

*Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti.*

*Il punteggio finale sarà la somma dei punti dei 3 esercizi riusciti meglio.*

**Problema 1.1** (11 punti). Il consumo di acqua quotidiano di una famiglia è una variabile aleatoria di media e deviazione standard entrambe uguali a  $0.75 \text{ m}^3$ .

**(6 punti)** Sia  $U$  il consumo complessivo in un periodo di 61 giorni (due mesi). Determinare media e deviazione standard di  $U$  e la probabilità che  $U$  sia maggiore di  $60 \text{ m}^3$ .

**(3 punti)** Sia  $V$  il consumo complessivo in un periodo di un anno. Determinare un intervallo  $[a, b]$  tale che  $V$  vi appartenga con probabilità dell'80%.

**(2 punti)** Ripetere il punto precedente sostituendo  $V$  con  $W$ , il consumo complessivo di un periodo di una sola settimana, assumendo questa volta che il consumo quotidiano abbia distribuzione esponenziale.

**Problema 1.2** (12 punti). Sia  $X$  una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^\alpha} & t \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per i primi due punti si fissa  $\alpha = 3$ .

**(7 punti)** Si determini  $f_X$  (la funzione di densità di  $X$ ) e si calcolino moda, mediana, media e deviazione standard di  $X$ .

**(2 punti)** Sia  $Y = \log X$ . Si determini  $f_Y$  (la funzione di densità di  $Y$ ), e se ne tracci il grafico. Si calcolino media e deviazione standard di  $Y$ .

**(3 punti)** Per  $i = 1, \dots, n$ , siano  $X_i$  variabili aleatorie indipendenti, con legge simile a quella di  $X$ , ma ciascuna con il suo proprio parametro  $\alpha_i > 0$  qualsiasi. Si determini la legge di  $Y := \min(X_1, \dots, X_n)$ .

**Problema 1.3** (11 punti). Un allevatore ha una bufala che in 14 giorni consecutivi ha prodotto le quantità di latte seguenti (misurate in litri),

14.0	15.1	13.9	12.2	14.9	12.0	14.9
12.9	16.1	13.0	13.7	15.8	13.5	13.9

**(6 punti)** Si verifichi al 5% di significatività, se la bufala in questione abbia una produzione media giornaliera analoga a quella tipica, che è di 14.5 litri.

**(3 punti)** Negli stessi 14 giorni una seconda bufala ha prodotto latte con media campionaria di 15.33 litri e deviazione standard campionaria di 1.45 litri. Si verifichi tramite il  $p$ -value se sia plausibile che le due bufale abbiano la stessa produzione media.

**(2 punti)** Considerando ancora il test del punto precedente, si stimi grossolanamente per quanti giorni di produzione andrebbero raccolti i dati delle due bufale, affinché il test abbia una potenza del 50% a fronte di una differenza di produzione media tra i due animali del 10%.

**Problema 1.4** (11 punti). Si vuole misurare la precisione con cui uno smartwatch rileva il *passo* di corsa (il passo è la velocità espressa in secondi per chilometro). Viene svolto un esperimento in cui l'oggetto viene portato ad un passo assolutamente costante, per 10 intervalli di 1 km. Per ciascun intervallo si rileva il passo medio misurato, trovando i dati seguenti (in secondi per km),

301	289	299	311	299
288	304	313	303	299

Si ipotizza che i dati siano normali, con media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$ , e che quest'ultima misuri la precisione dello strumento.

**(6 punti)** Si stimi  $\sigma$  con un intervallo di confidenza unilaterale sinistro (ovvero del tipo  $\sigma \leq U$ ) con il 95% di confidenza e anche con un intervallo di confidenza bilaterale al 95%.

**(2 punti)** L'azienda produttrice sostiene che  $\sigma$  sia minore di 5 s/km. Si verifichi tramite il calcolo del  $p$ -value se ciò sia plausibile.

**(3 punti)** Si determini la potenza del test precedente, nel caso  $\sigma$  sia pari a 10 s/km.