

فرادرس

فراتر از یک کلاس درس  
[www.faradars.org](http://www.faradars.org)

# آموزش ریاضیات گسسته

## درس دوم: استلزام منطقی

مدرس:

فرشید شیرافکن

دانشجوی دکتری بیوانفورماتیک (دانشگاه تهران)

## قاعده‌های استنتاج (Rules of Inference)

قواعد استنتاج توضیح می‌دهد که چگونه از مجموعه‌ای از فرض‌های درست می‌توانیم یک نتیجه منطقی بگیریم.

استنتاج

✓ قیاس تعدی (قانون قیاس)

✓ قیاس استثنایی (قاعده وضع مقدم) (Modus Ponens)

✓ قیاس عکس (قاعده رفع تالی) (قیاس رفع) (Modus Tollens)

✓ ترکیب عطفی

✓ قیاس فصلی

✓ رزولوشن

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q$$

$$\underbrace{(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q}_{\text{TT}}$$

## قیاس تعدی ( Hypothetical syllogism )

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 q \rightarrow r \\
 \hline
 \therefore p \rightarrow r
 \end{array}$$

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$((\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee r)) \rightarrow (\bar{p} \vee r)$$

$$((p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{r})) \vee (\bar{p} \vee r)$$

$$[(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}] \vee [(q \wedge \bar{r}) \vee r]$$

$$[(\underbrace{p \vee \bar{p}}_T) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p})] \vee [(q \vee r) \wedge (\underbrace{\bar{r} \vee r}_T)]$$

$$(\bar{q} \vee \bar{p}) \vee (q \vee r)$$

$$\underbrace{\bar{q} \vee q}_T \vee \bar{p} \vee r = T \vee \bar{p} \vee r = \textcircled{T}$$

## قیاس استثنایی (Modus Ponens)

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{\therefore q}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

$$[(\bar{p} \vee q) \wedge p] \rightarrow q$$

$$[(\bar{p} \vee q) \wedge p] \vee q$$

$$[(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}] \vee q$$

$$[(\underbrace{p \vee \bar{p}}_T) \wedge (\bar{q} \vee \bar{p})] \vee q$$

$$(\bar{q} \vee \bar{p}) \vee q = T \vee \bar{p} = \textcircled{T}$$

## قیاس عکس (Modus Tollens)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \bar{q} \end{array}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}] \rightarrow \bar{p}$$

$$\therefore \bar{p}$$

## ترکیب عطفی - ساده‌سازی ترکیب عطفی

$$\frac{p \wedge q}{\text{---}} \\ \therefore p$$

$$\frac{p \wedge q}{\text{---}} \\ \therefore q$$

$$p \wedge q \rightarrow p$$

$$\bar{p} \vee \bar{q} \vee p$$

$$T \vee \bar{q}$$

$$T$$

$$p$$

$$q$$

$$\frac{p \wedge q}{\text{---}} \\ \therefore p$$

$$\therefore p \wedge q$$

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$$

## قیاس فصلی - بسط فصلی

$$\frac{p \vee q}{\neg p} \quad \hline \therefore q$$

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

$$\begin{aligned} p &\rightarrow p \vee q \\ \overline{p} &\vee p \vee q \\ T &\vee q \\ T \end{aligned}$$

$$[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \rightarrow q$$

$$[\underbrace{(p \wedge \overline{p})}_F \vee (q \wedge \overline{p})] \rightarrow q$$

$$(q \wedge \overline{p}) \rightarrow q$$

$$\begin{aligned} &= \overline{q} \vee p \vee q \\ &= T \vee p \\ &= T \end{aligned}$$

## رزولوشن (Resolution)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bar{q} \rightarrow p \\ p \rightarrow r \\ \hline \therefore \bar{q} \rightarrow r \end{array}$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$



## مثال

• نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$p \rightarrow q$$

$$\neg p \rightarrow r$$

$$r \rightarrow s$$

---


$$\therefore \neg q \rightarrow s$$

step	دلیل
1. $p \rightarrow q$	فرض
2. $\neg q \rightarrow \neg p$	قانون نقیض
3. $\neg p \rightarrow r$	فرض
4. $\neg q \rightarrow r$	بقره (۱) و (۲)
5. $r \rightarrow s$	فرض
6. $\neg q \rightarrow s$	بقره (۴) و (۵)

## مثال

• نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$\begin{array}{l}
 P \rightarrow Q \\
 \hline
 P \\
 \hline
 \neg P \wedge Q \\
 r \rightarrow p \\
 \neg r \rightarrow s \\
 s \rightarrow t \\
 \hline
 \therefore t
 \end{array}$$

Step	دلیل	$P \rightarrow Q$ $\neg Q$ $\hline \therefore \neg P$
1. $\neg P \wedge Q$	فرضی	
2. $\neg P$	ساده‌سازی (1)	
3. $r \rightarrow p$	فرضی	
4. $\neg r$	modus tollens (2), (3)	
5. $\neg r \rightarrow s$	فرضی	
6. $s$	modus ponens (4), (5)	
7. $s \rightarrow t$	فرضی	
8. $t$	modus ponens (6), (7)	

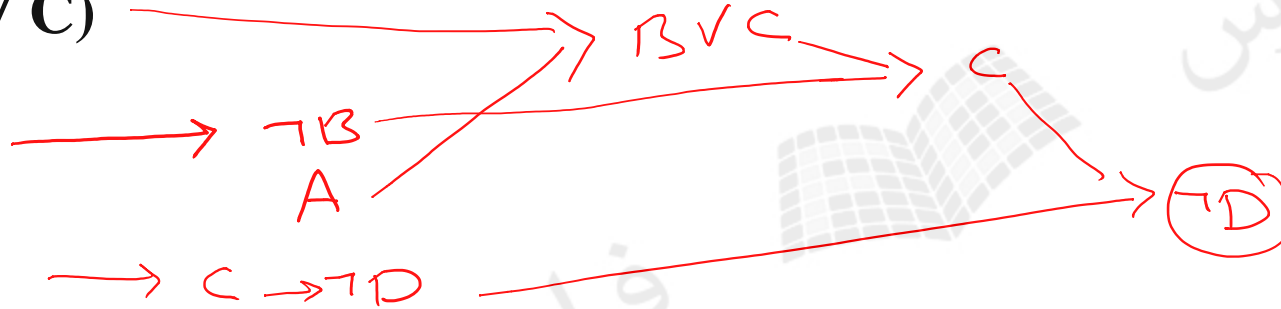
## مثال

• نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$A \rightarrow (B \vee C)$$

$$\neg B \wedge A$$

$$D \rightarrow \neg C$$



---


$$\therefore \neg D$$

$$\begin{array}{c} \neg P \rightarrow Q \\ \hline \neg P \\ \hline F \\ B \vee C \\ \hline \neg B \quad T \end{array}$$

$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$

## مثال

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 \sim r \rightarrow \sim q \\
 r \rightarrow s \\
 \hline
 \therefore p \rightarrow s
 \end{array}$$

• اگر کودک گریه باشد، گریه خواهد کرد.

• اگر کودک ناراحت نباشد، گریه نخواهد کرد.

• اگر کودک ناراحت باشد، صورتش سرخ خواهد شد.

• بنابراین اگر کودک گریه باشد، آن گاه صورتش سرخ خواهد شد.

دلیل	
فقر	1 $p \rightarrow q$
فقر	2 $\sim r \rightarrow \sim q$
صیغه ازی 1	3 $\sim q \rightarrow \sim p$
قاعده سلسله ای 2	4 $\sim r \rightarrow \sim p$
نفر	5 $r \rightarrow s$
صیغه ازی 4	6 $p \rightarrow r$
قاعده سلسله ای 4	7 $p \rightarrow s$

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 \sim r \rightarrow \sim q \\
 r \rightarrow s \\
 \hline
 \therefore p \rightarrow s
 \end{array}$$

## مثال

• برهانی برای استدلال زیر ارائه دهید.

- اگر سارا شغل سرپرستی را به دست آورد و سخت کار کند، آنگاه تفریح می‌گیرد.
- اگر تفریح بگیرد ماشین نو خواهد خرید.
- او ماشین نو نخریده است،

• بنابراین یا سارا شغل سرپرستی را به دست نیاورده است یا سخت کار نکرده است.

$$\begin{array}{l}
 p \wedge q \rightarrow r \\
 r \rightarrow s \\
 \sim s \\
 \hline
 \therefore \bar{p} \vee \bar{q}
 \end{array}$$

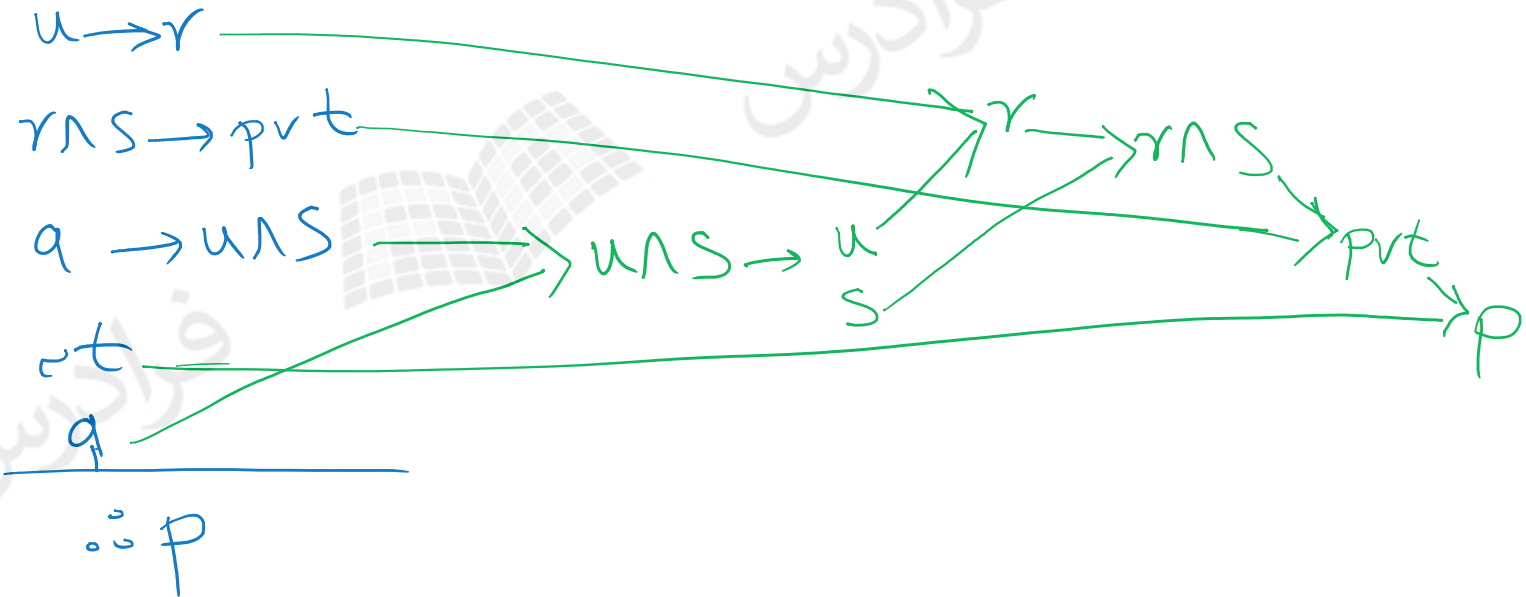
ردیف	پیش‌فرض	نتیجه
1	$\sim s$	فرض
2	$r \rightarrow s$	فرض
3	$\sim r$	تفریح نمی‌کند
4	$p \wedge q \rightarrow r$	فرض
5	$\sim(p \wedge q)$	تفریح نمی‌کند

$$\begin{array}{l}
 F \quad F \\
 r \rightarrow s \\
 \hline
 T
 \end{array}$$

## مثال

• نشان دهید استنتاج زیر معتبر است.

$$\begin{array}{l}
 u \rightarrow r \\
 (r \wedge s) \rightarrow (p \vee t) \\
 q \rightarrow (u \wedge s) \\
 \sim t \\
 \hline
 \therefore q \rightarrow p
 \end{array}$$



## سازگاری

- مجموعه گزاره‌های  $p_1$  و  $p_2$  و ... و  $p_n$  را سازگار می‌گویند، اگر ترکیب عطفی آنها به ازای حداقل یک حالت از ارزش متغیرهای ساده موجود در مجموعه درست باشد.

مثال: نشان دهید مجموعه گزاره‌های زیر سازگارند.

$$\{ \underbrace{p \vee q}_T, \underbrace{\neg p}_T, \underbrace{p \rightarrow q}_T \}$$

$$\begin{aligned} p &= \text{False} \\ q &= \text{True} \end{aligned} \quad \models$$

$$(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (p \rightarrow q) = T$$

این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس

«آموزش ریاضیات گسسته»

تهیه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

[faradars.org/fvmth114](https://faradars.org/fvmth114)