Esercitazione di Calcolo Numerico

1. Assegnare una matrice A tridiagonale e simmetrica memorizzata attraverso 2 vettori (diagonale principale e sopra-diagonale):

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & 0 \\ c_1 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Dopo avere introdotto un'opportuna tolleranza di calcolo per la valutazione dei determinanti dei minori principali, verificare, utilizzando Matlab, se la matrice A è direttamente fattorizzabile: $A = LU$. In caso positivo costruire la fattorizzazione.

2. Scrivere in Matlab gli algoritmi per la risoluzione di sistemi triangolari inferiore e superiore.

4. Utilizzando comandi Matlab rispondere alle seguenti domande. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

(a) Calcolare AB e BA e mostrare che $AB \neq BA$.
(b) Confrontare $(A + B) + C$ e $A + (B + C)$.
(c) Confrontare $A(BC)$ e $(AB)C$.
(d) Confrontare $(AB)^T$ e $B^T A^T$.

5. Scrivere una *function* che generi la matrice $n \times n$

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e ne calcoli il determinante e il numero di condizionamento al variare di $n = 1, \cdots, 50$. Fare due grafici, sulla stessa pagina, al variare di n del determinante e del condizionamento della matrice.

6. Siano A=hilb(1000) e B=rand(1000).
a) Costruire il vettore b in modo che il sistema Ax = b sia risolto da x=ones(1000,1), e il vettore c in modo che il sistema By = c sia risolto da y=ones(1000,1);
b) Calcolare i vettori x e y come soluzione dei sistemi lineari Ax = b, By = c utilizzando il comando \ (`mldivide`) di Matlab;
c) Calcolare gli errori relativi rapportandoli al numero di condizionamento delle corrispondenti matrici. Cosa si osserva?
d) Rappresentare in un grafico in scala semilogaritmica il condizionamento della matrice di Hilbert di dimensioni variabili da 2×2 a 50×50.