Bài tập Chương II
Biến Ngẫu nhiên

Khoa CNTT- Trường Đại học CMC
Xác suất - Thống kê

Bài tập 1. Gọi X là hiệu số lần cho mặt sấp và ngửa sau khi một đồng xu cân được tung 12 lần. Hãy liệt kê các giá trị có thể của X? Tính $E[X], \mathrm{Var}(X)$.

Bài tập 2. Số lần mất kết nối internet của một công ty trong một tháng có bảng phân bố xác suất như sau

X	0	1	2	3
P(X)	0.6	0.15	0.1	0.15

Công ty ước tính rằng, mỗi lần mất kết nối, công ty thiệt hại 10 triệu đồng. Hãy tính số tiền thiệt hại trung bình trong một tháng mà công ty này phải chịu.

Bài tập 3. Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

(a) Tính hàm phân phối, kỳ vọng và phương sai của X.

(b) Tính kỳ vọng của $Y = X^2 + 3$.

Bài tập 4. Gieo thử nghiệm 1000 hạt giống thấy có 650 hạt nảy mầm. Chọn ngẫu nhiên ra 20 hạt giống. Tính xác suất để:

(a) Có đúng 15 hạt nảy mầm.

(b) Có ít nhất 2 hạt nảy mầm.

(c) Có nhiều nhất 19 hạt nảy mầm.

Bài tập 5. Trong một thành phố nhỏ, trung bình một tuần có 2 người chết. Biết số người chết có phân phối Poisson. Tính xác suất để:

(a) Không có người nào chết trong vòng 1 ngày.

(b) Có ít nhất 3 người chết trong vòng 2 ngày.

Bài tập 6. Tại một trạm kiểm soát giao thông trung bình 1 phút có 2 xe ô tô đi qua. Biết số ô tô đi qua có phân phối Poisson.

(a) Tính xác suất để có đúng 6 xe đi qua trong vòng 3 phút.

(b) Xác định t để xác suất trong khoảng thời gian t phút, có ít nhất 1 xe ô tô đi qua là 0.99.

Bài tập 7. Trung bình một ngày có 5 vụ tai nạn giao thông xảy ra trong thành phố. Giả sử số vụ tai nạn trong ngày tuân theo phân bố Poisson.

(a) Tính xác suất để không có vụ tai nạn nào xảy ra trong ngày.

(b) Tính xác suất để có ít nhất 3 vụ tai nạn xảy ra trong ngày.

(c) Biết rằng có ngày xảy ra ít nhất 3 vụ tai nạn, tính xác suất để ngày đó xảy ra đúng 5 vụ tai nạn.

(d) Giả sử có 1 ngày xảy ra đúng 20 vụ tai nạn. Hỏi trung bình bao nhiêu lâu mới có ngày xảy ra 20 vụ tai nạn?

Bài tập 8. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^{-4}, & 1 \leq x, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

(a) Tìm k. Tính $\mathrm{P}(2 < X)$, $\quad \mathrm{P}(1.5 < X < 2.5)$.

(b) Quan sát biến ngẫu nhiên X 20 lần. Tính xác suất để có ít nhất 1 lần X nhận giá trị trong khoảng $(1.5, 2.5)$.

Bài tập 9. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Biết rằng kỳ vọng của X có giá trị bằng 0.6.

(a) Tìm các hằng số a, b.

(b) Tính phương sai của X.

(c) Tính xác suất $\mathrm{P}(0.25 < X < 0.5)$, $\mathrm{P}(-0.5 < X < 0.5)$.

(d) Tính kỳ vọng và phương sai của $Y = X^2$.

(e) Quan sát biến ngẫu nhiên X 10 lần. Tính xác suất để có 4 lần X nhận giá trị trong khoảng $(0.2, 0.6)$.

(f) Quan sát biến ngẫu nhiên X 100 lần. Tính xác suất để có ít nhất 4 lần X nhận giá trị trong khoảng $(0.2, 0.6)$.

Bài tập 10. Một biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân bố (hay phân phối) mũ (exponential distribution) với tham số λ nếu hàm mật độ của nó có dạng $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ 0 \leq x$, ký hiệu là $X \sim EXP(\lambda)$. Tuổi thọ của người là một biến ngẫu nhiên $X \sim EXP(\lambda)$. Biết rằng trung bình 1000 người có 500 người sống quá 60 tuổi.

(a) Tính λ.

(b) Ông Tom năm nay 60 tuổi. Tính xác suất để ông ấy sống lâu hơn 70 năm.

Bài tập 11. Chỉ số IQ của người là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 100 và độ lệch chuẩn 20. Những người có chỉ số IQ nằm trong nhóm 1% cao nhất được xếp vào nhóm thông minh. Xác định chỉ số IQ thấp nhất trong nhóm những người thông minh.

Bài tập 12. Chiều cao của học sinh nam (tính theo đơn vị cm) ở một trường học là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn 5.25 cm. Chọn ngẫu nhiên 200 học sinh nam của trường, đo chiều cao thấy có 57 học sinh có chiều cao trên 170 cm. Xác định chiều cao trung bình của học sinh nam trường trung học trên.

Bài tập 13. Thời gian đi từ nhà tới trường của sinh viên Tuấn là một đại lượng ngẫu nhiên X (đơn vị phút) có phân phối chuẩn. Thống kê thấy rằng có 64.8% số ngày Tuấn đến trường mất hơn 20 phút và 8% số ngày Tuấn đến trường mất hơn 30 phút. Để xác suất đến trường muộn không quá 0.02 thì Tuấn sẽ phải đi từ nhà trước bao nhiêu phút?

Bài tập 14. Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X, Y là

X \ Y	1	2
0.4	0.1	0.2
0.8	0.1	0.6

(a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

(b) Tìm hệ số tương quan của X, Y.

(c) Tính kỳ vọng của X với điều kiện $Y = 1$.

Bài tập 15. Hai biến liên tục X, Y có hàm hợp mật độ

$$f(x, y) = c(x^2 + y), \qquad -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1.$$

(a) Tìm c?

(b) Tính $f_X(x), f_Y(y)$. Các biến X, Y có độc lập không?

(c) Tính $\mathrm{P}(Y < 0.6)$ và $\mathrm{P}(Y < 0.6 \mid X < 0.5)$.

Bài tập 16. Cho hai biến ngẫu nhiên độc lập X, Y và có hàm mật độ tương ứng là

$$f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

(a) Tìm hàm mật độ đồng thời của X, Y.

(b) Tính $\mathrm{P}(1 \le X < 2, 0 < Y \le 1)$.

Bài tập 17. Xác suất để một hạt thóc giống bị lép là 0.006. Tìm xác suất để trong 1000 hạt thóc giống có

(a) không ít hơn 3 hạt lép;

(b) đúng 6 hạt lép;

(c) không quá 16 hạt lép.

Bài tập 18. Tại một công ty khai thác khoáng sản, tai nạn xảy ra thường xuyên. Chi phí trung bình phải bồi thường cho một tai nạn là 1200\$ và độ lệch chuẩn của chi phí là $1200\sqrt{3}$\$. Công ty muốn có một khoản tiền dự trữ để trang trải chi phí tai nạn. Cụ thể, họ muốn dự trữ N \$, để xác suất chi phí của 20 vụ tai nạn tiếp theo lớn hơn N \$ chỉ là 1%. Sử dụng định lý giới hạn trung tâm để ước tính số N \$ cần dự trữ.