Lezione 2 del 28/02/2022

Titolo nota 28/02/2022

Def.: I NUMERI MACCHINA sono i numeri rappresentabili esattamente sul calcolatore

__Oss__: hanno un numero finito di cifre

Def: L'insieme dei numeri macchina è chiamato SISTEMA FLOATING POINT

Es.:

31415	-0.00000123
$3.1415 \cdot 10^4$	$-1.23 \cdot 10^{-6}$
$0.031415 \cdot 10^6$	$-0.123 \cdot 10^{-5}$
$0.31415 \cdot 10^5$	$-123 \cdot 10^{-8}$

$$x = \underbrace{s}_{\substack{1\text{ bit} \\ \text{segno}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t} \right)}_{\substack{\text{mantissa} \\ 52 \text{ bit}}} \underbrace{\beta}_{\text{base}}^{\overbrace{p}^{\substack{11 \text{ bit} \in [-1022, 1023] \\ \text{esponente}}}}$$

$$0 \leq d_i \leq \beta - 1 \qquad i = 1 \dots t$$

$$x = \pm\, 0.\, d_1 d_2 \dots d_t \cdot \beta^p$$

Oss.: Il più grande numero positivo memorizzabile è REALMAX al di sopra del quale si ha OVERFLOW

Il minimo numero maggiore di zero rappresentabile è REALMIN

Altri valori più piccoli compresi tra 0 e realmin possono essere rappresentati rinunciando alla rappresentazione standard IEEE dei numeri floating point

<u>Oss</u>: Alcuni valori speciali richiedono una codifica speciale: NaN, Inf. ..

<u>Def</u>: L'EPSILON MACCHINA è il più piccolo numero macchina positivo x tale che

$$(1+x) > 1$$

<u>Oss</u>: indica la sensibilità del sistema floating point adottato; indica di quanto può variare al più l'errore relativo

Es.: ERRORI di RAPPRESENTAZIONE

$\ast$ $S(1) = 0$

for $i = 1 : 10\,000$

$\quad S(i+1) = S(i) + 0.0001$

end

$S(\text{end}) = 9.99\ldots \neq 1.000$

$\ast$ $S = [0 : 0.0001 : 1]$

$S(\text{end}) = 1$

Es.: ERRORI di CANCELLAZIONE NUMERICA

$x = 77 \cdot 777 \cdot 777$

$y = \sqrt{x^2+1} - x = 0$

$= 6.428 \cdot 10^{-9}$

$\overset{9}{\doteq}$

$z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \cong 7.14 \cdot 10^{-9}$

Es: valutare le espressioni, analiticamente equivalenti,

$$y_1 = (1-x)^6 \qquad\qquad y_2 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

in 100 punti equidistanti nell'intervallo $[1-\delta, 1+\delta]$

$$\delta = 0.1,\ 0.01,\ 0.005,\ 0.0025$$

Oss: Per le operazioni macchina $\boxed{\odot}: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vale in generale la proprietà commutativa ma non le altre proprietà

Es.:
$$(a \boxed{+} b) \boxed{+} c \neq a \boxed{+} (b \boxed{+} c)$$

$$a = 0.1234567 \qquad b = 6\,666.325 \qquad c = -6\,666.325$$

Def: ERRORE ASSOLUTO

$$E_{a} := |\text{valore esatto} - \text{valore approssimato}|$$

ERRORE RELATIVO

$$E_{rel} := \frac{E_a}{|\text{valore esatto}|}$$

Def: Un modello $f(x)$ si dice BEN CONDIZIONATO se vale una relazione del tipo

$$\frac{\|f(x+\delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq K \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \qquad \begin{matrix} f(x) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

con K "piccolo".

K è definito NUMERO di CONDIZIONAMENTO

Es.: Studiamo il condizionamento della somma

$x, y \in \mathbb{R}$ $\qquad \bar{x} = fl(x) = x(1+\varepsilon_1) = x + x\varepsilon_1$

$\bar{y} = fl(y) = y(1+\varepsilon_2)$

$$\frac{|\bar{x}+\bar{y}-(x+y)|}{|x+y|} = \frac{|\cancel{x}+x\varepsilon_1+\cancel{y}+y\varepsilon_2-\cancel{x}-\cancel{y}|}{|x+y|} = \frac{|x\varepsilon_1+y\varepsilon_2|}{|x+y|} \leq$$

$$\leq \frac{|x||\varepsilon_1|}{|x+y|} + \frac{|y||\varepsilon_2|}{|x+y|} = K_1|\varepsilon_1| + K_2|\varepsilon_2|$$

Se $x \to -y$ allora $K_1, K_2 \to +\infty$ quindi si ha un cattivo condizionamento (CANCELLAZIONE NUMERICA)

Es.: Studiamo il condizionamento del prodotto

$$\frac{|\bar{x}\bar{y} - xy|}{|xy|} = \frac{|x(1+\varepsilon_1)y(1+\varepsilon_2) - xy|}{|xy|} =$$

$$ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

$$= |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_1\varepsilon_2| \le$$

$$\le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \frac{1}{2}|\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \frac{1}{2}|\varepsilon_1| + \frac{1}{2}|\varepsilon_2| =$$

$|\varepsilon|^2 < |\varepsilon|$ se $|\varepsilon| \le 1$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}}_{K_1} |\varepsilon_1| + \underbrace{\frac{3}{2}}_{K_2} |\varepsilon_2|$$

<u>Oss</u>: K è uguale a $\frac{3}{2}$ quindi il prodotto è ben condizionato