Mecánica Cuántica Avanzada
Profesor: Álvaro Valdés de Luxán

Tarea 1

1. Sean los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ definidos en el espacio desarrollado por los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ como:

$$\hat{A} = -|u_1\rangle\langle u_2| - |u_2\rangle\langle u_1|$$

y

$$\hat{B} = 3|u_1\rangle\langle u_1| + 3|u_2\rangle\langle u_2| - |u_1\rangle\langle u_2| - |u_2\rangle\langle u_1|$$

Compruebe si los operadores conmutan aplicando el conmutador $[\hat{A}, \hat{B}]$ sobre una función cualquiera $|\Psi\rangle = C_1|u_1\rangle + C_2|u_2\rangle$. Encuentre los autovalores del operador $\hat{B}$, $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$, y compruebe que $\{\hat{A}|\psi_1\rangle, \hat{A}|\psi_2\rangle\}$ son también autovectores de $\hat{B}$. ¿Por qué deberían ser los autovectores de $\hat{B}$ también autovectores de $\hat{A}$? Compruébelo.

2. Sean los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ definidos en el espacio desarrollado por los vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ como:

$$\hat{A} = |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| + |u_1\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_3| + |u_3\rangle\langle u_2| - |u_1\rangle\langle u_3| - |u_3\rangle\langle u_1|$$

y

$$\hat{B} = 3|u_1\rangle\langle u_1| + 3|u_2\rangle\langle u_2| + 2|u_3\rangle\langle u_3| + |u_1\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_1|$$

Represente matricialmente $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \langle u_1|, \langle u_2|$ y $\langle u_3|$. Calcule las matrices de los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ en la base $\{|u_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ y compruebe si las matrices conmutan. Encuentre los autovalores y autovectores de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ y calcule la matriz de $\hat{A}$ en la base de autovectores de $\hat{B}$ y viceversa. Encuentre una base común de autofunciones a partir del resultado anterior. Les recomiendo que usen Mathematica o algún otro lenguaje de programación para resolver las operaciones planteadas en este problema.

3. Consideramos el espacio desarrollado por la base ortonormal $\{|n\rangle\}_{i=0,1,2,3,4}$. El operador $\hat{a}$ actúa sobre los elementos de la base como $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ y el operador $\hat{a}^\dagger$ lo hace como $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Muestre la representación matricial de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ en esta base. Calcule también la matriz del operador $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Desarrolle estos operadores en la base $\{|n\rangle\}$ y compruebe cómo actúan sobre los vectores de la base.

4. Consideremos una rotación en el espacio desarrollado por $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ definida como:

$$|\psi_1\rangle = \cos(\theta)|u_1\rangle + \sin(\theta)|u_2\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = -\sin(\theta)|u_1\rangle + \cos(\theta)|u_2\rangle$$

Encuentre la matriz de la transformación U y su hermítica conjugada $U^\dagger$. Considere una matriz real que representa un operador hermítico $\hat{A}$ en ese espacio. Encuentre la matriz del operador en el espacio rotado y encuentre el ángulo θ_0 que diagonaliza la matriz. Encuentre el ángulo de rotación que diagonaliza la matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & -a \end{smallmatrix}\right)$ donde a es un número real. Use esta rotación para calcular los autovalores del operador y sus autovectores en la base original.

5. Use el método de Gram-Schmidt para ortogonalizar el conjunto formado por $\{x^n\}_{n=0,1,2,3,4}$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Use Mathematica para comparar el conjunto obtenido con el formado por los polinomios de Legendre con $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Además, normalice las funciones y desarrolle $f(x) = \cos(x)\sin(x)$ en ese intervalo con las funciones obtenidas.