

# Probabilità – Un po' di problemi per *divertirsi*

F. Morandin

1 marzo 2002

## 1 Dadi

Indicheremo con la notazione  $1d6$  il lancio di un normale dado da gioco a sei facce. Similmente  $1d20$  sarà un dado a 20 facce, mentre ad esempio  $2d4$  rappresenterà la somma di due dadi a quattro facce, e così via...

**Esercizio 1.** Si supponga di tirare  $1d6$ . Qual è la probabilità di fare 1? E quella di ottenere un numero pari? E quella di ottenere un numero primo? Rispondere alle stesse domande nel caso di  $1d5$  e di  $1d20$ .

**Esercizio 2.** Se si tira due volte  $1d6$ , qual è la probabilità di fare 3 e 4 in questo ordine? E di fare 3 e 4 in un ordine qualsiasi? E per la coppia 1 e 1?

**Esercizio 3.** Qual è la probabilità di fare 2 con  $2d4$ ? E per gli altri numeri dal 3 all'8? Scrivere la tabella delle probabilità e fare un grafico. Ripetere l'esercizio per  $2d6$  ed estrapolare la risposta generale.

**Esercizio 4.** Nel caso del lancio di  $3d6$ , calcolare le probabilità dei numeri dal 3 al 10. Estrapolare quelle dei numeri dall'11 al 18 e disegnare un grafico.

**Esercizio 5.** Si ripete 3 volte il lancio di  $1d6$ . Qual è la probabilità che i risultati siano tutti diversi? Analogamente si risolve il seguente problema.

In una classe scolastica ci sono 25 studenti. Quanto è probabile che ci siano (almeno) due studenti che compiono gli anni lo stesso giorno?

**Esercizio 6.** Si ripete 3 volte il lancio di  $1d6$ , contando quante volte esce l'uno. Sia  $B$  questo valore. Chiaramente  $B$  potrà in generale valere 0, 1, 2 oppure 3. Con quali probabilità?

**Esercizio 7.** Una moneta può essere vista come  $1d2$  marcato con “testa” e “croce” anziché con 1 e 2. Si tira 6 volte una moneta, contando quante volte esce “testa”. Sia  $B$  questo valore. Come nell'Esercizio 6,

$B$  è un numero casuale. Qual è la sua distribuzione? (Cioè, dire qual è la probabilità che  $B = 0$ ,  $B = 1$ ,  $B = 2$  e in generale che  $B = k$ ). Qual è la media di  $B$ ? (Risposta intuitiva).

**Esercizio 8.** Un  $d3$  onesto (bilanciato) dovrebbe avere una media di 2. Quanto dovrebbe avere di media un  $d3$  truccato per il quale i numeri 1, 2 e 3 hanno rispettivamente probabilità  $1/6$ ,  $1/3$  e  $1/2$ ? Si può ora calcolare rigorosamente la media di  $B$  dell'Esercizio 7.

**Esercizio 9.** Si lancia 6 volte un  $d6$ . Sia  $B$  il numero di volte che esce l'uno. Sfruttando i ragionamenti degli Esercizi 6 e 7, dire qual è la probabilità che  $B = 3$ . Ripetere per gli altri valori possibili di  $B$  e poi, utilizzando la strategia dell'Esercizio 8, calcolare la media di  $B$ .

**Esercizio 10.** Si lancia due volte  $1d4$  e si moltiplicano i risultati ottenuti (possiamo denotare questo esperimento così:  $1d4 \cdot 1d4$ ). Qual è la media del numero casuale che si ottiene? E nel caso di  $1d6 \cdot 1d8$ ? Generalizzare.

**Esercizio 11.** Si lancia  $1d6$ ; poi si lanciano tanti  $d8$  quanto è il numero appena ottenuto e si sommano i risultati dei vari  $d8$ . Mostrare che la media del numero casuale che si ottiene è la stessa della seconda parte dell'Esercizio 10. Si può dire la stessa cosa della distribuzione di questi due numeri casuali? (cfr. Esercizio 7).

**Esercizio 12.** Si ripete tante volte il lancio di  $1d12$ , fermandosi appena esce il numero 1. Chiamiamo  $T$  il numero totale di lanci fatti. È evidente che  $T$  è un numero casuale. Qual è allora la distribuzione di  $T$ ? (cfr. Esercizio 7). È possibile calcolare la media di  $T$ ?

**Esercizio 13.** Un punto si trova inizialmente sull'origine dell'asse dei numeri interi. Poi ogni secondo si tira una moneta, e se il risultato è testa, il punto si muove di 1 a destra, altrimenti si muove di 1 a sinistra. Dopo  $n$  secondi, qual è la probabilità di trovarlo nella posizione  $k$ ?

## 2 Urne

Con *urna* intendiamo un contenitore dal quale si pescano a caso un certo numero di oggetti (palline colorate o numeri della tombola, per esempio). Diciamo che si pesca dall'urna *senza rimessa* se gli oggetti estratti non vengono ristabiliti nell'urna prima di continuare a estrarre. Altrimenti si parla ovviamente di estrazione con rimessa; siccome è facile capire che in questo secondo caso l'urna può essere sostituita da un dado, ci concentreremo sul primo tipo di esperimenti.

**Esercizio 14.** Un'urna contiene  $m$  palline bianche e  $n$  palline nere. Se si estrae una sola pallina, qual è la probabilità che sia bianca? Se si estraggono 2 o più palline senza rimessa, qual è la probabilità che siano tutte bianche?

**Esercizio 15.** Un'urna contiene 2 palline bianche e 4 palline nere. Si estraggono 2 palline senza rimessa: qual è la probabilità che almeno una di esse sia bianca?

**Esercizio 16.** Da un mazzo da gioco di 52 carte se ne estraggono 2 a caso. Qual è la probabilità che siano una *coppia* (ovvero stesso numero e seme diverso)?

**Esercizio 17.** Da un mazzo da gioco di 52 carte se ne estraggono 5 a caso. Qual è la probabilità di avere un poker servito? E un colore?

**Esercizio 18. Superenalotto.** Da un'urna contenente i primi 90 numeri interi positivi, se ne estraggono 6 a caso. Giocandone 6 qualsiasi, qual è la probabilità di indovinarne 3, 4, 5 o tutti e 6? Se vengono giocate un miliardo di colonne, tutte casuali e indipendenti, quante di queste - più o meno - realizzeranno un 3? E supponendo che il montepremi per il 3 sia di 25 mln di euro, di quanto sarà la vincita media?

**Esercizio 19.** Sono date due urne, una contiene 2 palline bianche e 2 nere, l'altra contiene 4 palline nere. Si sceglie a caso una delle due urne senza sapere quale sia. Si estraggono due palline senza rimessa e queste si trovano essere entrambe nere. L'intuizione ci dice che abbiamo probabilmente scelto la seconda urna. Ma qual è esattamente questa probabilità? Si estrae una terza pallina dalla stessa urna (sempre senza rimessa). Qual è la probabilità che essa sia bianca?

## 3 Problemi avanzati

Questi problemi sono difficili o molto difficili. Alcuni in effetti sono stati addirittura celebri in un (remoto) passato.

**Esercizio 20.** Ragionando sul problema 18 nella sua realizzazione concreta di gioco (Superenalotto), supponendo che il montepremi per il 3 sia effettivamente di 25 euro a colonna, e supponendo che al telegiornale sia annunciato che la vincita settimanale per il 3 sia una cifra notevolmente più alta o notevolmente più bassa di quella da voi calcolata, qual è la spiegazione più sensata?

**Esercizio 21. Urna di Polya.** Un'urna contiene inizialmente una pallina bianca e una nera. Viene estratta una pallina, che viene poi reinserita assieme ad un'altra dello stesso colore. Si ripete la procedura ogni volta estraendo una pallina a caso e rimettendola aggiungendone un'altra uguale. Provare che al passo  $n$ -esimo (quando l'urna contiene  $n+2$  palline) la probabilità che vi siano  $k$  palline bianche è  $1/(n+1)$  per qualunque  $k$  possibile (ovvero qualunque  $k$  compreso tra 1 e  $n+1$ ).

**Esercizio 22.** In un concorso a premi il concorrente può scegliere una qualsiasi di 3 porte, due delle quali portano a stanze vuote, e una delle quali nasconde un grosso premio. Il concorrente non ha nessuna informazione, e deve scegliere a caso. Dopo che egli ha deciso per la porta  $A$ , il presentatore, che in realtà sa bene qual è la porta giusta, decide di aprire la porta  $B$ , mostrando che essa è vuota, e sfida a questo punto il concorrente a cambiare - se crede - la sua scelta per la porta  $C$ . Qual è la strategia migliore per il concorrente? Tenere la sua risposta, cambiare per la  $C$ , o è del tutto indifferente?

**Esercizio 23.** Si scelgono a caso due punti su un segmento; in questo modo il segmento stesso risulta diviso in tre. Qual è la probabilità che con questi tre segmenti più piccoli si possa formare un triangolo? (Si noti che ad esempio tre segmenti di lunghezza 1, 2 e 5 non possono chiudersi a triangolo).

**Esercizio 24.** In un seggio elettorale vi sono solo due candidati, e tutte le schede che sono state messe nell'urna sono schede valide per uno o per l'altro candidato. Supponiamo che l'urna contenga 350 voti per Tizio e 349 per Caio. Qual è la probabilità che durante tutto lo spoglio (fatto una scheda alla volta) Tizio resti sempre in testa rispetto a Caio?