Docente, F. Morandin		28 gennaio 2022
	Laurea Triennale in Matematica, Laurea Triennale in Informatica	
Elementi di Probabilità/Introduzione alla Statistica		Scritto 2

Si svolgano 3 esercizi a scelta sui 4 proposti.
Il punteggio finale sarà la somma dei punti dei 3 esercizi riusciti meglio.

Problema 2.1 (12 punti)**.** Il numero di studenti che si iscrivono al secondo appello di Elementi di Probabilità è una variabile aleatoria di media $\mu = 25$ e deviazione standard $\sigma = 5$.

(6 punti) L'aula A del plesso di matematica e informatica, ha 84 posti, ma all'esame se ne usano uno su quattro, perciò sono sufficienti per accogliere fino a 21 studenti e non di più. Determinare la probabilità che l'aula A non sia sufficiente per gli studenti iscritti.

(3 punti) Si aggiungono alle iscrizioni anche un numero casuale di studenti di Istituzioni di Probabilità (media 1 e deviazione standard 1). Qual è la capacità minima di un'aula per cui vi sia il 90% o più di probabilità che essa sia sufficiente (sempre usando un posto su quattro)?

(3 punti) Ogni iscritto ha però una probabilità del 15% di non presentarsi all'appello. Rispondere nuovamente al secondo punto con questa informazione aggiuntiva. (Servirà scegliere un modello sensato per le variabili aleatorie coinvolte.)

Problema 2.2 (12 punti)**.** Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di densità

$$f_X(t) = \begin{cases} ct^2(1-t)^2 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(7 punti) Si determini il valore di c, si tracci il grafico della funzione e si calcolino moda, media e deviazione standard di X.

(2 punti) Si defermini la funzione di ripartizione di X e si calcolino la mediana e il quantile approssimato al 99%. (Ovvero q tale che $P(X \le q) = 99\%$.)

(3 punti) Sia $Y = \sqrt{X}$. Si determini la funzione di densità di Y e se ne tracci il grafico. Si calcolino moda, media e deviazione standard di Y.

Problema 2.3 (11 punti)**.** Un'azienda testa l'affidabilità di un modello di matita meccanica. Un campione di 25 di questi prodotti viene testato fino alla rottura e per ciascuno si annota il tempo di vita in mesi, trovando una media campionaria di 7.48 e una deviazione standard campionaria di 3.79. Si assume che la popolazione abbia distribuzione Gaussiana di parametri μ e σ.

(6 punti) Si stimino al 90% di confidenza sia μ (intervallo bilaterale), sia σ (intervallo unilaterale destro, tipo $\sigma \le U$).

(2 punti) Nel caso fosse proprio $\mu = 7.48$ e $\sigma = 3.79$, che frazione delle matite durerebbe meno di 2 mesi? Qual è il minimo valore di μ per cui questa frazione sia inferiore al 10%?

(3 punti) Con riferimento al valore trovato nel punto precedente, si verifichi con livello di significatività del 5% se vi sia evidenza che i difettosi siano meno del 10%. (Si può assumere che $\sigma = 3.79$.) Qual è la minima percentuale y tale che lo stesso test dimostra che i difettosi sono meno di y?

Problema 2.4 (11 punti)**.** Su un campioone di 50 intervistati, 19 preferirebbero una donna al Quirinale, 9 preferirebbero un uomo e 22 non hanno preferenze. Siano p_d e p_u rispettivamente le frazioni di persone nella popolazione che risponderebbero di preferire una donna e un uomo.

(6 punti) Si verifichi se vi sia evidenza statistica che p_d sia minore del 50%. In particolare si fornisca il p-value di questo test.

(2 punti) Si verifichi se vi sia evidenza statistica che p_d sia maggiore di p_u.

(3 punti) Supponiamo ora che nel campione ci fossero 25 femmine e 25 maschi, e che le due popolazioni abbiano probabilità differenti $p_d^{(f)}$ e $p_d^{(m)}$ di rispondere di preferire una donna. Sia X_d la variabile aleatoria che conta il numero di preferenze per una donna nel campione complessivo di 50. Quanto valgono media e varianza di X_d? C'è differenza rispetto ad una semplice distribuzione binomiale?