

Polycopié Complet de Calcul Différentiel L3 MIDO

Cours de Borris - Compilé par Gemini

13 novembre 2025

Table des matières

I	Théorème d'Inversion Locale	2
1	Théorème d'inversion locale	2
2	Théorème de Hadamard	5
II	Géométrie Différentielle	6
3	Un peu de géométrie différentielle	6
III	Équations Différentielles	9
4	Équations Différentielles	9
4.1	Introduction et Problème de Cauchy simple	9
4.1.1	Problème de l'Unicité et Problème de Cauchy	10
4.2	Équation différentielle du premier ordre	10
4.3	Régularité des Solutions	11
4.4	Théorèmes d'Existence et d'Unicité	11
4.5	Corollaire de Cauchy-Lipschitz (Non-croisement)	13
4.6	Convergence vers la frontière et sortie des compacts	15
4.7	Caractérisation des solutions maximales	16
4.8	Caractérisation des solutions maximales (Suite)	18
4.9	Cauchy-Lipschitz (Cadre général)	21
4.10	Preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz (Existence locale)	22

Première partie

Théorème d'Inversion Locale

1 Théorème d'inversion locale

Définition 1: \mathcal{C}^1 -difféomorphisme

Soient U un ouvert de E , V un ouvert de F . On dit que $f : U \rightarrow V$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme lorsque :

- f bijective
- $f \in \mathcal{C}^1$ et $f^{-1} \in \mathcal{C}^1$

Remarque

La notion de difféomorphisme induit l'utilisation d'ouverts (naturel si on veut vérifier que l'application est différentiable).

Si f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur V :

$$\forall x \in U, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in V, f(f^{-1}(y)) = y$$

Par dérivation en chaîne :

$$df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = id_E \quad \text{et} \quad df(f^{-1}(y)) \circ df^{-1}(y) = id_F$$

$df(x)$ et $df^{-1}(y)$ sont donc des applications linéaires inversibles, avec $df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ et $df^{-1}(y) \in \mathcal{L}(F, E)$.

$$(df(x))^{-1} = df^{-1}(y) = df^{-1}(f(x)) \\ \implies \dim E = \dim F.$$

Théorème 1: Théorème d'inversion locale

Soient U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Supposons qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df(x_0)$ est inversible.

Alors il existe un ouvert U' de x_0 ($U' \subset U$) et V' un ouvert de $y_0 = f(x_0)$ tels que f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U' sur V' .

De plus, $\forall y \in V', df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1}$.

Démonstration. On pose $\Phi : U \times F \rightarrow F$

$$(x, y) \mapsto y - f(x)$$

Φ est une application de classe \mathcal{C}^1 car f est de classe \mathcal{C}^1 .

Calculons la différentielle partielle de Φ par rapport à x au point (x_0, y_0) :

$$d\Phi_x(x_0, y_0) : E \rightarrow F$$

$$v \mapsto d\Phi_x(x_0, y_0)(v) = -df(x_0)(v)$$

On a $d\Phi_x(x_0, y_0) = -df(x_0)$.

C'est bien une application inversible (par hypothèse sur $df(x_0)$). On peut donc appliquer le Théorème des Fonctions Implicites.

Vérifions le point de base : $\Phi(x_0, y_0) = y_0 - f(x_0) = 0$ (car $f(x_0) = y_0$).

Ainsi, il existe :

- U_1 un ouvert de x_0 dans E (que nous nommerons U')
- V_1 un ouvert de y_0 dans F (que nous nommerons V')
- $\varphi : V' \rightarrow U'$ une application de classe \mathcal{C}^1

telle que :

$$\forall y \in V', \exists ! x \in U' \text{ t.q. } \Phi(x, y) = 0, \text{ et cet } x \text{ est } x = \varphi(y)$$

Or, $\Phi(x, y) = 0 \iff f(x) = y$.

On a donc $f(x) = y \iff x = \varphi(y)$. Ceci signifie que f est bijective de U' sur V' , et que son application inverse f^{-1} est φ .

On a $f^{-1} = \varphi$, et on sait que φ est de classe \mathcal{C}^1 .

Donc $f : U' \rightarrow V'$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U' sur V' . □

Définition 2: Difféomorphisme local

Une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (avec Ω un ouvert de \mathbb{R}^n) de classe \mathcal{C}^1 est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local si :

$\forall x \in \Omega$, il existe U_x un voisinage ouvert de x et V_x un voisinage ouvert de $f(x)$ tq $f : U_x \rightarrow V_x$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

Proposition 1: Caractérisation Difféomorphisme local

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local si et seulement si $\forall x \in \Omega, df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est inversible.

Démonstration. (\Rightarrow) Si f est un \mathcal{C}^1 -diff. local. $\forall x \in \Omega, \exists U_x, V_x$ ouverts tq $f : U_x \rightarrow V_x$ est un \mathcal{C}^1 -diff. Donc $f^{-1}(f(x)) = x$ et $df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = id_{\mathbb{R}^n}$. Donc $df(x)$ est inversible.

(\Leftarrow) $\forall x \in \mathbb{R}^n, df(x)$ est inversible. D'après le Th. d'Inversion Locale, $\forall x, \exists U_x$ (voisinage de x) et V_x (voisinage de $f(x)$) tq $f : U_x \rightarrow V_x$ est un \mathcal{C}^1 -diff. C'est la définition d'un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local. □

Corollaire 1: Application ouverte

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local. L'application f est ouverte :
Si U est un ouvert de \mathbb{R}^n (avec $U \subset \Omega$), alors $f(U)$ est un ouvert.

Démonstration. Soit $y \in f(U)$. Il existe $x \in U$ tq $y = f(x)$. Comme f est un \mathcal{C}^1 -diff. local, $df(x)$ est inversible. Donc il existe par le Th. d'Inversion Locale un voisinage de x , U_x , et un voisinage de $f(x)$, V_x , tq $f : U_x \rightarrow V_x$ est un \mathcal{C}^1 -diff.

On choisit U_x assez petit pour que $U_x \subset U$. On en déduit que $f(U_x) = V_x$. On a $y = f(x) \in V_x$ (qui est ouvert) et $V_x = f(U_x) \subset f(U)$.

On a trouvé un voisinage ouvert de y (c'est V_x) inclus dans $f(U)$. On en déduit que $f(U)$ est ouvert. □

Remarque

Un \mathcal{C}^1 -diff. local n'est pas toujours injectif (globalement).

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow f(\mathbb{R}^2)$

$$(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

f est \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais pas injective : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$.

Calculons la Jacobienne $Jf(x, y)$:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\det(Jf(x, y)) = (e^x \cos y)(e^x \cos y) - (-e^x \sin y)(e^x \sin y)$$

$$= e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} > 0$$

Donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, df(x, y)$ est inversible, et f est un \mathcal{C}^∞ -diff. local.

Proposition 2: Difféo local + injectif

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un \mathcal{C}^1 -diff. local (Ω ouvert de \mathbb{R}^n). Si f est injective, alors f est un \mathcal{C}^1 -diff. de Ω sur $f(\Omega)$.

Démonstration. $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ avec f injective, donc f est bijective (par définition de $f(\Omega)$).

De plus, f est un \mathcal{C}^1 -diff. local, donc f est ouverte (d'après Cor. 1). Donc $f(\Omega)$ est un ouvert. f va bien d'un ouvert vers un autre ouvert.

- f est de classe \mathcal{C}^1 .
- f est un \mathcal{C}^1 -diff. local donc $\forall x \in \Omega, \exists U_x$ (voisinage ouvert de x) et V_x (voisinage ouvert de $f(x)$) tq $f : U_x \rightarrow V_x$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

En notant $\tilde{f}_x : V_x \rightarrow U_x$ l'inverse de ce difféomorphisme, on a $\tilde{f}_x = f^{-1}|_{V_x}$. Cela signifie que f^{-1} est localement \mathcal{C}^1 , donc f^{-1} est \mathcal{C}^1 sur $f(\Omega)$. \square

Corollaire 2: Cas 1D

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Si f' ne s'annule pas sur I , alors f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de I sur $f(I)$.

Définition 3: Difféomorphisme Global

Soient Ω et Λ deux ouverts de \mathbb{R}^n .

On dit que $f : \Omega \rightarrow \Lambda$ est un \mathcal{C}^1 -**difféomorphisme global** si f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de Ω sur Λ .

(C'est-à-dire, f est bijective, de classe \mathcal{C}^1 , et son inverse $f^{-1} : \Lambda \rightarrow \Omega$ est aussi de classe \mathcal{C}^1).

Théorème 2: Théorème d'Inversion Globale

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 .

Si f est **injective** et f est un \mathcal{C}^1 -**difféomorphisme local** (i.e. $\det(Jf(x)) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$),
Alors f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme global de Ω sur l'ouvert $f(\Omega)$.

2 Théorème de Hadamard

Définition 4: Application propre

Soient X, Y des espaces métriques (de dim. finie). On dit que $f : X \rightarrow Y$ est une application **propre** si f est continue et si $\forall K \subset Y$ compact, $f^{-1}(K)$ est un compact.

Remarque

f continue $\nRightarrow f$ propre.

En effet, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée (ex : \arctan). Pour M assez grand, $K = [-M, M]$ est compact. $f^{-1}(K) = f^{-1}([-M, M]) = \mathbb{R}$, qui n'est pas compact.

Proposition 3: Caractérisation application propre (\mathbb{R}^n)

Une application continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est propre

\iff

$\|f(x)\| \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Démonstration. (\Leftarrow) Supposons $\|f(x)\| \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. Ceci est équivalent à dire : $\forall M > 0, \exists N_M > 0$ tq $\forall \|x\| \geq N_M, \|f(x)\| \geq M$. Ou, par contraposée : si $f^{-1}(E)$ est borné dans \mathbb{R}^n , alors E est borné dans \mathbb{R}^n .

Soit K un compact de \mathbb{R}^n . K est fermé et borné. $f^{-1}(K)$ est fermé (car f est continue et K est fermé). K est borné, donc $f^{-1}(K)$ est borné (par l'hypothèse).

$f^{-1}(K)$ est fermé et borné dans \mathbb{R}^n , donc $f^{-1}(K)$ est compact. f est donc propre.

(\Rightarrow) Si f est propre. Supposons par l'absurde que $\|f(x)\|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. La négation est : $\exists M > 0$ tq $\forall N > 0, \exists x_N$ tq $\|x_N\| \geq N$ et $\|f(x_N)\| \leq M$.

On peut alors construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ (donc (x_n) n'est pas bornée) et $\|f(x_n)\| \leq M$. Soit $E = \{f(x_n), n \in \mathbb{N}\}$. E est borné. Soit $K = \bar{E}$ (la fermeture de E). K est fermé et borné, donc K est compact.

Par hypothèse, f est propre, donc $f^{-1}(K)$ est compact.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \in K$, donc $x_n \in f^{-1}(K)$. La suite (x_n) est une suite d'un compact, elle doit donc être bornée.

Ceci est une CONTRADICTION avec $\|x_n\| \rightarrow +\infty$. □

Proposition 4: Propre implique fermée

Une application propre $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques est **fermée** (i.e. si F est un fermé de X , $f(F)$ est un fermé de Y).

Démonstration. Soit F un fermé de X . Soit (y_n) une suite de $f(F)$ tq $y_n \rightarrow y$ avec $y \in Y$. Il faut mq $y \in f(F)$.

$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in f(F)$, donc $\exists x_n \in F$ tq $y_n = f(x_n)$.

Soit $K = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{y\}$. K est un compact de Y (car la suite converge). Comme f est propre, $f^{-1}(K)$

est un compact de X .

$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in K \implies x_n \in f^{-1}(K)$.

(x_n) est une suite dans un compact $f^{-1}(K)$. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ tq $x_{\phi(n)} \rightarrow x^*$ avec $x^* \in f^{-1}(K)$ (car $f^{-1}(K)$ est compact, donc fermé).

$\forall n \in \mathbb{N}, x_{\phi(n)} \in F$. Puisque F est fermé, la limite x^* est dans F . Donc $x^* \in F$.

Comme f est continue, $f(x_{\phi(n)}) \rightarrow f(x^*)$. Or, $f(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)}$ et (y_n) converge vers y , donc $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y .

Par unicité de la limite, $f(x^*) = y$.

Puisque $x^* \in F$, on a $y = f(x^*) \in f(F)$. Donc $f(F)$ est fermé. \square

Théorème 3: Théorème de Hadamard

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local. Si f est propre, alors f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

(Cela implique que f est bijective, donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$).

Proposition 5: Hadamard (avec injectivité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local. Si f est injective et propre, alors $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

Démonstration. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow f(\mathbb{R}^n)$ est injective et un \mathcal{C}^1 -diff. local, donc (par Prop. 2) f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n dans $f(\mathbb{R}^n)$.

Il suffit donc de vérifier que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- $f(\mathbb{R}^n)$ est non-vide.
- \mathbb{R}^n est un ouvert. f est un \mathcal{C}^1 -diff. local, donc f est ouverte. Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert.
- \mathbb{R}^n est un fermé. f est propre, donc f est fermée (par Prop. 4). Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé.

$f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-ensemble non-vide, ouvert et fermé de \mathbb{R}^n . Puisque \mathbb{R}^n est connexe, $\implies f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. \square

Deuxième partie

Géométrie Différentielle

3 Un peu de géométrie différentielle

Définition 5: Hypersurface régulière

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{C}^1 . On dit que $\Sigma = f^{-1}(\{0\})$ est une **hypersurface régulière** de classe \mathcal{C}^1 si :

1. Σ est non-vide.
2. $\forall a \in \Sigma, df(a) \neq 0$ (i.e. $f'(a) \neq 0$).

$f(x) = 0$ est alors une équation cartésienne de l'hypersurface Σ .

Si $a \in \Sigma$, l'hyperplan affine de vecteur normal $\nabla f(a)$ et passant par a est appelé **hyperplan tangent** à Σ en a .

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x - a, \nabla f(a) \rangle = 0\}$$

$$(où \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)^T \in \mathbb{R}^n)$$

Proposition 6: Hyperplan est hypersurface

Tout hyperplan de \mathbb{R}^n est une hypersurface.

Démonstration. Soit H un hyperplan de \mathbb{R}^n . H est un s.e.v. de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$.

Soit (a_1, \dots, a_{n-1}) une base de H . $\exists b \in \mathbb{R}^n$ tq (a_1, \dots, a_{n-1}, b) est une base de \mathbb{R}^n .

On pose l l'application linéaire (la forme linéaire) tq $l(a_i) = 0$ (pour $i = 1..n - 1$) et $l(b) = 1$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i + \lambda_n b$. $l(x) = \lambda_n l(b) = \lambda_n$.

On a construit la forme linéaire $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\text{Ker}(l) = H$.

De plus, l est une application linéaire en dimension finie, elle est donc continue et \mathcal{C}^∞ . l est de classe \mathcal{C}^1 .

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $dl(x) = l$. $H = l^{-1}(\{0\}) = \text{Ker}(l)$. $\forall x \in H$, $dl(x) = l \neq 0$ (car l est non nulle, $l(b) = 1$).

Donc H est une hypersurface. \square

Définitions (Courbes et Surfaces)

Si $n = 2$, on dit que Σ est une **courbe régulière** de \mathbb{R}^2 .

Si $n = 3$, on dit que Σ est une **surface régulière** de \mathbb{R}^3 .

Proposition 7: Paramétrage local (Chartes)

Soit Σ une hypersurface régulière de classe \mathcal{C}^1 dans \mathbb{R}^n , soit $a \in \Sigma$.

Alors il existe V un voisinage de a ouvert dans \mathbb{R}^n et U un voisinage de 0 ouvert dans \mathbb{R}^{n-1} et une application $\varphi : U \rightarrow \Sigma \cap V$ de classe \mathcal{C}^1 , bijective, tq $\varphi(0) = a$ et vérifiant $rg(d\varphi(h')) = n - 1 \quad \forall h' \in U$.

Remarque

Soit $h \in \mathbb{R}^n$, $h = (h', h_n)$ avec $h' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $h_n \in \mathbb{R}$. $\varphi : U \rightarrow \Sigma \cap V$ est bijective. $\Sigma \cap V$ est alors, d'une certaine manière, un objet de dimension $n - 1$ car U est un ouvert de \mathbb{R}^{n-1} .

Démonstration. Soit Σ une hypersurface régulière de classe \mathcal{C}^1 . $\exists f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^n) de classe \mathcal{C}^1 tq $\Sigma = f^{-1}(\{0\})$.

On pose $g : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ (où $\tilde{\Omega} = \{h \in \mathbb{R}^n | a + h \in \Omega\}$ est un ouvert) par :

$$g(h) \mapsto f(a + h)$$

g est \mathcal{C}^1 et $\frac{\partial g}{\partial h_n}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.

On sait que $df(a) \neq 0$ (car $a \in \Sigma$ et Σ est régulière). $\implies \exists p \in \{1, \dots, n\}$ tq $\frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$.

Sans perte de généralité, supposons $p = n$. (Si $p \neq n$, on permute les coordonnées x_p et x_n avec un difféomorphisme \tilde{f} , et on a $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$).

On a $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$. On applique le Th. des Fonctions Implicites à g au point 0. On a $g(0) = f(a) = 0$. On regarde la différentielle partielle par rapport à la n -ième variable : $dg_{h_n}(0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad v \mapsto \frac{\partial g}{\partial h_n}(0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot v$. Cette application est inversible car $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$.

Ainsi, il existe :

- U un ouvert de \mathbb{R}^{n-1} (voisinage de $0' \in \mathbb{R}^{n-1}$)

- V_n un ouvert de \mathbb{R} (voisinage de $0 \in \mathbb{R}$)
- $\psi : U \rightarrow V_n$ (implicite) tq $\forall h' \in U, \exists ! h_n \in V_n$

$$g(h', h_n) = 0 \iff h_n = \psi(h')$$

$\forall (h', h_n) \in U \times V_n$, on a $f(a + (h', h_n)) = 0 \iff h_n = \psi(h')$.

Posons $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $h' \mapsto a + (h', \psi(h'))$. (On pose $V = (a + U \times V_n)$ qui est un voisinage ouvert de a).

φ est \mathcal{C}^1 car ψ l'est. $\varphi(0) = a + (0, \psi(0)) = a$ (car $g(0, 0) = 0 \implies \psi(0) = 0$).

Pour $y \in \Sigma \cap V$, $y = a + (h', h_n)$ avec $(h', h_n) \in U \times V_n$ et $f(y) = 0$. $f(y) = 0 \implies g(h', h_n) = 0 \implies h_n = \psi(h')$. D'où $y = a + (h', \psi(h')) = \varphi(h')$. Donc φ est surjective sur $\Sigma \cap V$.

De plus, $\varphi(h'_1) = \varphi(h'_2) \implies a + (h'_1, \psi(h'_1)) = a + (h'_2, \psi(h'_2)) \implies h'_1 = h'_2$. Donc φ est injective.

Donc $\varphi : U \rightarrow \Sigma \cap V$ est bijective.

Considérons la Jacobienne de φ (pour déterminer le rang) : $h' \in U$, $J\varphi(h') = d\varphi(h') \in \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R})$.

$$\varphi(h') = \begin{pmatrix} a_1 + h_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} + h_{n-1} \\ a_n + \psi(h') \end{pmatrix}$$

La i -ème ligne de $J\varphi(h')$ est $\frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j}(h')$. Si $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j} = \delta_{ij}$ (Kronecker). La n -ième ligne est $(\frac{\partial \psi}{\partial h_1}(h'), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial h_{n-1}}(h'))$.

$$J\varphi(h') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial h_1} & \frac{\partial \psi}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Cette matrice (n lignes, $n-1$ colonnes) contient la matrice identité I_{n-1} . Elle est donc de rang $n-1$.
 $\implies \text{rg}(d\varphi(h')) = n-1 \quad \forall h' \in U$. □

Remarque

On dit que (h_1, \dots, h_{n-1}) constitue un système de coordonnées locales relatives au paramétrage de φ .

Proposition 8: Hyperplan tangent (paramétré)

Soit Σ une hypersurface régulière, $a \in \Sigma$ et φ un paramétrage de Σ au voisinage de a tq $\varphi(0) = a$. Alors l'hyperplan tangent à Σ en a (défini par f) coïncide avec l'hyperplan H passant par a et dirigé par l'image de $d\varphi(0)$.

$$H = a + \text{Im}(d\varphi(0)) = a + \text{Vect} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial h_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial h_{n-1}}(0) \right\}$$

Démonstration. On a $f(\varphi(h')) = 0 \quad \forall h' \in U$.

En différenciant cette composition en $h' = 0$:

$$df(\varphi(0)) \circ d\varphi(0) = 0$$

Puisque $\varphi(0) = a$, on a $df(a) \circ d\varphi(0) = 0$.
Cela signifie que $\forall v \in \mathbb{R}^{n-1}$, $df(a)(d\varphi(0)(v)) = 0$.

$$\implies \text{Im}(d\varphi(0)) \subset \text{Ker}(df(a))$$

On regarde les dimensions : $d\varphi(0) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. $rg(d\varphi(0)) = n - 1$ (vu dans la preuve précédente).
 $\implies \dim(\text{Im}(d\varphi(0))) = n - 1$.

$df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire. Elle est non nulle (car $a \in \Sigma$ hypersurface régulière, $df(a) \neq 0$).
Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(df(a))) = \dim(\mathbb{R}^n) - rg(df(a)) = n - 1$.

Puisque $\dim(\text{Im}(d\varphi(0))) = \dim(\text{Ker}(df(a)))$ et que l'un est inclus dans l'autre :

$$\text{Im}(d\varphi(0)) = \text{Ker}(df(a))$$

L'hyperplan tangent H (défini par f) est l'hyperplan affine passant par a et de direction $\text{Ker}(df(a))$.
 $H = a + \text{Ker}(df(a)) = a + \text{Im}(d\varphi(0))$.

(Transcription des images)

$$\begin{aligned} \text{Ker}(df(0)) &= \{x \in \mathbb{R}^n, df(0)(x) = 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot x_i = 0 \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, \nabla f(0) \rangle = 0\} \end{aligned}$$

□

Troisième partie

Équations Différentielles

4 Équations Différentielles

(Partie II du cours)

4.1 Introduction et Problème de Cauchy simple

Exemple 1

(E) : $x'(t) = ax(t)$ est une équation différentielle. L'inconnue est un couple (J, x) où J est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J . On a un ensemble de solutions de (E) de la forme $x(t) = \lambda e^{at}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (C'est-à-dire de la forme $(J = \mathbb{R}, x(t) = \lambda e^{at})$).

Comment trouver les solutions ? On cherche une fonction x telle que $x'(t) - ax(t) = 0$. On multiplie par e^{-at} :

$$(x(t)e^{-at})' = x'(t)e^{-at} - ae^{-at}x(t) = (x'(t) - ax(t))e^{-at} = 0$$

Sur un intervalle ouvert, on en déduit que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad x(t)e^{-at} = \lambda \implies x(t) = \lambda e^{at}$$

On a donc : $\forall J$ intervalle ouvert, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(J, x(t) = \lambda e^{at})$ est une solution.

4.1.1 Problème de l'unicité et Problème de Cauchy

Questions : Comment avoir une unique solution au problème (E) ?

- a) Il est pertinent de considérer une solution dite "**maximale**" sur un intervalle J (cela signifie qu'on ne peut pas étendre la solution sur un intervalle plus grand au sens de l'inclusion stricte).
- b) (E) a une infinité de solutions maximales $(\mathbb{R}, \lambda e^{at})$ paramétrées par $\lambda \in \mathbb{R}$.
- c) Si on veut définir une unique solution de (E), on doit ajouter une **condition initiale** de type $x(t_0) = x_0$.

Définition 6: Problème de Cauchy (simple)

On appelle **Problème de Cauchy** le système (E') :

$$(E') \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

(E') admet une unique solution maximale : $x(t) = \lambda e^{at}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$. On détermine λ avec la condition initiale : $x(t_0) = \lambda e^{at_0} = x_0 \implies \lambda = x_0 e^{-at_0}$. La solution unique est $x(t) = (x_0 e^{-at_0}) e^{at} = x_0 e^{a(t-t_0)}$.

Notations

$\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$ (différentes manières d'écrire une dérivée).

4.2 Équation différentielle du premier ordre

Définition 7: Équation différentielle du premier ordre

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. On considère (1) :

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t) \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

- (1) est dite du **premier ordre** parce que seules des dérivées d'ordre 1 apparaissent.
- (1) est une équation du premier ordre **explicite**.
- Par ailleurs, les équations de la forme $G(t, x'(t), x(t)) = 0$ sont dites du premier ordre **implicites**.
- (L'équation (1) est **autonome** si F ne dépend pas du temps t (i.e. $F(t, x) = F(x)$). Dans le cas contraire, l'équation est **non-autonome**.

Définition 8: Solution d'une EDO

Une **solution** de (1) est décrite par un couple (J, X) , où J est un intervalle ouvert et $X : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction dérivable sur J , telle que :

- $\forall t \in J, (t, X(t)) \in \Omega$
- $\forall t \in J, X'(t) = F(t, X(t))$

avec $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, (t, x) \mapsto F(t, x)$. La solution est le couple (J, X) .

Exemple 2

Pour $x'(t) = ax(t)$, on a $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (t, x) \mapsto ax$.

Remarque

Si on étendait la définition à des intervalles non nécessairement ouverts (ex : $J = [a, b]$), on pourrait définir $X'(b)$ comme :

$$X'(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{X(t) - X(b)}{t - b}$$

4.3 Régularité des Solutions

Proposition 9: Régularité de la solution

Si $F \in \mathcal{C}^n(\Omega)$, alors si (J, X) est une solution de (1), on a $X \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$.

Démonstration. Soit (J, X) une solution de (1). Puisque X est dérivable sur J , X est continue sur J , donc $X \in \mathcal{C}^0(J)$.

Supposons par l'absurde que $X \notin \mathcal{C}^{n+1}(J)$. Soit k la régularité maximale de X , c'est-à-dire $X \in \mathcal{C}^k(J)$ avec $k < n + 1$. (Puisque $X \in \mathcal{C}^0(J)$, ce k existe et $k \geq 0$).

On a $X'(t) = F(t, X(t))$. L'application $t \mapsto (t, X(t))$ est de classe \mathcal{C}^k . On sait que $F \in \mathcal{C}^n(\Omega)$. Puisque $k < n + 1$ (et k, n sont des entiers), on a $k \leq n$. Donc F est a fortiori de classe $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Par composition d'applications de classe \mathcal{C}^k , l'application $t \mapsto F(t, X(t))$ est $\mathcal{C}^k(J)$. On en déduit donc que $X' \in \mathcal{C}^k(J)$.

Mais si $X' \in \mathcal{C}^k(J)$, alors $X \in \mathcal{C}^{k+1}(J)$. Ceci contredit notre hypothèse que k était la régularité maximale de X . L'hypothèse de départ est donc fausse. On a $X \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$. \square

Remarque

Si $F \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, alors $X \in \mathcal{C}^1(J)$. (X est mieux que dérivable!).

4.4 Théorèmes d'Existence et d'Unicité

Définition 9: Problème de Cauchy (Général)

Le système (2) :

$$(2) \quad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in \Omega$ est appelé **Problème de Cauchy**.

Définition 10: Solution Maximale

Une solution (J, X) de (1) est dite **maximale** si elle ne peut pas être étendue sur un intervalle plus grand au sens de l'inclusion stricte. Autrement dit, il n'existe pas de couple (J', Y) solution de (1) tel que $J \subsetneq J'$ et $Y|_J = X$.

On se pose deux questions fondamentales :

- **Question 1 :** Pour quelle régularité de F le problème de Cauchy (2) a-t-il **au moins une** solution maximale ?
- **Question 2 :** Pour quelle régularité de F le problème de Cauchy (2) a-t-il une **unique** solution maximale ?

Exemple 3: Non-existence (si F n'est pas continue)

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Considérons le problème de Cauchy (C) :

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
. Montrons que (C) n'a pas de solutions.

Démonstration par l'absurde. Supposons par l'absurde que (C) a une solution (J, X) avec $0 \in J$.

1. X doit être dérivable en 0. On a $X'(0) = F(X(0)) = F(0) = 1$.
2. Par définition de la dérivée, $X(t) = X(0) + X'(0) \cdot t + o(t) = t + o(t)$.
3. Cela implique que dans un voisinage V de 0, pour $t \in V \cap J \cap]0, +\infty[$ (c-à-d, $t > 0$ et proche de 0), on a $X(t) > 0$.
4. Pour ces mêmes t , puisque $X(t) > 0$, l'équation différentielle donne $X'(t) = F(X(t)) = -1$.
5. Par le Théorème des Accroissements Finis sur $[0, t]$ (car X est continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$), il existe $c \in]0, t[$ tel que :

$$\frac{X(t) - X(0)}{t - 0} = X'(c)$$

6. Puisque $c \in]0, t[$, on a $c > 0$ et $X(c) > 0$ (si t est assez petit). Donc $X'(c) = -1$. On a $\frac{X(t) - 0}{t} = -1$, ce qui donne $X(t) = -t$.
7. **Contradiction.** On a $X(t) = -t < 0$ (car $t > 0$), mais l'étape 3 nous donnait $X(t) > 0$.

L'hypothèse qu'une solution existe est donc fausse. \square

Théorème 4: Peano-Arzelà (Admis)

(Réponse à la Question 1) Supposons que F est **continue** sur Ω . Alors le problème de Cauchy (2) a **au moins une** solution maximale (J, X) . *Théorème admis.*

Exemple 4: Non-unicité (si F est continue mais non-Lipschitzienne)

Considérons le problème : $\begin{cases} x'(t) = 3(x(t))^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$. Ici, $F(x) = 3x^{2/3}$. F est continue sur \mathbb{R} (par composition de fonctions continues).

F n'est pas localement Lipschitzienne en 0.

Démonstration. Supposons par l'absurde que F est localement Lipschitzienne. Alors il existerait $C > 0$ et un voisinage de 0 tels que $\forall x$ dans ce voisinage :

$$|F(x) - F(0)| \leq C|x - 0|$$

$$|3x^{2/3} - 0| \leq C|x| \implies 3|x|^{2/3} \leq C|x|$$

Pour $x \neq 0$, $3 \leq C|x|^{1/3}$. En faisant tendre $x \rightarrow 0$, on obtient $3 \leq 0$, ce qui est absurde. (La note du cours utilise $\frac{|F(x)-F(0)|}{|x-0|} = \frac{3x^{2/3}}{x} = \frac{3}{x^{1/3}}$ qui tend vers l'infini en 0, donc n'est pas bornée). \square

Ce problème admet (au moins) deux solutions maximales :

- **Solution 1 :** $X_1(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Vérification :* $X_1'(t) = 0$. $3(X_1(t))^{2/3} = 3(0)^{2/3} = 0$. $X_1(0) = 0$. C'est une solution.
- **Solution 2 :** $X_2(t) = t^3$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Vérification :* $X_2'(t) = 3t^2$. $3(X_2(t))^{2/3} = 3((t^3)^{2/3}) = 3(t^2) = 3t^2$. $X_2(0) = 0^3 = 0$. C'est une solution.

On a (\mathbb{R}, X_1) et (\mathbb{R}, X_2) qui sont deux solutions maximales distinctes pour le même problème de Cauchy.

Théorème 5: Cauchy-Lipschitz (Version simple)

(Réponse à la Question 2)

1. Si F est **Lipschitzienne** sur Ω , alors le problème de Cauchy (2) admet une **unique solution maximale** (J, X) .
2. De plus, toutes les solutions de (1) (non-maximales) sont des restrictions de l'unique solution maximale.

Corollaire 3: Unicité locale

Supposons F Lipschitzienne sur Ω . Soient (J, X) et (J', Y) deux solutions de (1). S'il existe $t_0 \in J \cap J'$ tel que $X(t_0) = Y(t_0)$, alors :

$$\forall t \in J \cap J', \quad X(t) = Y(t)$$

Démonstration. Considérons l'intervalle $I = J \cap J'$, qui est un intervalle ouvert contenant t_0 . Les deux couples $(I, X|_I)$ et $(I, Y|_I)$ sont solutions du même problème de Cauchy (2) :

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(t_0) = X(t_0) (= Y(t_0)) \end{cases} \quad \text{sur } I$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème admet une unique solution maximale (J_m, Z) . Par définition de la solution maximale, les solutions $(I, X|_I)$ et $(I, Y|_I)$ doivent être des restrictions de (J_m, Z) . Cela signifie que $\forall t \in I$, $X(t) = Z(t)$ et $Y(t) = Z(t)$. Par conséquent, $X(t) = Y(t)$ pour tout $t \in J \cap J'$. \square

4.5 Corollaire de Cauchy-Lipschitz (Non-croisement)

Corollaire 4: Non-croisement des solutions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 ou Lipschitzienne. Soient (J, x) et (J', y) deux solutions maximales du problème (E) $y'(t) = f(t, y(t))$.

Si il existe $t_0 \in J \cap J'$ tel que $x(t_0) < y(t_0)$,
Alors : $\forall t \in J \cap J', x(t) < y(t)$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in J \cap J'$ tel que $x(t_1) > y(t_1)$. (Nous avons $x(t_0) < y(t_0)$ et $x(t_1) > y(t_1)$).

Considérons la fonction $z(t) = x(t) - y(t)$. z est continue sur l'intervalle $I = [\min(t_0, t_1), \max(t_0, t_1)] \subset J \cap J'$. On a $z(t_0) = x(t_0) - y(t_0) < 0$ et $z(t_1) = x(t_1) - y(t_1) > 0$.

Par le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) appliqué à z , il existe $t_2 \in I$ tel que $z(t_2) = 0$, c'est-à-dire $x(t_2) = y(t_2)$.

Maintenant, (J, x) et (J', y) sont toutes deux des solutions maximales du **même** problème de Cauchy :

$$(E') \quad \begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(t_2) = x(t_2) \end{cases}$$

(puisque $y(t_2) = x(t_2)$).

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité de la solution maximale), on en déduit que $J = J'$ et $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in J$. Ceci est absurde, car on a supposé $x(t_0) < y(t_0)$. \square

Question : Dans quel cadre les solutions peuvent-elles cesser d'exister ?

Exemple 5

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} m'(t) = m(t)^2 \\ m(0) = 0 \end{cases}$$

Ici, $f(t, m) = m^2$. f est \mathcal{C}^∞ (donc \mathcal{C}^1 et Lipschitzienne sur tout compact). Par Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale. La fonction $m(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$ est une solution évidente. Par unicité, c'est l'unique solution maximale. L'intervalle de définition est $J = \mathbb{R}$.

Exemple 6: Phénomène d'explosion

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

En séparant les variables (quand $x \neq 0$) : $\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 1 \implies \left(-\frac{1}{x(t)}\right)' = 1$

En intégrant : $-\frac{1}{x(t)} = t + C$.

Avec $x(0) = 1$, on a $-\frac{1}{1} = 0 + C \implies C = -1$.

Donc $-\frac{1}{x(t)} = t - 1$, ce qui donne $x(t) = \frac{1}{1-t}$.

On vérifie : $x'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ et $x(t)^2 = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2$. La solution est le couple (J, x) avec $J =]-\infty, 1[$ et $x(t) = \frac{1}{1-t}$.

On observe que (J, x) est une solution maximale. En effet, supposons par l'absurde qu'on puisse l'étendre en une solution (\tilde{J}, \tilde{x}) avec $J \subsetneq \tilde{J}$ (donc $1 \in \tilde{J}$). Alors \tilde{x} devrait être dérivable sur \tilde{J} , et donc continue en $t = 1$. Cela impliquerait que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \tilde{x}(t)$ existe et est finie. Or, $\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-t} = +\infty$. Ceci est une contradiction.

Conclusion : Si la solution n'est pas "globale" (définie sur I en entier), on observe un phénomène d'explosion : $|x(t)| \rightarrow +\infty$ lorsque t tend vers la borne de J .

4.6 Convergence vers la frontière et sortie des compacts

Définition 11: Valeur d'adhérence

Soit $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction, et $t^* = \sup J \in \bar{\mathbb{R}}$.

On dit que $y^* \in \mathbb{R}^d$ est une **valeur d'adhérence** de γ lorsque $t \rightarrow t^*$ s'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de J telle que $t_n \rightarrow t^*$ et $\gamma(t_n) \rightarrow y^*$.

(Formellement : $\forall V$ voisinage ouvert de y^* , $\forall W$ voisinage de t^* , $W \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$).

Remarque

La fermeture de J est considérée dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 12: Convergence vers la frontière

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n = 1 + d$), J un intervalle de \mathbb{R} , et $\gamma : J \rightarrow \Omega$. Soit $t^* = \sup J$ (ou $\inf J$). On dit que $\gamma(t)$ **converge vers la frontière de** Ω (notée $Fr(\Omega)$ ou $Bd(\Omega)$) lorsque $t \rightarrow t^*$, si γ n'admet **aucune valeur d'adhérence dans** Ω .

On note : $\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow t^*]{} Bd(\Omega)$.

Remarque

$\gamma(t) \rightarrow Bd(\Omega)$ est équivalent à dire que γ n'a pas de valeur d'adhérence (lorsque $t \rightarrow t^*$) ou que ses valeurs d'adhérence sont dans $Bd(\Omega)$.

Proposition 10: Théorème de sortie des compacts

Soit $\gamma : J \rightarrow \Omega$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow t^*]{} Fr(\Omega)$.
2. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un voisinage V de t^* tel que $\forall t \in V \cap J$, $\gamma(t) \notin K$.

Démonstration. (1 \implies 2) : Supposons $\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$. Supposons par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que : $\forall V$ voisinage de t^* , $\exists t \in V \cap J$ tel que $\gamma(t) \in K$. On peut alors construire une suite (t_n) dans J telle que $t_n \rightarrow t^*$ et $\gamma(t_n) \in K$. K est compact, donc on peut extraire une sous-suite $(\gamma(t_{k(n)}))$ qui converge vers $y^* \in K$. Puisque $t_{k(n)} \rightarrow t^*$ et $\gamma(t_{k(n)}) \rightarrow y^*$, y^* est une valeur d'adhérence de γ . Comme $K \subset \Omega$, $y^* \in \Omega$. Ceci contredit l'hypothèse (1) que γ n'a pas de valeur d'adhérence dans Ω . Absurde.

(2 \implies 1) : Supposons que γ "sort de tout compact". Supposons par l'absurde que γ ne converge pas vers $Fr(\Omega)$. Cela signifie (par définition) que γ admet (au moins) une valeur d'adhérence $y^* \in \Omega$. Par définition d'une valeur d'adhérence, il existe une suite $(t_n) \rightarrow t^*$ telle que $\gamma(t_n) \rightarrow y^*$. Puisque Ω est un ouvert et $y^* \in \Omega$, on peut choisir un $\epsilon > 0$ tel que le compact $K = \bar{B}(y^*, \epsilon)$ soit inclus dans Ω . Puisque $\gamma(t_n) \rightarrow y^*$, pour n assez grand, $\gamma(t_n) \in K$. Cela signifie que pour tout voisinage V de t^*

(contenant les t_n pour n grand), il existe des $t_n \in V \cap J$ tels que $\gamma(t_n) \in K$. Ceci contredit l'hypothèse (2). Absurde. \square

Remarque

Cas d'un domaine "tube" $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$ (où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert). Soit $\gamma(t) = (t, x(t))$ une solution.

Alors $\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow t^*]{} Fr(\Omega)$ est équivalent à :

$$t^* \in \{\inf I, \sup I\} \quad \text{OU} \quad \|x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow t^*]{} +\infty$$

Preuve de la remarque. Nous devons prouver l'équivalence.

Sens 1 : (\Leftarrow)

Supposons que $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$ OU $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$. Nous voulons montrer que $\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$, c'est-à-dire que $\gamma(t)$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une valeur d'adhérence $y^* \in \Omega$. Par définition, $y^* = (t_{adh}, x^*)$ avec $t_{adh} \in I$ et $x^* \in \mathbb{R}^d$. Il existerait alors une suite (t_n) dans J telle que $t_n \rightarrow t^*$ et $\gamma(t_n) = (t_n, x(t_n)) \rightarrow y^*$.

Ceci implique $t_n \rightarrow t_{adh}$ et $x(t_n) \rightarrow x^*$. Par unicité de la limite, $t^* = t_{adh}$.

On a donc $t^* \in I$. Cela contredit l'hypothèse $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$ (car I est ouvert).

De plus, $x(t_n) \rightarrow x^*$ implique $\|x(t_n)\| \rightarrow \|x^*\|$, qui est une valeur finie. Cela contredit l'hypothèse $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$.

Puisque les deux cas de l'hypothèse mènent à une contradiction, notre supposition (l'existence d'une valeur d'adhérence $y^* \in \Omega$) est fausse. Donc $\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$.

Sens 2 : (\Rightarrow)

Supposons que $\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$. Nous voulons montrer que $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$ OU $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$.

Supposons par l'absurde que la conclusion est fausse. La négation est : $t^* \notin \{\inf I, \sup I\}$ ET $\|x(t)\|$ ne tend pas vers $+\infty$.

$t^* \notin \{\inf I, \sup I\}$ signifie $t^* \in I$ (car I est ouvert).

$\|x(t)\|$ ne tend pas vers $+\infty$ (quand $t \rightarrow t^*$) signifie qu'il existe une suite (t_n) dans J telle que $t_n \rightarrow t^*$ et la suite $(\|x(t_n)\|)$ est bornée.

Puisque la suite $(x(t_n))$ est bornée dans \mathbb{R}^d , par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x(t_{k(n)}))$ qui converge vers un $x^* \in \mathbb{R}^d$.

La suite $(t_{k(n)})$ converge toujours vers $t^* \in I$.

Par conséquent, la sous-suite $\gamma(t_{k(n)}) = (t_{k(n)}, x(t_{k(n)}))$ converge vers $y^* = (t^*, x^*)$.

Puisque $t^* \in I$ et $x^* \in \mathbb{R}^d$, on a $y^* \in I \times \mathbb{R}^d = \Omega$.

Cela signifie que $\gamma(t)$ admet une valeur d'adhérence y^* dans Ω . Ceci contredit notre hypothèse de départ ($\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$). L'hypothèse par l'absurde est donc fausse, et la conclusion est vraie. \square

4.7 Caractérisation des solutions maximales

Théorème 6: Caractérisation des solutions maximales

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^{1+d} , $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 ou Lipschitzienne. Soit (J, x) une solution de $x'(t) = F(t, x(t))$.

Alors (J, x) est une solution maximale **si et seulement si** :

- $(t, x(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \sup J} Fr(\Omega)$
- ET**
- $(t, x(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \inf J} Fr(\Omega)$

Remarque

On a choisi F de classe \mathcal{C}^1 ou Lipschitzienne pour assurer l'existence et l'unicité (via Cauchy-Lipschitz).

On pourrait simplement supposer F continue et appliquer le théorème de Peano-Arzelà (pour l'existence).

Théorème 7: Critère d'explosion (Domaine "Tube")

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$. Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 ou Lipschitzienne. Soit (J, x) une solution maximale de $x'(t) = F(t, x(t))$.

Alors on a :

- $\sup J = \sup I$ OU $\lim_{t \rightarrow \sup J} \|x(t)\| = +\infty$.
- ET**
- $\inf J = \inf I$ OU $\lim_{t \rightarrow \inf J} \|x(t)\| = +\infty$.

(C'est le critère d'explosion en temps fini).

Remarque

Pour $x'(t) = x(t)$, on a $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc $I = \mathbb{R}$. Les solutions sont $x_\lambda(t) = \lambda e^t$. L'intervalle maximal est $J = \mathbb{R}$.

On a $\sup J = \sup I = +\infty$ et $\inf J = \inf I = -\infty$.

On vérifie : $\lim_{t \rightarrow \inf J} x_\lambda(t) = 0$ (pas d'explosion).

$\lim_{t \rightarrow \sup J} x_\lambda(t) = \pm\infty$ (explosion, si $\lambda \neq 0$).

Remarque

Pour $d = 1$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = +\infty \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$

Si x est solution du problème, $x'(t) = f(t, x(t))$

Alors x est continue et donc si $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$

Alors :

- $\lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = +\infty$.
- OU**
- $\lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = -\infty$.

(Par continuité de x)

Remarque

Pour $d \geq 2$. Soit $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \end{pmatrix} \forall t \in \mathbb{R}$.

On a $\|x(t)\|^2 = (e^t \cos(t))^2 + (-e^t \sin(t))^2 = e^{2t}(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = e^{2t}$.
 Donc $\|x(t)\| = e^t$.
 On a bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = +\infty$.
 Cependant, $x(t)$ (le vecteur) n'admet pas de limite en $+\infty$ (il spirale vers l'infini).

Théorème d'existence globale

Corollaire 5: Théorème d'existence globale

Soit $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$. Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 ou Lipschitzienne. Soit (J, x) une solution maximale du problème $x'(t) = F(t, x(t))$ avec $t_0 \in J$. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Supposons que :

1. $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in [t_0, \sup J[$
 Alors $\sup J = \sup I$.
2. $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in]\inf J, t_0]$
 Alors $\inf J = \inf I$.
3. $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in J$
 Alors $J = I$ et donc (J, x) est une solution globale.

Démonstration. 1°) Supposons par l'absurde que $\sup J < \sup I$.

Alors, par le critère d'explosion (Théorème 7), la solution maximale (J, x) vérifie :

$$\|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \sup J} +\infty$$

Or, $\forall t \in [t_0, \sup J[$, on a $\|x(t)\| \leq g(t)$.

g est continue sur le compact $[t_0, \sup J] \subset I$.

g est donc bornée sur ce compact. Il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, \sup J]$, $g(t) \leq M$.

On en déduit que $\forall t \in [t_0, \sup J]$, $\|x(t)\| \leq M$.

Ceci est absurde car $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \sup J$.

Donc, $\sup J = \sup I$.

2°) (La preuve pour $\inf J$ est identique).

3°) (Le point 3 est une conséquence directe de 1°) et 2°)). □

4.8 Caractérisation des solutions maximales (Suite)

Preuve du Théorème 6. Nous devons prouver une équivalence.

Sens 1 : (\Rightarrow)

Supposons que $(t, x(t)) \rightarrow Fr(\Omega)$ (lorsque $t \rightarrow \sup J$ et $t \rightarrow \inf J$). Supposons par l'absurde que (J, x) n'est pas une solution maximale.

Cela implique qu'il existe une solution (J', \tilde{x}) de (E) telle que $J \subsetneq J'$ et $\forall t \in J$, $\tilde{x}(t) = x(t)$.

Supposons par exemple que $\sup J < \sup J'$. Puisque \tilde{x} est solution sur J' , \tilde{x} est continue sur J' .

Donc $\tilde{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \sup J^-} \tilde{x}(\sup J)$ (une valeur finie, car $\sup J \in J'$).

Comme $\tilde{x}(t) = x(t)$ sur J , on a $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \sup J^-]{} \tilde{x}(\sup J)$.

Donc $\gamma(t) = (t, x(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \sup J^-]{} (\sup J, \tilde{x}(\sup J))$.

Le point $(\sup J, \tilde{x}(\sup J))$ est une valeur d'adhérence de $\gamma(t)$. Puisque (J', \tilde{x}) est une solution, on a $(\sup J, \tilde{x}(\sup J)) \in \Omega$.

Ceci est ABSURDE, car on a supposé que $\gamma(t) = (t, x(t))$ tendait vers la frontière de Ω (et ne devait donc avoir aucune valeur d'adhérence *dans* Ω).

Sens 2 : (\Leftarrow)

Supposons maintenant que (J, x) est une solution maximale de (E). Nous devons montrer que $(t, x(t)) \rightarrow Fr(\Omega)$ lorsque $t \rightarrow \sup J$ (la preuve est identique pour $\inf J$).

Supposons par l'absurde que $(t, x(t))$ ne tend pas vers $Fr(\Omega)$ lorsque $t \rightarrow \sup J$. Par définition (en prenant la négation), cela signifie qu'il existe (au moins) **une** valeur d'adhérence (β, x^*) *dans* Ω , où $\beta = \sup J$. (Note : si $\sup J = +\infty$, on ne peut pas avoir de valeur d'adhérence $(t, x(t)) \rightarrow (\beta, x^*) \in \Omega$ car β serait infini). Donc, on a nécessairement $\sup J = \beta < +\infty$.

Il existe une suite $(t_n) \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \rightarrow \sup J$ et $x(t_n) \rightarrow x^*$, avec $(\sup J, x^*) \in \Omega$.

D'après le théorème de Peano-Arzelà, le problème de Cauchy (C) suivant :

$$(C) \quad \begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(\sup J) = x^* \end{cases}$$

(qui a un sens car $(\sup J, x^*) \in \Omega$), a au moins une solution \tilde{x} définie sur un intervalle ouvert $I_\epsilon =]\sup J - \epsilon, \sup J + \epsilon[$ (avec $\epsilon > 0$ petit).

$$\text{Posons } X_1(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in J \\ \tilde{x}(t) & \text{si } t \in [\sup J, \sup J + \epsilon[\end{cases}$$

Vérifions que $X_1(t)$ est une solution de (E) sur $J_1 =]\inf J, \sup J + \epsilon[$.

Puisque X est dérivable sur J et \tilde{x} est dérivable sur $]\sup J, \sup J + \epsilon[$, il suffit de vérifier la continuité et la dérivabilité en $\sup J$.

Continuité en $\sup J$:

On a $\lim_{t \rightarrow \sup J^+} X_1(t) = \lim_{t \rightarrow \sup J^+} \tilde{x}(t) = \tilde{x}(\sup J) = x^*$ (car \tilde{x} est solution de (C)).

Le ****Lemme 1**** (prouvé ci-dessous) nous assure que $x(t) \rightarrow x^*$ lorsque $t \rightarrow \sup J^-$. Donc $\lim_{t \rightarrow \sup J^-} X_1(t) = \lim_{t \rightarrow \sup J^-} x(t) = x^*$.

Les limites à gauche et à droite coïncident, X_1 est continue en $\sup J$.

Dérivabilité en $\sup J$:

X_1 est continue sur J_1 et dérivable sur $J_1 \setminus \{\sup J\}$.

Pour $h > 0$ (dérivée à droite) :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{X_1(\sup J + h) - X_1(\sup J)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{x}(\sup J + h) - x^*}{h} \\ &= \tilde{x}'(\sup J) = F(\sup J, \tilde{x}(\sup J)) = F(\sup J, x^*) \end{aligned}$$

Pour $h < 0$ (dérivée à gauche) :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{X_1(\sup J + h) - X_1(\sup J)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(\sup J + h) - x^*}{h}$$

On considère $Y_1(t)$ le prolongement par continuité de x sur $J \cup \{\sup J\}$, avec $Y_1(\sup J) = x^*$. On applique le Théorème des Accroissements Finis à Y_1 sur $[\sup J + h, \sup J]$. Il existe $c_h \in]\sup J + h, \sup J[$ tel que :

$$\frac{Y_1(\sup J) - Y_1(\sup J + h)}{-h} = Y_1'(c_h) = x'(c_h)$$

$$\frac{x^* - x(\sup J + h)}{-h} = \frac{x(\sup J + h) - x^*}{h} = F(c_h, x(c_h))$$

Quand $h \rightarrow 0^-$, on a $c_h \rightarrow \sup J^-$. Par continuité de F et de x (prouvée par le Lemme 1), on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} F(c_h, x(c_h)) = F(\sup J, x^*)$$

Les dérivées à gauche et à droite sont égales à $F(\sup J, x^*)$. Donc X_1 est dérivable en $\sup J$ et $X_1'(\sup J) = F(\sup J, X_1(\sup J))$.

Conclusion : (J_1, X_1) (avec $J_1 =]\inf J, \sup J + \epsilon[$) est une solution de (E) avec $X_1(t) = x(t)$ sur J .

Puisque $J \subsetneq J_1$, cela contredit le fait que (J, x) est maximale. L'hypothèse de départ (le fait que $\gamma(t)$ admette une valeur d'adhérence dans Ω) est donc fausse. \square

Lemme 1: Lemme 1 (Convergence au bord)

Si F est \mathcal{C}^1 ou Lipschitzienne, $\sup J = \beta < +\infty$, et $(t, x(t))$ admet **une** valeur d'adhérence $(\beta, x^*) \in \Omega$ quand $t \rightarrow \sup J$, alors $\lim_{t \rightarrow \sup J} F(t, x(t)) = F(\beta, x^*)$.

Preuve du Lemme 1. On sait que $(\beta, x^*) \in \Omega$, qui est un ouvert. Il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\bar{B}((\beta, x^*), \epsilon) \subset \Omega$. Puisque F est continue sur l'ouvert Ω , F est bornée sur le compact $\bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$. $\exists M > 0$ t.q. $\forall (t, x) \in \bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$, $\|F(t, x)\| < M$.

Par définition de la valeur d'adhérence (β, x^*) , $\exists (t_n)$ t.q. $t_n \rightarrow \beta$ et $x(t_n) \rightarrow x^*$. Choisissons N assez grand tel que les conditions (H) soient vérifiées :

$$(H) \quad \begin{cases} t_N > \beta - \frac{\epsilon}{2M} \\ \|x(t_N) - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ |t_N - \beta| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

On applique le Lemme 2 (prouvé ci-dessous). D'après le Lemme 2, on a $\forall t \in [t_N, \beta[, \|x(t) - x^*\| < \epsilon$.

Ceci est vrai $\forall \epsilon > 0$ (en choisissant N suffisamment grand pour chaque ϵ). L'intervalle $[t_N, \beta[$ est un voisinage à gauche de β . On a donc montré que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ (ici $\delta = \beta - t_N$) tel que $t \in]\beta - \delta, \beta[\implies \|x(t) - x^*\| < \epsilon$.

C'est la définition de $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t) = x^*$.

Puisque $\lim_{t \rightarrow \beta^-} t = \beta$, on a bien $\lim_{t \rightarrow \sup J} F(t, x(t)) = F(\beta, x^*)$. \square

Lemme 2: Lemme 2

(Avec les conditions (H) de la preuve ci-dessus), on a :

$$\forall t \in [t_N, \beta[, \|x(t) - x^*\| < \epsilon$$

Preuve du Lemme 2. Observation : Avec les conditions (H), on a $(t_N, x(t_N)) \in B((\beta, x^*), \epsilon)$ car :

$$\|(t_N, x(t_N)) - (\beta, x^*)\| = \max(|t_N - \beta|, \|x(t_N) - x^*\|) < \epsilon \quad (\text{d'après H.})$$

Supposons par l'absurde que la proposition n'est pas vraie.

$$\exists t \in [t_N, \beta[\text{ tel que } \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon.$$

Posons $T_\epsilon = \inf\{t \in [t_N, \beta[\mid \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon\}$.

T_ϵ existe car l'ensemble est non vide et minoré par t_N . Par continuité de x , on a $\|x(T_\epsilon) - x^*\| = \epsilon$. (Et $T_\epsilon > t_N$ car $\|x(t_N) - x^*\| \leq \epsilon/2 < \epsilon$).

Par définition de T_ϵ , $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$, on a $\|x(s) - x^*\| \leq \epsilon$. On a aussi $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$, $|s - \beta| \leq |t_N - \beta| < \epsilon$ (car $s < \beta$).

Donc $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$, $(s, x(s)) \in \bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$.

Sur ce compact, la fonction F est bornée : $\|F(s, x(s))\| < M$.

On intègre l'EDO : $x(T_\epsilon) - x(t_N) = \int_{t_N}^{T_\epsilon} F(s, x(s)) ds$.

$$\|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| \leq \int_{t_N}^{T_\epsilon} \|F(s, x(s))\| ds \leq \int_{t_N}^{T_\epsilon} M ds = M(T_\epsilon - t_N)$$

On sait $t_N < T_\epsilon < \beta$, donc $T_\epsilon - t_N < \beta - t_N < \frac{\epsilon}{2M}$ (par (H)).

En substituant, l'inégalité devient **stricte** :

$$\|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| < M \cdot \left(\frac{\epsilon}{2M}\right) = \frac{\epsilon}{2}$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|x(T_\epsilon) - x^*\| &\leq \|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| + \|x(t_N) - x^*\| \\ \|x(T_\epsilon) - x^*\| &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

(Note : L'inégalité devient stricte car le premier terme est $< \frac{\epsilon}{2}$ et le second est $\leq \frac{\epsilon}{2}$)

Ceci est une **CONTRADICTION**, car T_ϵ est défini tel que $\|x(T_\epsilon) - x^*\| = \epsilon$. □

4.9 Cauchy-Lipschitz (Cadre général)

Définition 13: Localement Lipschitzienne

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+d}$ un ouvert et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. On dit que F est **localement Lipschitzienne** (par rapport à x) si :

$\forall (t_0, x_0) \in \Omega$, $\exists V$ un voisinage de (t_0, x_0) dans Ω tel que F est Lipschitzienne sur $V \cap \Omega$.

Proposition 11: Caractérisation (Localement Lipschitzienne)

$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est localement Lipschitzienne

\iff

$\forall K$ compact de Ω , F est Lipschitzienne sur K .

$(\forall K \text{ compact} \subset \Omega, \exists L_K > 0 \text{ t.q. } \forall (t, x), (t, y) \in K, \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L_K \|x - y\|)$

Démonstration. Soit C un compact de Ω . $\forall x \in C \subset \Omega$, $\exists r_x > 0$ (rayon) t.q. F est Lipschitzienne sur $B(x, r_x)$. La famille $(B(x, r_x))_{x \in C}$ est un recouvrement ouvert de C .

Par la propriété de Borel-Lebesgue (Heine-Borel), C est compact, donc on peut extraire un sous-recouvrement fini : $C \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i)$.

(Preuve par l'absurde de l'existence d'un nombre de Lebesgue ρ) : Supposons que (la propriété) n'est pas vraie. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n = \frac{1}{n}$, $\exists y_n \in C$ t.q. $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $B(y_n, \frac{1}{n}) \not\subset B(x_i, r_i)$.

(y_n) est une suite de C compact. Il existe une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ t.q. $y_{\phi(n)} \rightarrow y^* \in C$.

Puisque $y^* \in C$, $\exists i \in \{1, \dots, N\}$ t.q. $y^* \in B(x_i, r_i)$. Puisque $B(x_i, r_i)$ est ouvert, pour n assez grand, $B(y_{\phi(n)}, \frac{1}{\phi(n)}) \subset B(x_i, r_i)$. Ceci contredit la construction de la suite (y_n) .

(Soit ρ ce nombre de Lebesgue.)

Soient $x, y \in C$.

Cas 1 : $\|x - y\| < \rho$. Alors $\exists i$ t.q. $\{x, y\} \subset B(x_i, r_i)$. F est Lipschitzienne sur ce voisinage avec la constante C_i .

$$\|F(x) - F(y)\| \leq C_i \|x - y\| \leq \left(\max_{i=1..N} C_i \right) \|x - y\|$$

Cas 2 : $\|x - y\| \geq \rho$.

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|F(x)\| + \|F(y)\| \leq 2 \sup_{z \in C} \|F(z)\|$$

(Soit $M = \sup_{z \in C} \|F(z)\|$, qui existe car F est continue sur le compact C).

Puisque $\|x - y\| \geq \rho \implies 1 \leq \frac{\|x - y\|}{\rho}$, on a :

$$\|F(x) - F(y)\| \leq 2M = 2M \cdot 1 \leq 2M \frac{\|x - y\|}{\rho} = \left(\frac{2M}{\rho} \right) \|x - y\|$$

i.e. $\forall x, y \in C$:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \max \left(\max_{i=1..N} C_i, \frac{2 \sup_{z \in C} \|F(z)\|}{\rho} \right) \|x - y\|$$

Ce qui prouve que F est Lipschitzienne sur C . □

4.10 Preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz (Existence locale)

Remarque

Si F est localement Lipschitzienne $\implies F$ est continue.

Si F est \mathcal{C}^1 ou Lipschitzienne $\implies F$ est localement Lipschitzienne. (L'inverse n'est pas forcément vrai).

Exemple 7: Fonction non Lipschitzienne

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Regardons le taux d'accroissement en 0 : $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h \ln h}{h} = \ln h \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} -\infty$.

f n'est pas dérivable en 0.

De plus, pour $m \in \mathbb{N}$, prenons $x_m = e^{-m}$ et $y_m = 0$. $\frac{|f(x_m)-f(0)|}{|x_m-0|} = |\ln(e^{-m})| = |-m| = m \rightarrow +\infty$.

Le rapport n'est pas borné, donc f n'est pas Lipschitzienne au voisinage de 0. Cependant, f est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car elle est \mathcal{C}^1 sur cet ouvert).

Remarque

Hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz : $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ (où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^{d+1}). $(t, x) \mapsto F(t, x)$.

1. F est continue sur Ω .
2. F est localement Lipschitzienne en la seconde variable x .

C'est-à-dire : $\exists V$ voisinage de (t_0, x_0) dans Ω , $\exists k > 0$ tels que :

$$\forall (t, X), (t, Y) \in V, \quad \|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq k \|X - Y\|$$

Remarque

F localement Lipschitzienne en x est équivalent à : Pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists k_K > 0$ tel que $\forall (t, X), (t, Y) \in K$, on a :

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq k_K \|X - Y\|$$

Théorème 8: Cauchy-Lipschitz (Cadre Général)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Supposons que :

- F est continue sur Ω .
- F est localement Lipschitzienne par rapport à x .

Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy :

$$(E) \quad \begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une **unique solution maximale** (J, x) .

Preuve du Théorème (via un Lemme d'existence locale)

Lemme 3: Existence et Unicité Locale

Sous les conditions du Théorème, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un $a > 0$ suffisamment petit tel que le problème (E) a une **unique solution** sur l'intervalle $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Remarque

$[t_0 - a, t_0 + a]$ n'est pas un intervalle ouvert. On définit la dérivée aux bornes par la limite à droite ou à gauche :

$$x'(t_0 - a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t_0 - a + h) - x(t_0 - a)}{h}$$

$$x'(t_0 + a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(t_0 + a + h) - x(t_0 + a)}{h}$$

Et pour $t \in]t_0 - a, t_0 + a[$, $x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$.

Preuve du Lemme. Sans restriction, on va supposer que $t_0 = 0$. Nous allons démontrer l'existence et l'unicité en utilisant les deux lemmes suivants. \square

Lemme 4: Équivalence Différentielle / Intégrale

Soit X une fonction continue sur $[-a, a]$. X est solution de (E) sur $[-a, a]$ (c'est-à-dire \mathcal{C}^1 et vérifie l'équation)

\iff

X satisfait l'équation intégrale suivante pour tout $t \in [-a, a]$:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds$$

Preuve du Lemme 4. (\Rightarrow) Si X est une solution de (E) sur $[-a, a]$. On a $\forall s \in [-a, a]$, $X'(s) = F(s, X(s))$. En intégrant cette équation sur $[0, t]$:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t X'(s) ds = x_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds$$

De plus X est continue sur $[-a, a]$ car dérivable.

(\Leftarrow) Réciproque. Supposons que X est continue et vérifie l'équation intégrale. $s \mapsto F(s, X(s))$ est continue sur $[-a, a]$ par composition de fonctions continues (car F est continue et X est continue). $\implies g : t \mapsto \int_0^t F(s, X(s)) ds$ est dérivable sur $[-a, a]$.

Démontrons cela : Pour tout $t \in [0, a]$, formons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} F(s, X(s)) ds - \int_0^t F(s, X(s)) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} F(s, X(s)) ds \end{aligned}$$

(avec h suffisamment petit pour que $t+h \in [-a, a]$).

On effectue le changement de variable $s = t + \theta h$ (donc $ds = h d\theta$).

$$= \frac{1}{h} \int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h)) \cdot h d\theta = \int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h)) d\theta$$

Par continuité de F et X , on a :

$$F(t + \theta h, X(t + \theta h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} F(t, X(t))$$

De plus, la fonction $s \mapsto F(s, X(s))$ est continue sur le compact $[-a, a]$, donc elle est bornée. $\exists M > 0$ tel que $\|F(s, X(s))\| \leq M$. Donc $\|F(t + \theta h, X(t + \theta h))\| \leq M$.

On peut appliquer le **Théorème de Convergence Dominée** (avec la fonction constante M intégrable sur $[0, 1]$ car $\int_0^1 M d\theta = M < +\infty$).

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h)) d\theta &= \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} F(t + \theta h, X(t + \theta h)) d\theta \\ &= \int_0^1 F(t, X(t)) d\theta = F(t, X(t)) \end{aligned}$$

Donc g est dérivable et $g'(t) = F(t, X(t))$. Ainsi, $X(t) = x_0 + g(t)$ est dérivable et $X'(t) = F(t, X(t))$. Enfin, $X(0) = x_0 + 0 = x_0$. Donc X est solution. \square

Lemme 5: Existence et Unicité dans E_a

Il existe $a > 0$ suffisamment petit tel que l'équation intégrale :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds$$

admet une **unique solution** dans l'espace E_a .

Preuve du Lemme 5. On veut prouver que le problème admet une unique solution. Soit $r > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}((0, x_0), r) \subset \Omega$ (possible car Ω est ouvert).

Sur ce compact $\overline{B}((0, x_0), r)$:

1. F est continue, donc F est bornée sur ce compact. $\exists M_r > 0$ tel que $\forall (t, X) \in \overline{B}((0, x_0), r), \|F(t, X)\| \leq M_r$.
2. F est localement Lipschitzienne en x , donc F est Lipschitzienne sur ce compact. $\exists k_r > 0$ tel que $\forall (t, X), (t, Y) \in \overline{B}((0, x_0), r), \|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq k_r \|X - Y\|$.

Nous allons travailler dans l'espace fonctionnel E_a défini par :

$$E_a = \{X \in \mathcal{C}^0([-a, a], \mathbb{R}^d) \mid X(0) = x_0 \text{ et } \|X - x_0\|_\infty \leq r\}$$

avec $a \leq r$.

Justification de la condition (Condition 1) $a \leq r$: On impose la condition $a \leq r$. En effet, pour que $F(t, X(t))$ soit défini, il faut que $(t, X(t)) \in \Omega$. On veut donc s'assurer que $\forall t \in [-a, a], (t, X(t)) \in \overline{B}((0, x_0), r) \subset \Omega$. En munissant $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ de la norme infinie $\|(t, x)\|_\infty = \max(|t|, \|x\|)$, la condition d'appartenance à la boule s'écrit :

$$\|(t, X(t)) - (0, x_0)\|_\infty \leq r \iff \max(|t - 0|, \|X(t) - x_0\|) \leq r$$

Ceci équivaut à :

$$|t| \leq r \quad \text{et} \quad \|X(t) - x_0\| \leq r$$

Pour que la première partie ($|t| \leq r$) soit vraie pour tout $t \in [-a, a]$, il faut et il suffit que $a \leq r$. La seconde partie est assurée par la définition même de l'espace E_a .

Preuve que E_a est complet : $\mathcal{C}^0([-a, a])$ muni de la norme infini est un espace de Banach. Montrons que E_a est un fermé de cet espace. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E_a telle que $X_n \rightarrow X$ uniformément sur $[-a, a]$.

1. Pour tout n , $X_n(0) = x_0$. Par convergence simple en 0, $X(0) = \lim X_n(0) = x_0$.

2. Pour tout n , $\|X_n - x_0\|_\infty \leq r$. Par passage à la limite dans l'inégalité large, $\|X - x_0\|_\infty \leq r$.

Donc $X \in E_a$. E_a est un fermé d'un espace complet, donc E_a est complet.

Définissons l'application $\Phi : E_a \rightarrow E_a$.

$$\Phi(X) : t \mapsto x_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds$$

Vérifions que Φ est bien définie : Pour $X \in E_a$, $s \mapsto X(s)$ est continue. F est continue. Donc $s \mapsto F(s, X(s))$ est continue. Donc $\Phi(X)$ est de classe \mathcal{C}^1 (primitive d'une continue), donc $\Phi(X) \in \mathcal{C}^0([-a, a])$.

Condition 2 : Stabilité (Φ envoie E_a dans E_a) Soit $X \in E_a$. On a $\|\Phi(X)(0) - x_0\| = 0$. Il faut montrer que $\|\Phi(X)(t) - x_0\| \leq r$ pour tout $t \in [-a, a]$.

$$\|\Phi(X)(t) - x_0\| = \left\| \int_0^t F(s, X(s)) ds \right\| \leq \left| \int_0^t \|F(s, X(s))\| ds \right|$$

Comme $X \in E_a$, pour tout $s \in [-a, a]$, $(s, X(s)) \in \overline{B}((0, x_0), r)$. Donc $\|F(s, X(s))\| \leq M_r$.

$$\|\Phi(X)(t) - x_0\| \leq M_r |t| \leq M_r a$$

Pour que $\Phi(X) \in E_a$, il suffit d'imposer :

$$M_r a \leq r$$

Condition 3 : Contraction Soient $Y_1, Y_2 \in E_a$.

$$\begin{aligned} \|\Phi(Y_1)(t) - \Phi(Y_2)(t)\| &= \left\| \int_0^t (F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_0^t \|F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))\| ds \right| \end{aligned}$$

Comme $Y_1, Y_2 \in E_a$, les points sont dans le compact où F est Lipschitzienne de constante k_r .

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_0^t k_r \|Y_1(s) - Y_2(s)\| ds \right| \\ &\leq k_r |t| \sup_{s \in [-a, a]} \|Y_1(s) - Y_2(s)\| \\ &\leq k_r a \|Y_1 - Y_2\|_\infty \end{aligned}$$

En passant au sup sur t :

$$\|\Phi(Y_1) - \Phi(Y_2)\|_\infty \leq (k_r a) \|Y_1 - Y_2\|_\infty$$

Pour que Φ soit une contraction stricte, il faut imposer :

$$k_r a < 1$$

Conclusion : Si a satisfait les conditions :

$$\begin{cases} a \leq r \\ M_r a \leq r \\ k_r a < 1 \end{cases}$$

Alors Φ est une contraction de l'espace complet E_a dans lui-même. D'après le Théorème du Point Fixe de Banach, Φ admet un unique point fixe $z \in E_a$. Donc l'équation intégrale admet une unique solution dans E_a . \square

Suite de la preuve du Lemme principal (Unicité globale). Le Lemme 5 nous donne une unique solution X_1 appartenant à E_a . Supposons par l'absurde qu'il existe une autre solution X_2 définie sur $[-a, a]$ (qui ne serait pas dans E_a).

Puisque X_2 est solution, X_2 est continue (car dérivable) sur $[-a, a]$. On suppose sans restriction que $T \geq 0$. Soit $T_1 = \inf\{t \in [0, a] : \|X_2(t) - x_0\| > r\}$. Cet ensemble est non vide (sinon $X_2 \in E_a$). Comme $X_2(0) = x_0$, par continuité, l'ensemble est minoré par 0, donc T_1 existe.

On a $\|X_2(T_1) - x_0\| = r$ (par continuité). Et pour tout $t < T_1$, $\|X_2(t) - x_0\| \leq r$.

Sur l'intervalle $[0, T_1]$, X_2 vérifie l'équation intégrale :

$$X_2(T_1) - x_0 = \int_0^{T_1} F(s, X_2(s)) ds$$

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \leq \int_0^{T_1} \|F(s, X_2(s))\| ds$$

Comme pour $s \in [0, T_1]$, $(s, X_2(s))$ est dans la boule $B((0, x_0), r)$ (car la norme est $\leq r$), on peut majorer par M_r .

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \leq \int_0^{T_1} M_r ds = M_r T_1$$

Or $T_1 \leq a$. Et on a choisi a tel que $M_r a < r$ (on peut choisir l'inégalité stricte dans la condition 1, $M_r a \leq r/2$ par exemple).

Si on prend $M_r a < r$, alors :

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \leq M_r a < r$$

Ceci contredit le fait que $\|X_2(T_1) - x_0\| = r$.

L'hypothèse d'existence d'un point de sortie est donc fausse. X_2 reste dans E_a sur tout l'intervalle. Par unicité dans E_a , $X_2 = X_1$. \square