



Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

Control y Optimización

Docentes:

Ignacio Delgado Montes

Ignacio Gómez Pérez

José Manuel Perales Perales

“Trabajo de Control: SISO”

Autores:

Paula Pérez Domínguez

Óscar Monje Lola

Yuxin Ye

Lenin Miranda Morales

Carrera: Grado en Ingeniería Aeroespacial (GIA)

Especialidad en Ciencias y Tecnologías Aeroespaciales (CTA)

Abril 2023

Contenido

1. Modelo no lineal	3
1.1. Dinámica del sistema	3
1.2. Control PD.....	8
2. Modelo lineal.....	15
2.1. Control PD.....	18

1. Modelo no lineal

Partimos de un sistema de ecuaciones no lineales desacoplado:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = a \cos(x + \phi) + b \sin(x + \phi) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = c \cos(y + \nu) + d \sin(y + \nu) \end{cases}$$

Interpretando su sentido físico podemos considerar las coordenadas (x,y) como una posición en el plano, y por tanto sus derivadas segundas se corresponden con las componentes horizontal y vertical de la aceleración de un sistema físico, del que vamos a proceder a estudiar su dinámica.

1.1. Dinámica del sistema

Podemos simplificar las ecuaciones mediante relaciones trigonométricas, convirtiendo la suma de seno y coseno en un único seno y definiendo las fases α y β :

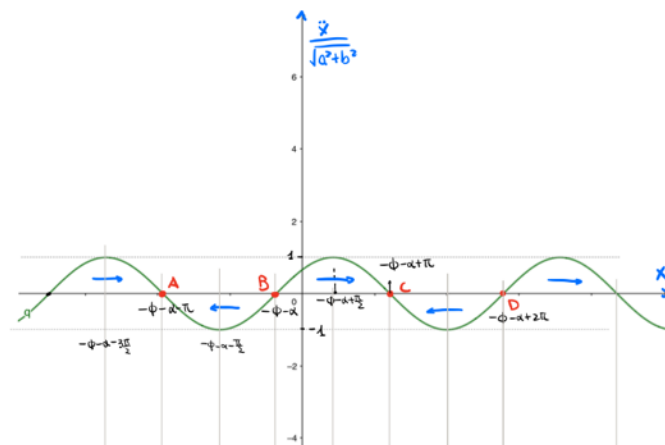
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = a \cos(x + \phi) + b \sin(x + \phi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi + \alpha) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = c \cos(y + \nu) + d \sin(y + \nu) = \sqrt{c^2 + d^2} \sin(y + \nu + \beta) \end{cases}$$

Donde:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{c}{d}\right)$$

Una vez realizada esta simplificación, podemos representar gráficamente las ecuaciones, es decir, la aceleración, $\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$, de nuestro sistema en función de la posición, $\vec{r} = (x, y)$. Gracias a que el sistema está desacoplado, y para una mayor claridad, representaremos separadamente las componentes horizontales y verticales.



A partir de estas representaciones se puede identificar las posibles posiciones de equilibrio como aquellos puntos en los que se anula la aceleración (puntos A, B, C, D). Determinando sus valores matemáticamente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 ; \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(x + \phi + \alpha) = 0; x + \phi + \alpha = k\pi;$$

$$x = k\pi - \phi - \alpha$$

De igual manera, para la coordenada vertical la aceleración es nula para

$$y = k\pi - v - \beta$$

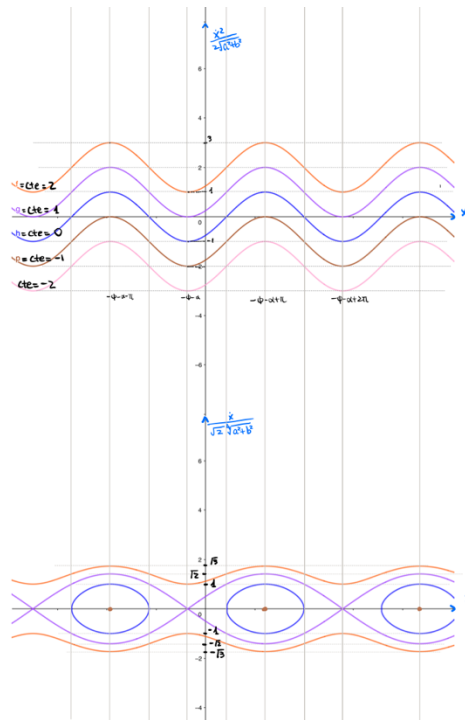
Habría que corroborar si en ellos la velocidad es nula, y son efectivamente puntos de equilibrio. Para ello vamos a deducir una integral primera, que represente la energía del sistema y la graficaremos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(x + \phi + \alpha) \right) \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \phi + \alpha) + E$$

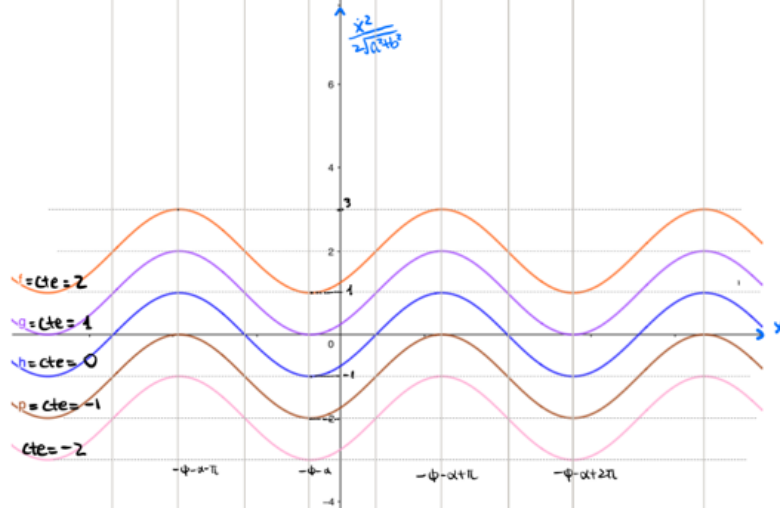
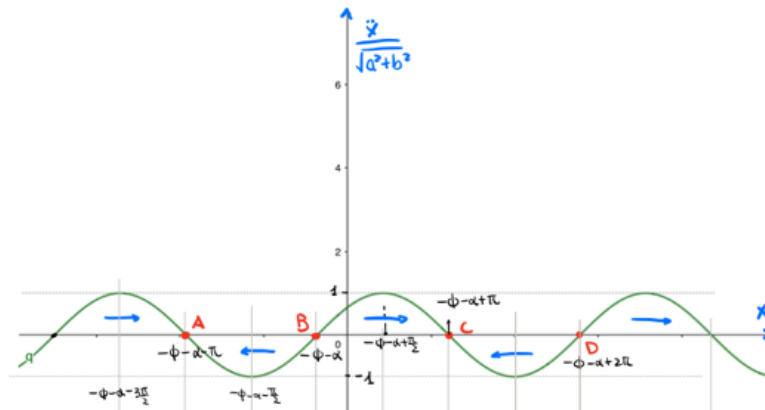
$$\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} = \left(\sqrt{c^2 + d^2} \operatorname{sen}(y + v + \beta) \right) \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \sqrt{c^2 + d^2} \cos(y + v + \beta) + E$$

Las expresiones obtenidas se corresponden con la integral de la energía del sistema, siendo las constantes E la energía mecánica (que se conserva), los términos de la izquierda la energía cinética, y los términos restantes la energía potencial del sistema.

Dado que nuestro sistema es conservativo la integral de la energía nos permite analizar cualitativamente el movimiento, a través de diagramas de energía potencial (donde representamos la energía potencial frente a las coordenadas de posición), y a través de mapas de fases (donde representamos la velocidad del sistema frente a las coordenadas de posición). Graficando los resultados, para distintos valores de energía mecánica (E), nos queda:



Observando estas figuras, es inmediata la identificación de puntos de equilibrio, y la determinación de su estabilidad. Si además representamos la función seguida por la aceleración en función de la posición podremos visualizar globalmente todas las características de la dinámica (aceleración, energías y velocidad) para cada coordenada de la posición.

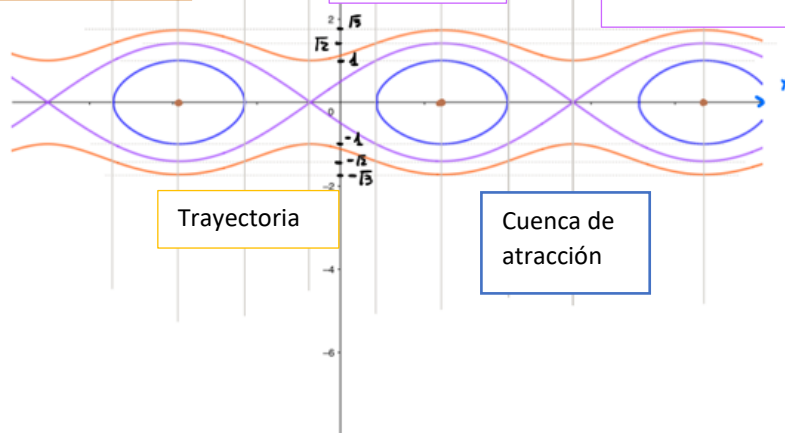


$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Puntos de equilibrio estables

Separatrices

Puntos de equilibrio inestables



Trayectoria

Cuenca de atracción

El procedimiento seguido permite analizar las propiedades de las soluciones del sistema de ecuaciones no lineales dado, ya que se representa gráficamente las proyecciones de esas soluciones en el denominado mapa de fases. Para sistemas de ecuaciones de mayor dimensión del mapa de fases pueden resultar soluciones caóticas, muy complejas de analizar.

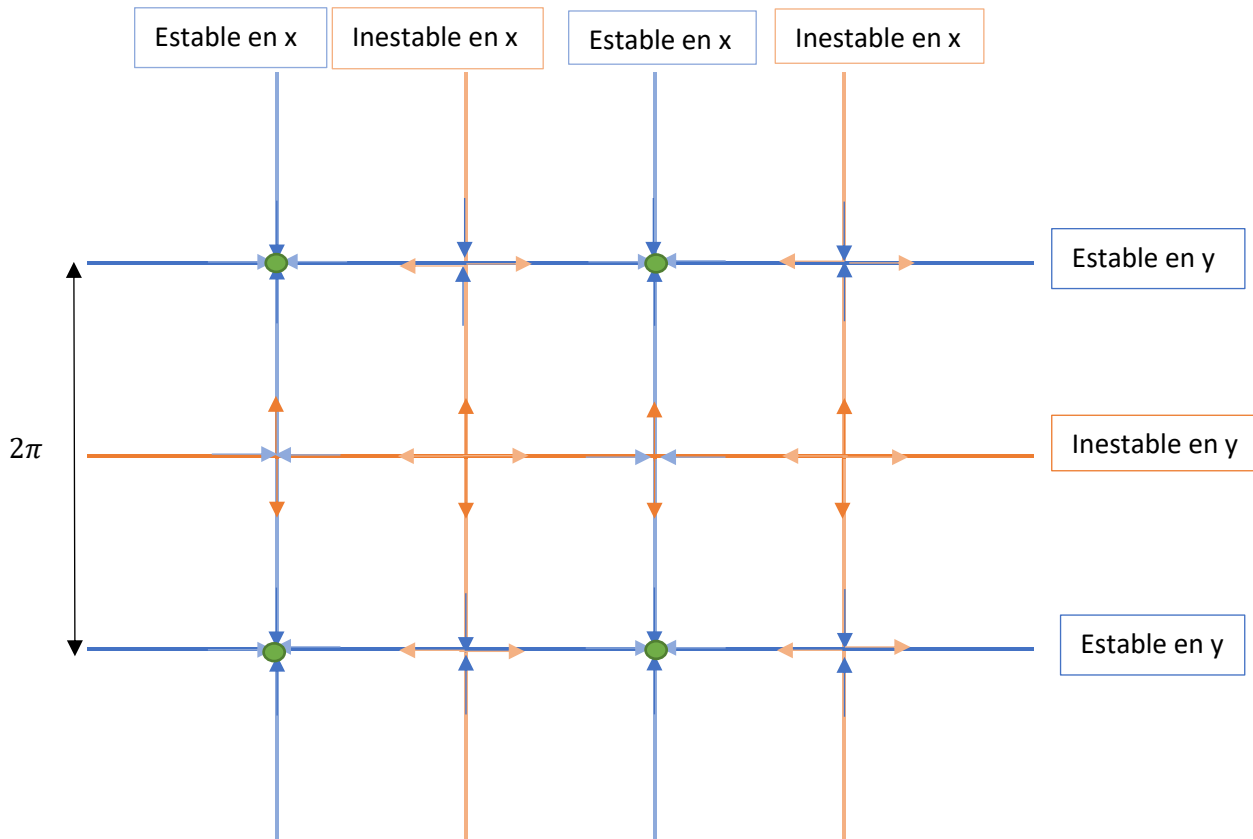
Son destacables:

- Los puntos de equilibrio en los que velocidad y aceleración se anulan:
 - Puntos silla de equilibrio estable, asociados a $E=-1$, que ante un aporte energético de perturbación retornan a su posición de equilibrio inicial. Suponen el centro de cuencas de atracción para ciertos niveles energéticos, son pozos de potencial.
 - Puntos de equilibrio inestables, asociados a $E=1$, que ante un aporte energético de perturbación se alejan de su posición inicial de equilibrio.
- Las curvas separatrices, asociadas a $E=1$. Separan las trayectorias en: acotadas (oscilaciones acotadas alrededor de un punto de equilibrio estable, para niveles energéticos inferiores) y abiertas (movimientos que atraviesan puntos de equilibrio inestables).

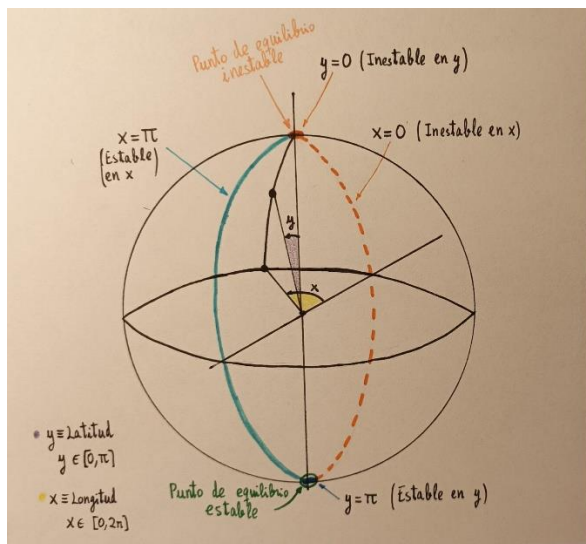
Se pueden analizar las posibles trayectorias de flujo del sistema desde el nivel energético E alcanzado en cada caso en comparación con la energía asociada a las curvas separatrices (correspondientes a $E=1$):

X \ Y	Y	Sin alcanzar la separatriz	En la separatriz	Superando la separatriz
Sin alcanzar la separatriz		Oscilaciones acotadas.	Oscilaciones acotadas en el eje x y saltos entre puntos de equilibrio inestables en el eje y.	Movimiento vertical infinito en el eje y y oscilaciones acotadas en el eje x.
En la separatriz		Oscilación acotada en el eje y, y saltos entre puntos de equilibrio inestables en el eje x.	Salto entre puntos de equilibrio inestables en ambos ejes.	Movimiento vertical infinito en el eje y y saltos entre puntos de equilibrio inestables en el eje x.
Superando la separatriz		Oscilación acotada en el eje y, y movimiento horizontal hacia el infinito en el eje x.	Movimiento horizontal infinito en el eje x y saltos entre puntos de equilibrio inestables en el eje y	Movimiento con pendiente no nula que tiende al infinito.

Otro posible análisis de las trayectorias que resultan al combinar ambos ejes sería representando gráficamente los puntos de equilibrio en x y en y. En esta representación las rectas que representan inestabilidades para x e y son las separatrices, y se ha indicado la dirección que adoptaría la aceleración para cada caso. Se ilustra así la ubicación de las cuencas de atracción como las intersecciones entre rectas que representan estabilidad de cada coordenada.



Esta representación abarca un dominio infinito para x e y . Pasando del plano a la representación de una esfera, de manera similar al procedimiento seguido con las coordenadas geográficas de la Tierra, en la que tomamos la coordenada y como la latitud en nuestra esfera y la coordenada x como la longitud, nuestros nuevos dominios comprenderán de 0 a π para la latitud, y de 0 a 2π para la longitud.

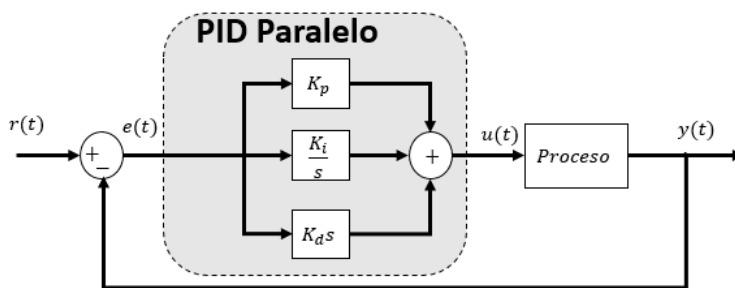


La esfera cuenta con dos puntos de equilibrio, uno para $Y=0$ y otro para $Y=\pi$, que coinciden con los polos de la esfera. El polo superior será un punto de equilibrio inestable, pues ante cualquier perturbación nos alejaríamos del mismo, mientras que el polo inferior es un punto de equilibrio estable. Hemos considerado las ligaduras que unen nuestra hipotética partícula en movimiento a la esfera como bilaterales. De esta forma contaríamos con una cuenca de atracción alrededor del

punto de equilibrio estable, y la trayectoria desde cualquier posición que no sea el otro punto de equilibrio inestable será alrededor del polo inferior.

1.2. Control PD

A continuación, introducimos a nuestro sistema no lineal un control del tipo PD (que compara mediante una realimentación unitaria los errores entre las señales de la consigna perseguida (δ) y la respuesta del sistema). Es un control de bucle cerrado, que se basa en la diferencia entre la variable real(x,y) y la consigna buscada (δ). El control proporcional depende la diferencia actual, mientras que el derivativo es una predicción del error futuro. La inclusión de un control integral supone incluir la diferencia pasada. El control P no considera el tiempo, por lo que para evitar arrastrar el error permanente suele acompañarse de controles derivativos y/o integrales. El control integral es el más adecuado para este fin, pues al integrar la diferencia entre el estado actual y la consigna para un periodo determinado reduce su valor, llegando a eliminarlo. El control derivativo evita que se incremente la diferencia entre consigna y estado, amortiguando el sistema.



$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(x + \phi + \alpha) \right) - K_p (x - \delta) - K_D \frac{dx}{dt}$$

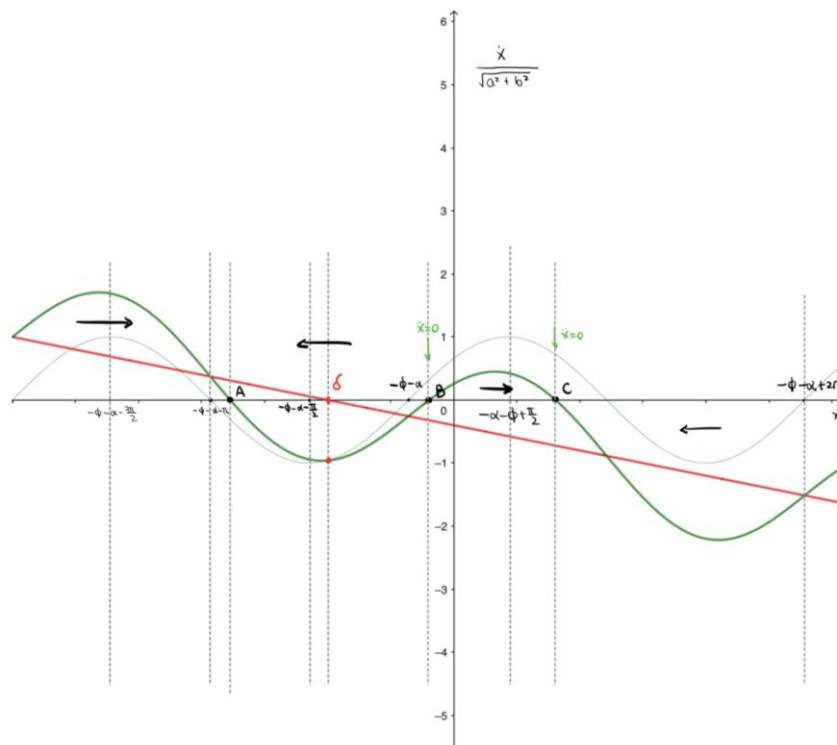
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\sqrt{c^2 + d^2} \operatorname{sen}(y + v + \beta) \right) - K_p (y - \delta) - K_D \frac{dy}{dt}$$

El control derivativo aumenta la velocidad de convergencia a la consigna, y el control proporcional reduce errores en la respuesta estacionaria. El control derivativo es más lento. Se ha asumido la derivada de la consigna $\dot{\delta}(t)$ no accesible, dado que en la realidad es muy complejo realizar su control.

Nuevamente, para analizar las soluciones de este sistema de ecuaciones no lineal confeccionaremos un diagrama de fases. Para ello proyectaremos las soluciones sin el control derivativo, sabiendo que disipa energía.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(x + \phi + \alpha) \right) - K_p (x - \delta)$$

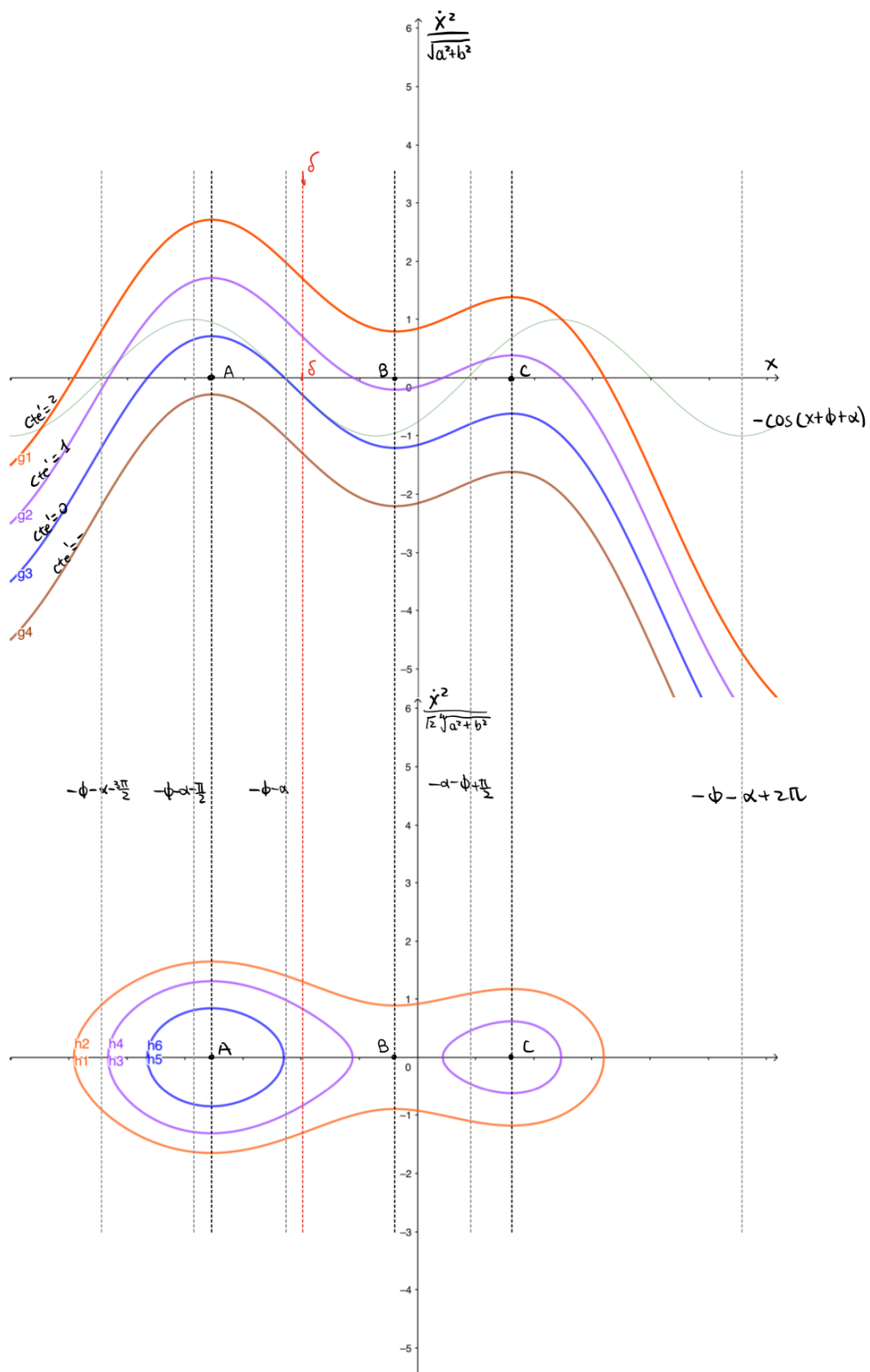
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\sqrt{c^2 + d^2} \operatorname{sen}(y + v + \beta) \right) - K_p (y - \delta)$$



Procediendo del mismo modo que anteriormente para obtener el mapa de fases:

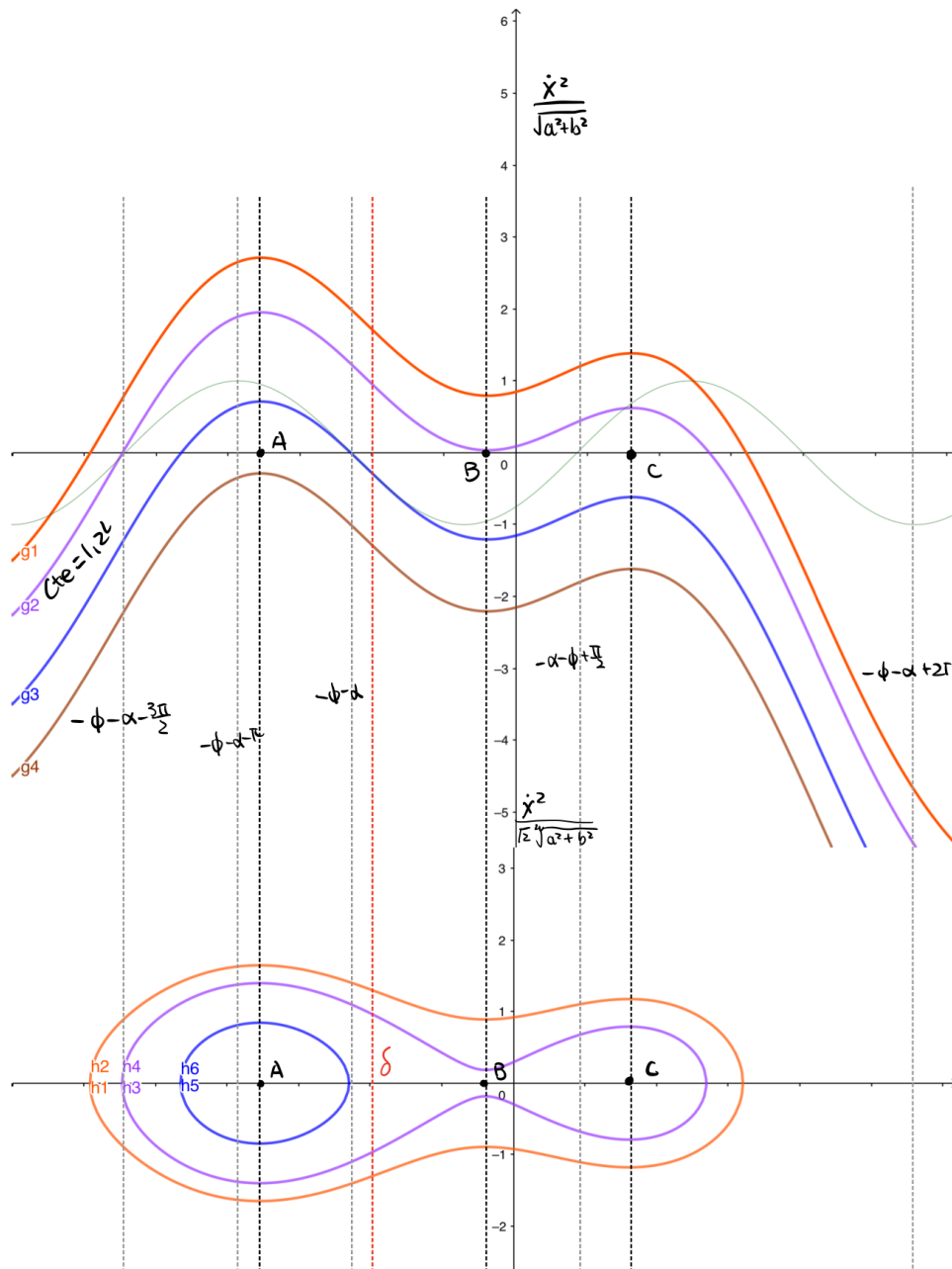
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\sqrt{a^2 + b^2} [Cte_x - \cos(x + \phi + \alpha) - \frac{1}{2}K_p (x - \delta)^2]$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\sqrt{c^2 + d^2} [Cte_y - \cos(y + v + \beta) - \frac{1}{2}K_p (y - \delta)^2]$$

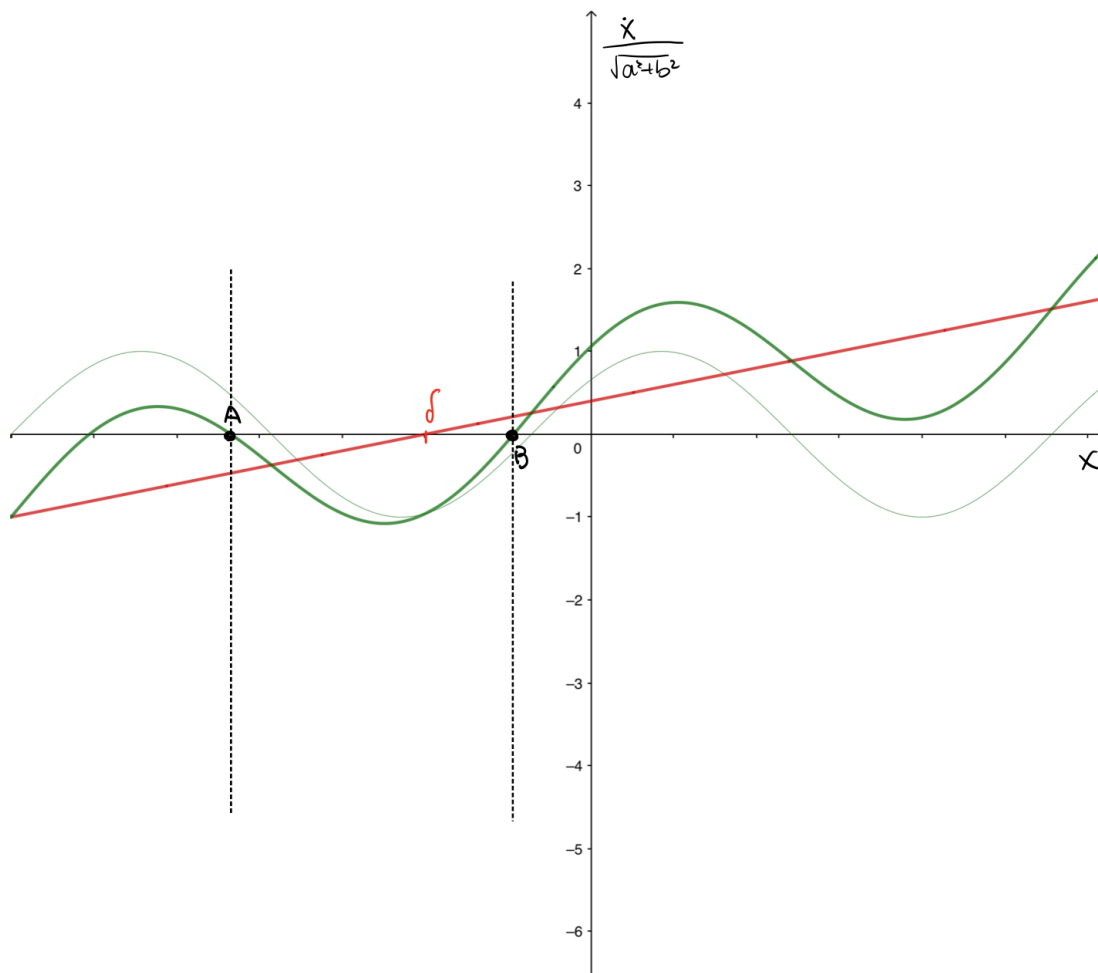


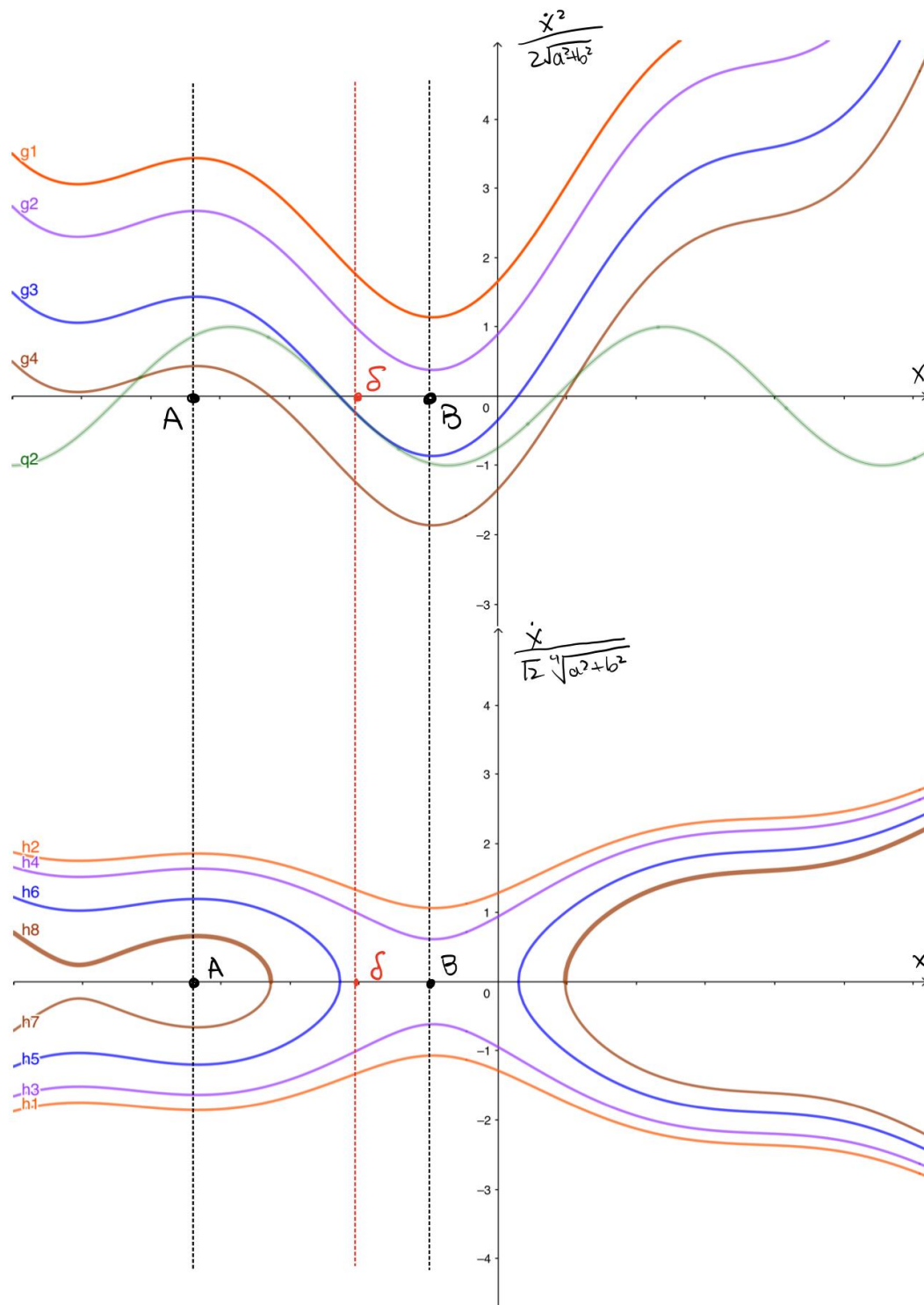
La recta de Cte igual a 1 corta dos veces la recta x, por lo que hemos probado otra Cte que hace la recta casi tangente en el punto B con el eje x:

Se observa que el punto B queda dentro de la zona 2.



Cabe destacar que en función del signo del control K_P se obtiene un resultado u otro, las anteriores graficas están hechas con el signo negativo. Ahora cambiamos el signo y se observa un gran cambio con respecto a K_P negativo.





En vista a los resultados graficados obtenidos podemos concluir que para que nuestro sistema pueda ser controlado es necesario que el signo de las ganancias sea negativo. De lo contrario nuestro sistema adopta trayectorias inestables que tienden al infinito, dando lugar a una evolución del conjunto ni acotada ni estable, características que se exigen a cualquier sistema que se pretenda controlar.

Para ganancias negativas, destaca que en este caso no se presentan infinitos puntos de equilibrio, y que todas las posibles trayectorias se encuentran acotadas, lo cual permite controlar el sistema. Hay tres puntos de equilibrio estable, alrededor de los cuales existen diversas trayectorias acotadas y

cerradas, es decir establecen una cuenca de atracción. La forma de estas trayectorias viene dada por la energía que presente nuestro sistema, pudiendo tener dos órbitas cerradas independientes, una única órbita cerrada, o una órbita cuya forma viene configurada por los tres puntos de equilibrio alrededor de los cuales se mueve. El control derivativo supone la aproximación progresiva a esos puntos de equilibrios estable con el tiempo, por la degradación energética que introduce en el sistema.

Para completar el estudio del control del sistema introducimos un control PDI completo, de forma que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(x + \phi + \alpha) \right) - K_P (x - \delta) - K_D \frac{dx}{dt} - K_I \int (x(\tau) - \delta(\tau)) d\tau$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\sqrt{c^2 + d^2} \operatorname{sen}(y + v + \beta) \right) - K_P (y - \delta) - K_D \frac{dy}{dt} - K_I \int (y(\tau) - \delta(\tau)) d\tau$$

El control PDI compara el error que se establece entre las señales de la consigna (comportamiento deseado representado por δ) y la respuesta obtenida, a través de un proceso de realimentación unitaria. El control completo (la introducción de la ganancia integral) permite atenuar las componentes a alta frecuencia, mientras que el control PD el derivador ($s \Rightarrow j\omega$) acentuaba las componentes de alta frecuencia. El control PD es un controlador de avance, pero al diseñar un control PDI se obtiene un controlador de retraso-avance.

2. Modelo lineal

El sistema resultante tras ser linealizado en los puntos de equilibrio ($x = k\pi - \phi - \alpha, y = k\pi - v - \beta$) es:

$$\ddot{x} = -\sqrt{a^2 + b^2} x$$

$$\ddot{y} = -\sqrt{c^2 + d^2} y$$

Adoptando el modelo para sistemas autónomos invariantes obtenemos:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = f(t)$$

$$\xi = 0; \omega_n^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\xi = 0; \omega_n^2 = \sqrt{c^2 + d^2}$$

Con lo que nuestro sistema es subamortiguado, y las raíces de las ecuaciones, $r_x^2 + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ y $r_y^2 + \sqrt{c^2 + d^2} = 0$, son complejas puras conjugadas de la forma:

$$r_{x1,2} = \pm j \sqrt[4]{a^2 + b^2}$$

$$r_{y1,2} = \pm j \sqrt[4]{c^2 + d^2}$$

Este resultado indica que los puntos de equilibrio son estables, y alrededor de ellos se establecen diferentes órbitas cerradas en función de los valores que tomen las constantes. Los modos de $x(t)$ y de $y(t)$ obtenidos en el campo real del sistema lineal son:

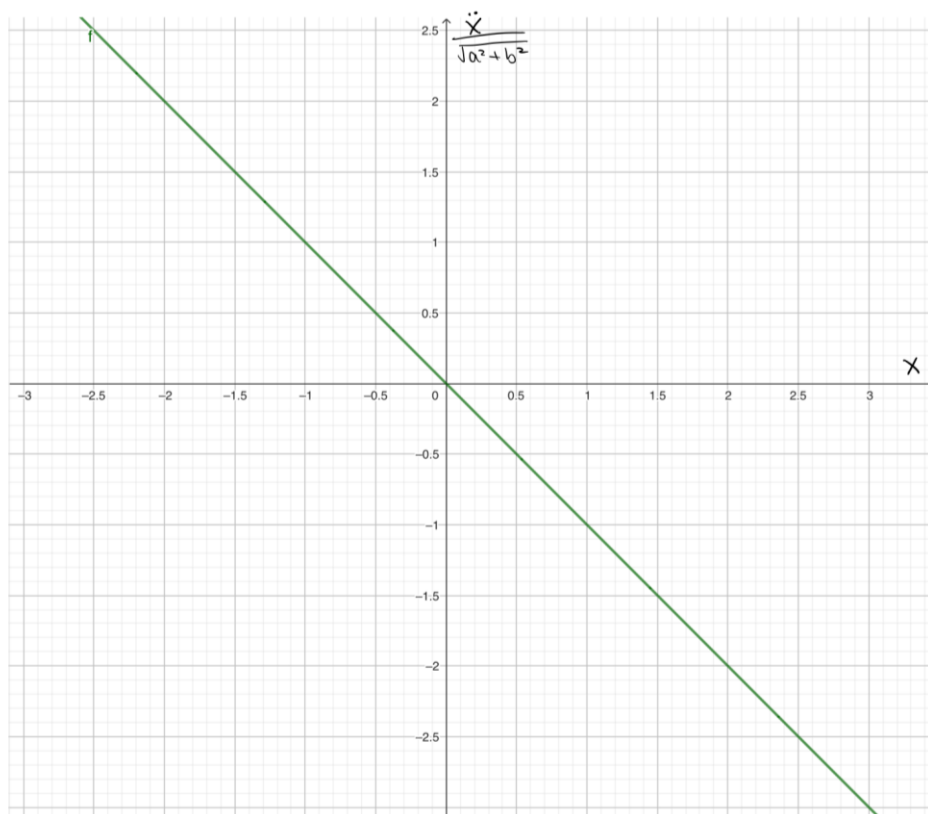
$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt[4]{a^2 + b^2} t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt[4]{a^2 + b^2} t\right)$$

$$y(t) = C_3 \cos\left(\sqrt[4]{c^2 + d^2}t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt[4]{c^2 + d^2}t\right)$$

Se ha obtenido que nuestro sistema es estable (sus raíces no presentan parte real positiva), y por consiguiente controlable.

Las constantes vendrán dadas por las condiciones iniciales. La pulsación forzada (ω_d) del sistema coincide con la frecuencia natural al no haber amortiguamiento ($\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt[4]{a^2 + b^2}$), y su valor mide la frecuencia de oscilación. Cuanto mayor sea su valor mayor será la velocidad con la responderá el sistema, en nuestro caso esta velocidad vendrá dada por el valor que adopten a, b, c, d.

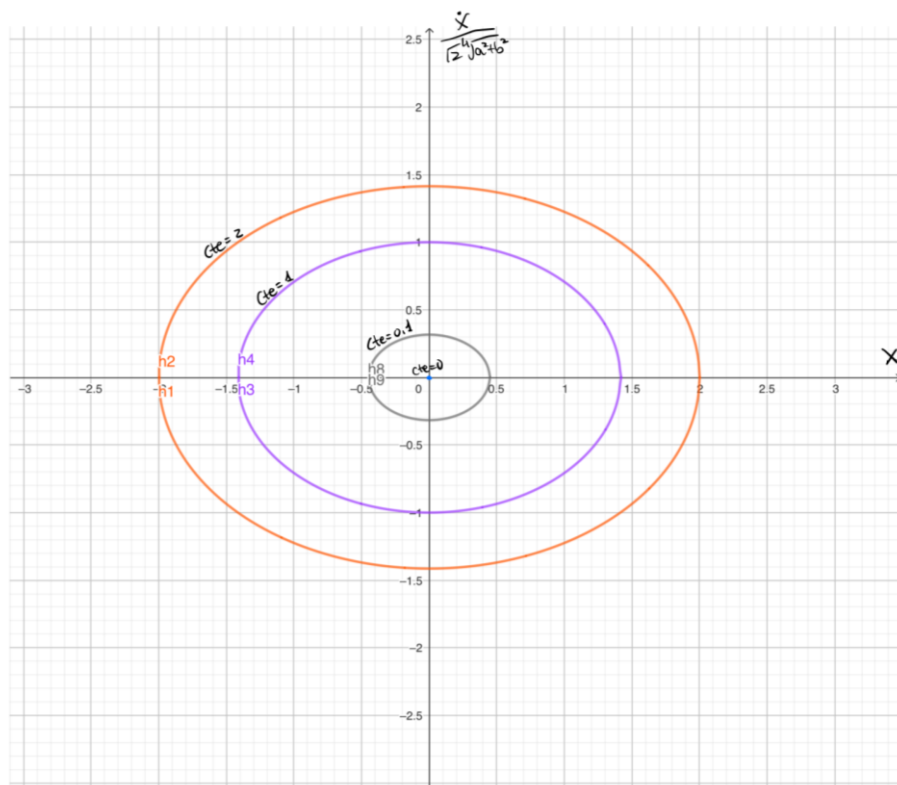
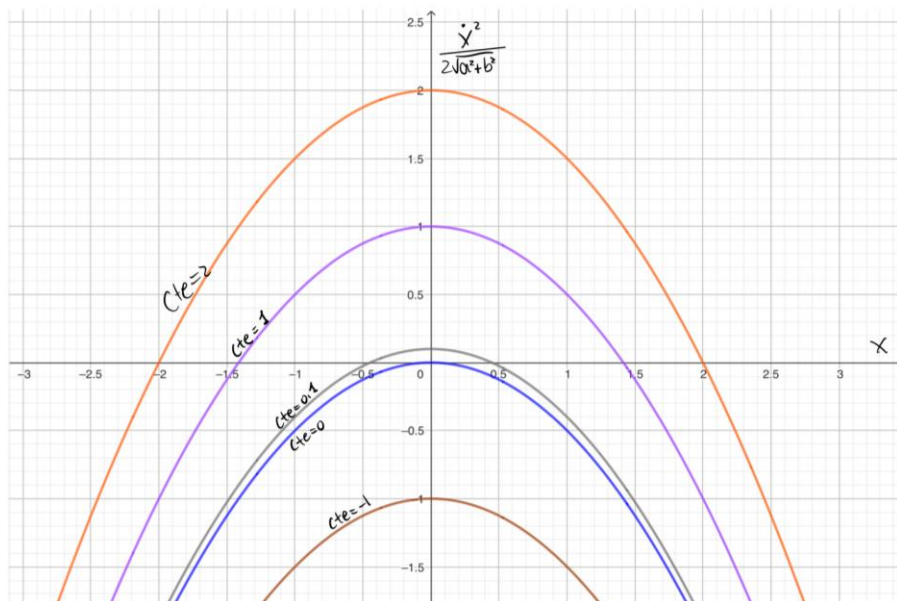
Estudiamos las trayectorias de nuestro sistema partiendo de cualquier punto con velocidad nula, siguiendo el mismo procedimiento que para el sistema no lineal.



Los mapas de fases que obtenemos para el modelo lineal son, tras haber obtenido las integrales primeras siguientes son:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = -\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{x^2}{2} + Cte_x$$

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 = -\sqrt{c^2 + d^2} \cdot \frac{y^2}{2} + Cte_y$$



La representación gráfica nos permite confirmar que el punto de equilibrio $x=0$ es estable, y se forman trayectorias elípticas (cuencas de atracción) alrededor del mismo, cuyo elipso es función del valor de la energía mecánica. Si se parte con velocidad inicial nula no existe movimiento.

2.1. Control PD

Se añade un control PD en el modelo lineal, para obtener la consigna ($\delta(t)$), realimentando con $x(t)$ y su derivada, y asumiendo nuevamente que la derivada de la consigna no es accesible y por tanto no controlable:

$$\ddot{x} = -\sqrt{a^2 + b^2} x - K_P(x - \delta) - K_D \dot{x}$$

$$\ddot{y} = -\sqrt{c^2 + d^2} y - K_P(y - \delta) - K_D \dot{y}$$

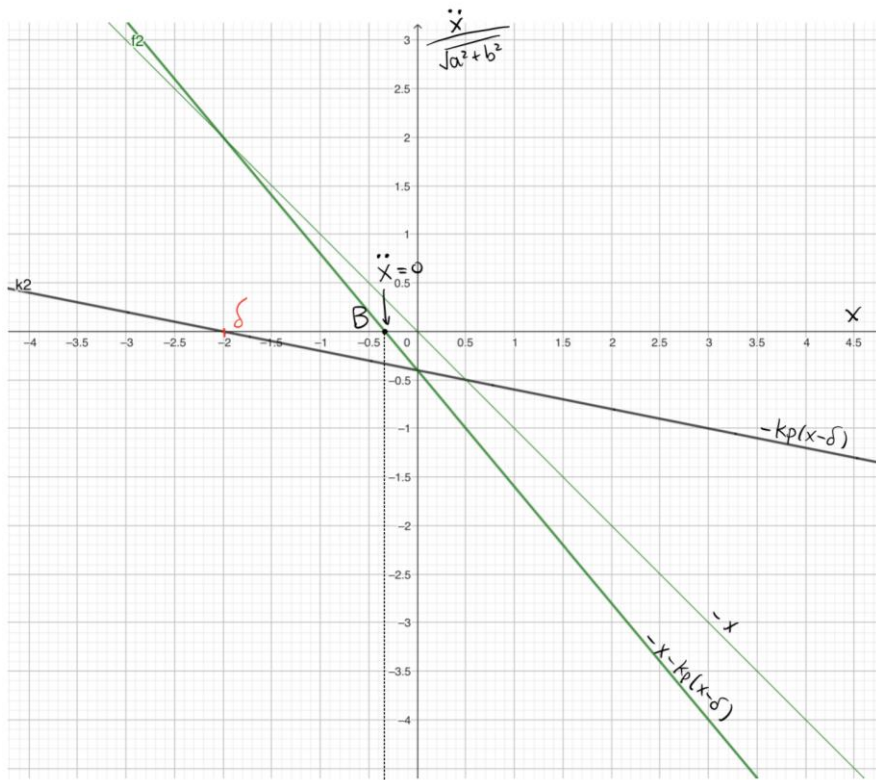
También se puede escribir como:

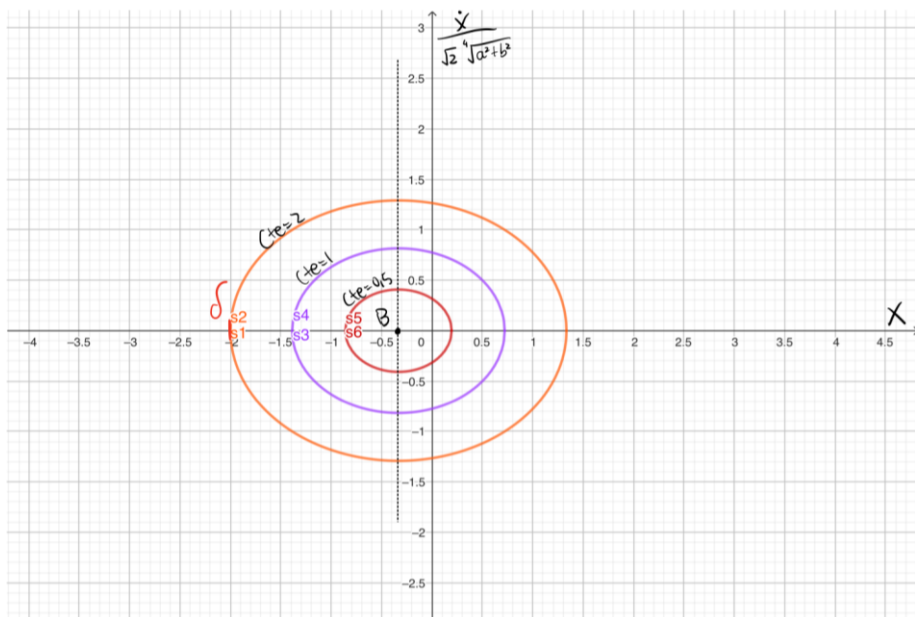
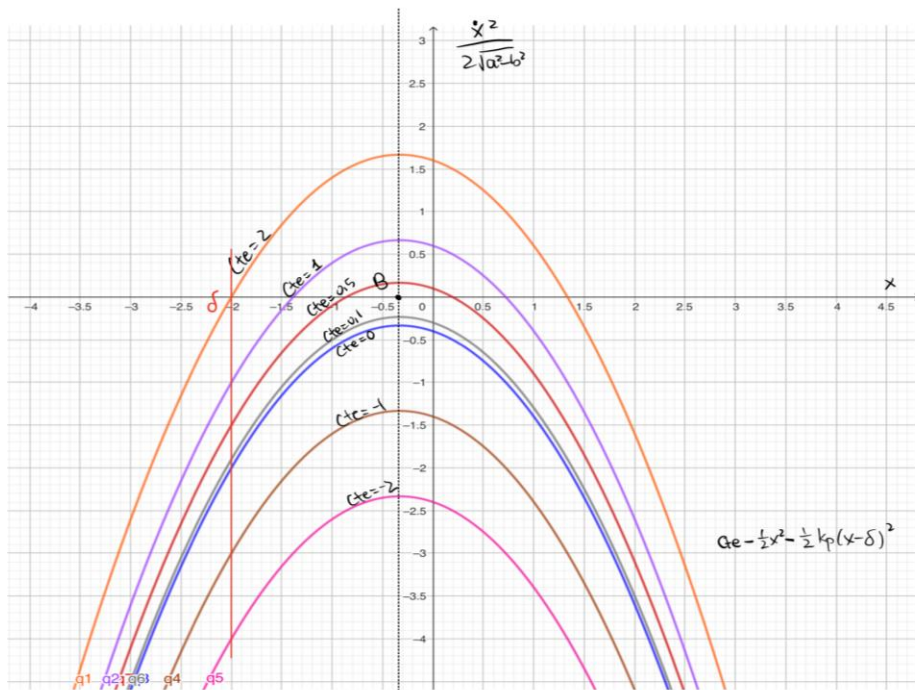
$$\ddot{x}(t) + \sqrt{a^2 + b^2} \dot{x}(t) = f_1(t) = -K_P(x(t) - \delta(t)) - K_D \dot{x}(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \sqrt{c^2 + d^2} \dot{y}(t) = f_2(t) = -K_P(y(t) - \delta(t)) - K_D \dot{y}(t)$$

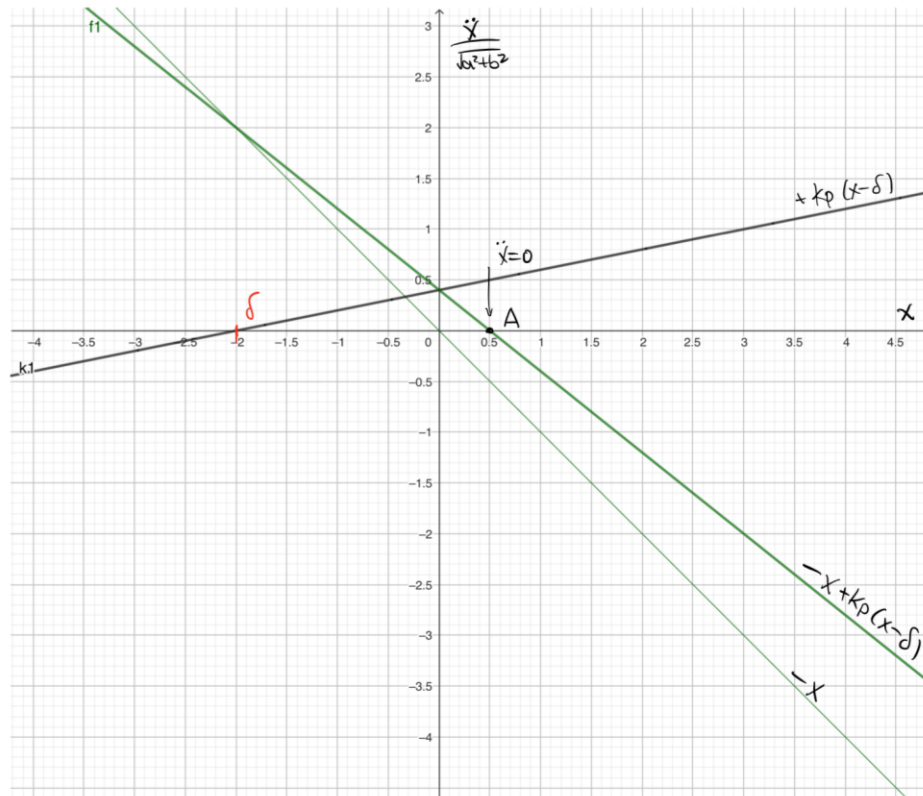
Para analizar el comportamiento del sistema volvemos a construir el mapa de fases, para varios valores de K_P .

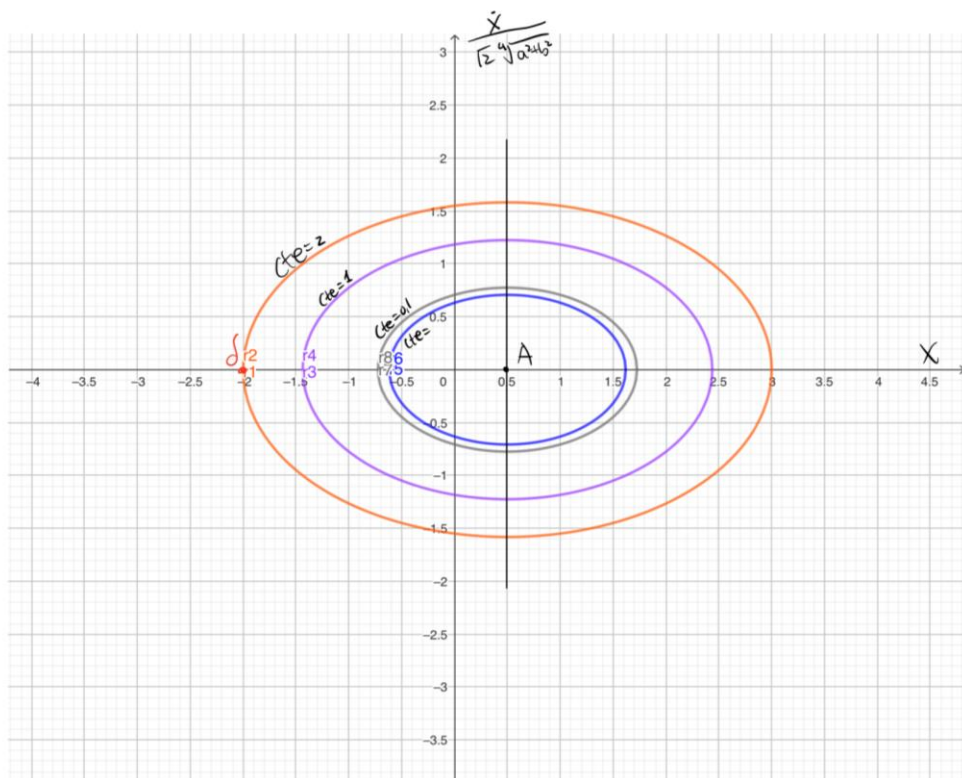
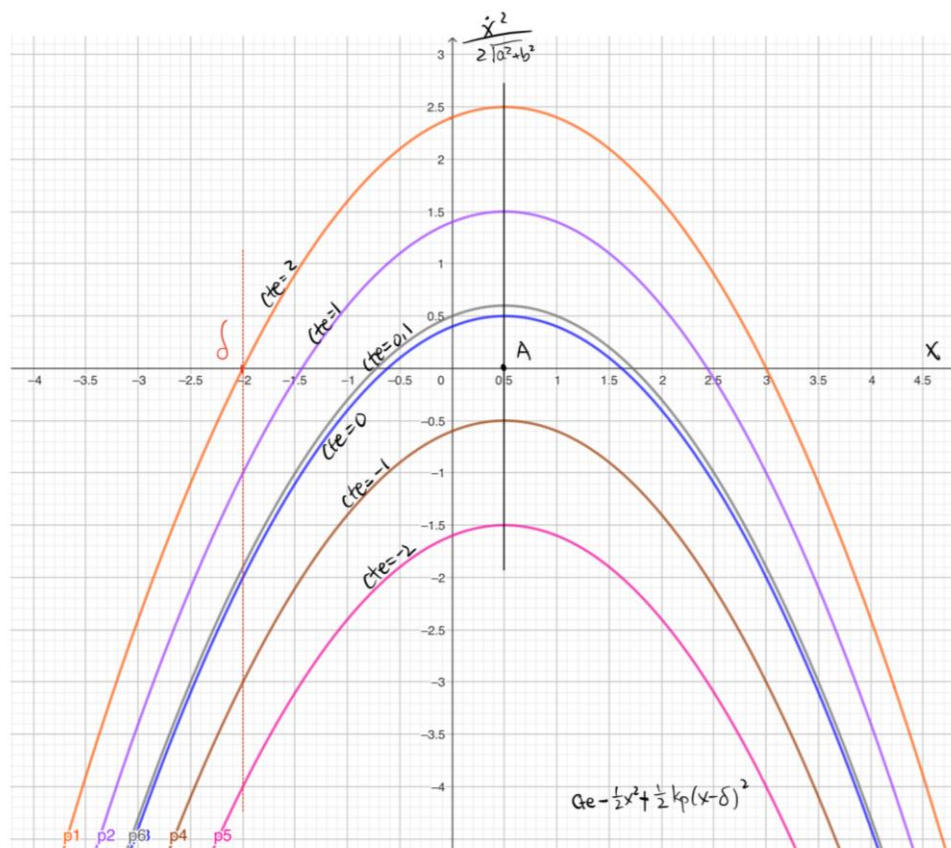
- Para K_P negativo:





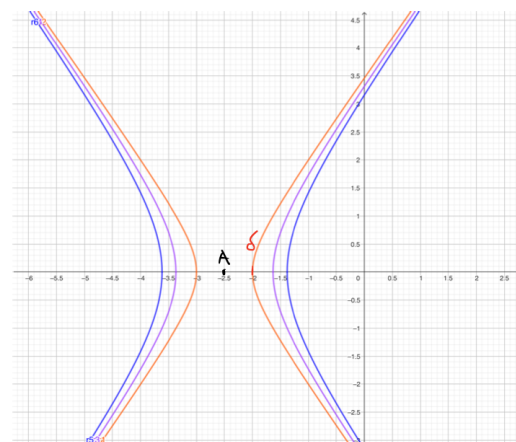
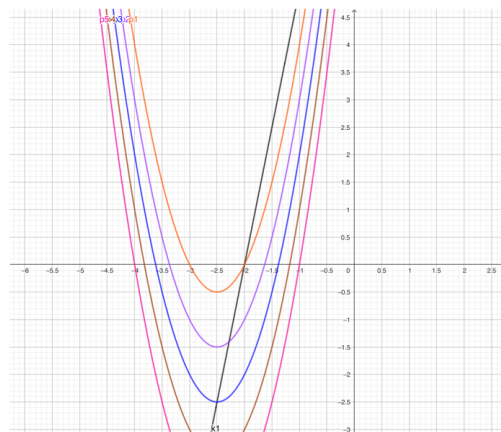
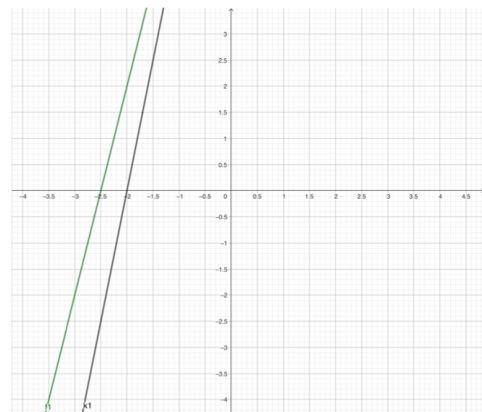
- Para un K_p positivo controlable





Para el modelo lineal se ha obtenido que el sistema es controlable para K_p negativos y ciertos valores positivos en los que el sistema es acotado y estable. Se obtiene que los movimientos tienen lugar alrededor de puntos de equilibrio estables en cuencas de atracción, y que dado que la ganancia derivativa disipa energía las trayectorias convergen al equilibrio estable. Esta enorme estabilidad del sistema provoca que sea necesaria una gran capacidad de mando para alcanzar nuestra consigna. Este hecho nos induce a plantear un diseño PDI completo para mejorar control de la dinámica del sistema.

Tomando valores de K_p más extremos, obtenemos que a partir de cierto valor de K_p positivo el sistema no es controlable, porque el sistema se hace inestable.



Por último, cuánto mayor es el valor de la ganancia proporcional en valor absoluto más se aproximan nuestras cuencas de atracción a la consigna para ganancias negativas.

