Optimización y Control

Ignacio Delgado, Ignacio Gómez,
José M. Perales, José M. Vega

Escuela de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Programa: **Grado en Ingeniería Aeronáutica**
Curso 2017-2018
Tema #1: Optimización: consideraciones generales

Index

Outline

Perspectiva (depende de las circunstancias)

Cuatro posibles perspectivas

- El toro.
- Expectadores en la primera fila.
- Expectadores en la segunda fila.
- Nosotros.

Diseño vs. optimización

- **Diseñar** un producto de ingeniería de modo eficaz conlleva **alcanzar** (o, al menos, acercarse a) un cierto **objetivo**, seleccionando valores apropiados de **variables de diseño**, para valores fijos de ciertos **parámetros de diseño** (que se mantienen fijos en el proceso). El diseño puede estar sometido a ciertas **restricciones**.
- Por ejemplo, se puede buscar la geometría apropiada de un ala para minimizar la resistencia aerodinámica para un peso dado y una sustentación mayor que un cierto valor prefijado. Se tiene así un objetivo (minimizar la resistencia), unas variables de diseño (para definir la forma del ala) y dos restricciones (peso y sustentación). También se observan dos **disciplinas técnicas**, aerodinámica y elasticidad.
- Algunos objetivos pueden no estar bien definidos, e involucrar propiedades cualitativas (en vez de cuantitativas), y aspectos creativos o estéticos. Éstos deben coordinarse, quizá llegando a compromisos.
- En este curso, nos centraremos en **objetivos cuantitativos** bien definidos.
- Otros aspectos cualitativos, que no se considerarán, son esenciales para conseguir un **diseño competitivo**, que puede no ser óptimo técnicamente, pero mejor en términos comerciales.

Outline

Función objetivo y variables de diseño

- Con frecuencia, se dan objetivos contrapuestos, que requieren considerar una **optimización multiobjetivo** (p.e., sustentación- resistencia-peso, o régimen de crucero-despegue-aterrizaje).
- En este curso se considerarán, sobre todo, situaciones en que puede definirse una única **función objetivo**, que se busca maximizar (p.e., sustentación) o minimizar (p.e., resistencia aerodinámica), eligiendo valores apropiados de las **variables de diseño** (p.e., cuerda, flecha, envergadura, varias variables que definan el perfil aerodinámico, espesor del revestimiento, número y forma de los larguerillos).
- Una única función objetivo puede tener en cuenta **varios objetivos** independientes. P.e., minimizar una combinación lineal del peso, resistencia aerodinámica y coste.
- Seleccionar bien la función objetivo y las variables de diseño es una parte esencial del proceso, que puede basarse en la experiencia. Pueden introducirse **parámetros ajustables**, que se van seleccionando en función de resultados parciales. En este curso, no se profundizará en estas cuestiones.

Restricciones

- El diseño está siempre sujeto a **restricciones**.
- Las restricciones pueden involucrar **igualdades** (200 pasajeros) o **desigualdades** (coste no mayor que una cantidad prefijada).
- Las restricciones pueden ser naturales (por ejemplo, el peso, o el coste, o el número de pasajeros), o venir impuestas por la prudencia (diseño no demasiado distinto de otro anterior).
- Es esencial seleccionar bien las restricciones, lo que puede requerir cálculos previos, para evaluar posibles soluciones preliminares, y el efecto de cada restricción.
- En este curso, no se entrará en la selección de las restricciones, que se supondrán bien definidas a priori.

DISCIPLINAS TÉCNICAS

- Calcular la función objetivo puede involucrar varias disciplinas técnicas. Por ejemplo, aerodinámica, estructuras, estabilidad, aeroelasticidad, control, propulsión, fabricación, actuaciones (incluyendo producción de contaminantes), equipos auxiliares, matenimiento.
- Es decir, el diseño es normalmente **multidisciplinar**.
- Cada disciplina técnica requiere **métodos y herramientas numéricas específicas**, y suele llevarse a cabo en departamentos distintos de la compañía.
- El diseño suele completarse en **ciclos de diseño**, en que cada disciplina técnica se mejora, teniendo en cuenta, como restricciones, resultados de otras disciplinas técnicas en etapas anteriores.
- La coordinación de las disciplinas es esencial, como lo es cumplir plazos.
- En este curso, se supondrá que se dispone de medios de cálculo para las disciplinas técnicas. En otras palabras, se considerarán bien definidas tanto la función objetivo como las variables de diseño y las restricciones.

Outline

MALDICIÓN DE LA DIMENSIONALIDAD

- Hacer una prospección en un espacio paramétrico requiere un coste computacional que crece exponencialmente con la dimensión del espacio. Esta dificultad se conoce como **maldición de la dimensionalidad** (curse of dimensionality).
- Por ejemplo, si se discretiza un espacio de 10 dimensiones, con 20 valores por dimensión, el coste computacional es, al menos, del orden de 20^{10}.
- El **número de variables de diseño** en la optimización de sistemas de ingeniería es, con frecuencia, de **varias decenas**.
- Por tanto, discretizar el espacio de las variables de diseño y calcular el máximo comparando valores de la función objetivo (fuerza bruta) es una **estrategia de optimización inviable**.
- En cambio, son convenientes **métodos que busquen el máximo en este espacio de modo “inteligente”**.

COMPROMISOS

- La necesidad de llegar a **compromisos** es contínua en la práctica diaria de ingeniería. Compromisos entre:
  - **Lo deseable**, en términos de precisión de los cálculos y de prospección de posibles soluciones técnicas.
  - Y **lo posible**, dependiendo del presupuesto y el tiempo disponible.
- El **tiempo de desarrollo** es una variable muy importante en el proceso de diseño, porque:
  - Acortar el tiempo también reduce el coste.
  - Llegar al mercado antes que la competencia puede tener un valor incalculable.

En general, se trata de proporcionar **herramientas que ayuden al buen criterio de un experto**, sin pretender sustituirlo.

Outline

Mecánica de fluidos computacional

- De todas las disciplinas técnicas involucradas en el diseño aeronáutico, la más costosa suele ser la **aerodinámica**, que permite calcular: (i) **cargas aerodinámicas** (necesarias para diseñar la estructura), (ii) **derivadas de estabilidad y control**, y (iii) deflexiones e **inestabilidades aeroelásticas**.
- Resolver numéricamente flujos aerodinámicos pertenece al dominio de la **mecánica de fluidos computacional**, que incluye una gran variedad de métodos numéridos cuya precisión (**fidelidad**) y coste computacional varía en un amplio espectro, dependiendo de la aproximación física (p.e., flujo viscoso compresible, flujo potencial) y del método numérico (p.e., volúmenes finitos, métodos espectrales).

SIMULACIÓN NUMÉRICA DIRECTA

- La **simulación numérica directa** (discretizando directamente las ecuaciones de Navier-Stokes) requiere considerar escalas espaciales cuyo tamaño es del orden del número de Reynolds elevado a menos 3/4.
- Estas escalas deben resolverse por cuestiones de **estabilidad numérica**. En otras palabras, si se toma una discretización demasiado grosera, que ignore las pequeñas escalas, el método resultante es inestable, y **la resolución de las escalas grandes es incorrecta**.
- El número de grados de libertad (en las tres dimensiones espaciales) es del orden de $\mathrm{Re}^{9/4}$. Y el paso de tiempo es del orden de $\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Re}^{-2 \cdot 3/4} = \mathrm{Re}^{-1/2}$.
- Para un avión comercial en régimen de crucero, Re es del orden de 50 millones. Las escalas espaciales deben ser del orden de *micras* y el paso de tiempo, del orden de 10^{-4} seg.
- El tiempo de cálculo necesario para simular un segundo de vuelo, en el mejor superordenador existente en la actualidad, es del orden de cientos de años.

La simulación numérica directa es inviable, y lo seguirá siendo en el futuro previsible.

MODELOS DE TURBULENCIA

- Unas **escalas espacio-temporales** tan **pequeñas** (micras, diezmilésimas de segundos) son irrelevantes desde el punto de vista tecnológico.
- Las escalas tecnológicamente interesantes son las **escalas grandes**, del orden de una fracción del tamaño ala/aeronave y del tiempo de residencia.
- Los **modelos de turbulencia** justamente resuelven solamente las escalas grandes, sin ignorar completamente las escalas pequeñas, para evitar inestabilidades:
- **El efecto de las escalas pequeñas** sobre las escalas grandes **se modela de algún modo**, resolviendo solamente las escalas grandes.
- Una estrategia frecuente es **promediar**, de algún modo, las escalas pequeñas. Las ecuaciones resultantes reciben el nombre genérico de ecuaciones de Navier-Stokes con esfuerzos de Reynolds promediados o Reynolds Averaged Navier-Stokes (**RANS**) equations.
- Las variantes RANS más sencillas proporcionan **aproximaciones estacionarias**. Su integración para una configuración de avión completo requiere, típicamente, varios días de cálculos en un cluster de procesadores de tamaño medio (p.e., 15 procesadores).

MODELOS DE TURBULENCIA (II)

- Existe **software comercial** (p.e., FLUENT) **y libre** (p.e., OpenFOAM) para efectuar cálculos aerodinámicos con modelos de turbulencia.
- Los grandes fabricantes de aeronaves poseen **software industrial específico**. Por ejemplo, AIRBUS posee dos paquetes, TAU (desarrollado en Alemania, por DLR) y ELSA (desarrollado en Francia, por CERFACS y ONERA).
- El uso de sotfware comercial, libre o industrial requiere **precaución** al seleccionar los parámetros del método (p.e., el tamaño y localización de los nodos de las mallas), para evitar **soluciones espúreas** (con, p.e., resistencia aerodinámica negativa).
- En todo caso, deben tenerse en cuenta las **limitaciones intrínsecas** de los modelos de turbulencia y de los métodos numéricos subyacentes.

Outline

MODELOS REDUCIDOS

Recientemente, se están desarrollando **modelos reducidos**, basados en técnicas matemáticas que permiten:

- Identificar **variedades lineales de baja dimensión** que contienen los flujos aerodinámicos posibles en cada caso.
- Sustituir el problema numérico original por otro consistente en una cantidad mucho menor de ecuaciones, que se obtienen:
  - **Proyectando** las ecuaciones originales sobre la variedad de baja dimensión.
  - **Combinando interpolación específica y un tratamiento tensorial** de la información aerodinámica a lo largo de las distintas dimensiones (espacio, tiempo, variables de diseño y parámetros.

Se disminuye drásticamente el esfuerzo computacional, sin pérdida significativa de precisión. Para avión completo, varios días de preproceso para identificar las variedades de baja dimensión, y segundos para calcular cada caso.

MÉTODOS DE BAJA FIDELIDAD (I)

Aproximaciones en que se supone flujo potencial. Pueden servir como primeras aproximaciones en régimen de crucero.

- Los **métodos de paneles** (p.e., PANAIR) calculan la presión sobre la superficie de la aeronave.
- Los métodos de **rejillas de vórtices** (aerodynamics vortex lattice, AVL) calculan la sustentación y resistencia de presión media en las secciones de las alas, los estabilizadores horizontal y vertical, y el fuselaje.
- **Coste computacional** para una configuración de avión completo en un procesador: varios minutos CPU con métodos de paneles, y varios segundos con AVL.

Estos métodos deben complementarse con cálculos de la **resistencia de fricción**.

MÉTODOS DE BAJA FIDELIDAD (II)

Fórmulas semiempíricas y **analogías físicas**. Conllevan una precisión muy limitada y deben construirse ad hoc. Pero son muy eficaces computacionalmente. Por ejemplo, la resistencia de fricción puede calcularse:

- En función del **área mojada**. Por ejemplo, proporcional a ella, con el coeficiente de proporcionalidad dependiente de parámetros de vuelo, tales como los números de Reynolds y Mach.
- Mediante una **analogía de placa plana**, calculando la resistencia de fricción en la capa límite sobre una placa plana de un tamaño equivalente a la superficie mojada.

Outline

DISEÑO INCREMENTAL

A veces, se busca solamente mejorar un diseño anterior, variando poco las variables de diseño (**diseño incremental**). En este caso:

- Los métodos de optimización pueden ser **locales**.
- Evitan o, al menos, alivian la maldición de la dimensionalidad.
- Las disciplinas técnicas pueden tratarse con **herramientas de alta fidelidad**.

Los métodos locales pueden combinarse con **métodos de continuación numérica** y/o con **métodos heurísticos**, para obtener resultados globales.

DISEÑO CONCEPTUAL

Otras veces se buscan configuraciones nuevas, o no necesariamente parecidas a otras anteriores (**diseño conceptual**). En este caso:

- Los métodos de optimización deben ser **globales**, es decir, debe explorarse una parte sustancial del espacio de variables de diseño.
- Hay que lidiar con la maldición de la dimensionalidad, que debe aliviarse.
- Las disciplinas técnicas deben resolverse con **métodos de baja fidelidad**.

Tradicionalmente, **no se ha prestado suficiente atención al diseño conceptual**, que es siempre la primera etapa del diseño, condicionante para las demás.

- A veces se eligen soluciones no suficientemente elaboradas, dejando las mejoras para etapas posteriores.
- Pero, las urgencias del día a día y una prudencia excesiva hacen que, en la práctica, la configuración seleccionada al principio permanezca inalterada en los ciclos de diseño.
- En la actualidad, se observa un convencimiento creciente de que pueden existir configuraciones no exploradas que mejoren sustancialmente los diseños. Esto require buscar herramientas eficaces para el diseño conceptual.

FORMULACIÓN

El problema de optimización más general que se considerará en este curso puede formularse como: **encontrar el máximo de una función objetivo** F, dependiente de N **variables de diseño**, sujetas a n restricciones. Es decir, se trata de calcular:

$$\max F(u_1, \ldots, u_N)$$

en el **espacio de diseño**, definido por

$$\begin{aligned} r_k(u_1, \ldots, u_N) &= 0, \quad \text{para } k = 1, \ldots, m, \\ r_k(u_1, \ldots, u_N) &\geq 0, \quad \text{para } k = m+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

El vector $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_N)$ es el **vector de diseño**. El conjunto de valores de las variables de diseño que verifican las restricciones es el **espacio de diseño**. Nótese que se consideran **dos tipos de restricciones**:

- Unas **exactas**, o **estrictas**, definidas mediante igualdades.
- Otras **unilaterales**, dadas por desigualdades.

OPTIMIZACIÓN CONTINUA/DISCRETA

En lo que sigue nos ocupamos, sobre todo, de **optimización contínua**: las variables de diseño tomen valores contínuos (reales). También podrían tomar valores discretos (número de pasajeros de una aeronave o número de cilindros de un motor).

- **Optimización discreta**: todas las variables de diseño son discretas.
- **Optimización mixta**: hay variables discretas y contínuas. Puede abordarse:
  - **Método 'min/min'**: Con optimización continua para valor de las variables discretas y tomando el mínimo de los mínimos resultantes.
  - **Interpolando** (próximo tema) en las variables discretas, para convertir la optimización en continua.

Existen métodos más sofisticados.

FORMULACIÓN DISCRETA/CONTINUA

La formulación anterior es **discreta**: número finito, N, de variables de diseño y disciplinas técnicas dependientes de un número finito de variables adicionales. La **formulación** sería **continua** en los siguientes casos (tratados brevemente más adelante en este curso):

- Las variables de diseño pueden incluír **funciones** (p.e., la forma de un ala). La formulación involucra ecuaciones más complicadas (p.e., ecuaciones diferenciales).
- Aún siendo discreto el vector de diseño, debido a algunas disciplinas técnicas (p.e., aerodinámica), la función objetivo puede venir dada **implícitamente** a través de ecuaciones diferenciales adicionales (p.e., Navier-Stokes), que involucran funciones (p.e., campo de velocidades).

Las formulaciones continuas pueden **discretizarse**, obteniendo formulaciones discretas approximadas.

Outline

1. Algunas cuestiones preliminares
   - Diseño vs. optimización
   - Planteamiento
2. Coste computacional
   - Maldición de la dimensionalidad
   - Mecánica de fluidos computacional
   - Modelos reducidos y métodos de baja fidelidad
   - Diseño incremental vs. diseño conceptual
3. Formulación y resultados generales
   - Teorema de Weierstrass y optimización convexa
   - Optimización global vs. optimización local; ejemplos
4. Fases de diseño
   - Muestreo; optimización basada en muestreo
   - Sensibilidad
5. Textos y libros de consulta

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Teorema de Weierstrass: **Una función contínua** (y acotada) **en un conjunto compacto alcanza su máximo y su mínimo** (en el conjunto).

Observaciones:

- El máximo (o mínimo) puede alcanzarse en más de un punto.
- El máximo (o mínimo) puede alcanzarse en la frontera.
- Los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ son los conjuntos cerrados y acotados.
- Un conjunto definido por restricciones dadas por igualdades o desigualdades no estrictas que involucren a funciones continuas (como las restricciones consideradas en la transparencia anterior) es siempre cerrado.
- Si, además, el conjunto es acotado, es compacto.

Funciones convexas y conjuntos convexos

Función convexa: Una función diferenciable, de varias variables, es **convexa** si su gráfica está por encima del hiperplano tangente en todo punto. Una función F is **cóncava** si $-F$ es convexa. **¡Ojo!**, definición distinta en algunos textos elementales.

Propiedad: Si la función f admite derivadas parciales segundas contínuas y la matriz hessiana (cuyos elementos son $H_{ij} = \partial^2_{u_i u_j} F$) es definida positiva (es decir, todos sus autovalores son positivos), entonces es convexa.

Conjuntos convexos. **Un conjunto de** $\mathbb{R}^n$ **es convexo** si para todo par de puntos del conjunto, el segmento que los une está completamente contenido en el conjunto. Ejemplos: círculos/esferas, polígonos/poliedros regulares.

OPTIMIZACIÓN CONVEXA

Propiedad: Una función convexa admite a lo sumo un mínimo local en un conjunto convexo. Y una función cóncava admite a lo sumo un máximo local en un conjunto convexo.

La convexidad es una propiedad muy útil porque permite reducir la optimización global a optimización local. De hecho, tiene gram interés en problemas de optimización básicos; por ejemplo, en mínimos cuadrados. Pero, en formulaciones realistas de problemas de ingeniería:

- Es una propiedad que raramente se aplica porque las funciones objetivo y los espacios de diseño no suelen ser convexos.
- Y, en todo caso, comprobar que la función objetivo es convexa y que el espacio de diseño (definido por las restricciones) es convexo, suele ser una tarea ardua.

Outline

ÓPTIMO GLOBAL Y ÓPTIMOS LOCALES

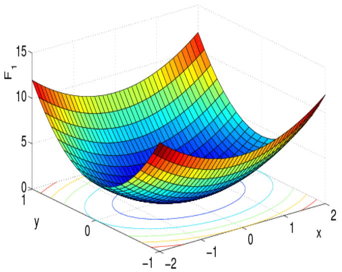
- El máximo (o mínimo) absoluto debe calcularse mediante un **método global**, que explore todo el espacio de diseño.
- Existen **métodos locales**, que producen **óptimos locales** (óptimos en un entorno en el espacio paramétrico).
- Los óptimos locales se consideran a veces como soluciones subóptimas, pero este término se utiliza también con otros significados.
- Los óptimos locales pueden tener interés al tener en cuenta propiedades no consideradas en la función objetivo. Por ejemplo, una solución subóptima desde el punto de vista puramente técnico puede permitir una fila más de pasajeros.

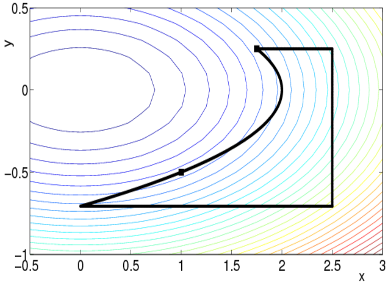
En general:

- Los métodos locales requiren una buena aproximación inicial. Si se tiene tal aproximación, convergen rápidamente (eficacia computacional). En otro caso, pueden no converger.
- Los métodos globales requiren hacer una prospección de una parte sustancial del espacio de diseño (computacionalmente caro).

Ejemplo 1: función convexa/dominio convexo o no, en 2D

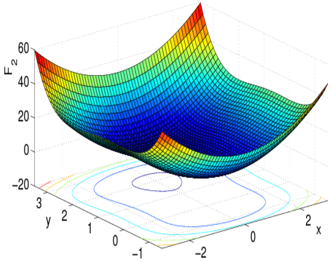
- La función $F_1 = x^2 + 8y^2$ es convexa y el plano $x - y$ es convexo: F_1 alcanza un único mínimo local, en $(x, y) = (0, 0)$, que es también el mínimo global de la función en el plano.
- Las restricciones $2 - 4y^2 \leq x \leq 2{,}5$ y $-1/\sqrt{2} \leq y \leq 1/4$ definen un dominio no convexo. Ahora se tienen dos mínimos locales (cuadrados llenos en la figura dcha), en $(x, y) = (1, -1/2)$ y $(7/4, 1/4)$, donde F_1 vale 3 y $57/16$, respectivamente. El mínimo global es el primero.

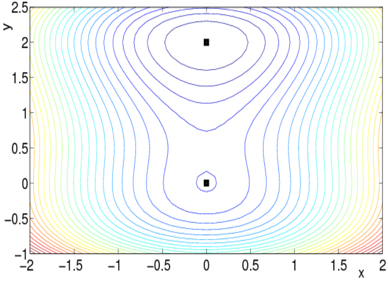




Ejemplo 2: función 'bimodal', no convexa; no unicidad

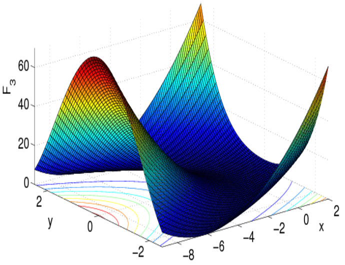
- La función $F_2 = 3x^2 + (1 + y^2)^2 - 10y^3/3$ es no convexa.
- Presenta dos mínimos locales (cuadrados llenos en la figura dcha), $(x, y) = (0, 0)$ y $(0, 2)$, donde $F_2 = 1$ and $-5/3$, respectivamente; el mínimo global es el último.

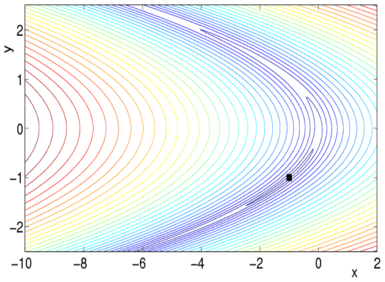




EJEMPLO 3: FUNCIÓN ‘BANANA’, NO CONVEXA; UNICIDAD

- La función $(x+y^2)^2 + (1+y)^2/100$ es no convexa. Se conoce como función ‘banana’ (o ‘valle curvo’) de Rosenbrock.
- Se utiliza como hito, para poner a prueba métodos de optimización. Las curvas de nivel están equiespaciadas con $F_3^{1/3}$ para poder distinguirlas en las cercanías del mínimo.
- Presenta un único mínimo local (cuadrado lleno en la figura dcha), $(x, y) = (-1, -1)$, que es también mínimo global.





FASES DEL DISEÑO

El diseño multidisciplinar de un sistema de ingeniería basado en optimización siempre contiene tres etapas, que pueden repetirse en sucesivos ciclos de diseño:

- **Pre-proceso**: Selección/definición/reconsideración las variables de diseño, los parámetros, los ingredientes de la función objetivo y las restricciones.
- **Optimización** propiamente dicha: mediante métodos adecuados, utilizando formulaciones de la función objetivo y de las disciplinas técnicas de **fidelidad/coste computacional** adecuados, de acuerdo con los medios de cálculo y tiempo disponibles.
- **Post-proceso** (post-optimalidad): Análisis de la **sensibilidad** de los resultados respecto de las variables de diseño, parámetros y restricciones, para asegurar la **robustez** de los resultados.

RE-ESCALADO DE LAS VARIABLES DE DISEÑO

Se trata seguramente del punto más importante del pre-proceso.

- **Las escalas** de las distintas variables de diseño y las restricciones **son muy importantes**, tanto en la optimización como en la interpretación de los resultados. **Un mal escalado puede impedir llegar a una solución**.
- Las escalas definen 'pesos' de las variables y restricciones en todo el proceso.
- **A falta de mejor criterio** (dado por especificaciones y requisitos de diseño), las variables de diseño y las restricciones pueden rescalarse de modo que, en lo posible:

$$|\partial_{u_1} F| \sim \ldots \sim |\partial_{u_N} F| \sim |\partial_{u_1} r_k| \sim \ldots \sim |\partial_{u_N} r_k| \text{ para todo } k.$$

- Esto puede no ser posible globalmente, pero sí localmente (cerca de cada mínimo local o en zonas relevantes del espacio de diseño).
- El gradiente se anula (o es muy pequeño) cerca de los mínimos locales.

Outline

TÉCNICAS DE MUESTREO

- En **estadística industrial**, se infieren contínuamente propiedades de una población analizando sólo **una muestra representativa** de elementos de la población.
- En **diseño multiciplinar**, se seleccionan **muestras de puntos del espacio de diseño** los que efecturar:
  - Una prospección del espacio de diseño para, por ejemplo, decidir las escalas apropiadas.
  - Una optimización preliminar.
- Existe una **gran variedad de métodos de muestreo** (algunos de ellos muy sofisticados).
- Se consideran sólo algunos **métodos representativos sencillos**.

Cuando se muestrea el espacio de diseño, hay que adaptar los métodos de muestreo genéricos para que los puntos de la muestra verifiquen las restricciones, estrictas y unilaterales.

MUESTREO FACTORIAL

- Se toman todos los puntos de una **malla estructurada** en el espacio de diseño: N **dimensiones**, con $l_1, \ldots, l_N$ **niveles** (valores discretos) en las distintas dimensiones.
- Contruír una malla estructurada puede requerir:
  - Efectuar **cambios de variables de diseño**.
  - Utilizar **coordenadas curvilíneas** en el espacio de diseño.
- Las **dimensiones del espacio de diseño** resultantes pueden no ser las propias variables de diseño, sino funciones de ellas.
- Número total de puntos de la muestra: $l_1 \times \ldots \times l_N$ (en particular, l^N si $l_1 = \ldots = l_N$). **¡Crece exponencialmente con la dimensión!**.

MUESTREO FACTORIAL: MALDICIÓN DE LA DIMENSIONALIDAD

- El crecimiento exponencial se conoce como **maldición de la dimensionalidad (curse of dimensionality)**, o también como **explosión de combinatoria (combinatorial explosion)**.
- El resto de las técnicas de muestreo se diseñan para evitar o, al menos, aliviar esta dificultad.
- **Recursos son limitados**: debe llegarse a un **compromiso** entre coste (medios de cálculo/tiempo) y fidelidad, utilizando:
  - Métodos de alta fidelidad (muy caros computacionalmente) sobre muestras pequeñas.
  - Métodos de baja fidelidad sobre muestras más grandes.

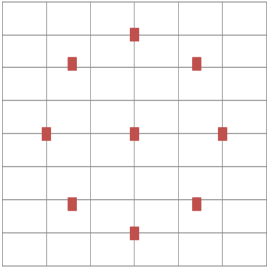
DISEÑO CENTRAL COMPUESTO (CENTRAL COMPOSITE DESIGN)

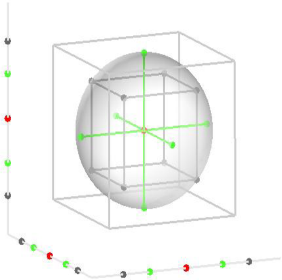
Este método (implementado en *ccdesign* de MatLab) requiere una **malla estructurada** en el espacio de diseño. Considerando tal dominio como un **hipercubo** (es decir, reescalando cada variable para que varíe entre -1 y 1), se selecciona el punto central y todas las combinaciones de:

- Los $2N$ centros de las caras.
- Dos puntos (no necesariamente los vértices) a distancia especificada del centro, en cada diagonal de un conjunto de d diagonales especificadas (no necesariamente en todas, que son 2^{N-1}).

La muestra contiene $1 + 2N + 2d$ puntos: **alivia** (o evita, dependiendo del número de diagonales seleccionadas) **la maldición de la dimensionalidad**. **Depende de la orientación** de la malla, es decir, de las diagonales seleccionadas.

Diseño central compuesto: ejemplos en 2D y 3D





MUESTREO ALEATORIO

En este método (*randsample* de MatLab), la malla puede ser estructurada o no. Se seleccionan aleatoriamente (con igual probabilidad o no) M puntos.

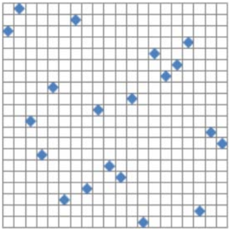
Pueden añadirse ingredientes adicionales que mejoren el método:

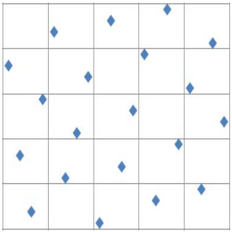
- **Estratificar** la malla y seleccionar los elementos de la muestra de modo independiente en cada estrato.
- Seleccionar los puntos de la muestra de modo que:
  - **Llenen** lo mejor posible **el espacio de diseño**, evitando grandes regiones sin puntos. P.e., eligiendo estratos repartidos espacialmente.
  - Visiten todas las dimensiones. P.e., en los **hipercubos latinos** (*lhsu* de MatLab) cada dimensión se visita, al menos, una vez; es decir, para cada valor i_0 de cada índice, i, hay al menos un punto en el hiperplano $i = i_0$.

Estos métodos evitan la maldición de la dimensionalidad.

HIPERCUBOS LATINOS

- Son muy adecuados cuando la dimensión es muy alta.
- Supongamos, por sencillez, que todas las dimensiones están discretizadas utilizando el mismo número de valores discretos, l_N.
- Obviamente como el número de puntos de la muestra es independiente de L_N, el recubrimiento espacial empeora cuando crece L_N.
- Pueden quedar grandes regiones no cubiertas (fig. izda), que se evitan mediante estratificación espacial (fig. dcha).





OPTIMIZACIÓN PRELIMINAR BASADA EN MUESTREO

Los métodos más sencillos se conocen como estudio paramétrico básico y 'una variable cada vez'.
Malla estructurada, con N dimensiones y $l_1, l_2, \ldots, l_N$ niveles en cada dimensión. Y se toma un **caso de referencia**.

- Se optimiza, separadamente, a lo largo de cada dimensión, **variando sólamente una variable de diseño cada vez**, manteniendo fijas las demás.
- Requiere $1 + (l_1 - 1) + \ldots + (l_N - 1)$ optimizaciones 1D.
- En cada optimización 1D, los valores discretos de las demás dimensiones pueden mantenerse:
  - Iguales a los del caso de referencia.
  - Iguales a los valores obtenidos en las optimizaciones 1D anteriores (en este caso, el resultado depende del orden).
- Estos métodos ignoran interacciones entre las dimensiones.

Outline

VECTOR GRADIENTE Y SENSIBILIDAD

Además del vector de diseño, $\boldsymbol{u}$, la función objetivo depende de **parámetros** $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, que se mantienen fijos al optimizar. En puntos genéricos del espacio de diseño:

- Las componentes del vector gradiente $\boldsymbol{\nabla_u} F$ respecto de las variables de diseño miden la **sensibilidad local** de F **ante cambios de las variables de diseño**.
- Si **alguna** $|\partial_{u_i} F| << 1$, puede convenir convertir u_i en parámetro para reducir el coste computacional del proceso de optimización.
- La **sensibilidad respecto de los parámetros** viene dada por componentes del vector gradiente respecto de los parámetros $\boldsymbol{\nabla_p} F$.
- Si **alguna** $|\partial_{p_i} F| >> 1$, puede convenir (si las especificaciones de diseño lo permiten) convertir ese p_i en variable de diseño. Se aumenta el coste computacional pero permite acceder a mejores diseños.

En los mínimos locales el gradiente $\boldsymbol{\nabla_u} F$ es muy pequeño y la sensibilidad respecto de las variables de diseño viene dada por la matriz Hessiana.

Sensibilidad respecto de las variables de diseño

- Cuando el número de variables de diseño es muy alto (por ejemplo, en optimización de forma), el esfuerzo computacional del proceso de optimización puede disminuírse **congelando** en algunas iteraciones **las variables de diseño tales que** $|\partial_{u^i} F| \ll 1$.
- Por ejemplo, pueden mantenerse constantes aquellas variables tales que

$$|\partial_{u^i} F| \leq \varepsilon \max_j |\partial_{u^j} F|,$$

  para un cierto umbral ε. Nótese que las variables que se congelan dependen de la iteración.
- Cuando se trata de optimizar formas 2D (por ejemplo, la forma de un ala) o distribuciones 2D de un parámetro (por ejemplo, la impedancia acústica de un material), pueden hacerse representaciones 2D del vector gradiente ∇F (**mapas de sensibilidad**).
- Los mapas de sensibilidad dan una idea de las regiones espaciales que afectan más a la función objetivo.

Textos y libros de consulta de Optimización

Textos

1. P.Y. Papalambros and D.J. Wilde, "Principles of Optimal Design. Modeling and Computation", Cambridge Univ. Press, 2000.
2. M. Mitchell, "An Introduction to Genetic Algorithms", MIT Press, 1999.
3. R. Fletcher "Practical Methods of Optimization". John Wiley & Sons, 2007.
4. G.N. Vanderplaats, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design", Vanderplaats Research & Development Inc., 2001.
5. L. Elsgoltz, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Editorial Mir, 1983.

Consulta (texto muy avanzado que incluye todos los temas, salvo análisis variacional)

6. J. Nocedal and S.J. Wright, "Numerical Optimization", Springer-Verlag, 2006.