

Rullebevegelse ned en kvartsirkel

Sam Rouppe^a, Jesper Vogt^a, Sahil Karegaonkar^a

^aInstitutt for fysikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, N-7491 Trondheim, Norway.

Sammendrag

I dette forsøket ble det målt unnslippingsvinkelen til tre ulike gjenstander nedover en kvartsirklet bane. Dette ble gjort ved å utføre og filme forsøkene med en high frame rate kamera. Disse opptakene ble senere analysert i en modelleringsprogram Tracker. I denne artikkelen skal disse resultatene også sammenliknes med teoretiske verdier, beregnet ved hjelp av numeriske og analytiske metoder. Basert på disse resultatene kan vi konkludere at objekter under ren translatorisk bevegelse, uten friksjon slipper tak først, deretter en kompakt sylinder under rulling med sluring, så en hul sylinder med rulling og sluring. En kule og en hul sylinder under ren rulling vil henholdvis miste tak sist.

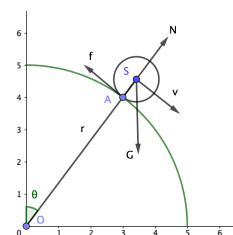
1. Innledning

Hensikten med denne rapporten er å undersøke hvordan ulike gjenstander beveger seg nedover en kvartsirklet bane og hvordan ulike faktorer, som friksjon og utgangsposisjon påvirker objektets bane. Dette forsøket ble foretatt med tre ulike objekter: en kompakt kule, en kompakt sylinder og en hul sylinder. Forsøket dekker et scenario hvor friksjonen mellom objektet og banen er høy og et annet scenario hvor det er lavt friksjon mellom banen og objektet. Hensikten med forsøket med lav friksjon er å simulere at objektet beveger seg rent translatorisk. Forsøket med høy friksjon har som hensikt å dekke også de tilfellene når objektet ruller og slurer. Videre har denne rapporten som hensikt å lage en modell for å beskrive denne bevegelsen og diskutere hvorvidt denne modellen i samsvar med eksperimentelle observasjoner.

Siden Newton fastslo sine teorier om mekanikk har mekaniske systemer, slik som blant annet den vi tar for oss i denne rapporten kunne beskrives ved hjelp av beregninger. Med noen forenklinger og antagelser kan disse mekaniske systemene beskrives godt ved hjelp av analytiske metoder. I denne rapporten vil det gjelde, scenario en, hvor vi antar ren translasjon, og scenario to, hvor vi antar ren rulling. Derimot kan mer virkelighetsnære beskrivelser av et gitt system ofte bare beskrives nøyaktig med numeriske metoder. I denne oppgaven vil særlig eulers metode bli brukt. En metode som tar i bruk at neste tidssteg i systemet kan uttrykkes ved hjelp av det nåværende steget og endringen i systemet ved et vist tidssteg. Med denne tilsynelatende enkle tilnærmingen kan man ved hjelp av den numeriske styrken til datamaskiner beskrive, for oss personlig, overaskende mange systemer.

2. Teori og metode

Eksprimentelt brukte vi kamereat: Panasonic DMC-FZ-200. Denne ble satt på 200 fps. Videofilene kan analyseres i tracker. Programmet tilatter at man legger til en akse og kalibrerings størrelse, slik at programmet kan gi koordinat verdier per piksler som tilsvarer reelle størrelser.



Figur 1: θ er vinkelen i forhold til vertikallinja, r er avstand OS, r_{Obj} er avstand AS

2.1. Sluring ned en kvartsirkel

Vi betrakter et objekt med radius r_{Obj} og masse m som slurer ned en kvartsirkelbane med radius R og skal finne vinkelen θ_{slipp} når objektet faller av banen.

Den analytiske løsningen av problemet krever bruk av newtons andre lov og energibevareingsloven. Når objektet slipper tak, er normalkraften $\vec{N} = 0$. Dette, sammen med newtons andre lov langs radielle retningen \hat{r} (se figur 1.) gir oss at

$$\sum \vec{F} = -ma = -mg \cos \theta + \vec{N} = -m \frac{v^2}{r} + mg \cos \theta = \vec{N} = 0 \quad (1)$$

Ved å løse likningen for $\cos \theta$, får vi at

$$\cos \theta = \frac{v^2}{rg}, \quad (2)$$

hvor R er banens radius og r er objektets (sylinderen eller kulens) radius. Deretter kan et uttrykk for \vec{v} bli funnet ved å bruke energibevaringsloven:

$$E_{p_{\text{f\o r}}} = E_{\text{rot}} + E_{\text{trans}} + E_{p_{\text{etter}}}$$

Når det er ingen friksjon, er bevegelsen translatorisk, altså $E_{\text{rot}} = 0$. Uttrykket for energibevaring blir da

$$mgr \cos \theta_{\text{start}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh, \quad (3)$$

hvor h er ballens høyde over bakken når den mister kontakt og θ_{start} er vinkelen mellom vertikallinjen og objektets startposisjon. Høyden h kan uttrykkes ved θ slik:

$$h = r \cos \theta_{\text{slipp}}.$$

Likning (3) kan da skrives som

$$gr \cos \theta_{\text{start}} = \frac{1}{2}v^2 + gr \cos \theta_{\text{slipp}} \quad (4)$$

Ved å løse uttrykket for v får vi at

$$v = \sqrt{2gr(\cos \theta_{\text{start}} - \cos \theta_{\text{slipp}})} \quad (5)$$

Nå kan likning (2) løses for θ_{slipp} ved å sette inn uttrykket for v fra likning (5) i likning (2) slik at vi får

$$\cos \theta_{\text{slipp}} = \frac{2gr(\cos \theta_{\text{start}} - \cos \theta_{\text{slipp}})}{gr} \quad (6)$$

som kan forenkles til

$$\cos \theta_{\text{slipp}} = \frac{2}{3} \cos \theta_{\text{start}} \quad (7)$$

Denne likningen kan brukes for å løse finne unslipningsvinkelen for et objekt som slippes fra startvinkelen θ_{start} , hvis bevegelsen er friksjonsløs.

Forutsetningen for bruk av denne metoden er at den totale energien er bevart og bruker at objektet forlater kvartsirkelen når normalkraften er 0. Grunnen til at denne metoden blir brukt er fordi bevaring av energi gir en lett måte å finne v som kan puttes inn i likning (2) for å finne sluttvinkelen.

Denne oppgaven kan også løses ved hjelp av numeriske metoder. En måte å gjøre dette på er å bruke Eulers metode. Eulers metode er en numerisk metode for å løse ordinære differensiallikninger, som forutsetter kjente startbetingelser. I dette tilfellet forutsettes det at vinkelen objektet slippes fra, vinkelhastigheten ved start og vinkelakselerasjonen ved start er kjent.

Startvinkelen er kjent og den fås fra målinger av eksperimentet. Vinkelhastigheten ved start settes alltid til å være lik 0, altså $\omega(t_0) = 0$. Vinkelakselerasjonen ved start kan

uttrykkes ved tangentielle akselerasjonen, som er komponenten til gravitasjonskraften som ligger langs den tangentielle retningen. Dette gir oss at

$$\alpha(t_0) = g \sin \theta(t_0)/r \quad (8)$$

For hvert tidssteg deretter beregnes θ, ω og α basert på forrige tidssteg utfra formlene:

$$\begin{aligned} \alpha(t + \Delta t) &= \frac{g \sin \theta(t)}{r} \\ \omega(t + \Delta t) &= \omega(t) + \alpha(t)\Delta t \\ \theta(t + \Delta t) &= \theta(t) + \omega(t)\Delta t \end{aligned}$$

Slippvinklen er den vinklen som tilfredstiller likning (1). I hvert tidssteg brukes verdien til θ sammen med sammenhengen

$$\omega^2 r = \frac{v^2}{r} \quad (9)$$

til å sjekke om normalkraften er lik 0. Numerisk løses det ved å sjekke om

$$g \cos \theta - \omega^2 r \leq 0, \quad (10)$$

Når uttrykket er mindre enn 0, returneres θ -verdien som slippvinkelen.

2.2. Ren rulling ned en kvartsirkel

For ren rulling brukes sammenheng mellom alpha og tangensiell akselerasjon for å uttrykke alpha med hensyn til en friksjonskraft som skaper rulling, altså må vi ta hensyn til objektets dreiemoment. Begynner med å bruke sammenhengen

$$\alpha = \frac{a_{\parallel}}{r}, \quad (11)$$

sammen med Newtons andre lov, kan en likning for ren rulling utledes slik:

$$\sum \vec{F}_{\parallel} = ma_{\parallel} = m\alpha r = mg \sin \theta - \vec{f} \quad (12)$$

hvor \vec{f} er friksjonskraften. Vi har i tillegg følgende sammenhenger mellom alpha og I:

$$\alpha r = \frac{\tau r}{I} \quad (13)$$

$$\tau = rf \quad (14)$$

Likningene (12) og (13) gir et uttrykk for \vec{f} :

$$\vec{f} = \frac{cg \sin \theta}{c + 1} \quad (15)$$

Det å sette inn uttrykket for \vec{f} i likning (12) gir et uttrykk for vinkelakselerasjonen

$$\alpha r = \frac{g \sin \theta}{c + 1}$$

$$\alpha = \frac{g \sin \theta}{r(c+1)} \quad (16)$$

Med et uttrykk for α kan vi med eulers metode numerisk tilnærme når Normalkraften blir null, slik som i oppgave 1, se likning (10)

2.3. Rulling med sluring ned en kvartsirkel

For rulling med sluring ser vi på de to sylindrene når de beveger seg langs kvartsirkelen. Denne bevegelsen kan beskrives i to intervaller: fra den slippes vil den rulle rent til en $f_{max} = \mu_s N$ (*s: statisk*). Deretter kan den ikke rulle rent, og vi antar ren sluring med friksjonskraft $f_k = \mu_k N$.

Når objektet har ren rulling, må det tas hensyn til rotasjonsenergien. Likningen for energibevaring

$$E_{p_{f\ddot{o}r}} = E_{rot} + E_{trans} + E_{p_{etter}}$$

blir da

$$mgr \cos \theta_{start} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 + mgh \quad (17)$$

Her er I_0 på formen cmr_{obj}^2 hvor c er et rasjonalt tall for en kompakt kule, hul sylinder og en kompakt sylinder. Det å løse for v gir oss

$$v = \sqrt{\frac{2gr}{c+1}(\cos \theta_{start} - \cos \theta_{slipp})} \quad (18)$$

Videre gir likning (12), sammen med $f = \mu_s N$ gir et uttrykk for \vec{N} :

$$N = \frac{c}{\mu_s(1+c)} mg \sin \theta \quad (19)$$

som kombineres med (1) og (18), slik at μ_s isoleres slik:

$$\mu_s = \frac{c \sin \theta}{-2 \cos \theta + (c+1) \cos \theta_{slipp}} \quad (20)$$

Med bruk av eulers metode som i oppgave 2 kan en sjekke når dette uttrykket stemmer. Da vil maksimal statisk friksjon være oppnådd og sylindrene kan ikke rulle rent lenger. Etter det punktet beskrives bevegelsen med utgangspunkt i Newtons 2 lov i tangensiell retning, ligning (12), med $f_k = \mu_k N$ gitt ved:

$$m\alpha r = mg \sin \theta - \mu_k N \quad (21)$$

Her er N i radiell retning og blir substituert med ligning (1), hvor $\frac{v^2}{r} = \omega^2 r$. Dette leder til differensialligningen

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{r}(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) + \mu_k \omega^2 \quad (22)$$

Dette gir altså et uttrykk for α som vi bruker videre i eulers metode. Samtidig sjekker vi nå for om normal kraften er null slik som i de foregående oppgavene, se likning (10).

3. Resultat

De målte størrelsene med usikkerhet er oppgitt i tabell 1. Usikkerheten til Δr og ΔR er et estimat vi har gjort da vi målte størrelsene. Målingene er et gjennomsnitt av to forsøk per objekt per bane. Usikkerheten er standardfeilen.

Tabell 1: Dette er listen over målte konstanter med usikkerhet. I alle analytiske og numeriske beregninger har vi brukt disse målingene som utgangspunkt.

Objekt	Vekt (Kg)	Radius (m)
Kule	$0,167 \pm 0,001$	$0,0235 \pm 0,001$
Kompakt sylinder	$1,795 \pm 0,001$	$0,0215 \pm 0,001$
Hul sylinder	$0,215 \pm 0,001$	$0,022 \pm 0,001$
Bane _{medfriksjon}	-	$0,52 \pm 0,001$
Bane _{litefriksjon}	-	$0,5195 \pm 0,001$

3.1. Sluring ned en kvartsirkel

Ved å evaluere likning (7) for vinkler som 10° , 20° , 30° , 40° og 50° , i tillegg til slippvinkler fra eksperimentet, $20,8^\circ$ og $28,1^\circ$, kan vi finne analytiske verdiene gitt i tabell 2. I sluring ned en kvartsirkel så gir den analytiske- og numeriske løsningen nesten samme slippvinkel for samme startsvinkel. (se tabell 2).

Tabell 2: Sammenligning av analytisk og numerisk løsning i sluring ned en kvartsirkel.

Startvinkel (θ_{start} i grader)	Analytisk (θ_{slipp} i grader)	Numerisk (θ_{slipp} i grader)
0	48,190	48,175
10	48,964	48,949
20	51,210	51,190
20,8	-	51,4
28,1	-	54,0
30	54,736	54,712
40	59,290	59,277
50	64,626	64,607

3.2. Ren rulling ned en kvartsirkel

Utifra Tabell 3 og Tabell 4 så ser man at en variert startsvinkel gir en variert slippvinkel og en større startsvinkel gir en større slippvinkel. I Tabell 3 og 4 ser man også at det er avvik mellom de eksperimentelle- og de numeriske verdiene. Dette kan komme av unøyaktighet i målinger av koordinatene til når kula eller sylindren slapp banen i Tracker.

Vi observerer at slippvinkelen er større under ren rulling, sammenliknet med ren translatorisk bevegelse (se tabell 3 og tabell 4). For eksempel, slippvinkelen for en kule som ruller rent når den starter fra 0° er $5,7^\circ$ større enn et objekt under translatorisk bevegelse som starter på samme startposisjon.

Sammenlikning av data fra tabell 3 og 4 viser at en hul sylinder ruller lengre enn en kule sluppet fra samme

Tabell 3: Sammenligning av numerisk løsning og eksperimentelt i ren rulling ned en kvartsirkel (kule).

Startvinkel (θ_{start} i grader)	Eksperimentelt (θ_{slipp} i grader)	Numerisk (θ_{slipp} i grader)
0	60,3	53,9
28,1	66,8	58,7

Tabell 4: Sammenligning av numerisk løsning og eksperimentelt i ren rulling ned en kvartsirkel (hul sylinder).

Startvinkel (θ_{start} i grader)	Eksperimentelt (θ_{slipp} i grader)	Numerisk (θ_{slipp} i grader)
0	57,2	60,0
20,8	64,2	62,1

vinkel. Grunnen til dette er at en hul sylinder har høyere treghetsmoment enn en kompakt kule. Det er også større avvik mellom de eksperimentelle og numeriske verdiene for en kule sammenliknet med avviket mellom de eksperimentelle og numeriske verdiene for en hul sylinder. Det gjennomsnittlige avviket mellom eksperimentell og numerisk løsning for hul sylinder er 3.95%, mens gjennomsnittlige avviket for resultatene til kulen er 11,35%. Dette kan forklares med feilkilder i målingsmetoder, som diskuteres senere i artikkelen.

3.3. Rulling med sluring ned en kvartsirkel

Utifra Tabell 5 og 6 ser vi at en variert startsvinkel fortsatt gir en variert slippvinkel. Avvikene mellom de numeriske og eksperimentelle vinklene er merkbare men i samme område.

Tabell 5: Sammenligning av numerisk løsning og eksperimentelt i rulling med sluring ned en kvartsirkel (kompakt sylinder).

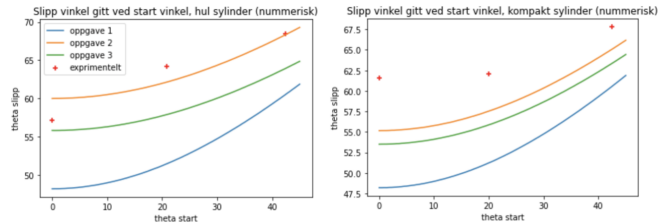
Startvinkel (θ_{start} i grader)	Eksperimentelt (θ_{slipp} i grader)	Numerisk (θ_{slipp} i grader)
0	61,6	53,5
20,0	62,1	55,8
42,4	67,8	63,3

I likhet med resulater i Tabell 2, 3 og 4, finnes det en avvik i eksperimentelle og numeriske verdiene. Det gjennomsnittlige avviket mellom eksperimentelle og numeriske verdiene i tabell 5 er på 9.9% og for tabell 6 ligger avviket på 6,5%. De numeriske verdiene i tabell 5 og 6 er høyere

Tabell 6: Sammenligning av numerisk løsning og eksperimentelt i rulling med sluring ned en kvartsirkel (hul sylinder).

Startvinkel (θ_{start} i grader)	Eksperimentelt (θ_{slipp} i grader)	Numerisk (θ_{slipp} i grader)
0	57,2	55,7
20,8	64,2	57,8
42,4	68,5	63,8

enn verdiene for ren translatorisk bevegelse i tabell 2 for alle startvinkler. Det vil si at objekter som både ruller og slurer slipper tak senere enn objekter som beveger seg rent translatorisk.



Figur 2: θ_{slipp} gitt ved θ_{start}

(a) Oversikt over de tre scenarioene, slipp vinkel gitt start vinkel, sammenliknet med målte verdier

4. Diskusjon

Den største feilkilden er tilfeldige målefeil i de eksperimentelle startsvinklene og slippvinklene. Siden vinklene ble målt i tracker så var det vanskelig å vite nøyaktig hvor objektet slapp banen og hvor midt i objektet er. Standardavviket for slippvinkelen til kompakt sylinder er 0,4° og standardavviket for hul sylinder er 0,9°. Andre tilfeldige feil er måling av radius til objekt og bane. For å minimere feilen i tracker burde en referanse størrelse inkluderes i bilde. Slik at kalibrerings størrelsen i tracker kan legges mer nøyaktig. For de numeriske løsningene har nøyaktigheten en sammenheng med tidsdiskretiseringen. Tidsintervallet ble delt opp i 100 000 delintervaller i numeriske løsningene. Dette var fordi det ga en kort kjøretid samtidig som det virket som det ga et relativt nøyaktig svar. Analysen til signifikansen av tidsdiskretiseringen på nøyaktigheten har ikke blitt foretatt.

5. Konklusjon

Vi kan konkludere med at med større starts vinkel til objektene, så blir vinkelen der objektet mister kontakten større. Analytisk og numerisk gir scenario med ren translasjon gir minst begrensinger til kinetisk energi og gir derfor minst slipp vinkler. Scenario med ren rulling begrenser objekter i systemet mest og den gir størst slippvinkler. Til slutt vil scenario med både rulling og sluring gi en begrenset versjon av scenario to. Eksprimentelt så var våre målinger ikke nøyaktige, og ikke nok mengde, til å godt sammenligne med våre analytiske og numeriske resultater.

Referanser

- [1] J. R. Lien og G. Løvholden. Generell fysikk, Bind 1 Mekanikk. Universitetsforlaget, 5th ed., 2001.
- [2] Ukjent forfatter. Tribology-abc. "Coefficient of friction, Rolling resistance and Aerodynamics". (ikke oppgitt årstall). Funnet 16.11.2021. Link: <https://www.tribology-abc.com/abc/cof.htm>