

Written assignment

第一題題目

給定一個前向 SDE (Stochastic Differential Equation) :

$$dx_t = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dW_t$$

證明其對應的 Probability Flow ODE (常微分方程) 可以寫為 :

$$dx_t = \left[f(x_t, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2(x_t, t) - \frac{g^2(x_t, t)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log p(x_t, t) \right] dt$$

1. 想法

證明的核心是利用機率密度 $p(x_t, t)$ 的演化。SDE 和其對應的 Probability Flow ODE 共享**完全相同**的機率密度演化路徑。

1. **SDE → Fokker-Planck 方程 (FPE)** : 首先, 寫出 SDE 所對應的 Fokker-Planck 方程, 它描述了 SDE 粒子群體的機率密度 $p(x_t, t)$ 如何隨時間演進。
2. **ODE → 連續性方程** : 接著, 寫出目標 ODE 所對應的連續性方程, 它描述了 ODE 粒子群體的機率密度 $p(x_t, t)$ 如何隨時間演進。
3. **劃上等號** : 由於兩者的機率密度 $p(x_t, t)$ 必須相同, 我們令 FPE 和連續性方程相等, 然後解出 ODE 的漂移項 (drift term), 即可完成證明。

2. 過程

(為簡潔, 我在推導中省略 (x_t, t) , 將 $p(x_t, t)$ 記為 p , $f(x_t, t)$ 記為 f , $g(x_t, t)$ 記為 g)

Step 1 : SDE 的 Fokker-Planck 方程 (FPE)

給定的前向 SDE 為 :

$$dx_t = fdt + g dW_t$$

其機率密度 $p(x, t)$ 的演化由 **Fokker-Planck 方程** 描述。對於此 SDE, FPE 的具體形式為 :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [fp] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g^2 p]$$

(Equation A)

Step 2 : ODE 的連續性方程 (Continuity Equation)

假設存在一個確定性的 Probability Flow ODE, 其形式為 :

$$dx_t = Fdt$$

其中 $F = F(x_t, t)$ 是我們想要找到的未知漂移係數。

此 ODE 的機率密度 $p(x, t)$ 的演化由**連續性方程**描述：

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[Fp]$$

(Equation B)

Step 3：令方程相等並求解 F

為了讓 SDE 和 ODE 具有相同的機率密度演化 $p(x, t)$ ，我們必須令 **(Equation A) = (Equation B)**：

$$-\frac{\partial}{\partial x}[Fp] = -\frac{\partial}{\partial x}[fp] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[g^2 p]$$

接著對等式兩邊同時關於 x 積分（並假設在 $\pm\infty$ 處的機率通量為 0）：

$$-[Fp] = -[fp] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}[g^2 p]$$

兩邊同乘 -1：

$$Fp = fp - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}[g^2 p]$$

接下來，使用**乘法求導法則** $\frac{\partial}{\partial x}(uv) = (\frac{\partial u}{\partial x})v + u(\frac{\partial v}{\partial x})$ 來展開 $\frac{\partial}{\partial x}[g^2 p]$ ：

$$\frac{\partial}{\partial x}[g^2 p] = \left(\frac{\partial g^2}{\partial x}\right)p + g^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

將這個展開式代回原方程：

$$Fp = fp - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial g^2}{\partial x}\right)p + g^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \right]$$

然後，在等式兩邊同時除以 p （假設 $p \neq 0$ ），以解出 F ：

$$F = f - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g^2}{\partial x}\right) - \frac{1}{2} g^2 \left(\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

Step 4：引入 Score Function

最後注意最後一項 $\left(\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}\right)$ 。

根據**Score Function (分數函數)** 的定義，

$$\frac{\partial}{\partial x} \log p = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

將這個 Score Function 的定義代入我們解出的 F 中：

$$F = f - \frac{1}{2} \frac{\partial g^2}{\partial x} - \frac{g^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log p$$

這正是題目要求證明的 ODE 漂移係數 F 。

因此，我們證明了與前向 SDE 對應的 probability flow ODE 為：

$$dx_t = \left[f(x_t, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2(x_t, t) - \frac{g^2(x_t, t)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log p(x_t, t) \right] dt$$

證明完畢。

第二題題目

1. AI 的未來能力

能力描述：AI 視覺法律輔助系統

我認為 AI 在未來 20 年有望實現一項突破性的能力：**從影像或影片中自動分析法律事件並生成具有推理步驟的法律報告。**

- 「做什麼」的事：

以交通故為例，AI 系統能直接讀取交通監視器影像，自動辨識出各車輛與行人的行為，判斷如「誰闖紅燈」、「碰撞發生的因果順序」等關鍵事實。接著，AI 能依據內建的交通法規知識庫，自動歸納並劃分肇事責任比例，最終產出一份包含事實依據與法律推理步驟的正式報告。

- 應用場景：

- 自動化交通事故處理：**警方接獲報案後，系統自動調閱路口影像，在幾分鐘內產出初步的肇事責任報告，員警僅需複核，大幅縮短現場處理時間。
- 保險快速理賠：**保險公司能依據 AI 報告，在數小時內完成責任認定並核定理賠，提升客戶滿意度。
- 法庭證據分析：**在法庭上，此報告可作為客觀的輔助證據，幫助法官理解複雜的事故動態。

- 「為什麼重要」：

此能力對人類社會意義重大。

- 效率：**現階段肇事責任認定需大量人工調查，效率低下。AI 自動化將大幅縮短事故處理時間，減少交通壅塞與警力負擔。
- 公正性：**人工判斷易受主觀影響，而 AI 透過一致且透明的算法，能確保責任認定的客觀與公正。
- 可行性：**雖然目前 AI 在精確責任比例劃分上仍有困難，但 GPT-5 等多模態模型的進展，已展現了強大的影像與文本推理能力。隨著技術成熟，此系統在 20 年後極有可能成為現實。

2. 機器學習類型

要實現上述能力，預計採用**混合式機器學習方案**，以**監督式學習 (Supervised Learning)**為主體，輔以**自我監督學習 (Self-supervised Learning)**（例如 LLM 預訓練）和**符號式 AI (Symbolic AI)**。

- 為何需要這類學習：

- 監督式學習**是必要的，因為系統的核心能力（如辨識車輛、偵測碰撞、判斷紅綠燈）需要從大量「已標註」的資料中學習。
- 自我監督學習**（如大型語言模型）擅長從海量的無標註法律文本中學習語言結構與法律常識，這對於「生成報告」至關重要。
- 符號式 AI**（如法律知識圖譜）是確保 AI 推理「合法合規」的關鍵。它提供一組明確的規則（如交通法規），讓模型的輸出有據可循。

- 任務中的「資料來源」與「目標訊號」：

- 資料來源：

- （監督式）影像資料：**大量已標註的交通事故監視器影片。標註內容包括：「車輛/行人/號誌」的邊界框、「碰撞」發生的時間點、「闖紅燈」等違規事件標籤。

- b. (監督式) 案例資料：已有人類專家（如交警、法官）解析好的「事故影像」與對應的「責任歸屬報告」。
- c. (自我監督) 文本資料：海量的法律文書、交通法規、過往判決書。
- 目標訊號：
 - a. (監督式) 影像模型：預測的標註框、事件分類標籤，應與人工標註的「真實答案」盡可能一致。
 - b. (監督式) 推理模型：針對一個事故案例，模型輸出的「肇事責任歸屬」應與人類專家的「標準答案」一致。
- 是否存在學習回饋或環境互動：

此任務主要不是透過與環境即時互動來學習。它不像玩遊戲需要即時的獎懲（強化學習）。模型主要是透過「離線」的監督式學習，從一個固定的、已標註好的資料集中學習如何正確地「模仿」人類專家的判斷。因此，強化學習在此並非核心途徑，但可在模擬環境中作為輔助優化策略。

3. 第一步的「模型化」

簡化模型問題：自動判定十字路口雙車碰撞的闖紅燈責任

作為實現 20 年後最終目標的第一步，我設計一個簡化的模型化問題：系統從一段十字路口的監視器影片中，自動判定一場「雙車碰撞」事故，是否由「闖紅燈」行為造成，並指出違規方。

- 這個簡化問題如何代表最終能力：

這個問題是最終系統的一個核心子集。它聚焦於最常見的事故場景（路口、雙車、紅綠燈），完美地涵蓋了三個關鍵模組：

 - i. 影像理解（辨識車輛、辨識紅綠燈）
 - ii. 事件識別（判斷碰撞、判斷車輛是否在紅燈時穿越路口）
 - iii. 法律規則應用（將「闖紅燈」與「碰撞」進行因果連結，並依據「闖紅燈應負全責」的法規進行判斷）

如果我們能解決這個問題，就等於驗證了從影像感知到法律推理這條核心路徑的可行性。
- 它的可測試性（如何知道模型是否成功）：

這個簡化模型的成功標準非常明確且易於衡量：

 - i. 辨識準確率 (Accuracy)：模型對「車輛」和「紅綠燈狀態」的辨識準確率必須高於 95%。
 - ii. 事件偵測 F1-Score：針對「闖紅燈」和「碰撞」這兩類關鍵事件，模型的 F1-Score（綜合考量準確率與召回率）必須達到業界可用水準。
 - iii. 責任判定準確率：這是最重要的指標。在所有包含闖紅燈的事故中，模型「正確揪出」違規方（車 A 或車 B）的準確率。我們可以蒐集 100 段影像，先由 3 位交通專家進行「盲測」並達成一致結論，以此作為「標準答案」，來評估 AI 的判斷準確率。
- 需要哪些數學或機器學習工具來解決：
 - i. 物件偵測 (YOLOv11 / Faster R-CNN)：這是必要的工具，用於從影片中精確定位並追蹤「車輛」的軌跡，以及辨識「交通號誌燈」的當前狀態（紅、黃、綠）。
 - ii. 時間序列分析 / 事件辨識 (Transformer / LSTM)：僅靠靜態圖片無法判斷，我們需要能處理時序的 Transformer 模型來分析車輛軌跡與號誌時序的關係，以判斷「在紅燈亮起時，車輛A的軌跡是否穿越了停止線」。
 - iii. 碰撞偵測 (光流法 / 影像差異)：透過分析連續幀之間的像素劇烈變化（例如使用光流法）或物體間距，來自動標記「碰撞」發生的確切時間點。
 - iv. 規則引擎 / 知識圖譜：一個小型的「符號式AI」模組。它儲存了簡化的法規。
 - v. 最終決策 (簡單邏輯)：

```
IF (is_violation(Vehicle_A) AND is_collision(Vehicle_A, Vehicle_B)) THEN responsible_party = Vehicle_A
```

第三題題目

In the derivation of 1D inverse SDE, we can replace ds with $-dt$ and obtain the final dx_t equation because dW_t and $-dW_t$ are equal in distribution ($dW_t \stackrel{d}{=} -dW_t$).

Question : Why can this random term (Wiener process) be handled in this way during time reversal? Would this assumption still hold if we used other non-Gaussian noise?