmica se  $x \prec r$  costruendo il DFA equivalente ad  $r$  e vedendo se la stringa  $x$  è accettata.

### Esercizio 4.23

Siano  $r, s$  espressioni regolari sullo stesso alfabeto  $\Sigma$ , esiste un algoritmo per determinare se  $r$  ed  $s$  sono equivalenti, ovvero: esiste un algoritmo per determinare se  $L(r) = L(s)$ ?

**Soluzione.** Sì, esiste un algoritmo per determinare se due espressioni regolari  $r, s$  sullo stesso alfabeto  $\Sigma$  sono equivalenti: è possibile costruire i due

DFA equivalenti  $M_r, M_s$  per poi minimizzarli e confrontare se i due DFA minimizzati sono *isomorfi*:

$$\min(M_r) \cong \min(M_s),$$

ovvero se è possibile determinare una corrispondenza biunivoca tra gli stati di  $\min(M_r)$  e gli stati di  $\min(M_s)$  (vedi minimizzazione nel prossimo capitolo).

## 5 Linguaggi Regolari

### 5.1 Relazioni e Classi di Equivalenza

**Definizione 5.1** (Relazione di equivalenza). *Sia  $S$  un insieme. Una relazione  $R \subseteq S \times S$  è detta di equivalenza se rispetta le seguenti proprietà:*

1. riflessiva,  $\forall a \in S, a R a$ ;
2. simmetrica,  $\forall a, b \in S, \text{ se } a R b = b R a$ ;
3. transitiva,  $\forall a, b, c \in S, \text{ se } a R b, b R c, \text{ allora } a R c$ .

**Definizione 5.2** (Classi di equivalenza). *Sia  $S$  un insieme. Una relazione di equivalenza  $R \subseteq S \times S$  induce ad una partizione di  $S = S_1 \cup S_2 \cdots$ . Le varie  $S_i$  sono dette classi di equivalenza e vale che:*

1.  $\forall i : S_i \neq \emptyset$ ;
2.  $\forall i, j, i \neq j : S_i \cap S_j = \emptyset$ ;
3.  $\forall i, \forall a, b \in S_i : a R b$ ;
4.  $\forall i, j, i \neq j, a \in S_i, b \in S_j : a \not R b$ ;

*Se  $a \in S_i$ ,  $[a]_R$  indica la classe di equivalenza di appartenenza di  $a$ , quindi  $S_i$ .*

**Definizione 5.3.** (Relazione di equivalenza di indice finito) *Sia  $S$  un insieme. Una relazione di equivalenza  $R \subseteq S \times S$  è di indice finito se partiziona  $S$  in un numero finito di classi di equivalenza.*

**Esempi.** La relazione di equivalenza su  $\mathbb{N}$  più raffinata di tutte, quella di uguaglianza:

$$R_1 = \{ (n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n = m \},$$
$$[\mathbb{N}]_{R_1} = \{ \{0\}, \{1\}, \{2\} \cdots \}.$$

La relazione di equivalenza su  $\mathbb{N}$  meno raffinata di tutte:

$$R_2 = \{ (n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \},$$
$$[\mathbb{N}]_{R_2} = \{ \mathbb{N} \}.$$

La relazione di equivalenza su  $\mathbb{N}$  che partiziona in numeri pari e dispari:

$$R_3 = \{ (n, m) \mid n \bmod 2 = m \bmod 2 \},$$

$$[\mathbb{N}]_{R_3} = \{ \{pari\}, \{dispari\} \}.$$

La relazione di equivalenza su  $\mathbb{N}$  partiziona i numeri in base al loro numero  $i \geq 1$  di cifre:

$$R_4 = \{ (n, m) \mid 10^{i-1} \leq n, m < 10^i \},$$

$$[\mathbb{N}]_{R_4} = \{ \{0, \dots, 9\}, \{10, \dots, 99\}, \{100, \dots, 999\}, \dots \}.$$

**Lemma 5.1** (Linguaggio associato ad uno stato). *Sia  $M$  un DFA. Il linguaggio associato ad uno stato  $q$ , denotato con  $L_q$ , è definito come*

$$L_q := \{ x \mid \hat{\delta}(q_0, x) = q \},$$

quindi

$$L(M) = \bigcup_{q \in F} L_q.$$

**Lemma 5.2** (Relazione di equivalenza  $R_M$ ). *Sia  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un DFA. La relazione di equivalenza indotta dall'automa  $M$  si denota con  $R_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  ed è definita come*

$$R_M := \{ (x, y) \mid \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) \}$$

Quindi  $x R_M y$  (equivalente a  $(x, y) \in R_M$ ) se e solo se, a partire da  $q_0$ , leggendo  $x$  o leggendo  $y$  il DFA arriva nello stesso stato. Notare che:

1. le classi di equivalenza della partizione indotta da  $R_M$  sono esattamente i linguaggi associati ad ogni stato dell'automa  $M$ ;
2. i DFA hanno un numero finito di stati quindi  $R_m$  è di indice finito.

*Dimostrazione.* Procediamo dimostrando che valgono le 3 proprietà.

**Riflessività:** con  $x = y$  abbiamo che

$$\begin{aligned} x R_M y &\iff \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) && [\text{def. di } R_M] \\ &\iff \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, x) && [x = y] \\ &\iff x R_M x && [\text{def. di } R_M]. \end{aligned}$$

**Simmetria:**

$$\begin{aligned}
x R_M y &\iff \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) && [\text{def. di } R_M] \\
&\iff \hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, x) \\
&\iff y R_M x && [\text{def. di } R_M]
\end{aligned}$$

**Transitività:** vorremmo mostrare che se  $x R_L y$  e  $y R_L z$ , allora  $x R_L z$ .

$$y R_M z \iff \hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, z) \quad [\text{def. di } R_M], \quad (27)$$

allora

$$\begin{aligned}
x R_M y &\iff \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) && [\text{def. di } R_M] \\
&\iff \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) = \hat{\delta}(q_0, z) && [(27)] \\
&\iff x R_m z.
\end{aligned}$$

□

**Definizione 5.4.** (*Estensione distintiva e relazione di equivalenza  $R_L$* ). Sia  $L$  un linguaggio su  $\Sigma$ . Siano  $x, y \in L$ . Una estensione distintiva di  $x$  e  $y$  è data da una stringa  $z \in \Sigma^*$  tale che soltanto una tra  $xz$  e  $yz$  appartiene ad  $L$ . Se tale  $z$  non esiste allora

$$x R_L y.$$

Quindi  $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  è una relazione di equivalenza indotta da un  $L$  ed è definita come

$$R_L := \{ (x, y) \mid \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \iff yz \in L \}.$$

*Dimostrazione.* Procediamo dimostrando che valgono le 3 proprietà.

**Riflessività:** con  $x = y$  abbiamo che

$$\begin{aligned}
x R_L y &\iff (\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \iff yz \in L) && [\text{def. di } R_L] \\
&\iff (\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \iff xz \in L) && [x = y] \\
&\iff x R_L x && [\text{def. di } R_L].
\end{aligned}$$

**Simmetria:**

$$\begin{aligned}
x R_L y &\iff (\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \iff yz \in L) && [\text{def. di } R_L] \\
&\iff (\forall z \in \Sigma^*, yz \in L \iff xz \in L) \\
&\iff y R_L x && \text{def. di } R_L.
\end{aligned}$$

**Transitività:** vorremmo mostrare che se  $w R_L x$  e  $x R_L y$ , allora  $w R_L y$ .

$$x R_L y \iff (\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \iff yz \in L) \quad [\text{def. di } R_L], \quad (28)$$

allora

$$\begin{aligned} w R_L x &\iff (\forall z \in \Sigma^*, wz \in L \iff xz \in L) && [\text{def. di } R_L] \\ &\iff (\forall z \in \Sigma^*, wz \in L \iff xz \in L \iff yz \in L) && [(28)] \\ &\iff w R_L y && [\text{def. di } R_L]. \end{aligned}$$

□

*Notare che non abbiamo fatto ipotesi su  $L$ , quindi potrebbe essere un linguaggio regolare come no;*

1. *se  $L$  non è regolare,  $R_L$  non è di indice finito;*
2. *se  $L$  è regolare,  $R_L$  è di indice finito e l'indice (numero di classi di equivalenza indotte da  $R_L$ ) corrisponde proprio al numero di stati del DFA minimo che accetta  $L$ .*

**Esempio** Sia  $\Sigma^* = \{0, 1\}^*$ . Sia  $L = \{x0 \mid x \in \Sigma^*\}$ .

$$\begin{aligned} (\epsilon, 0) &\notin R_L : z = \epsilon, \\ (0, 00) &\in R_L : \forall z \in \Sigma^*, \\ (0, 1) &\notin R_L : z = \epsilon, \\ (11, 101) &\in R_L : \forall z \in \Sigma^*. \end{aligned}$$

$$R_L = \{ \{x0 \mid x \in \Sigma^*\}, \{y \mid y = w1 \vee y = \epsilon, w \in \Sigma^*\} \}.$$

Costruire per esercizio il DFA minimo che accetta  $L$  e confrontare il suo numero di stati con il numero di classi di equivalenza in  $R_L$ .

**Definizione 5.5** (Relazione di equivalenza invariante a destra rispetto alla concatenazione). *Una relazione  $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$  per cui vale la seguente proprietà*

$$x R y \implies \forall z \in \Sigma^* : xz R yz,$$

*è una relazione di equivalenza invariante a destra (rispetto alla concatenazione).  $R_L, R_M$  sono relazioni di equivalenza invarianti a destra.*

Intuitivamente, l'invarianza a destra rispetto alla concatenazione permette di fare il seguente ragionamento dal punto di vista di un DFA: non importa che cosa ho letto per arrivare allo stato corrente, posso “dimenticare” il passato perché l'unica cosa che conta è ciò che verrà letto da questo punto in poi. Se un DFA ha la possibilità di dimenticare ciò che ha letto, potrebbe indicare che un quantità finita di memoria finita possa essere sufficiente per accettare le stringhe di un determinato linguaggio.

**Teorema 5.1.** (*Myhill-Nerode: DFA minimo*) Sia  $L$  un linguaggio regolare.  $R_L$  è di indice finito ed il numero di classi di equivalenza della partizione indotta da  $R_L$  è uguale al numero di stati del minimo DFA che accetta  $L$ .

**Corollario 5.1** ( $R_M$  raffina  $R_L$ ).  $R_M$  è un raffinamento di  $R_L$ , ovvero il numero di classi di equivalenza della partizione indotta da  $R_L$  è sempre maggiore o uguale del numero di classi di equivalenza della partizione indotta da  $R_L$ .

**Teorema 5.2** (Myhill-Nerode: enunciati sui linguaggi regolari). *I seguenti enunciati sono equivalenti:*

1.  $L \subseteq \Sigma^*$  è regolare;
2.  $L$  è l'unione di alcune classi di equivalenza indotte da una relazione invariante a destra di indice finito (la relazione di equivalenza in questione è  $R_M$ );
3.  $R_L$  è di indice finito.

### 5.1.1 Minimizzazione di DFA

**Teorema 5.3** (DFA minimo). *Per ogni linguaggio regolare  $L$  esiste un unico automa  $M$  con un minimo numero di stati tale che*

$$L(M) = L.$$

La procedura che si utilizza per la minimizzazione di DFA ha come obiettivo quello di trovare gli stati che sono equivalenti tra loro per poi “fonderli” in un unico stato, l'algoritmo quindi utilizza una relazione di equivalenza tra stati.



**Definizione 5.6** (Relazione di equivalenza tra stati). Sia  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un DFA. Due stati  $p, q \in Q$  sono equivalenti tra loro,  $p R q$ , se e solo se valgono le seguenti proprietà:

1. l'insieme delle stringhe che portano allo stato  $p$  e l'insieme delle stringhe che portano allo stato  $q$  sono lo stesso insieme;
2. gli stati raggiungibili a partire da  $p$  con una transizione sono equivalenti agli stati raggiungibili a partire da  $q$  in una transizione.

Notare la forte somiglianza tra questa definizione con la relazione di equivalenza  $R_L$ .

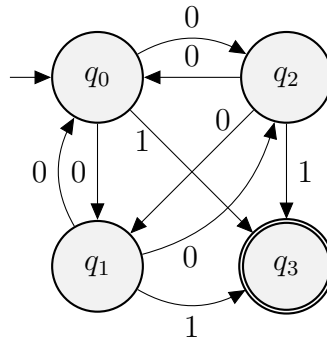
L'algoritmo di minimizzazione che vedremo andrà ad “implementare” la relazione di equivalenza tra stati (definita sopra) partendo da una partizione “grezza” con due sole classi di equivalenza: l'insieme di stati finali e l'insieme degli stati non finali, ovvero  $P = F \cup Q \setminus F$  che iterando verrà raffinata fino ad ottenere la partizione desiderata.

L'idea di base per trovare i raffinamenti da applicare è che, data una partizione  $P = S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n$ , presi  $p, q \in S_i$ , se

$$\exists a \in \Sigma . \delta(p, a) \in S_j, \delta(q, a) \in S_k \text{ con } j \neq k,$$

allora  $p$  e  $q$  non rispettano le proprietà richieste ( $p \not R q$ ) e non possono stare entrambi nella classe di equivalenza  $S_i$ .

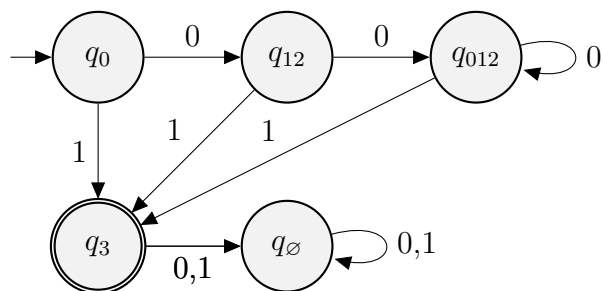
**Esempio.** Grafo di transizione di un NFA:



Matrice di transizione del DFA equivalente tramite costruzione per sottoinsiemi:

	<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>q_0</math></b>	$q_{12}$	$q_3$
<b><math>q_{12}</math></b>	$q_{012}$	$q_3$
<b><math>q_3</math></b>	$q_\emptyset$	$q_\emptyset$
<b><math>q_{012}</math></b>	$q_{012}$	$q_3$
<b><math>q_\emptyset</math></b>	$q_\emptyset$	$q_\emptyset$

Grafo di transizione del DFA con i soli stati raggiungibili partendo da  $q_0$ :



Minimizzazione:

$$\Pi_1 = \{ S_1 = \{ q_0, q_{12}, q_{012}, q_\emptyset \}, S_2 = \{ q_3 \}, \}$$

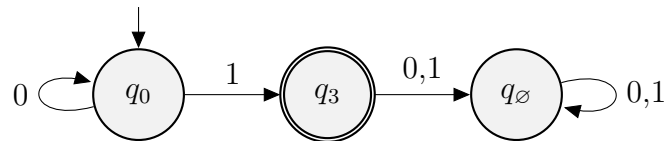
$\Pi_1$	<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>q_0</math></b>	$S_1$	$S_2$
<b><math>q_{12}</math></b>	$S_1$	$S_2$
<b><math>q_{012}</math></b>	$S_1$	$S_2$
<b><math>q_\emptyset</math></b>	$S_1$	$S_1$

$$\Pi_2 = \{ S_1 = \{ q_0, q_{12}, q_{012} \}, S_2 = \{ q_3 \}, S_3 = \{ q_\emptyset \} \}$$

$\Pi_2$	<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>q_0</math></b>	$S_1$	$S_2$
<b><math>q_{12}</math></b>	$S_1$	$S_2$
<b><math>q_{012}</math></b>	$S_1$	$S_2$

$$\Pi_3 = \{ \{ q_0, q_{12}, q_{012} \}, \{ q_3 \}, \{ q_t \} \}$$

Punto fisso raggiunto, costruiamo il DFA minimo:



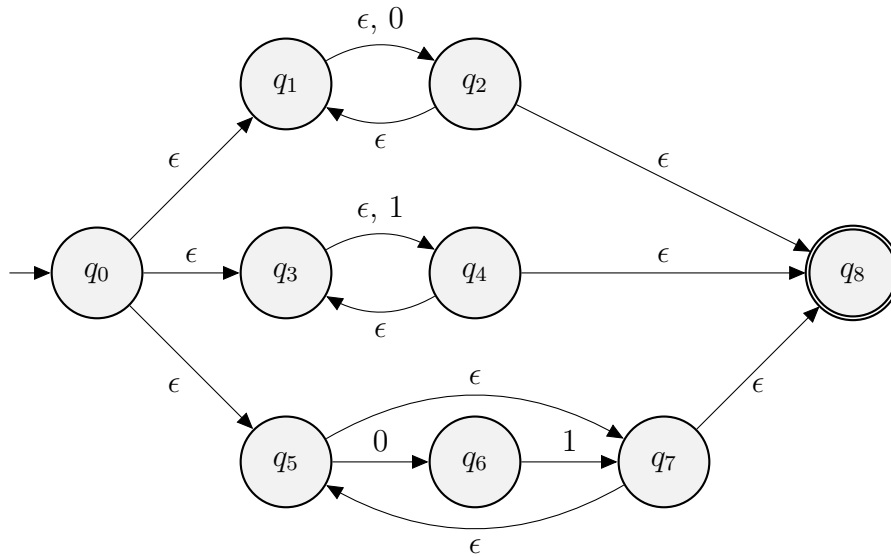
### 5.1.2 Esercizi

#### Esercizio 5.1

Trovare il DFA minimo equivalente alla seguente espressione regolare:

$$(0^* + 1^* + (01)^*).$$

**Soluzione.** Costruzione di Thompson:



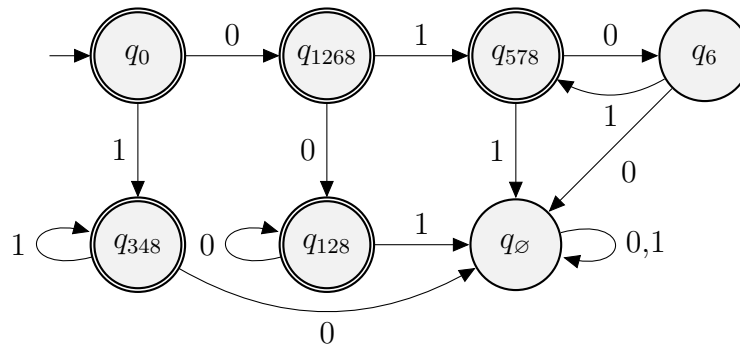
Eliminazione delle  $\epsilon$ -transizioni:

	<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>\dot{q}_0</math></b>	$\{q_1, q_2, q_6, q_8\}$	$\{q_3, q_4, q_8\}$
<b><math>q_1</math></b>	$\{q_1, q_2, q_8\}$	$\emptyset$
<b><math>q_2</math></b>	$\{q_1, q_2, q_8\}$	$\emptyset$
<b><math>q_3</math></b>	$\emptyset$	$\{q_3, q_4, q_8\}$
<b><math>q_4</math></b>	$\emptyset$	$\{q_3, q_4, q_8\}$
<b><math>q_5</math></b>	$\{q_6\}$	$\emptyset$
<b><math>q_6</math></b>	$\emptyset$	$\{q_5, q_7, q_8\}$
<b><math>q_7</math></b>	$\{q_6\}$	$\emptyset$
<b><math>q_8</math></b>	$\emptyset$	$\emptyset$

Matrice del DFA equivalente con costruzione per sottoinsiemi:

	<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>\dot{q}_0</math></b>	$q_{1268}$	$q_{348}$
<b><math>\dot{q}_{1268}</math></b>	$q_{128}$	$q_{578}$
<b><math>\dot{q}_{348}</math></b>	$q_{\emptyset}$	$q_{348}$
<b><math>q_{\emptyset}</math></b>	$q_{\emptyset}$	$q_{\emptyset}$
<b><math>\dot{q}_{128}</math></b>	$q_{128}$	$q_{\emptyset}$
<b><math>\dot{q}_{578}</math></b>	$q_6$	$q_{\emptyset}$
<b><math>q_6</math></b>	$q_{\emptyset}$	$q_{578}$

Grafo di transizione del DFA equivalente con i soli stati raggiungibili a partire da  $q_0$ :



Minimizzazione:

$$\Pi_1 = \{S_1 = \{q_0, q_{1268}, q_{578}, q_{348}, q_{128}\}, S_2 = \{q_6, q_{\emptyset}\}\}$$

$\Pi_1$	<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>q_0</math></b>	$S_1$	$S_1$
<b><math>q_{1268}</math></b>	$S_1$	$S_1$
<b><math>q_{578}</math></b>	$S_2$	$S_2$
<b><math>q_{348}</math></b>	$S_2$	$S_1$
<b><math>q_{128}</math></b>	$S_1$	$S_2$
<b><math>q_6</math></b>	$S_2$	$S_1$
<b><math>q_\emptyset</math></b>	$S_2$	$S_2$

$$\Pi_2 = \{S_1 = \{q_0, q_{1268}\}, S_2 = \{q_{578}\}, S_3 = \{q_{348}\}, S_4 = \{q_{128}\}, S_5 = \{q_6\}, S_6 = \{q_\emptyset\}\}$$

$\Pi_2$	<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>q_0</math></b>	$S_1$	$S_3$
<b><math>q_{1268}</math></b>	$S_4$	$S_2$

$$\Pi_3 = \{\{q_0\}, \{q_{578}\}, \{q_{348}\}, \{q_{128}\}, \{q_6\}, \{q_\emptyset\}, \{q_{1268}\}\}$$

Il DFA di partenza era già minimo.

## 5.2 Risultati di decidibilità

Una proposizione è decidibile quando esiste un algoritmo che ne determina la veridicità o falsità.

**Definizione 5.7** (Chiusura di un insieme rispetto ad un operazione). *Sia  $S$  un insieme ed  $R \subseteq S$ . Sia  $\star : S \times S \mapsto S$  una generica operazione.  $R$  è chiuso rispetto a  $\star$  se*

$$\forall x, y \in R : x \star y \in R,$$

*ovvero eseguendo l'operazione non si esce dal sottoinsieme.*

**Esempio.** L'insieme dei numeri interi positivi (sottoinsieme di  $\mathbb{Z}$ ) è chiuso rispetto all'operazione di addizione perchè sommando due numeri interi positivi si ottiene sempre un numero intero positivo ma non è chiuso rispetto all'operazione di sottrazione.

Notare che, considerando l'insieme  $R \subset \mathcal{P}(\Sigma^*)$  come l'insieme dei linguaggi regolari, ha senso parlare di chiusura di  $R$  rispetto ad alcune operazioni insiemistiche (essendo gli elementi di  $R$  dei linguaggi e quindi insiemi).

**Teorema 5.4.** *I linguaggi regolari sono chiusi rispetto alle operazioni di*

1. *unione, (dalla costruzione di Thmopson);*
2. *concatenazione, (dalla costruzione di Thompson);*
3. *chiusura di Kleene, (dalla costruzione di Thompson);*
4. *complementazione, (dallo scambio di stati finali e non finali);*
5. *intersezione, ( $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ ).*

Notare che è possibile utilizzare le proposizioni appena viste anche per cosntrapposizione, per esempio: se  $L_1 \cup L_2$  non è regolare, allora almeno uno tra  $L_1$  ed  $L_2$  non è regolare.

Abbiamo visto che l'unione di due linguaggi regolari è regolare, quindi, unendo linguaggi due alla volta è possibile creare una unione di 3, 4, 5, ... linguaggi e questa sarà ancora regolare. Consideriamo la famiglia di linguaggi per  $i \in \mathbb{N}$ :  $L_i = \{0^i 1^i\}$ , quindi  $\{L_0 = \{\epsilon\}, L_1 = \{01\}, L_2 = \{0011\}, \dots\}$ . Ogni  $L_i$  è regolare perchè, fissato  $i$ , è possibile costruire un automa che accetta  $L_i$ . Definiamo il linguaggio  $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ ;  $L$  non è regolare perché è esattamente uguale a  $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  di cui abbiamo già dimostrato la non regolarità. Questo ci suggerisce che alcune proprietà (come la chiusura rispetto all'unione di linguaggi regolari) potrebbero non valere più se applicate infinite volte.

Considerando invece la famiglia di linguaggi  $L_i = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x| = i\}$  per  $i \in \mathbb{N}$  quindi  $\{L_0 = \{\epsilon\}, L_1 = \{0, 1\}, L_2 = \{00, 01, 10, 11\}, \dots\}$ . Ogni  $L_i$  è regolare perchè, fissato  $i$ , è possibile costruire un automa che accetta le stringhe di lunghezza  $i$ . Definiamo il linguaggio  $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ ; questa volta anche  $L$  è regolare ( $R_L$  è di indice finito), infatti  $L = \Sigma^*$  che abbiamo visto essere regolare.

### 5.2.1 Esercizi

### Esercizio 5.2

Sia  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  un DFA, spiegare come ottenere un DFA  $\overline{M}$  con lo stesso alfabeto di input  $\Sigma$  tale che, accetta tutte le stringhe che non sono accettate da  $M$ .

**Soluzione.**  $\overline{M}$  sarà del tutto uguale ad  $M$ , tranne che per l'insieme degli stati finali  $\overline{F}$  definito come segue:

$$\overline{F} = Q \setminus F.$$

Abbiamo invertito gli stati accettanti con quelli non accettanti.

### Esercizio 5.3

Dati due DFA  $M_1, M_2$  con lo stesso alfabeto  $\Sigma$ , spiegare come costruire un DFA  $M$  che accetta le stringhe che sono accettate sia da  $M_1$  che da  $M_2$  ovvero  $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$ , e trovare il numero di stati di  $M$ . [*Suggerimento:* considerare gli stati di  $M$  come coppie ordinate di stati  $(p, q)$ , con  $p \in M_1, q \in M_2$ ].

**Soluzione.** Il DFA  $M$  è una quintupla  $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , dove:

- $Q = Q_1 \times Q_2$ ;
- $\Sigma$ ;
- $\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$ ;
- $q_0 = (q_0^{(1)}, q_0^{(2)})$ ;
- $F = \{ (p, q) \mid p \in F_1, q \in F_2 \} = F_1 \times F_2$ .

Notiamo che per costruire un DFA  $M' = M_1 \cup M_2$  basta modificare l'insieme degli stati finali nel seguente modo:

$$F' = \{ (p, q) \mid (p \in F_1, q \in Q_2) \vee (p \in Q_1, q \in F_2) \} = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2.$$

Se  $n_1, n_2$  sono il numero di stati di  $M_1$  ed  $M_2$  rispettivamente, allora  $M$  avrà  $n_1 \cdot n_2$  stati ovvero tutte le possibili coppie in cui il primo elemento è stato di  $M_1$  e il secondo elemento è stato di  $M_2$ .

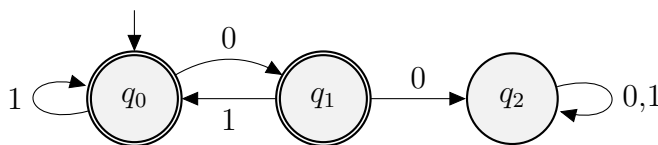
## Esercizio 5.4

Dimostrare che l'insieme delle stringhe di 0 e 1 tali che:

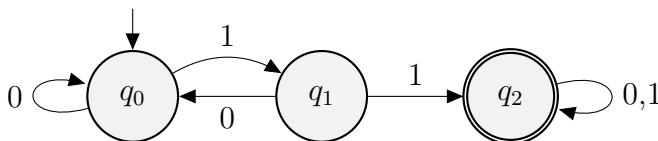
1. non hanno mai due '0' consecutivi;
2. hanno almeno due '1' consecutivi.

è un linguaggio regolare. [*Suggerimento:* dividere il problema in sottoproblemi elementari e utilizzare i risultati di questo paragrafo per combinarli.]

**Soluzione.** Grafo di transizione DFA di 1):



Grafo di transizione DFA di 2):



Trovati i due DFA sappiamo che  $L_1$  ed  $L_2$  sono regolari ma allora anche  $L = L_1 \cap L_2$  è regolare visto che i linguaggi regolari sono chiusi rispetto all'intersezione. Per esercizio proviamo a costruire il DFA  $M$  tale che  $L(M) = L_1 \cap L_2$ .

	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>q<sub>0</sub></b> = ( $\dot{q}_0, q_0$ )	$(q_1, q_0) = q_3$	$(q_0, q_1) = q_1$
<b>q<sub>1</sub></b> = ( $\dot{q}_0, q_1$ )	$(q_1, q_0) = q_3$	$(q_0, q_2) = q_2$
<b>q<sub>2</sub></b> = ( $\dot{q}_0, \dot{q}_2$ )	$(q_1, q_2) = q_5$	$(q_0, q_2) = q_2$
<b>q<sub>3</sub></b> = ( $\dot{q}_1, q_0$ )	$(q_2, q_0) = q_6$	$(q_0, q_1) = q_1$
<b>q<sub>4</sub></b> = ( $\dot{q}_1, q_1$ )	$(q_2, q_0) = q_6$	$(q_0, q_2) = q_2$
<b>q<sub>5</sub></b> = ( $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ )	$(q_2, q_2) = q_8$	$(q_0, q_2) = q_2$
<b>q<sub>6</sub></b> = ( $q_2, q_0$ )	$(q_2 q_0) = q_6$	$(q_2, q_1) = q_7$
<b>q<sub>7</sub></b> = ( $q_2, q_1$ )	$(q_2, q_0) = q_6$	$(q_2, q_2) = q_8$
<b>q<sub>8</sub></b> = ( $q_2, \dot{q}_2$ )	$(q_2, q_2) = q_8$	$(q_2, q_2) = q_8$



### 5.3 Risultati di Decidibilità

Per i linguaggi regolari le proprietà decidibili sono molteplici.

**Teorema 5.5** (Appartenenza). *Il problema dell'appartenenza per i linguaggi regolari è decidibile; data una descrizione di  $L$  tramite DFA o espressione regolare, esiste un algoritmo in grado di verificare se una stringa  $x$  appartiene o meno ad  $L$ .*

**Teorema 5.6** (Vuoto-infinito). *L'insieme delle stringhe accettate da un DFA  $M$  con  $n$  stati è*

1. *non vuoto se e solo se accetta una stringa di lunghezza minore di  $n$ ;*
2. *infinito se e solo se accetta una stringa di lunghezza  $l$ ,  $n \leq l < 2n$ .*

**Corollario 5.2.** *Sia  $M$  un DFA. I problemi “ $L(M) = \emptyset$ ?” e “ $L(M)$  è infinito?” sono entrambi decidibili, ovvero esiste un algoritmo per determinare la loro veridicità o falsità.*

**Teorema 5.7** (Equivalenza). *Siano  $M_1, M_3$  due DFA. Il problema di stabilire se  $L(M_1) = L(M_2)$  è decidibile definendo  $L(M_3)$  come segue:*

$$L(M_3) = (\overline{L(M_1)} \cap L(M_2)) \cup (L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}),$$

*e chiedendosi se  $L(M_3)$  è vuoto oppure no.*

### 5.4 Pumping Lemma

Abbiamo visto diversi metodi per stabilire se un dato linguaggio è regolare (esibizione di un DFA, NFA,  $\epsilon$ -NFA o di una espressione regolare.) Abbiamo anche già osservato che non tutti i linguaggi sono regolari, anzi solo una piccola parte sono regolari. Come si può dimostrare che un linguaggio non è regolare? Ovviamente non essere riusciti a trovare un automa o un'espressione regolare adeguati non dimostra nulla.

**Lemma 5.3** (Pumping lemma). *Sia  $L$  un linguaggio regolare allora  $\exists n \in \mathbb{N}$  (lunghezza di pumping) tale che,  $\forall z \in L : |z| \geq n$ , esistono tre stringhe  $u, v, w$  tali che:*

1.  *$z = uvw$ ,  $z$  viene suddivisa nelle 3 stringhe;*

2.  $|v| \geq 1$ ,  $v$  deve avere almeno lunghezza 1;
3.  $|uv| \leq n$ ,  $v$  deve stare tra i primi  $p$  simboli.
4.  $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$ ,  $v$  può essere “pompatà” ottenendo nuove stringhe che ancora appartengono a  $L$ .

Quindi:

- $u$ , la parte prima del pumping;
- $v$ , la parte su cui eseguire il pumping ( $v^i, i \in \mathbb{N}$ );
- $w$ , la parte dopo il pumping.

Questo deriva dal fatto che i DFA permettono la rappresentazione finita linguaggi potenzialmente infiniti. Se il linguaggio accettato da un DFA con  $n$  stati è infinito, significa che accetta stringhe che hanno lunghezza  $\geq n$ ; per fare questo, il DFA deve per forza passare più di una volta almeno da uno dei suoi stati, quindi sono presenti cicli nel DFA. Il pumping lemma si basa proprio sulla presenza di tali cicli e asserisce che, dato un linguaggio regolare  $L$ , vale la seguente formula:

$$\exists n \in \mathbb{N} . \forall z \in L : (|z| \geq n \implies \exists u, v, w . (z = uvw \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n, \wedge \forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L)).$$

Notare che:

$$\forall x \in \emptyset : P(x),$$

significa che se per un certo linguaggio  $L$  non esistono stringhe  $x \in L$  tali che  $|x| \geq n$  allora il pumping lemma vale banalmente (questo accade per i linguaggi finiti).

Il pumping lemma viene utilizzato per contrapposizione quando si vuole dimostrare che un linguaggio  $L$  non è regolare. Per fare ciò bisogna mostrare che vale la negazione della formula sopra, ovvero:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists z \in L . (|z| \geq n \wedge \forall u, v, w . ((z = uvw \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n) \implies \exists i \in \mathbb{N} . uv^i w \notin L)).$$

Attenzione: se  $L$  è regolare allora per  $L$  vale il pumping lemma ma non è un se e solo se, significa che esistono linguaggi non regolari per i quali vale

comunque il pumping lemma. Noi quindi useremo la contrapposizione del pumping lemma per mostrare che un linguaggio  $L$ , (di cui abbiamo il sospetto che possa non essere regolare), effettivamente non è regolare. E' utile porsi la seguente domanda per avere un'idea se un linguaggio  $L$  è regolare: *basta una quantità finita e fissata di memoria per riconoscere  $L$ ?* Analogamente: è possibile scrivere un programma in  $C$  che riconosce  $L$  senza utilizzare allocazione dinamica della memoria?

**Esempio.**  $L = \{0^i1^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  non è regolare, il problema sta nel fatto che è necessario conteggiare e ricordare il numero di '0' letti per poi contare il numero di '1' letti ma un DFA che fa questo non esiste perché il numero di '0' non è fissato. In generale, ogni volta che c'è da contare dell'informazione e questa informazione ha dimensioni non fissate arbitrariamente grandi, (ad esempio il numero di '0'), allora il linguaggio non è regolare perché avremmo bisogno di un automa con infiniti stati (infinita memoria) per accettare  $L$ .

*Dimostrazione.* Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario la lunghezza di pumping, scegliamo una stringa  $z \in L$  di lunghezza maggiore o uguale a  $n$ :

$$z = 0^n1^n \in L.$$

Mostriamo che comunque vengano presi  $u, v$  e  $w$  tali che  $z = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$ , esiste almeno un  $i \in \mathbb{N}$  tale per cui  $uv^i w \notin L$ . Essendo  $|uv| \leq n$ , tali modi sono riconducibili al seguente schema:

$$u = 0^a, v = 0^b, w = 0^c1^n,$$

con

$$a + b + c = n, a + b \leq n, b \geq 1.$$

La stringa da pompare quindi è della forma:

$$\begin{aligned} 0^a0^{ib}0^c1^n &= 0^a0^{ib}0^{n-a-b}1^n & [c = n - a - b] \\ &= 0^{n+ib-b}1^n. \end{aligned}$$

Pumping con  $i = 2$ :

$$\begin{aligned} 0^{n+ib-b}1^n &= 0^{n+2b-b}1^n & [i = 2] \\ &= 0^{n+b}1^n \\ &\notin L & [b \geq 1 \implies n + b \neq n]. \end{aligned}$$

□

### 5.4.1 Esercizi

#### Esercizio 5.5

Dimostrare che  $L = \{0^{2^i} \mid i \in \mathbb{N}\}$  non è regolare.

**Soluzione.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario la lunghezza di pumping, scegliamo una stringa  $z \in L$  di lunghezza maggiore o uguale a  $n$ :

$$z = 0^{2^n} \in L.$$

Mostriamo che comunque vengano presi  $u, v$  e  $w$  tali che  $z = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$ , esiste almeno un  $i \in \mathbb{N}$  tale per cui  $uv^i w \notin L$ . Essendo  $|uv| \leq n$ , tali modi sono riconducibili al seguente schema:

$$u = 0^a, v = 0^b, w = 0^c,$$

con

$$a + b + c = 2^n, a + b \leq n, b \geq 1.$$

La stringa da pompare quindi è della forma:

$$\begin{aligned} 0^a 0^{ib} 0^c &= 0^a 0^{ib} 0^{2^n - a - b} & [c = 2^n - a - b] \\ &= 0^{2^n + ib - b}. \end{aligned}$$

Pumping con  $i = 2$ :

$$\begin{aligned} 0^{2^n + ib - b} &= 0^{2^n + 2b - b} & [i = 2] \\ &= 0^{2^n + b} \\ &\notin L. \end{aligned}$$

Mostriamo che la stringa ottenuta dopo il pumping davvero non sta in  $L$  perché la sua lunghezza ( $2^n + b$ ) non è una potenza di 2, ovvero cade tra due potenze di 2 consecutive:

$$\begin{aligned} 2^n &< 2^n + b & [b \geq 1] \\ &< 2^n + 2^b & [b \geq 1] \\ &\leq 2^n + 2^n & [b \leq n] \\ &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

### Esercizio 5.6

Dimostrare che  $L = \{0^i \mid i \bmod k = 0 \iff k = 1 \vee k = i\}$  non è regolare.

**Soluzione.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario la lunghezza di pumping, scegliamo una stringa  $z \in L$  di lunghezza  $p$  numero primo maggiore o uguale a  $n$ :

$$z = 0^p \in L.$$

Mostriamo che comunque vengano presi  $u, v$  e  $w$  tali che  $z = uvw, |uv| \leq p, |v| \geq 1$ , esiste almeno un  $i \in \mathbb{N}$  tale per cui  $uv^i w \notin L$ . Essendo  $|uv| \leq p$ , tali modi sono riconducibili al seguente schema:

$$u = 0^a, v = 0^b, w = 0^c,$$

con

$$a + b + c = p, a + b \leq n, b \geq 1.$$

La stringa da pompare quindi è della forma:

$$\begin{aligned} 0^a 0^{ib} 0^c &= 0^a 0^{ib} 0^{p-a-b} & [c = p - a - b] \\ &= 0^{p+ib-b}. \end{aligned}$$

Pumping con  $i = p + 1$ :

$$\begin{aligned} 0^{p+ib-b} &= 0^{p+(p+1)b-b} & [i = p + 1] \\ &= 0^{p+pb+b-b} \\ &= 0^{p+pb} \\ &= 0^{p(b+1)} \\ &\notin L & [b \geq 1 \implies p(b+1) \bmod p = b+1]. \end{aligned}$$

### Esercizio 5.7

Dimostrare che  $L = \{0^{i^2} \mid i \in \mathbb{N}\}$  non è regolare.

**Soluzione.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario la lunghezza di pumping, scegliamo una stringa  $z \in L$  di lunghezza maggiore o uguale a  $n$ :

$$z = 0^{n^2} \in L.$$

Mostriamo che comunque vengano presi  $u, v$  e  $w$  tali che  $z = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$ , esiste almeno un  $i \in \mathbb{N}$  tale per cui  $uv^i w \notin L$ . Essendo  $|uv| \leq n$ , tali modi sono riconducibili al seguente schema:

$$u = 0^a, v = 0^b, w = 0^c.$$

con

$$a + b + c = n^2, a + b \leq n, b \geq 1.$$

La stringa da pompare quindi è della forma:

$$\begin{aligned} 0^a 0^{ib} 0^c &= 0^a 0^{ib} 0^{n^2-a-b} & [c = n^2 - a - b] \\ &= 0^{n^2+ib-b}. \end{aligned}$$

Pumping con  $i = 2$ :

$$\begin{aligned} 0^{n^2+ib-b} &= 0^{n^2+2b-b} & [i = 2] \\ &= 0^{n^2+b} \\ &\notin L. \end{aligned}$$

Mostriamo che la stringa ottenuta dopo il pumping non fa parte di  $L$  perché la sua lunghezza  $(n^2 + b)$  non è un quadrato perfetto, ovvero cade tra due quadrati perfetti consecutivi:

$$\begin{aligned} n^2 &< n^2 + b & [b \geq 1] \\ &< n^2 + 2b & [b \geq 1] \\ &< n^2 + 2b + 1 \\ &\leq n^2 + 2n + 1 & [a + b \leq n] \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

### Esercizio 5.8

Dimostrare che  $L = \{ 0^i 1^{i+1} 0^{i+2} \mid i \in \mathbb{N} \}$  non è regolare.

**Soluzione.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario la lunghezza di pumping, scegliamo una stringa  $z \in L$  di lunghezza maggiore o uguale a  $n$ :

$$z = 0^n 1^{n+1} 0^{n+2} \in L.$$

Mostriamo che comunque vengano presi  $u, v$  e  $w$  tali che  $z = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$ , esiste almeno un  $i \in \mathbb{N}$  tale per cui  $uv^i w \notin L$ . Essendo  $|uv| \leq n$ , tali modi sono riconducibili al seguente schema:

$$u = 0^a, v = 0^b, w = 0^c 1^{n+1} 0^{n+2}.$$

con

$$a + b + c = n, a + b \leq n, b \geq 1.$$

La stringa da pompare quindi è della forma:

$$\begin{aligned} 0^a 0^{ib} 0^c 1^{n+1} 0^{n+2} &= 0^a 0^{ib} 0^{n-a-b} 1^{n+1} 0^{n+2} & [c = n - a - b] \\ &= 0^{n+ib-b} 1^{n+1} 0^{n+2}. \end{aligned}$$

Pumping con  $i = 2$ :

$$\begin{aligned} 0^{n+ib-b} 1^{n+1} 0^{n+2} &= 0^{n+2b-b} 1^{n+1} 0^{n+2} & [i = 2] \\ &= 0^{n+b} 1^{n+1} 0^{n+2} \\ &\notin L & [b \geq 1]. \end{aligned}$$

### Esercizio 5.9

Dimostrare che  $L = \{ 0^j 1^k 0^{j+k} \mid j, k \in \mathbb{N} \}$  non è regolare.

**Soluzione.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario la lunghezza di pumping, scegliamo una stringa  $z \in L$  di lunghezza maggiore o uguale a  $n$ :

$$z = 0^n 1^m 0^{n+m} \in L, \text{ con } m \geq 1.$$

Mostriamo che comunque vengano presi  $u, v$  e  $w$  tali che  $z = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$ , esiste almeno un  $i \in \mathbb{N}$  tale per cui  $uv^i w \notin L$ . Essendo  $|uv| \leq n$ , tali modi sono riconducibili al seguente schema:

$$u = 0^a, v = 0^b, w = 0^c 1^m 0^{n+m},$$

con

$$a + b + c = n, a + b \leq n, b \geq 1.$$

La stringa da pompare quindi è della forma:

$$\begin{aligned} 0^a 0^{ib} 0^c &= 0^a 0^{ib} 0^{n-a-b} 1^m 0^{n+m} & [c = n - a - b] \\ &= 0^{n+ib-b} 1^m 0^{n+m}. \end{aligned}$$

Pumping con  $i = 0$ :

$$\begin{aligned} 0^{n+ib-b} 1^m 0^{n+m} &= 0^{n+0b-b} 1^m 0^{n+m} & [i = 0] \\ &= 0^{n-b} 1^m 0^{n+m} \\ &\notin L & [b \geq 1 \implies n - b < n]. \end{aligned}$$

### Esercizio 5.10

Dimostrare che  $L = \{ 0^i 1^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i < j \}$  non è regolare.

**Soluzione.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario la lunghezza di pumping, scegliamo una stringa  $z \in L$  di lunghezza maggiore o uguale a  $n$ :

$$z = 0^n 1^m \in L, \text{ con } n < m.$$

Mostriamo che comunque vengano presi  $u, v$  e  $w$  tali che  $z = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$ , esiste almeno un  $i \in \mathbb{N}$  tale per cui  $uv^i w \notin L$ . Essendo  $|uv| \leq n$ , tali modi sono riconducibili al seguente schema:

$$u = 0^a, v = 0^b, w = 0^c 1^m,$$

con

$$a + b + c = n, a + b \leq n, b \geq 1.$$

La stringa da pompare quindi è della forma:

$$\begin{aligned} 0^a 0^{ib} 0^c 1^m &= 0^a 0^{ib} 0^{n-a-b} 1^m & [c = n - a - b] \\ &= 0^{n+ib-b} 1^m. \end{aligned}$$

Pumping con  $i = m + 1$ :

$$\begin{aligned} 0^{n+ib-b} 1^m &= 0^{n+(m+1)b-b} 1^m & [i = m + 1] \\ &= 0^{n+mb+b-b} 1^m \\ &= 0^{n+mb} 1^m \\ &\notin L & [b \geq 1, \implies n + mb > m]. \end{aligned}$$



### Esercizio 5.11

Dimostrare che  $L = \{x \mid C_0(x) = C_1(x)\}$  non è regolare.

**Soluzione.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario, ci basta scegliere la stringa  $z = 0^n 1^n$  ed eseguire il pumping:  $z$  sta anche nel linguaggio  $L' = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  di cui abbiamo già dimostrato la non regolarità proprio pompando una stringa come  $z$ .

### Esercizio 5.12

Dimostrare che  $L = \{x \mid C_0(x) < C_1(x)\}$  non è regolare.

**Soluzione.** Siano  $n, m \in \mathbb{N}, n < m$  arbitrari, ci basta scegliere la stringa  $z = 0^n 1^m \in L$  ed eseguire il pumping:  $z$  sta anche nel linguaggio  $L' = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}, n < m\}$  di cui abbiamo già dimostrato la non regolarità proprio pompando una stringa come  $z$ .

### Esercizio 5.13

Dimostrare che  $L = \{xx^r \mid x \in \{0, 1\}^*\}$  non è regolare, con  $x^r$  definito come segue:

$$x^r := \begin{cases} x, & \text{se } x = \epsilon; \\ w^r a, & \text{se } x = aw. \end{cases}$$

**Soluzione.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario la lunghezza di pumping, scegliamo una stringa  $z \in L$  di lunghezza maggiore o uguale a  $n$ :

$$z = 0^n 110^n \in L.$$

Mostriamo che comunque vengano presi  $u, v$  e  $w$  tali che  $z = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1$ , esiste almeno un  $i \in \mathbb{N}$  tale per cui  $uv^i w \notin L$ . Essendo  $|uv| \leq n$ , tali modi sono riconducibili al seguente schema:

$$u = 0^a, v = 0^b, w = 0^c 110^n.$$

con

$$a + b + c = n, a + b \leq n, b \geq 1.$$

La stringa da pompare quindi è della forma:

$$\begin{aligned} 0^a 0^{ib} 0^c 110^n &= 0^a 0^{ib} 0^{n-a-b} 110^n & [c = n - a - b] \\ &= 0^{n+ib-b} 110^n. \end{aligned}$$

Pumping con  $i = 0$ :

$$\begin{aligned} 0^{n+ib-b} 110^n &= 0^{n-b} 110^n & [i = 0] \\ &\notin L & [b \geq 1]. \end{aligned}$$

## 6 Grammatiche

L'approccio *generativo-sintetico* utilizza strutture finite dette *grammatiche* in grado di *generare* insiemi di stringhe per la descrizione finita di linguaggi potenzialmente infiniti

### 6.1 Grammatiche Libere dal Contesto

**Definizione 6.1** (Grammatica libera dal contesto). *Una grammatica libera dal contesto, anche detta acontesuale o CF grammar, è una quadrupla  $G = \langle V, T, P, S \rangle$ , dove:*

- $V$  è un insieme finito di variabili (dette anche simboli non terminali);
- $T$  è un insieme finito di simboli terminali, con  $V \cap T = \emptyset$ ;
- $P$  è un insieme finito di produzioni della forma:

$$A \rightarrow \alpha, \text{ con } A \in V, \alpha \in (V \cup T)^*.$$

*Ogni produzione quindi indica una possibile “riscrittura” di una variabile in una stringa composta da variabili e/o terminali.*

- $S \in V$  è una variabile speciale detta simbolo iniziale.

**Esempio 1.** Grammatica che genera le stringhe binarie palindrome:

$$\langle V = \{ S \}, T = \{ \epsilon, 0, 1 \}, P, S \rangle,$$

con insieme delle produzioni  $P$  composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \epsilon \\ S &\rightarrow 0 \\ S &\rightarrow 1 \\ S &\rightarrow 0S0 \\ S &\rightarrow 1S1. \end{aligned}$$

Quando, come in questo caso, per una variabile le riscritture sono molteplici, è possibile utilizzare una singola produzione mettendo in *or* le diverse alternative:

$$S \rightarrow \epsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0S0 \mid 1S1.$$

**Esempio 2.** Grammatica che genera il linguaggio  $L = \{ 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ :

$$\langle V = \{ S \}, T = \{ \epsilon, 0, 1 \}, P, S \rangle,$$

con insieme delle produzioni  $P$  composto da:

$$S \rightarrow \epsilon \mid 0S1$$

Notare che: abbiamo dimostrato nel capitolo del pumping lemma che  $L$  non è regolare e abbiamo appena mostrato che  $L$  è libero dal contesto. Quindi l'insieme dei linguaggi regolari e l'insieme dei linguaggi liberi dal contesto *non* sono lo stesso insieme.

Sia  $A \rightarrow \alpha \in P$ . Il termine “libere dal contesto” deriva dal fatto che, la riscrittura di  $A$  in  $\alpha$  è sempre possibile, indipendentemente da che cosa si trova a sinistra o a destra di  $A$ , ovvero,  $A$  si può sempre riscrivere in  $\alpha$  indipendentemente dal *contesto* in cui si trova  $A$  (la parte sinistra delle produzioni infatti è sempre costituita da una sola variabile).

**Meta linguaggi.** Un *meta linguaggio* è un linguaggio utilizzato per la descrizione di un altro linguaggio che prende il nome di linguaggio *oggetto*. Le grammatiche (come le espressioni regolari) sono un meta linguaggio. Le variabili del meta linguaggio prendono il nome di meta variabili e spesso occorre distinguerle in qualche modo dalle variabili del linguaggio oggetto. Le variabili che compaiono nelle grammatiche acontestuali, in particolare, vengono dette meta variabili *sintattiche*, perché quello che fanno è definire la sintassi del linguaggio oggetto, senza dare informazioni esplicite sulla semantica.

**Notazione.**

- $A, B, C, D, E, S$  denotano variabili;
- $S$  denota il simbolo iniziale;
- $a, b, c, d, e, 0, 1$  denotano simboli terminali;
- $X, Y, Z$  denotano simboli che possono essere sia terminali che variabili;
- $u, v, w, x, y, z$  denotano stringhe di soli terminali;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  denotano generiche stringhe di simboli (sia terminali che non).

**Definizione 6.2** (Derivazione immediata). *Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  una grammatica CF. Siano  $\alpha, \beta, \gamma \in (V \cup T)^*$ . Se  $A \rightarrow \beta \in P$ , allora  $\alpha A \gamma \xRightarrow{G} \alpha \beta \gamma$ . In questo caso si dice che  $\alpha A \gamma$  deriva immediatamente  $\alpha \beta \gamma$ .*

**Definizione 6.3** (Catena di derivazioni immediate). *Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  una grammatica CF. Una catena di derivazioni immediate è definita in maniera induttiva come segue:*

**Caso base:**

$$\forall \alpha \in (V \cup T)^* : \alpha \xRightarrow{G}_0 \alpha.$$

**Passo induttivo:**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha, \gamma \in (V \cup T)^* : \alpha \xRightarrow{G}_{n+1} \gamma \iff \exists \beta \in (V \cup T)^* . \alpha \xRightarrow{G} \beta \wedge \beta \xRightarrow{G}_n \gamma.$$

*Una definizione equivalente tramite la notazione semantica:*

$$\text{Caso base: } \frac{}{\alpha \xRightarrow{G}_0 \alpha} \alpha \in (V \cup T)^*.$$

$$\text{Passo induttivo: } \frac{\alpha \xRightarrow{G} \beta, \beta \xRightarrow{G}_n \gamma}{\alpha \xRightarrow{G}_{n+1} \gamma} \alpha, \beta, \gamma \in (V \cup T)^*.$$

Secondo quanto appena visto, se esiste un  $n \in \mathbb{N}$  tale per cui  $\alpha \xRightarrow{G}_n \beta$ , allora  $\alpha \xRightarrow{G}_* \beta$ , ovvero da  $\alpha$  deriva  $\beta$  ( $\alpha$  si riscrive in un numero di passi  $n \geq 0$  in  $\beta$ ). Notare che:

- $\xRightarrow{G}$  è la chiusura transitiva (per def. induttiva) e la chiusura riflessiva (per def. di  $\xRightarrow{G}_0$ ) della relazione  $\xRightarrow{G}$ ;
- $\xRightarrow{G}$  denota una relazione tra stringhe.

Ora possiamo definire la semantica di una grammatica, ovvero il linguaggio generato dalla grammatica.

**Definizione 6.4** (Linguaggio generato da una grammatica). *Sia  $G$  una grammatica CF, il linguaggio generato da  $G$ ,  $L(G)$  è definito come:*

$$L(G) := \{ x \in T^* \mid S \xRightarrow{G}_* x \},$$

*ovvero l'insieme di stringhe composte da soli terminali ottenute con un numero arbitrario di derivazioni a partire dal simbolo iniziale  $S$ .*

**Definizione 6.5** (Linguaggio libero dal contesto). *Sia  $L$  un linguaggio,  $L$  è libero dal contesto se esiste una grammatica CF  $G$  tale che*

$$L = L(G).$$

### 6.1.1 Esercizi

#### Esercizio 6.1

Data la seguente grammatica:

$$E \rightarrow 0 \mid 1 \mid (E \wedge E) \mid (E \vee E) \mid (\neg E),$$

dimostrare per induzione strutturata che le espressioni (stringhe) generate hanno una forma *massimamente parentesizzata*: ovvero la precedenza di ogni operazione è esplicitata tramite una coppia di parentesi bilanciate.

**Soluzione.** Come prima cosa definiamo una funzione che presa una espressione booleana (stringa generata dalla grammatica) conta il numero di parentesi aperte  $N_a : (V \cup T)^* \mapsto \mathbb{N}$ , definita come

$$N_a(e) := \begin{cases} 0, & \text{se } e = 1 \vee e = 0; \\ 1 + N_a(e_1) + N_a(e_2), & \text{se } e = (e_1 \wedge e_2) \vee e = (e_1 \vee e_2); \\ 1 + N_a(e_1), & \text{se } e = \neg(e_1). \end{cases}$$

In maniera equivalente è possibile definire  $N_c$  che conta il numero di parentesi chiuse.

**Caso base.** Abbiamo due casi base.

$$1. S \xRightarrow{G} 1 :$$

$$\begin{aligned} N_a(1) &= 0 && [\text{def. di } N_a] \\ &= N_c(1) && [\text{def. di } N_c]; \end{aligned}$$

$$2. S \xRightarrow{G} 0 :$$

$$\begin{aligned} N_a(0) &= 0 && [\text{def. di } N_a] \\ &= N_c(0) && [\text{def. di } N_c]. \end{aligned}$$

**Passo induttivo.** Abbiamo 3 passi.

1.  $S \xRightarrow{G}_{n+1} (e_1 \wedge e_2)$ :

$$\begin{aligned} N_a((e_1 \wedge e_2)) &= 1 + N_a(e_1) + N_a(e_2) && [\text{def. di } N_a] \\ &= 1 + N_c(e_1) + N_c(e_2) && [\text{ip. ind.}] \\ &= N_c((e_1 \wedge e_2)) && [\text{def. di } N_c]; \end{aligned}$$

2.  $S \xRightarrow{G}_{n+1} (e_1 \vee e_2)$ :

$$\begin{aligned} N_a((e_1 \vee e_2)) &= 1 + N_a(e_1) + N_a(e_2) && [\text{def. di } N_a] \\ &= 1 + N_c(e_1) + N_c(e_2) && [\text{ip. ind.}] \\ &= N_c((e_1 \vee e_2)) && [\text{def. di } N_c]; \end{aligned}$$

3.  $S \xRightarrow{G}_{n+1} \neg(e_1)$ :

$$\begin{aligned} N_a(\neg(e_1)) &= 1 + N_a(e_1) && [\text{def. di } N_a] \\ &= 1 + N_c(e_1) && [\text{ip. ind.}] \\ &= N_c(\neg(e_1)) && [\text{def. di } N_c]. \end{aligned}$$

## Esercizio 6.2

Dimostrare che il seguente linguaggio è CF:

$$L = \{ 0^j 1^j 0^k 1^k \mid j, k \in \mathbb{N} \}.$$

**Soluzione** Troviamo una grammatica CF  $G$  tale che  $L = L(G)$ . Sia  $G = \langle V = \{ S, A \}, T = \{ 0, 1 \}, P, S \rangle$ , con  $P$  insieme delle produzioni contenente:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AA \\ A &\rightarrow \epsilon \mid 0A1. \end{aligned}$$

Ora dobbiamo dimostrare che  $L(G) = L$ . Inizieremo analizzando  $L(G \mid A)$ , ovvero il linguaggio generato dalla sola variabile  $A$  dimostrando la validità del seguente lemma:

$$L(G \mid A) = L_1 = \{ 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \}. \quad (29)$$

Inizieremo mostrando per induzione matematica semplice sulla lunghezza  $n \geq 1$  della derivazione che  $L(G \mid A) \subseteq L_1$ , ovvero che presa una qualunque stringa che sta in  $L(G \mid A)$ , questa sta anche in  $L_1$ :

$$\forall n \geq 1 : A \xRightarrow{G}_n 0^{n-1}1^{n-1} \in L_1.$$

**Caso base:** se  $n = 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} A &\xRightarrow{G} \epsilon \\ &= 0^01^0 \in L_1. \checkmark \end{aligned}$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} A &\xRightarrow{G}_m 0^{m-1}1^{m-1} && [\text{ip.ind.}] \\ \iff A &\xRightarrow{G}_{m-1} 0^{m-1}A1^{m-1} && [A \rightarrow \epsilon] \\ \implies A &\xRightarrow{G}_m 0^m A1^m && [A \rightarrow 0A1] \\ \implies A &\xRightarrow{G}_{m+1} 0^{m-1}1^{m-1} \in L_1 \checkmark && [A \rightarrow \epsilon]. \end{aligned}$$

Ora dimostriamo che vale anche  $L_1 \subseteq L(G \mid A)$ , ovvero presa una qualunque stringa che sta in  $L_1$ , questa sta anche in  $L(G \mid A)$ :

$$\forall x = 0^j1^j \in L_1 : \exists n \in \mathbb{N} . A \xRightarrow{G}_n x = A \xRightarrow{G}_* x,$$

secondo quanto appena dimostrato,  $n$  esiste e vale  $j + 1$ .

Ora che abbiamo dimostrato il lemma (29), possiamo utilizzarlo per dimostrare che  $L(G) = L$ . Iniziamo mostrando che  $L(G) \subseteq L$ , quindi presa una qualunque stringa in  $L(G)$  questa sta anche in  $L$ , ovvero:

$$x \in L(G) \iff S \xRightarrow{G}_* x \iff \exists n \in \mathbb{N} . S \xRightarrow{G}_n x \iff S \xRightarrow{G} AA \xRightarrow{G}_{n-1} x \in L.$$

$$\begin{aligned} S \xRightarrow{G} AA \xRightarrow{G}_{n-1} x &\iff S \xRightarrow{G}_* 0^i1^i A \xRightarrow{G}_* x && [\text{lemma (29), } i \in \mathbb{N}] \\ &\iff S \xRightarrow{G}_* 0^i1^i 0^j1^j \in L \checkmark && [\text{lemma (29), } i, j \in \mathbb{N}]. \end{aligned}$$

Ora mostriamo che  $L \subseteq L(G)$ : sia  $x = 0^j1^j0^k1^k \in L$ , allora

$$\begin{aligned} S &\xRightarrow{G} AA \xRightarrow{G}_{j+1} 0^j1^j A && [\text{lemma (29)}] \\ &\xRightarrow{G}_{k+1} 0^j1^j0^k1^k = x \checkmark && [\text{lemma (29)}]. \end{aligned}$$



### Esercizio 6.3

Dimostrare che il seguente linguaggio è CF:

$$L = \{ 0^j 1^k 0^k 1^j \mid j, k \in \mathbb{N} \}.$$

**Soluzione** Troviamo una grammatica CF  $G$  tale che  $L = L(G)$ . Sia  $G = \langle V = \{ S, A \}, T = \{ 0, 1 \}, P, S \rangle$ , con  $P$  insieme delle produzioni contenente:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0S1 \mid A \\ A &\rightarrow \epsilon \mid 1A0. \end{aligned}$$

Ora dobbiamo dimostrare che  $L(G) = L$ , ovvero  $L(G) \subseteq L, L \subseteq L(G)$ . Come prima cosa mostriamo che per induzione sulla lunghezza  $n \geq 1$  delle derivazioni che  $L(G \mid S)$  genera stringhe della forma  $0^{n-1}A1^{n-1}$ . Dopodiché sfrutteremo il lemma  $L(G \mid A) = L_1 = \{ 1^n 0^n \mid n \in \mathbb{N} \}$  (da dimostrare per esercizio) per concludere che  $L(G) \subseteq L$ .

**Caso base:** se  $n = 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{G} A && [S \rightarrow A] \\ &= 0^0 A 1^0. \checkmark \end{aligned}$$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{G}_m 0^{m-1} A 1^{m-1} && [\text{ip. ind.}] \\ \iff S &\xrightarrow{G}_{m-1} 0^{m-1} S 1^{m-1} && [S \rightarrow A] \\ \implies S &\xrightarrow{G}_m 0^m S 1^m && [S \rightarrow 0S1] \\ \implies S &\xrightarrow{G}_{m+1} 0^m A 1^m \checkmark && [S \rightarrow A]. \end{aligned}$$

Se  $L(G \mid S)$  genera stringhe della forma  $0^{n-1}A1^{n-1}$ , e  $L(G \mid A) = L_1 = \{ 1^n 0^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ , allora  $L(G) \subseteq L$ , ovvero:

$$S \xrightarrow{G}_* 0^j A 1^j \xrightarrow{G}_* 0^j 1^k 0^k 1^j \in L.$$

Ora mostriamo che  $L \subseteq L(G)$ . Sia  $x = 0^j 1^k 0^k 1^j \in L$ , allora

$$S \xrightarrow{G}_{j+1} 0^j A 1^j \xrightarrow{G}_{k+1} 0^j 1^k 0^k 1^j.$$

### Esercizio 6.4

Dimostrare che il seguente linguaggio è CF:

$$L = \{ 0^j 1^k 0^{j+k} \mid j, k \in \mathbb{N} \}.$$

**Soluzione** Troviamo una grammatica CF  $G$  tale che  $L = L(G)$ . Sia  $G = \langle V = \{ S, A \}, T = \{ 0, 1 \}, P, S \rangle$ , con  $P$  insieme delle produzioni contenente:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0S0 \mid A \\ A &\rightarrow \epsilon \mid 1A0 \end{aligned}$$

Allora  $L = L(G)$ .

*Dimostrazione.* Lasciato per esercizio. □

### Esercizio 6.5

Dimostrare che il seguente linguaggio è CF:

$$L = \{ 0^j 1^k 0^{j-k} \mid j, k \in \mathbb{N}, j \geq k \}.$$

**Soluzione** Troviamo una grammatica CF  $G$  tale che  $L = L(G)$ . Sia  $G = \langle V = \{ S, A \}, T = \{ 0, 1 \}, P, S \rangle$ , con  $P$  insieme delle produzioni contenente:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0S0 \mid A \\ A &\rightarrow \epsilon \mid 0A1 \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Lasciato per esercizio. □

### Esercizio 6.6

Dimostrare che il seguente linguaggio è CF:

$$L = \{ 0^j 1^{2j} 0^{3k} 1^{4k} \mid j, k \in \mathbb{N} \}.$$

**Soluzione** Troviamo una grammatica CF  $G$  tale che  $L = L(G)$ . Sia  $G = \langle V = \{S, A, B\}, T = \{0, 1\}, P, S \rangle$ , con  $P$  insieme delle produzioni contenente:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow \epsilon \mid 0A11 \\ B &\rightarrow \epsilon \mid 000B1111 \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Lasciato per esercizio. □

### 6.1.2 Alberi di derivazione

**Definizione 6.6** (Albero di derivazione). *Gli alberi di derivazione (o parse tree, alberi di parsing) vengono utilizzati per rappresentare graficamente le derivazioni generate da una grammatica.*

1. ogni vertice ha un'etichetta presa tra  $V \cup T \cup \{\epsilon\}$ ;
2. la radice deve essere etichettata con una variabile  $V$  (non restringiamo la radice ad essere per forza il simbolo iniziale  $S$ );
3. i nodi interni (nodi non foglia) devono essere etichettati con variabili;
4. se un vertice è etichettato con  $A$  e  $n_1, \dots, n_k$  sono i figli di  $A$  etichettati con  $X_1, \dots, X_k$ , allora  $A \rightarrow X_1 \cdots X_k \in P$ .
5. se un nodo è etichettato con  $\epsilon$  allora tale nodo è una foglia ed è l'unico figlio di suo padre.

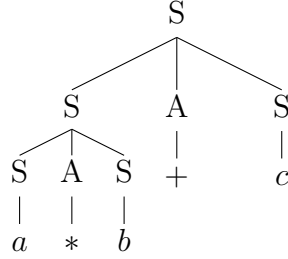
Sia  $T$  un albero di derivazione.  $T$  descrive la stringa  $\alpha \in (V \cup T)^*$  se è possibile “ricostruire”  $\alpha$  leggendo le foglie dell'albero da sinistra a destra ovvero,  $\alpha$  giace sulle foglie di  $T$ . Notare che non stiamo restringendo le foglie ad essere per forza etichettate con terminali, ammettiamo quindi la presenza di alberi di derivazione che hanno almeno una foglia etichettata con una variabile e questi sono detti alberi di derivazione parziale.

Una caratteristica degli alberi di derivazione è che nascondono dettagli inutili introdotti dalle derivazioni, in particolare, preso un albero di derivazione è possibile trovare più derivazioni corrispondenti tra loro equivalenti.

**Esempio.** Sia  $G = \langle V = \{S, A\}, T = \{a, b, c, +, *\}, P, S \rangle$ , con insieme delle produzioni  $P$  composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a \mid b \mid c \mid SAS \\ A &\rightarrow + \mid * \end{aligned}$$

Sia  $x = a * b + c$ . Un albero di derivazione che descrive  $x$  è il seguente:



Due derivazioni equivalenti:

$$S \xRightarrow{G} SAS \xRightarrow{G} SASAS \xRightarrow{G} aASAS \xRightarrow{G} a * SAS \dots$$

$$S \xRightarrow{G} SAS \xRightarrow{G} SASAS \xRightarrow{G} S * SAS \xRightarrow{G} a * SAS \dots$$

**Teorema 6.1.** Sia  $G = \langle V, T, S, P \rangle$  una grammatica CF. Sia  $\alpha \in (V \cup T)^*$ . Allora  $S \xRightarrow{G}_* \alpha$  se e solo se esiste un albero di derivazione con radice  $S$  che descrive  $\alpha$ .

**Osservazione 6.1** (Numero nodi interni corrisponde al numero di derivazioni). *Notare che, dato un albero di derivazione, il numero dei suoi nodi interni è pari al numero di derivazioni che sono state applicate per derivare la stringa  $\alpha \in (V \cup T)^*$  che giace sulle foglie.*

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare che: dato un albero di derivazione arbitrario radicato in  $A$ , con  $n$  nodi interni e che descrive una  $\alpha \in (V \cup T)^*$ , esiste una derivazione corrispondente  $A \xRightarrow{G}_n \alpha, n \in \mathbb{N}$ . Procediamo per induzione matematica sul numero di nodi interni  $n$  dell'albero, con caso base  $n = 0$  e passo induttivo  $n = m + 1$ , con  $m \in \mathbb{N}$ ; pertanto, nel passo induttivo potremo sfruttare l'ipotesi induttiva.

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo solo un nodo  $A$  che è radice e foglia, quindi un albero con 1 nodo interno e la stringa che giace sull'unica foglia  $A$  è proprio  $\alpha$ . La derivazione corrispondente è  $A \xRightarrow{G}_0 A = \alpha. \checkmark$

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo un albero  $T$  con  $m + 1$  nodi interni che descrive la stringa  $\alpha = \beta X_1 \cdots X_n \gamma \in (V \cup T)^*, n \geq 1$ . Selezioniamo le foglie  $X_i$  aventi come padre un nodo interno che chiameremo  $B$ . Ora ricaviamo un albero  $T'$  che è dato da  $T$  privato delle foglie  $X_1 \cdots X_n$  (figlie del nodo  $B$ ). Essendo  $B$  un nodo foglia all'interno dell'albero  $T'$ ,  $T'$  ha  $m$  nodi interni e per ipotesi induttiva vale che  $A \xRightarrow{G}_m \beta B \gamma$ . Per la regola (4) di costruzione degli alberi, l'esistenza del sottoalbero irradicato in  $B$  con figli  $X_i \cdots X_j$  implica l'esistenza di  $B \rightarrow X_1 \cdots X_n \in P$  ma allora

$$A \xRightarrow{G}_m \beta B \gamma \xRightarrow{G} \beta X_1 \cdots X_n \gamma \iff A \xRightarrow{G}_{m+1} \beta X_i \cdots X_n \gamma = \alpha. \checkmark$$

□

**Definizione 6.7** (Derivazione sinistra). *Una derivazione è sinistra o leftmost se ad ogni passo di derivazione la produzione viene applicata alla variabile che sta più a sinistra.*

**Definizione 6.8** (Derivazione destra). *Una derivazione è destra o rightmost se ad ogni passo di derivazione la produzione viene applicata alla variabile che sta più a destra.*

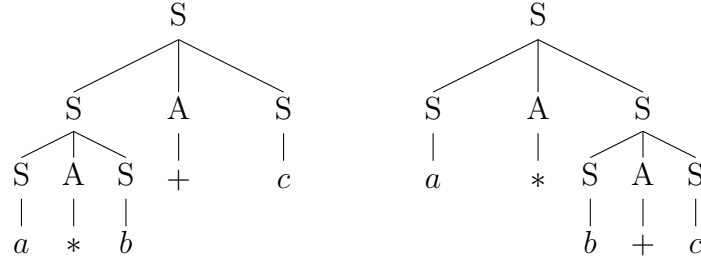
**Definizione 6.9** (Grammatica ambigua). *Una grammatica CF è ambigua quando ammette più alberi di derivazione che descrivono la stessa stringa.*

**Osservazione 6.2.** *Esistono*

**Esempio.** Sia  $G = \langle V = \{S, A\}, T = \{a, b, c, +, *\}, P, S \rangle$ , con insieme delle produzioni  $P$  composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a \mid b \mid c \mid SAS \\ A &\rightarrow + \mid * \end{aligned}$$

Sia  $x = a * b + c \in L(G)$ .  $x$  è descritta da due alberi di derivazione:



Con una grammatica ambigua, a partire dalla stessa stringa è possibile costruire due alberi diversi a seconda della derivazione utilizzata e alberi differenti potrebbero associare significati differenti alla stessa stringa creando ambiguità appunto, come succede nell'esempio in cui vengono alterate le precedenze tra operazioni  $(a * b) + c$ ,  $a * (b + c)$ .

**Osservazione 6.3** (Indecidibilità dell'ambiguità). *Determinare l'ambiguità di una grammatica è un problema indecidibile: non esiste e non esisterà mai un algoritmo che in tempo finito dice se una grammatica arbitraria  $G$  è ambigua oppure no.*

Notare che: è possibile dimostrare che una grammatica  $G$  non è ambigua (mostrando che ad ogni passo di derivazione si è forzati nella scelta della variabile su cui applicare la produzione), non è possibile farlo algebricamente per ogni  $G$ .

## 6.2 Forme Normali

### 6.2.1 Eliminazione variabili improduttive

**Definizione 6.10** (Variabile produttiva). *Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  una grammatica CF. Una variabile  $A \in V$  è produttiva se conduce ad una stringa di terminali, ovvero*

$$\exists A \xRightarrow{*} x \in T^*.$$

**Lemma 6.1.** *Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  una grammatica CF tale che  $L(G) \neq \emptyset$ . Si può calcolare una grammatica equivalente  $G' = \langle V', T, P', S \rangle$  tale che per ogni  $A \in V'$  esiste  $x \in T^*$  tale che  $A \xRightarrow{*} x$ .*

Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  una grammatica CF, l'obiettivo quindi è di ricavare una grammatica equivalente  $G' = \langle V', T, P', S \rangle$  con un insieme  $V'$  contenente

tutte e sole le variabili produttive ed un insieme  $P'$  formato da produzioni che coinvolgono solo variabili che stanno in  $V'$ . L'operatore  $\Gamma$  applicato a  $V$  ci aiuta a ricavare  $V'$ .

**Definizione 6.11** (Operatore  $\Gamma$  per variabili produttive). *Sia  $W \subseteq V$ . L'operatore  $\Gamma : \mathcal{P}(V) \mapsto \mathcal{P}(V)$  è definito come:*

$$\Gamma(W) := \{ A \in V \mid \exists \alpha \in (W \cup T)^* . (A \rightarrow \alpha) \in P \}. \quad (30)$$

L'insieme  $W \subseteq V$  contiene ad ogni applicazione dell'operatore  $\Gamma$  le variabili la cui produttività è stata accertata nelle iterazioni precedenti; proprio per questo l'argomento di  $\Gamma$  è  $\emptyset$ , ovvero inizialmente di nessuna variabile è nota la produttività. Quindi è interessante applicare iterativamente l'operatore  $\Gamma$  e vedere che cosa fa.

**Definizione 6.12** (Applicazione iterata di  $\Gamma$ ). *L'applicazione iterata di  $\Gamma$  è definita come:*

$$\Gamma^n(W) := \begin{cases} S, & \text{se } n = 0; \\ \Gamma(\Gamma^{n-1}(W)), & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Osservazione 6.4.**  $\Gamma$  è monotono (e anche estensivo) e l'insieme  $V$  è finito quindi applicando un numero di volte  $n \leq |V|$  l'operatore  $\Gamma(\emptyset)$  (nel caso pessimo, ad ogni applicazione troviamo una sola variabile produttiva) è possibile trovare gli insiemi cercati  $V', P'$ :

- $V' = \Gamma^{|V|}(\emptyset)$  (teniamo solo le variabili produttive);
- $P' = \{ A \rightarrow \alpha \mid A \in V', \alpha \in (V' \cup T)^* \}$  (teniamo solo le produzioni che coinvolgono variabili produttive o terminali).

Notare che la restrizione  $L \neq \emptyset$  è dovuta al fatto che  $L(G) = \emptyset$ ,  $S$  stesso risulterebbe improduttivo e verrebbe eliminato. Nel caso  $L(G) = \emptyset$  allora descriveremo la grammatica come:  $G = \langle \{ S \}, \emptyset, \emptyset, S \rangle$ .

**Esempio.** Sia  $G = \langle V = \{ S, A, B \}, T = \{ 0, 1 \}, P, S \rangle$  con insieme  $P$  composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0A1 \mid 01B \\ A &\rightarrow 0A1 \\ B &\rightarrow 01 \mid 01B \end{aligned}$$

$$\Gamma^0(\emptyset) = \emptyset, \Gamma(\emptyset) = \{B\}, \Gamma^2(\emptyset) = \{S, B\}, \Gamma^3(\emptyset) = \{S, B\}.$$

La grammatica dopo la trasformazione avrà  $V' = \Gamma^3(\emptyset) = \{S, B\}$ , e  $P'$  composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 01B \\ B &\rightarrow 01 \mid 01B \end{aligned}$$

**Lemma 6.2.**  $A \in \Gamma^n(\emptyset)$  se e solo se esiste un albero di derivazione di altezza minore o uguale ad  $n$  che ha  $A$  come radice e descrive una stringa di soli terminali  $x \in T$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo ( $\Rightarrow$ ), ovvero che se  $A \in \Gamma^n$  allora esiste l'albero di altezza minore o uguale di  $n$ . Mostriamo per induzione matematica semplice su numero di applicazioni  $n \geq 1$  dell'operatore.

**Caso base:** se  $n = 1$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \Gamma^n(\emptyset) &= \Gamma(\emptyset) & [n = 1] \\ &= \{A \in V \mid \exists \alpha \in (T \cup \emptyset)^* . (A \rightarrow \alpha) \in P\} & [(30)] \\ &= \{A \in V \mid \exists \alpha \in T^* . (A \rightarrow \alpha) \in P\}. \end{aligned}$$

Se  $A \in \Gamma(\emptyset)$ , significa che esiste una produzione  $A \rightarrow x$ , con  $x = a_1 \cdots a_n \in T^*$ . Quindi è possibile costruire un albero di derivazione che descrive  $x$  di altezza  $1 \leq n$  perché formato da  $A$  come radice che ha come figli i nodi etichettati con  $a_1, \dots, a_n$  se e che quindi sono anche foglie. ✓

**Passo induttivo:** se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \Gamma^n(\emptyset) &= \Gamma^{m+1}(\emptyset) & [n = m + 1] \\ &= \Gamma(\Gamma^m(\emptyset)) & [\text{def. di } \cdot^n] \\ &= \{A \in V \mid \exists \alpha \in (T \cup \Gamma^m(\emptyset))^* . (A \rightarrow \alpha) \in P\} & [(30)]. \end{aligned}$$

Se  $A \rightarrow \alpha$  secondo la regola (4) di costruzione degli alberi di derivazione, esiste un albero corrispondente  $T_A$  con radice in  $A$  che ha come figli  $X_1, \dots, X_n = \alpha \in (T \cup \Gamma^m(\emptyset))^*$  con  $n \geq 1$ . Essendo  $\alpha$  composto da un certo numero di terminali e da un certo numero  $k \leq n$  di variabili  $B_1, \dots, B_k$ , per queste ultime, visto la loro appartenenza in  $\Gamma^m(\emptyset)$  è possibile applicare l'ipotesi induttiva e ottenere i corrispondenti alberi



di derivazione  $T_{B_1}, \dots, T_{B_k}$  la cui altezza (sempre per ipotesi induttiva) è minore o uguale a  $m$ . A questo punto, facendo il merge delle radici dei  $T_{B_1}, \dots, T_{B_k}$  con le foglie  $B_1, \dots, B_k$  dell'albero  $T_A$  si ottiene un albero  $T'$  la cui altezza è minore o uguale a  $m + 1$ . ✓

Analogamente si dimostra anche ( $\Leftarrow$ ) (lasciato per esercizio). □

### 6.2.2 Eliminazione simboli irraggiungibili

**Definizione 6.13** (Simbolo raggiungibile). *Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  una grammatica CF. Siano  $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ . Sia  $X \in (V \cup T)$  una variabile o simbolo terminale. Il simbolo  $X$  è raggiungibile se esiste una derivazione di  $S$  in cui compare  $X$ , ovvero*

$$\exists S \xRightarrow{*}_G \alpha X \beta.$$

**Lemma 6.3.** *Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  una grammatica CF. Si può calcolare una grammatica equivalente  $G' = \langle V', T', P', S \rangle$  tale che per ogni simbolo  $X \in V' \cup T'$  esistono  $\alpha, \beta \in (V' \cup T')^*$  per cui  $S \xRightarrow{*}_{G'} \alpha X \beta$ .*

Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  una grammatica CF, l'obiettivo quindi è di ricavare una grammatica equivalente  $G' = \langle V', T', P', S \rangle$  nella quale gli insiemi  $V', T'$  contengono soli simboli raggiungibili da  $S$  e l'insieme  $P'$  formato dalle sole produzioni che coinvolgono i soli simboli in  $V', T'$ . Una nuova definizione dell'operatore  $\Gamma$  ci aiuta a fare questo.

**Definizione 6.14** (Operatore  $\Gamma$  per simboli raggiungibili). *Sia  $W \subseteq (V \cup T)$ . L'operatore  $\Gamma : \mathcal{P}(V \cup T) \mapsto \mathcal{P}(V \cup T)$  è definito come:*

$$\Gamma(W) := \{ X \in V \cup T \mid \exists A \in W. (A \rightarrow \alpha X \beta) \in P \} \cup \{ S \}. \quad (31)$$

L'insieme  $W \subseteq V \cup T$  contiene ad ogni applicazione dell'operatore  $\Gamma$  le variabili e i simboli terminali la cui raggiungibilità a partire da  $S$  è stata accertata nelle applicazioni precedenti.  $S$  è per definizione raggiungibile da se stesso.

**Osservazione 6.5.**  $\Gamma$  è monotono e gli insiemi  $V, T$  sono finiti quindi applicando un numero di volte  $n \leq |V| + |T|$  l'operatore  $\Gamma(S)$  è possibile trovare gli insiemi cercati  $V', T', P'$ :

- $V' = \Gamma^{|V|+|T|}(\{S\}) \cap V$  (teniamo solo le variabili raggiungibili da  $S$ );

- $T' = \Gamma^{|V|+|T|}(\{S\}) \cap T$  (teniamo solo i terminali raggiungibili da  $S$ );
- $P' = \{A \rightarrow \alpha \mid A \in V', \alpha \in (V' \cup T')^*\}$  (teniamo solo le produzioni che coinvolgono simboli raggiungibili).

**Esempio.** Sia  $G = \langle V = \{S, A, B\}, T = \{0, 1, 2\}, P, S \rangle$  con insieme  $P$  composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \epsilon \mid 0A \\ A &\rightarrow 1 \mid A1 \\ B &\rightarrow \epsilon \mid 01 \mid 01B \end{aligned}$$

$$\Gamma^0(\emptyset) = \emptyset, \Gamma(\emptyset) = \{S\}, \Gamma^2(\emptyset) = \{S, A, 0\}, \Gamma^3(\emptyset) = \{S, A, 0, 1\}.$$

La grammatica dopo la trasformazione avrà  $V' = \{S, A\}, T' = \{0, 1\}$  e  $P'$  composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \epsilon \mid 0A. \\ A &\rightarrow 1 \mid A1. \end{aligned}$$

**Lemma 6.4.**  $X \in \Gamma^n(\{S\})$  se e solo se esiste un albero di derivazione parziale con radice  $S$  in cui compare  $X$  come foglia di altezza minore o uguale ad  $n$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo ( $\implies$ ) per induzione matematica semplice sul numero  $n \in \mathbb{N}$  di applicazioni dell'operatore.

**Caso base:** se  $n = 0$  abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma^n(\{S\}) &= \Gamma^0(\{S\}) & [n = 0] \\ &= \{S\} & [\text{def. di } \cdot^0]. \end{aligned}$$

Se  $X \in \Gamma^0(\{S\})$  allora  $X = S$  e l'albero parziale corrispondente è formato da  $S = X$  come radice e foglia e ha altezza  $0 \leq n$ . ✓

**Passo induttivo:** Se  $n = m + 1$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \Gamma^n(\{S\}) &= \Gamma^{m+1}(\{S\}) & [n = m + 1] \\ &= \Gamma(\Gamma^m(\{S\})) & [\text{def. di } \cdot^n] \\ &= \{X \in V \cup T \mid \exists A \in \Gamma^m(\{S\}) . (A \rightarrow \alpha X \beta) \in P\} & [(31)]. \end{aligned}$$

Se  $X \in \Gamma^{m+1}(\{S\})$ , per definizione di  $\Gamma$  esiste la produzione  $A \rightarrow \alpha X \beta$ . Per la regola (4) di corrispondenza tra alberi e derivazioni esiste un albero  $T_A$  irradicato in  $A$  che ha come figli  $\alpha X \beta$  che sono anche foglie, quindi  $T_A$  ha altezza 1. Per definizione di  $\Gamma$ ,  $A \in \Gamma^m(\{S\})$ , allora, per ipotesi induttiva  $A$  è un nodo foglia di un albero  $T$  irradicato in  $S$  e di altezza minore o uguale a  $m$ . Facendo il merge tra  $T$  e  $T_A$  si ottiene un albero  $T'$  irradicato in  $S$  con una delle sue foglie etichettata con  $X$  la cui altezza è minore o uguale a  $m + 1$ . ✓

La dimostrazione di  $(\Leftarrow)$  è analoga. □

**Teorema 6.2.** *Ogni linguaggio CF non vuoto è generato da una grammatica CF priva di simboli inutili.*

*Dimostrazione.* Immediata applicando *in ordine* i due lemmi visti. □

Notare che se applicati in ordine errato è possibile ottenere una grammatica che non è del tutto priva di simboli inutili.

**Esempio.** Troviamo una grammatica per cui c'è un simbolo raggiungibile solo grazie ad una variabile improduttiva. Sia  $G = \langle \{S, A\}, \{0, 1\}, P, S \rangle$  con insieme  $P$  composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0 \mid A \\ A &\rightarrow A1 \end{aligned}$$

Applicando la rimozione dei simboli irraggiungibili la grammatica  $G'$  è equivalente a  $G$  perché tutto è raggiungibile. Applicando la rimozione delle variabili improduttive a  $G'$ , otteniamo  $G'' = \langle \{S\}, \{0, 1\}, P'', S \rangle$ , con insieme  $P''$  composto da:

$$S \rightarrow 0.$$

(E' rimasto il simbolo terminale non raggiungibile 1).

**Simboli inutili:** in generale, le variabili improduttive e simboli irraggiungibili vengono anche chiamati *simboli inutili* di una grammatica, quindi i procedimenti visti fino ad ora rientrano nelle procedure di “eliminazione dei simboli inutili” da una grammatica.

### 6.2.3 Eliminazione delle $\epsilon$ -produzioni

**Definizione 6.15** (Variabile annullabile). *Una variabile  $A \in V$  è annullabile se*

$$\exists A \xrightarrow{G}_* \epsilon.$$

**Teorema 6.3.** *Se  $L = L(G)$  per qualche grammatica CF  $G = \langle V, T, P, S \rangle$ , allora  $L \setminus \{ \epsilon \}$  è un linguaggio CF generato da una grammatica  $G' = \langle V', T', P', S \rangle$  senza variabili impoduttive, senza simboli irraggiungibili e senza  $\epsilon$ -produzioni.*

L'obiettivo è quindi quello di trovare un insieme  $N$  composto da tutte e sole le variabili annullabili, da utilizzare per ricavare un insieme di produzioni  $P''$  a partire da  $P$ . Per trovare  $N$  utilizziamo un nuovo operatore  $\Gamma$  ( $N = \Gamma^{|V|}$ ).

**Definizione 6.16** (Operatore  $\Gamma$  per variabili annullabili). *L'operatore  $\Gamma : \mathcal{P}(V) \mapsto \mathcal{P}(V)$  è definito come:*

$$\Gamma(W) := \{ A \in V \mid \exists A \rightarrow \alpha \in P. \alpha \setminus W = \epsilon \}. \quad (32)$$

L'insieme  $W \subseteq V$  contiene ad ogni applicazione dell'operatore  $\Gamma$  le variabili e i simboli terminali la annullabilità è stata accertata nelle applicazioni precedenti. Nella definizione di  $\Gamma$  compare anche  $\setminus : \mathcal{P}(V \cup T) \times \mathcal{P}(V) \mapsto (V \cup T)^*$  definito induttivamente come:

$$\begin{aligned} \epsilon \setminus W &= \epsilon, \\ X\alpha \setminus W &= \begin{cases} \alpha \setminus W, & \text{se } X \in W, \\ X(\alpha \setminus W), & \text{se } X \notin W. \end{cases} \end{aligned}$$

**Osservazione 6.6.**  $\Gamma$  è monotono e gli insiemi  $V$  è finito quindi applicando un numero di volte  $n \leq |V|$  l'operatore  $\Gamma(\emptyset)$  è possibile ricavare l'insieme  $N$  formato da tutte sole le variabili annullabili  $N = \Gamma^{|V|}(\emptyset)$  e definire  $P''$ :

$$P'' = \left\{ A \rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \begin{array}{l} A \rightarrow X_1 \dots X_n \in P, \\ X_i \notin N, \alpha_i = X_i, \\ X_i \in N, \alpha_i = X_i \vee \alpha_i = \epsilon, \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \neq \epsilon. \end{array} \right\}$$

Da  $G = \langle V, T, P, S \rangle$ , applicando iterativamente l'operatore  $\Gamma$  abbiamo ottenuto  $G'' = \langle V, T, P'', S \rangle$  senza  $\epsilon$ -produzioni. Nel caso  $S \in N$  allora significa che la grammatica originale generava anche la stringa vuota, in questo caso si aggiungerà la produzione  $S \rightarrow \epsilon$ . Applicando a  $G''$  l'eliminazione dei simboli inutili si ottiene la grammatica desiderata  $G' = \langle V', T', P', S \rangle$  senza  $\epsilon$ -produzioni e senza simboli inutili.

**Esempio.** Sia  $G = \langle V = \{S, A, B\}, T = \{0, 1\}, P, S \rangle$  con insieme  $P$  composto da:

$$S \rightarrow A0A \mid A$$

$$A \rightarrow 1 \mid B$$

$$B \rightarrow \epsilon.$$

$$\Gamma^0(\emptyset) = \emptyset, \Gamma^1(\emptyset) = \{B\}, \Gamma^2(\emptyset) = \{A, B\}, \Gamma^3(\emptyset) = \{S, A, B\} = N.$$

La grammatica  $G'' = \langle V, T, P'', S \rangle$  avrà  $P''$  composto da:

$$S \rightarrow \epsilon \mid 0 \mid A0 \mid 0A \mid A0A \mid A$$

$$A \rightarrow 1.$$

Notare che ora la variabile  $B$  è diventata un simbolo irraggiungibile.

**Lemma 6.5.** *Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  una grammatica CF e sia  $G'' = \langle V, T, P'', S \rangle$  ricavata da  $G$  rimuovendo le variabili annullabili.  $L(G) \setminus \{\epsilon\} = L(G'')$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo per induzione sul numero  $n \in \mathbb{N}$  di  $\epsilon$ -produzioni all'interno di una derivazione.

**Caso base:** sia  $d = S \xRightarrow{*} \alpha$  una derivazione di  $G$  che utilizza  $n = 0$   $\epsilon$ -produzioni, allora è possibile costruire la stessa identica derivazione con  $G'$  perché l'eliminazione delle produzioni unitarie non ha modificato nessuna delle produzioni coinvolte in  $d$ . ✓

**Passo induttivo:** sia  $d = S \xRightarrow{*} \alpha$  una derivazione di  $G$  che utilizza  $n = m + 1$   $\epsilon$ -produzioni, con  $m \in \mathbb{N}$ . Identifichiamo la  $m + 1$ -esima  $\epsilon$ -produzione in  $d$ :  $S \xRightarrow{*} \beta A \gamma \xRightarrow{*} \beta \delta B \eta \gamma \xRightarrow{*} \beta \epsilon \gamma \xRightarrow{*} \alpha$  che in questo caso si tratta di  $B \rightarrow \epsilon$ . Da questo si deduce che:

1.  $A \rightarrow \delta B \eta \in P$ ;
2.  $B \rightarrow \epsilon \in P$ .

Dal momento che  $S \xRightarrow{*} \beta A \gamma$  contiene  $m$   $\epsilon$ -produzioni, per ipotesi induttiva, esiste una derivazione di  $G''$  della forma  $S \xRightarrow{*} \beta A \gamma$ . L'eliminazione delle  $\epsilon$ -produzioni, ha eliminato la produzione  $B \rightarrow \epsilon$  e ha sostituito la derivazione  $A \rightarrow \delta B \eta$  con  $A \rightarrow \delta \eta$  quindi è possibile costruire la seguente derivazione di  $d''$ :  $S \xRightarrow{*} \beta A \gamma \xRightarrow{*} \beta \gamma \xRightarrow{*} \alpha$ . ✓

Mostrare che vale anche viceversa per esercizio. □

#### 6.2.4 Eliminazione Produzioni Unitarie

**Definizione 6.17** (Produzione unitaria). *Una produzione della forma*

$$A \rightarrow B$$

*(a sinistra compare solo una variabile) è detta produzione unitaria.*

**Teorema 6.4.** *Ogni linguaggio CF  $L$  tale che  $\epsilon \notin L$  è generabile da una grammatica senza simboli inutili,  $\epsilon$ -produzioni e variabili unitarie.*

Si comincia da una grammatica  $G$  senza  $\epsilon$ -produzioni, calcoliamo per ogni  $A \in V$  il seguente insieme:

$$\text{seguenti}(A) := \{ B \in V \mid A \xRightarrow{*}_G B \} \cup \{ A \},$$

poi togliamo da  $P$  le produzioni unitarie. Per ogni variabile  $A \in V$ , consideriamo le variabili  $B \in \text{seguenti}(A)$  e per ogni produzione non unitaria  $B \rightarrow \beta$  con  $B \neq A$ , aggiungiamo la produzione  $A \rightarrow \beta$ .

**Esempio.** Sia  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  con insieme  $P$  composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Allora  $\text{seguenti}(S) = \{ S, A \}$ ,  $\text{seguenti}(A) = \{ A \}$ .  $P'$  è composto da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0 \\ A &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

perché  $A \in \text{seguenti}(S)$ ,  $A \neq S$  e  $A \rightarrow 0 \in P$  e non è unitaria. Notare che  $A$  è diventato simbolo irraggiungibile.

Dimostriamo che date due grammatiche CF  $G = \langle V, T, P, S \rangle$  e  $G' = \langle V, T, P', S \rangle$  (ottenuta da  $G$  applicando l'eliminazione delle produzioni unitarie) vale che  $L(G) = L(G')$ . Procediamo per induzione sul numero  $n \in \mathbb{N}$  di produzioni unitarie all'interno di una derivazione.

**Caso base:** sia  $d = S \xRightarrow{*}_G \alpha$  una derivazione di  $G$  che utilizza  $n = 0$  produzioni unitarie, allora è possibile costruire la stessa identica derivazione con  $G'$  perché l'eliminazione delle produzioni unitarie non ha modificato nessuna delle produzioni coinvolte in  $d$ . ✓

**Passo induttivo:** sia  $d = S \xRightarrow{*}_G \alpha$  una derivazione di  $G$  che utilizza  $n = m + 1$  produzioni unitarie, con  $m \in \mathbb{N}$ . Identifichiamo la  $m + 1$ -esima produzione unitaria in  $d$ :  $S \xRightarrow{*}_G \beta A \gamma \xRightarrow{G} \beta B \gamma \xRightarrow{G} \beta a \gamma \xRightarrow{*}_G \alpha$  che in questo caso si tratta di  $A \rightarrow B$ . Dal momento che  $S \xRightarrow{*}_G \beta A \gamma$  contiene  $m$  produzioni unitarie, per ipotesi induttiva, esiste una derivazione di  $G'$  della forma  $S \xRightarrow{*}_{G'} \beta A \gamma$ . L'eliminazione delle produzioni unitarie, ha sostituito la produzione  $A \rightarrow B$  con  $A \rightarrow a$ , quindi è possibile costruire la seguente derivazione di  $d'$ :  $S \xRightarrow{*}_{G'} \beta A \gamma \xRightarrow{G'} \beta a \gamma \xRightarrow{*}_{G'} \alpha$ . ✓

Mostrare che vale anche viceversa per esercizio.

**Recap su semplificazione delle grammatiche:** data una grammatica  $G$ , è possibile ottenere una grammatica  $G'$  priva di simboli inutili,  $\epsilon$ -produzioni e produzioni unitarie eseguendo in ordine i seguenti passi:

1. eliminazione  $\epsilon$ -produzioni;
2. eliminazione produzioni unitarie;
3. eliminazione variabili improduttive;
4. eliminazione simboli irraggiungibili.

**Esempio:** sia  $G = \langle \{ A, B, C, D, S \}, \{ a, b, c \}, P, S \rangle$  una grammatica CF, con insieme  $P$  costituito da:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \\ C &\rightarrow CD. \end{aligned}$$

**Eliminazione  $\epsilon$ -produzioni:**

$$\begin{aligned} \Gamma(\emptyset) &= \{ B \}, \Gamma^2(\emptyset) = \{ A, B \}, \Gamma^3\{ A, B \} = \Gamma^4 = N. \\ G_1 &= \langle \{ A, B, C, D, S \}, \{ a, b, c \}, P_1, S \rangle, \text{ con } P_1 \text{ composto da:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid SA \mid AS \mid S \mid aB \mid a \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow CD. \end{aligned}$$

**Eliminazione produzioni unitarie:**

$$\begin{aligned}
\text{seguenti}(A) &= \{ A, B, S \}, \\
\text{seguenti}(B) &= \{ B \} \\
\text{seguenti}(C) &= \{ A, B, C, S \}, \\
\text{seguenti}(S) &= \{ S \}.
\end{aligned}$$

$G_2 = \langle \{ A, B, C, D, S \}, \{ a, b, c \}, P_2, S \rangle$ , con  $P_2$  composto da:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow ASA \mid SA \mid AS \mid aB \mid a \\
A &\rightarrow b \mid ASA \mid SA \mid AS \mid aB \mid a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow CD.
\end{aligned}$$

**Eliminazione variabili improduttive:**

$$\Gamma(\emptyset) = \{ S, A, B \} = \Gamma^2(\emptyset) = \Gamma^{|V|}(\emptyset).$$

$G_3 = \langle \{ A, B, S \}, \{ a, b, c \}, P_3, S \rangle$ , con  $P_3$  composto da:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow ASA \mid SA \mid AS \mid aB \mid a \\
A &\rightarrow b \mid ASA \mid SA \mid AS \mid aB \mid a \\
B &\rightarrow b.
\end{aligned}$$

**Eliminazione simboli irraggiungibili:**

$$\Gamma(\{ S \}) = \{ A, B, S, a \}, \Gamma^2(\{ S \}) = \{ A, B, S, a, b \} = \Gamma^{|V|+|T|}(\{ S \}).$$

$G_4 = \langle \{ A, B, S \}, \{ a, b \}, P_4 = P_3, S \rangle$ .