

# Polycopié de Calcul Différentiel et Équations Différentielles

## L3 MIDO

Cours de Borris Haspot  
Retranscrit par Bastien Marbaud et Victor Barbera  
Compilé par Samuel Lelouch avec Gemini

27 novembre 2025

## **Table des matières**

<b>1 Calcul Différentiel . . . . .</b>	<b>3</b>
I. Théorème d'inversion locale . . . . .	3
II. Théorème de Hadamard . . . . .	7
III. Un peu de géométrie différentielle . . . . .	9
<b>2 Équations Différentielles . . . . .</b>	<b>12</b>
I. Équations Différentielles . . . . .	12
II. Équations autonomes . . . . .	32
III. Équilibres et Stabilité des Équations Autonomes . . . . .	34
IV. Solutions explicites en dimension 1 . . . . .	39
V. Principe de Comparaison. . . . .	47
VI. Sous-solutions et Sur-solutions . . . . .	47

# Calcul Différentiel

## I. Théorème d'inversion locale

### Définition 1: C<sup>1</sup>-difféomorphisme

Soient  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $V$  un ouvert de  $F$ . On dit que  $f : U \rightarrow V$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme lorsque :

- $f$  bijective
- $f \in \mathcal{C}^1$  et  $f^{-1} \in \mathcal{C}^1$

#### Remarque

La notion de difféomorphisme induit l'utilisation d'ouverts (naturel si on veut vérifier que l'application est différentiable).

Si  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V$  :

$$\forall x \in U, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in V, f(f^{-1}(y)) = y$$

Par dérivation en chaîne :

$$df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = id_E \quad \text{et} \quad df(f^{-1}(y)) \circ df^{-1}(y) = id_F$$

$df(x)$  et  $df^{-1}(y)$  sont donc des applications linéaires inversibles, avec  $df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $df^{-1}(y) \in \mathcal{L}(F, E)$ .

$$(df(x))^{-1} = df^{-1}(y) = df^{-1}(f(x)) \\ \implies \dim E = \dim F.$$

### Théorème 1: Théorème d'inversion locale

Soient  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Supposons qu'il existe  $x_0 \in U$  tel que  $df(x_0)$  est inversible.

Alors il existe un ouvert  $U'$  de  $x_0$  ( $U' \subset U$ ) et  $V'$  un ouvert de  $y_0 = f(x_0)$  tels que  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U'$  sur  $V'$ .

De plus,  $\forall y \in V', df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1}$ .

#### Preuve :

On pose  $\Phi : U \times F \rightarrow F$

$$(x, y) \mapsto y - f(x)$$

$\Phi$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  car  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Calculons la différentielle partielle de  $\Phi$  par rapport à  $x$  au point  $(x_0, y_0)$  :

$$d\Phi_x(x_0, y_0) : E \rightarrow F$$

$$v \mapsto d\Phi_x(x_0, y_0)(v) = -df(x_0)(v)$$

On a  $d\Phi_x(x_0, y_0) = -df(x_0)$ .

C'est bien une application inversible (par hypothèse sur  $df(x_0)$ ). On peut donc appliquer le Théorème des Fonctions Implicites.

Vérifions le point de base :  $\Phi(x_0, y_0) = y_0 - f(x_0) = 0$  (car  $f(x_0) = y_0$ ).

Ainsi, il existe :

- $U_1$  un ouvert de  $x_0$  dans  $E$  (que nous nommerons  $U'$ )
- $V_1$  un ouvert de  $y_0$  dans  $F$  (que nous nommerons  $V'$ )
- $\varphi : V' \rightarrow U'$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$

telle que :

$$\forall y \in V', \exists! x \in U' \text{ t.q. } \Phi(x, y) = 0, \text{ et cet } x \text{ est } x = \varphi(y)$$

Or,  $\Phi(x, y) = 0 \iff f(x) = y$ .

On a donc  $f(x) = y \iff x = \varphi(y)$ . Ceci signifie que  $f$  est bijective de  $U'$  sur  $V'$ , et que son application inverse  $f^{-1}$  est  $\varphi$ .

On a  $f^{-1} = \varphi$ , et on sait que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Donc  $f : U' \rightarrow V'$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U'$  sur  $V'$ . □

## Définition 2: Difféomorphisme local

Une application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  (avec  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) de classe  $\mathcal{C}^1$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local si :

$\forall x \in \Omega$ , il existe  $U_x$  un voisinage ouvert de  $x$  et  $V_x$  un voisinage ouvert de  $f(x)$  tq  $f : U_x \rightarrow V_x$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

## Proposition 1: Caractérisation Difféomorphisme local

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local si et seulement si  $\forall x \in \Omega$ ,  $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  est inversible.

**Preuve :**

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diff. local.  $\forall x \in \Omega$ ,  $\exists U_x, V_x$  ouverts tq  $f : U_x \rightarrow V_x$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diff. Donc  $f^{-1}(f(x)) = x$  et  $df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = id_{\mathbb{R}^n}$ . Donc  $df(x)$  est inversible.

( $\Leftarrow$ )  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $df(x)$  est inversible. D'après le Th. d'Inversion Locale,  $\forall x, \exists U_x$  (voisinage de  $x$ ) et  $V_x$  (voisinage de  $f(x)$ ) tq  $f : U_x \rightarrow V_x$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diff. C'est la définition d'un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local. □

## Corollaire 1: Application ouverte

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local. L'application  $f$  est ouverte :

Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (avec  $U \subset \Omega$ ), alors  $f(U)$  est un ouvert.

**Preuve :**

Soit  $y \in f(U)$ . Il existe  $x \in U$  tq  $y = f(x)$ . Comme  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diff. local,  $df(x)$  est inversible. Donc il existe par le Th. d'Inversion Locale un voisinage de  $x$ ,  $U_x$ , et un voisinage de  $f(x)$ ,  $V_x$ , tq  $f : U_x \rightarrow V_x$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diff.

On choisit  $U_x$  assez petit pour que  $U_x \subset U$ . On en déduit que  $f(U_x) = V_x$ . On a  $y = f(x) \in V_x$  (qui est ouvert) et  $V_x = f(U_x) \subset f(U)$ .

On a trouvé un voisinage ouvert de  $y$  (c'est  $V_x$ ) inclus dans  $f(U)$ . On en déduit que  $f(U)$  est ouvert.

□

### Remarque

Un  $\mathcal{C}^1$ -diff. local n'est pas toujours injectif (globalement).

Exemple :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow f(\mathbb{R}^2)$

$$(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

$f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , mais pas injective :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ .

Calculons la Jacobienne  $Jf(x, y)$  :

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(Jf(x, y)) &= (e^x \cos y)(e^x \cos y) - (-e^x \sin y)(e^x \sin y) \\ &= e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} > 0 \end{aligned}$$

Donc  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, df(x, y)$  est inversible, et  $f$  est un  $\mathcal{C}^\infty$ -diff. local.

### Proposition 2: Difféo local + injectif

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un  $\mathcal{C}^1$ -diff. local ( $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ). Si  $f$  est injective, alors  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diff. de  $\Omega$  sur  $f(\Omega)$ .

#### Preuve :

$f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$  avec  $f$  injective, donc  $f$  est bijective (par définition de  $f(\Omega)$ ).

De plus,  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diff. local, donc  $f$  est ouverte (d'après Cor. 1). Donc  $f(\Omega)$  est un ouvert.  $f$  va bien d'un ouvert vers un autre ouvert.

- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diff. local donc  $\forall x \in \Omega, \exists U_x$  (voisinage ouvert de  $x$ ) et  $V_x$  (voisinage ouvert de  $f(x)$ ) tq  $f : U_x \rightarrow V_x$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

En notant  $\tilde{f}_x : V_x \rightarrow U_x$  l'inverse de ce difféomorphisme, on a  $\tilde{f}_x = f^{-1}|_{V_x}$ . Cela signifie que  $f^{-1}$  est localement  $\mathcal{C}^1$ , donc  $f^{-1}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $f(\Omega)$ .  $\square$

### Corollaire 2: Cas 1D

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $I$  sur  $f(I)$ .

### Définition 3: Difféomorphisme Global

Soient  $\Omega$  et  $\Lambda$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

On dit que  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  est un  **$\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme global** si  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\Omega$  sur  $\Lambda$ .

(C'est-à-dire,  $f$  est bijective, de classe  $\mathcal{C}^1$ , et son inverse  $f^{-1} : \Lambda \rightarrow \Omega$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ ).

### Théorème 2: Théorème d'Inversion Globale

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si  $f$  est injective et  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local (i.e.  $\det(Jf(x)) \neq 0$  pour tout

$x \in \Omega$ ),

Alors  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme global de  $\Omega$  sur l'ouvert  $f(\Omega)$ .

## II. Théorème de Hadamard

### Définition 4: Application propre

Soient  $X, Y$  des espaces métriques (de dim. finie). On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est une application **propre** si  $f$  est continue et si  $\forall K \subset Y$  compact,  $f^{-1}(K)$  est un compact.

#### Remarque

$f$  continue  $\not\Rightarrow f$  propre.

En effet, soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée (ex : arctan). Pour  $M$  assez grand,  $K = [-M, M]$  est compact.  $f^{-1}(K) = f^{-1}([-M, M]) = \mathbb{R}$ , qui n'est pas compact.

### Proposition 3: Caractérisation application propre ( $\mathbb{R}^n$ )

Une application continue  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est propre

$\iff$

$\|f(x)\| \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ .

#### Preuve :

( $\Leftarrow$ ) Supposons  $\|f(x)\| \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ . Ceci est équivalent à dire :  $\forall M > 0, \exists N_M > 0$  tq  $\forall \|x\| \geq N_M, \|f(x)\| \geq M$ . Ou, par contraposée : si  $f^{-1}(E)$  est borné dans  $\mathbb{R}^n$ , alors  $E$  est borné dans  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ .  $K$  est fermé et borné.  $f^{-1}(K)$  est fermé (car  $f$  est continue et  $K$  est fermé).  $K$  est borné, donc  $f^{-1}(K)$  est borné (par l'hypothèse).

$f^{-1}(K)$  est fermé et borné dans  $\mathbb{R}^n$ , donc  $f^{-1}(K)$  est compact.  $f$  est donc propre.

( $\Rightarrow$ ) Si  $f$  est propre. Supposons par l'absurde que  $\|f(x)\|$  ne tend pas vers  $+\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ . La négation est :  $\exists M > 0$  tq  $\forall N > 0, \exists x_N$  tq  $\|x_N\| \geq N$  et  $\|f(x_N)\| \leq M$ .

On peut alors construire une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tq  $\|x_n\| \rightarrow +\infty$  (donc  $(x_n)$  n'est pas bornée) et  $f(x_n) \leq M$ .

Soit  $E = \{f(x_n), n \in \mathbb{N}\}$ .  $E$  est borné. Soit  $K = \bar{E}$  (la fermeture de  $E$ ).  $K$  est fermé et borné, donc  $K$  est compact.

Par hypothèse,  $f$  est propre, donc  $f^{-1}(K)$  est compact.

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \in K$ , donc  $x_n \in f^{-1}(K)$ . La suite  $(x_n)$  est une suite d'un compact, elle doit donc être bornée.

Ceci est une CONTRADICTION avec  $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ . □

### Proposition 4: Propre implique fermée

Une application propre  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces métriques est **fermée** (i.e. si  $F$  est un fermé de  $X$ ,  $f(F)$  est un fermé de  $Y$ ).

#### Preuve :

Soit  $F$  un fermé de  $X$ . Soit  $(y_n)$  une suite de  $f(F)$  tq  $y_n \rightarrow y$  avec  $y \in Y$ . Il faut mq  $y \in f(F)$ .  $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in f(F)$ , donc  $\exists x_n \in F$  tq  $y_n = f(x_n)$ .

Soit  $K = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{y\}$ .  $K$  est un compact de  $Y$  (car la suite converge). Comme  $f$  est propre,  $f^{-1}(K)$  est un compact de  $X$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in K \implies x_n \in f^{-1}(K)$ .

$(x_n)$  est une suite dans un compact  $f^{-1}(K)$ . On peut donc en extraire une sous-suite  $(x_{\phi(n)})$  tq  $x_{\phi(n)} \rightarrow x^*$  avec  $x^* \in f^{-1}(K)$  (car  $f^{-1}(K)$  est compact, donc fermé).

$\forall n \in \mathbb{N}, x_{\phi(n)} \in F$ . Puisque  $F$  est fermé, la limite  $x^*$  est dans  $F$ . Donc  $x^* \in F$ .

Comme  $f$  est continue,  $f(x_{\phi(n)}) \rightarrow f(x^*)$ . Or,  $f(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)}$  et  $(y_n)$  converge vers  $y$ , donc  $(y_{\phi(n)})$  converge aussi vers  $y$ .

Par unicité de la limite,  $f(x^*) = y$ .

Puisque  $x^* \in F$ , on a  $y = f(x^*) \in f(F)$ . Donc  $f(F)$  est fermé. □

### Théorème 3: Théorème de Hadamard

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local. Si  $f$  est propre, alors  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

(Cela implique que  $f$  est bijective, donc  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ ).

### Proposition 5: Hadamard (avec injectivité)

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local. Si  $f$  est injective et propre, alors  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

#### Preuve :

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow f(\mathbb{R}^n)$  est injective et un  $\mathcal{C}^1$ -diff. local, donc (par Prop. 2)  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dans  $f(\mathbb{R}^n)$ .

Il suffit donc de vérifier que  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ .

- $f(\mathbb{R}^n)$  est non-vide.
- $\mathbb{R}^n$  est un ouvert.  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diff. local, donc  $f$  est ouverte. Donc  $f(\mathbb{R}^n)$  est un ouvert.
- $\mathbb{R}^n$  est un fermé.  $f$  est propre, donc  $f$  est fermée (par Prop. 4). Donc  $f(\mathbb{R}^n)$  est un fermé.

$f(\mathbb{R}^n)$  est un sous-ensemble non-vide, ouvert et fermé de  $\mathbb{R}^n$ . Puisque  $\mathbb{R}^n$  est connexe,  $\implies f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ . □

### III. Un peu de géométrie différentielle

#### Définition 5: Hypersurface régulière

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $\mathcal{C}^1$ . On dit que  $\Sigma = f^{-1}(\{0\})$  est une **hypersurface régulière** de classe  $\mathcal{C}^1$  si :

1.  $\Sigma$  est non-vide.
2.  $\forall a \in \Sigma, df(a) \neq 0$  (i.e.  $f'(a) \neq 0$ ).

$f(x) = 0$  est alors une équation cartésienne de l'hypersurface  $\Sigma$ .

Si  $a \in \Sigma$ , l'hyperplan affine de vecteur normal  $\nabla f(a)$  et passant par  $a$  est appelé **hyperplan tangent à  $\Sigma$  en  $a$** .

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x - a, \nabla f(a) \rangle = 0\}$$

$$(\text{où } \nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)^T \in \mathbb{R}^n)$$

#### Proposition 6: Hyperplan est hypersurface

Tout hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  est une hypersurface.

#### Preuve :

Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ .  $H$  est un s.e.v. de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - 1$ .

Soit  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  une base de  $H$ .  $\exists b \in \mathbb{R}^n$  tq  $(a_1, \dots, a_{n-1}, b)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .

On pose  $l$  l'application linéaire (la forme linéaire) tq  $l(a_i) = 0$  (pour  $i = 1..n - 1$ ) et  $l(b) = 1$ .

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i + \lambda_n b$ .  $l(x) = \lambda_n l(b) = \lambda_n$ .

On a construit la forme linéaire  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tq  $Ker(l) = H$ .

De plus,  $l$  est une application linéaire en dimension finie, elle est donc continue et  $\mathcal{C}^\infty$ .  $l$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

$\forall x \in \mathbb{R}^n, dl(x) = l. H = l^{-1}(\{0\}) = Ker(l)$ .  $\forall x \in H, dl(x) = l \neq 0$  (car  $l$  est non nulle,  $l(b) = 1$ ).

Donc  $H$  est une hypersurface. □

#### Définitions (Courbes et Surfaces)

Si  $n = 2$ , on dit que  $\Sigma$  est une **courbe régulière** de  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $n = 3$ , on dit que  $\Sigma$  est une **surface régulière** de  $\mathbb{R}^3$ .

#### Proposition 7: Paramétrage local (Chartes)

Soit  $\Sigma$  une hypersurface régulière de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , soit  $a \in \Sigma$ .

Alors il existe  $V$  un voisinage de  $a$  ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  et  $U$  un voisinage de  $0$  ouvert dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  et une application  $\varphi : U \rightarrow \Sigma \cap V$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , bijective, tq  $\varphi(0) = a$  et vérifiant  $rg(d\varphi(h')) = n - 1 \quad \forall h' \in U$ .

#### Remarque

Soit  $h \in \mathbb{R}^n, h = (h', h_n)$  avec  $h' \in \mathbb{R}^{n-1}$  et  $h_n \in \mathbb{R}$ .  $\varphi : U \rightarrow \Sigma \cap V$  est bijective.  $\Sigma \cap V$  est alors, d'une certaine manière, un objet de dimension  $n - 1$  car  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

#### Preuve :

Soit  $\Sigma$  une hypersurface régulière de classe  $C^1$ .  $\exists f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) de classe  $C^1$  tq  $\Sigma = f^{-1}(\{0\})$ .

On pose  $g : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $\tilde{\Omega} = \{h \in \mathbb{R}^n | a + h \in \Omega\}$  est un ouvert) par :

$$g(h) \mapsto f(a + h)$$

$g$  est  $C^1$  et  $\frac{\partial g}{\partial h_n}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ .

On sait que  $df(a) \neq 0$  (car  $a \in \Sigma$  et  $\Sigma$  est régulière).  $\implies \exists p \in \{1, \dots, n\}$  tq  $\frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$ .

Sans perte de généralité, supposons  $p = n$ . (Si  $p \neq n$ , on permute les coordonnées  $x_p$  et  $x_n$  avec un difféomorphisme  $\tilde{f}$ , et on a  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$ ).

On a  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$ . On applique le Th. des Fonctions Implicites à  $g$  au point 0. On a  $g(0) = f(a) = 0$ .

On regarde la différentielle partielle par rapport à la  $n$ -ième variable :  $dg_{h_n}(0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $v \mapsto \frac{\partial g}{\partial h_n}(0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot v$  Cette application est inversible car  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$ .

Ainsi, il existe :

- $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$  (voisinage de  $0' \in \mathbb{R}^{n-1}$ )
- $V_n$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  (voisinage de  $0 \in \mathbb{R}$ )
- $\psi : U \rightarrow V_n$  (implicite) tq  $\forall h' \in U, \exists! h_n \in V_n$

$$g(h', h_n) = 0 \iff h_n = \psi(h')$$

$\forall (h', h_n) \in U \times V_n$ , on a  $f(a + (h', h_n)) = 0 \iff h_n = \psi(h')$ .

Posons  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  par  $h' \mapsto a + (h', \psi(h'))$ . (On pose  $V = (a + U \times V_n)$  qui est un voisinage ouvert de  $a$ ).

$\varphi$  est  $C^1$  car  $\psi$  l'est.  $\varphi(0) = a + (0, \psi(0)) = a$  (car  $g(0, 0) = 0 \implies \psi(0) = 0$ ).

Pour  $y \in \Sigma \cap V$ ,  $y = a + (h', h_n)$  avec  $(h', h_n) \in U \times V_n$  et  $f(y) = 0$ .  $f(y) = 0 \implies g(h', h_n) = 0 \implies h_n = \psi(h')$ . D'où  $y = a + (h', \psi(h')) = \varphi(h')$ . Donc  $\varphi$  est surjective sur  $\Sigma \cap V$ .

De plus,  $\varphi(h'_1) = \varphi(h'_2) \implies a + (h'_1, \psi(h'_1)) = a + (h'_2, \psi(h'_2)) \implies h'_1 = h'_2$ . Donc  $\varphi$  est injective.

Donc  $\varphi : U \rightarrow \Sigma \cap V$  est bijective.

Considérons la Jacobienne de  $\varphi$  (pour déterminer le rang) :  $h' \in U, J\varphi(h') = d\varphi(h') \in \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R})$ .

$$\varphi(h') = \begin{pmatrix} a_1 + h_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} + h_{n-1} \\ a_n + \psi(h') \end{pmatrix}$$

La  $i$ -ème ligne de  $J\varphi(h')$  est  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j}(h')$ . Si  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j} = \delta_{ij}$  (Kronecker). La  $n$ -ième ligne est  $(\frac{\partial \psi}{\partial h_1}(h'), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial h_{n-1}}(h'))$ .

$$J\varphi(h') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial h_1} & \frac{\partial \psi}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Cette matrice (n lignes, n-1 colonnes) contient la matrice identité  $I_{n-1}$ . Elle est donc de rang  $n-1$ .  
 $\implies rg(d\varphi(h')) = n-1 \quad \forall h' \in U$ .  $\square$

### Remarque

On dit que  $(h_1, \dots, h_{n-1})$  constitue un système de coordonnées locales relatives au paramétrage de  $\varphi$ .

### Proposition 8: Hyperplan tangent (paramétré)

Soit  $\Sigma$  une hypersurface régulière,  $a \in \Sigma$  et  $\varphi$  un paramétrage de  $\Sigma$  au voisinage de  $a$  tq  $\varphi(0) = a$ . Alors l'hyperplan tangent à  $\Sigma$  en  $a$  (défini par  $f$ ) coïncide avec l'hyperplan  $H$  passant par  $a$  et dirigé par l'image de  $d\varphi(0)$ .

$$H = a + \text{Im}(d\varphi(0)) = a + \text{Vect} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial h_1}(0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial h_{n-1}}(0) \right\}$$

**Preuve :**

On a  $f(\varphi(h')) = 0 \quad \forall h' \in U$ .

En différentiant cette composition en  $h' = 0$  :

$$df(\varphi(0)) \circ d\varphi(0) = 0$$

Puisque  $\varphi(0) = a$ , on a  $df(a) \circ d\varphi(0) = 0$ .

Cela signifie que  $\forall v \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $df(a)(d\varphi(0)(v)) = 0$ .

$$\implies \text{Im}(d\varphi(0)) \subset \text{Ker}(df(a))$$

On regarde les dimensions :  $d\varphi(0) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\text{rg}(d\varphi(0)) = n - 1$  (vu dans la preuve précédente).  $\implies \dim(\text{Im}(d\varphi(0))) = n - 1$ .

$df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire. Elle est non nulle (car  $a \in \Sigma$  hypersurface régulière,  $df(a) \neq 0$ ). Par le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker}(df(a))) = \dim(\mathbb{R}^n) - \text{rg}(df(a)) = n - 1$ .

Puisque  $\dim(\text{Im}(d\varphi(0))) = \dim(\text{Ker}(df(a)))$  et que l'un est inclus dans l'autre :

$$\text{Im}(d\varphi(0)) = \text{Ker}(df(a))$$

L'hyperplan tangent  $H$  (défini par  $f$ ) est l'hyperplan affine passant par  $a$  et de direction  $\text{Ker}(df(a))$ .  $H = a + \text{Ker}(df(a)) = a + \text{Im}(d\varphi(0))$ .

(Transcription des images)

$$\begin{aligned} \text{Ker}(df(0)) &= \{x \in \mathbb{R}^n, df(0)(x) = 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot x_i = 0 \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, \nabla f(0) \rangle = 0\} \end{aligned}$$

□

# Équations Différentielles

## I. Équations Différentielles

(Partie II du cours)

### 1 Introduction et Problème de Cauchy simple

#### Exemple 1

(E) :  $x'(t) = ax(t)$  est une équation différentielle. L'inconnue est un couple  $(J, x)$  où  $J$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $J$ . On a un ensemble de solutions de (E) de la forme  $x(t) = \lambda e^{at}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (C'est-à-dire de la forme  $(J = \mathbb{R}, x(t) = \lambda e^{at})$ ).

Comment trouver les solutions ? On cherche une fonction  $x$  telle que  $x'(t) - ax(t) = 0$ . On multiplie par  $e^{-at}$  :

$$(x(t)e^{-at})' = x'(t)e^{-at} - ae^{-at}x(t) = (x'(t) - ax(t))e^{-at} = 0$$

Sur un intervalle ouvert, on en déduit que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad x(t)e^{-at} = \lambda \implies x(t) = \lambda e^{at}$$

On a donc :  $\forall J$  intervalle ouvert,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(J, x(t) = \lambda e^{at})$  est une solution.

#### 1.1 Problème de l'Unicité et Problème de Cauchy

Questions : Comment avoir une unique solution au problème (E) ?

- a) Il est pertinent de considérer une solution dite "**maximale**" sur un intervalle  $J$  (cela signifie qu'on ne peut pas étendre la solution sur un intervalle plus grand au sens de l'inclusion stricte).
- b) (E) a une infinité de solutions maximales  $(\mathbb{R}, \lambda e^{at})$  paramétrées par  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- c) Si on veut définir une unique solution de (E), on doit ajouter une **condition initiale** de type  $x(t_0) = x_0$ .

#### Définition 6: Problème de Cauchy (simple)

On appelle **Problème de Cauchy** le système (E') :

$$(E') \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ .

(E') admet une unique solution maximale :  $x(t) = \lambda e^{at}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $J = \mathbb{R}$ . On détermine  $\lambda$  avec la condition initiale :  $x(t_0) = \lambda e^{at_0} = x_0 \implies \lambda = x_0 e^{-at_0}$ . La solution unique est  $x(t) = (x_0 e^{-at_0}) e^{at} = x_0 e^{a(t-t_0)}$ .

#### Notations

$\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$  (différentes manières d'écrire une dérivée).

## 2 Équation différentielle du premier ordre

### Définition 7: Équation différentielle du premier ordre

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  et  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . On considère (1) :

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t) \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

- (1) est dite du **premier ordre** parce que seules des dérivées d'ordre 1 apparaissent.
- (1) est une équation du premier ordre **explicite**.
- Par ailleurs, les équations de la forme  $G(t, x'(t), x(t)) = 0$  sont dites du premier ordre **implicites**.
- (L'équation (1) est **autonome** si  $F$  ne dépend pas du temps  $t$  (i.e.  $F(t, x) = F(x)$ ). Dans le cas contraire, l'équation est **non-autonome**.

### Définition 8: Solution d'une EDO

Une **solution** de (1) est décrite par un couple  $(J, X)$ , où  $J$  est un intervalle ouvert et  $X : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction dérivable sur  $J$ , telle que :

- $\forall t \in J, (t, X(t)) \in \Omega$
- $\forall t \in J, X'(t) = F(t, X(t))$

avec  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, (t, x) \mapsto F(t, x)$ . La solution est le couple  $(J, X)$ .

### Exemple 2

Pour  $x'(t) = ax(t)$ , on a  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (t, x) \mapsto ax$ .

### Remarque

Si on étendait la définition à des intervalles non nécessairement ouverts (ex :  $J = [a, b]$ ), on pourrait définir  $X'(b)$  comme :

$$X'(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{X(t) - X(b)}{t - b}$$

## 3 Régularité des Solutions

### Proposition 9: Régularité de la solution

Si  $F \in \mathcal{C}^n(\Omega)$ , alors si  $(J, X)$  est une solution de (1), on a  $X \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$ .

#### Preuve :

Soit  $(J, X)$  une solution de (1). Puisque  $X$  est dérivable sur  $J$ ,  $X$  est continue sur  $J$ , donc  $X \in \mathcal{C}^0(J)$ .

Supposons par l'absurde que  $X \notin \mathcal{C}^{n+1}(J)$ . Soit  $k$  la régularité maximale de  $X$ , c'est-à-dire  $X \in \mathcal{C}^k(J)$  avec  $k < n + 1$ . (Puisque  $X \in \mathcal{C}^0(J)$ , ce  $k$  existe et  $k \geq 0$ ).

On a  $X'(t) = F(t, X(t))$ . L'application  $t \mapsto (t, X(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . On sait que  $F \in \mathcal{C}^n(\Omega)$ . Puisque  $k < n + 1$  (et  $k, n$  sont des entiers), on a  $k \leq n$ . Donc  $F$  est a fortiori de classe  $\mathcal{C}^k(\Omega)$ .

Par composition d'applications de classe  $\mathcal{C}^k$ , l'application  $t \mapsto F(t, X(t))$  est  $\mathcal{C}^k(J)$ . On en déduit donc que  $X' \in \mathcal{C}^k(J)$ .

Mais si  $X' \in \mathcal{C}^k(J)$ , alors  $X \in \mathcal{C}^{k+1}(J)$ . Ceci contredit notre hypothèse que  $k$  était la régularité maximale de  $X$ . L'hypothèse de départ est donc fausse. On a  $X \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$ .  $\square$

#### Remarque

Si  $F \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ , alors  $X \in \mathcal{C}^1(J)$ . ( $X$  est mieux que dérivable!).

## 4 Théorèmes d'Existence et d'Unicité

### Définition 9: Problème de Cauchy (Général)

Le système (2) :

$$(2) \quad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec  $(t_0, x_0) \in \Omega$  est appelé **Problème de Cauchy**.

### Définition 10: Solution Maximale

Une solution  $(J, X)$  de (1) est dite **maximale** si elle ne peut pas être étendue sur un intervalle plus grand au sens de l'inclusion stricte. Autrement dit, il n'existe pas de couple  $(J', Y)$  solution de (1) tel que  $J \subsetneq J'$  et  $Y|_J = X$ .

On se pose deux questions fondamentales :

- **Question 1 :** Pour quelle régularité de  $F$  le problème de Cauchy (2) a-t-il **au moins une** solution maximale ?
- **Question 2 :** Pour quelle régularité de  $F$  le problème de Cauchy (2) a-t-il une **unique** solution maximale ?

### Exemple 3: Non-existence (si $F$ n'est pas continue)

Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . Considérons le problème de Cauchy (C) :  

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
. Montrons que (C) n'a pas de solutions.

#### Démonstration par l'absurde :

Supposons par l'absurde que (C) a une solution  $(J, X)$  avec  $0 \in J$ .

1.  $X$  doit être dérivable en 0. On a  $X'(0) = F(X(0)) = F(0) = 1$ .
2. Par définition de la dérivée,  $X(t) = X(0) + X'(0) \cdot t + o(t) = t + o(t)$ .
3. Cela implique que dans un voisinage  $V$  de 0, pour  $t \in V \cap J \cap ]0, +\infty[$  (c-à-d,  $t > 0$  et proche de 0), on a  $X(t) > 0$ .
4. Pour ces mêmes  $t$ , puisque  $X(t) > 0$ , l'équation différentielle donne  $X'(t) = F(X(t)) = -1$ .
5. Par le Théorème des Accroissements Finis sur  $[0, t]$  (car  $X$  est continue sur  $[0, t]$  et dérivable sur  $]0, t[$ ), il existe  $c \in ]0, t[$  tel que :

$$\frac{X(t) - X(0)}{t - 0} = X'(c)$$

6. Puisque  $c \in ]0, t[$ , on a  $c > 0$  et  $X(c) > 0$  (si  $t$  est assez petit). Donc  $X'(c) = -1$ . On a  $\frac{X(t)-0}{t} = -1$ , ce qui donne  $X(t) = -t$ .
7. **Contradiction.** On a  $X(t) = -t < 0$  (car  $t > 0$ ), mais l'étape 3 nous donnait  $X(t) > 0$ . L'hypothèse qu'une solution existe est donc fausse.  $\square$

#### Théorème 4: Peano-Arzelà (Admis)

(Réponse à la Question 1) Supposons que  $F$  est **continue** sur  $\Omega$ . Alors le problème de Cauchy (2) a **au moins une** solution maximale  $(J, X)$ . *Théorème admis.*

#### Exemple 4: Non-unicité (si $F$ est continue mais non-Lipschitzienne)

Considérons le problème :  $\begin{cases} x'(t) = 3(x(t))^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ . Ici,  $F(x) = 3x^{2/3}$ .  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (par composition de fonctions continues).

**$F$  n'est pas localement Lipschitzienne en 0.**

##### Démonstration :

Supposons par l'absurde que  $F$  est localement Lipschitzienne. Alors il existerait  $C > 0$  et un voisinage de 0 tels que  $\forall x$  dans ce voisinage :

$$|F(x) - F(0)| \leq C|x - 0|$$

$$|3x^{2/3} - 0| \leq C|x| \implies 3|x|^{2/3} \leq C|x|$$

Pour  $x \neq 0$ ,  $3 \leq C|x|^{1/3}$ . En faisant tendre  $x \rightarrow 0$ , on obtient  $3 \leq 0$ , ce qui est absurde. (La note du cours utilise  $\frac{|F(x)-F(0)|}{|x-0|} = \frac{3x^{2/3}}{x} = \frac{3}{x^{1/3}}$  qui tend vers l'infini en 0, donc n'est pas bornée).  $\square$

##### Ce problème admet (au moins) deux solutions maximales :

- **Solution 1:**  $X_1(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Vérification :  $X'_1(t) = 0 \cdot 3(X_1(t))^{2/3} = 3(0)^{2/3} = 0$ .  $X_1(0) = 0$ . C'est une solution.
- **Solution 2 :**  $X_2(t) = t^3$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Vérification :  $X'_2(t) = 3t^2 \cdot 3(X_2(t))^{2/3} = 3((t^3))^{2/3} = 3(t^2) = 3t^2$ .  $X_2(0) = 0^3 = 0$ . C'est une solution.

On a  $(\mathbb{R}, X_1)$  et  $(\mathbb{R}, X_2)$  qui sont deux solutions maximales distinctes pour le même problème de Cauchy.

#### Théorème 5: Cauchy-Lipschitz (Version simple)

(Réponse à la Question 2)

1. Si  $F$  est **Lipschitzienne** sur  $\Omega$ , alors le problème de Cauchy (2) admet une **unique solution maximale**  $(J, X)$ .
2. De plus, toutes les solutions de (1) (non-maximales) sont des restrictions de l'unique solution maximale.

#### Corollaire 3: Unicité locale

Supposons  $F$  Lipschitzienne sur  $\Omega$ . Soient  $(J, X)$  et  $(J', Y)$  deux solutions de (1). S'il existe  $t_0 \in$

$J \cap J'$  tel que  $X(t_0) = Y(t_0)$ , alors :

$$\forall t \in J \cap J', \quad X(t) = Y(t)$$

**Preuve :**

Considérons l'intervalle  $I = J \cap J'$ , qui est un intervalle ouvert contenant  $t_0$ . Les deux couples  $(I, X|_I)$  et  $(I, Y|_I)$  sont solutions du même problème de Cauchy (2) :

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(t_0) = X(t_0) (= Y(t_0)) \end{cases} \quad \text{sur } I$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème admet une unique solution maximale  $(J_m, Z)$ . Par définition de la solution maximale, les solutions  $(I, X|_I)$  et  $(I, Y|_I)$  doivent être des restrictions de  $(J_m, Z)$ . Cela signifie que  $\forall t \in I, X(t) = Z(t)$  et  $Y(t) = Z(t)$ . Par conséquent,  $X(t) = Y(t)$  pour tout  $t \in J \cap J'$ .  $\square$

## 5 Corollaire de Cauchy-Lipschitz (Non-croisement)

### Corollaire 4: Non-croisement des solutions

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  ou Lipschitzienne. Soient  $(J, x)$  et  $(J', y)$  deux solutions maximales du problème (E)  $y'(t) = f(t, y(t))$ .

Si il existe  $t_0 \in J \cap J'$  tel que  $x(t_0) < y(t_0)$ ,  
Alors :  $\forall t \in J \cap J', x(t) < y(t)$ .

**Preuve :**

Supposons par l'absurde qu'il existe  $t_1 \in J \cap J'$  tel que  $x(t_1) > y(t_1)$ . (Nous avons  $x(t_0) < y(t_0)$  et  $x(t_1) > y(t_1)$ ).

Considérons la fonction  $z(t) = x(t) - y(t)$ .  $z$  est continue sur l'intervalle  $I = [\min(t_0, t_1), \max(t_0, t_1)] \subset J \cap J'$ . On a  $z(t_0) = x(t_0) - y(t_0) < 0$  et  $z(t_1) = x(t_1) - y(t_1) > 0$ .

Par le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) appliqué à  $z$ , il existe  $t_2 \in I$  tel que  $z(t_2) = 0$ , c'est-à-dire  $x(t_2) = y(t_2)$ .

Maintenant,  $(J, x)$  et  $(J', y)$  sont toutes deux des solutions maximales du **même** problème de Cauchy :

$$(E') \quad \begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(t_2) = x(t_2) \end{cases}$$

(puisque  $y(t_2) = x(t_2)$ ).

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité de la solution maximale), on en déduit que  $J = J'$  et  $x(t) = y(t)$  pour tout  $t \in J$ . Ceci est absurde, car on a supposé  $x(t_0) < y(t_0)$ .  $\square$

**Question : Dans quel cadre les solutions peuvent-elles cesser d'exister ?**

### Exemple 5

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} m'(t) = m(t)^2 \\ m(0) = 0 \end{cases}$$

Ici,  $f(t, m) = m^2$ .  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  (donc  $\mathcal{C}^1$  et Lipschitzienne sur tout compact). Par Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale. La fonction  $m(t) = 0$  pour  $t \in \mathbb{R}$  est une solution évidente. Par unicité, c'est l'unique solution maximale. L'intervalle de définition est  $J = \mathbb{R}$ .

### Exemple 6: Phénomène d'explosion

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

En séparant les variables (quand  $x \neq 0$ ) :  $\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 1 \implies \left(-\frac{1}{x(t)}\right)' = 1$

En intégrant :  $-\frac{1}{x(t)} = t + C$ .

Avec  $x(0) = 1$ , on a  $-\frac{1}{1} = 0 + C \implies C = -1$ .

Donc  $-\frac{1}{x(t)} = t - 1$ , ce qui donne  $x(t) = \frac{1}{1-t}$ .

On vérifie :  $x'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$  et  $x(t)^2 = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2$ . La solution est le couple  $(J, x)$  avec  $J = ]-\infty, 1[$  et  $x(t) = \frac{1}{1-t}$ .

On observe que  $(J, x)$  est une solution maximale. En effet, supposons par l'absurde qu'on puisse l'étendre en une solution  $(\tilde{J}, \tilde{x})$  avec  $J \subsetneq \tilde{J}$  (donc  $1 \in \tilde{J}$ ). Alors  $\tilde{x}$  devrait être dérivable sur  $\tilde{J}$ , et donc continue en  $t = 1$ . Cela impliquerait que  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \tilde{x}(t)$  existe et est finie. Or,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-t} = +\infty$ . Ceci est une contradiction.

**Conclusion :** Si la solution n'est pas "globale" (définie sur  $I$  en entier), on observe un phénomène d'explosion :  $|x(t)| \rightarrow +\infty$  lorsque  $t$  tend vers la borne de  $J$ .

## 6 Convergence vers la frontière et sortie des compacts

### Définition 11: Valeur d'adhérence

Soit  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction, et  $t^* = \sup J \in \bar{\mathbb{R}}$ .

On dit que  $y^* \in \mathbb{R}^d$  est une **valeur d'adhérence** de  $\gamma$  lorsque  $t \rightarrow t^*$  s'il existe une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $J$  telle que  $t_n \rightarrow t^*$  et  $\gamma(t_n) \rightarrow y^*$ .

(Formellement :  $\forall V$  voisinage ouvert de  $y^*$ ,  $\forall W$  voisinage de  $t^*$ ,  $W \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$ ).

### Remarque

La fermeture de  $J$  est considérée dans  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

### Définition 12: Convergence vers la frontière

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1 + d$ ),  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $\gamma : J \rightarrow \Omega$ . Soit  $t^* = \sup J$  (ou  $\inf J$ ). On dit que  $\gamma(t)$  converge vers la frontière de  $\Omega$  (notée  $Fr(\Omega)$  ou  $Bd(\Omega)$ ) lorsque  $t \rightarrow t^*$ , si  $\gamma$  n'admet aucune valeur d'adhérence dans  $\Omega$ .

On note :  $\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow t^*]{} Bd(\Omega)$ .

#### Remarque

$\gamma(t) \rightarrow Bd(\Omega)$  est équivalent à dire que  $\gamma$  n'a pas de valeur d'adhérence (lorsque  $t \rightarrow t^*$ ) ou que ses valeurs d'adhérence sont dans  $Bd(\Omega)$ .

### Proposition 10: Théorème de sortie des compacts

Soit  $\gamma : J \rightarrow \Omega$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow t^*]{} Fr(\Omega)$ .
2. Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe un voisinage  $V$  de  $t^*$  tel que  $\forall t \in V \cap J, \gamma(t) \notin K$ .

#### Preuve :

(1  $\implies$  2) : Supposons  $\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$ . Supposons par l'absurde qu'il existe un compact  $K \subset \Omega$  tel que :  $\forall V$  voisinage de  $t^*$ ,  $\exists t \in V \cap J$  tel que  $\gamma(t) \in K$ . On peut alors construire une suite  $(t_n)$  dans  $J$  telle que  $t_n \rightarrow t^*$  et  $\gamma(t_n) \in K$ .  $K$  est compact, donc on peut extraire une sous-suite  $(\gamma(t_{k(n)}))$  qui converge vers  $y^* \in K$ . Puisque  $t_{k(n)} \rightarrow t^*$  et  $\gamma(t_{k(n)}) \rightarrow y^*$ ,  $y^*$  est une valeur d'adhérence de  $\gamma$ . Comme  $K \subset \Omega$ ,  $y^* \in \Omega$ . Ceci contredit l'hypothèse (1) que  $\gamma$  n'a pas de valeur d'adhérence dans  $\Omega$ . Absurde.

(2  $\implies$  1) : Supposons que  $\gamma$  "sort de tout compact". Supposons par l'absurde que  $\gamma$  ne converge pas vers  $Fr(\Omega)$ . Cela signifie (par définition) que  $\gamma$  admet (au moins) une valeur d'adhérence  $y^* \in \Omega$ . Par définition d'une valeur d'adhérence, il existe une suite  $(t_n) \rightarrow t^*$  telle que  $\gamma(t_n) \rightarrow y^*$ . Puisque  $\Omega$  est un ouvert et  $y^* \in \Omega$ , on peut choisir un  $\epsilon > 0$  tel que le compact  $K = \bar{B}(y^*, \epsilon)$  soit inclus dans  $\Omega$ . Puisque  $\gamma(t_n) \rightarrow y^*$ , pour  $n$  assez grand,  $\gamma(t_n) \in K$ . Cela signifie que pour tout voisinage  $V$  de  $t^*$  (contenant les  $t_n$  pour  $n$  grand), il existe des  $t_n \in V \cap J$  tels que  $\gamma(t_n) \in K$ . Ceci contredit l'hypothèse (2). Absurde.  $\square$

#### Remarque

Cas d'un domaine "tube"  $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$  (où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert). Soit  $\gamma(t) = (t, x(t))$  une solution.

Alors  $\gamma(t) \xrightarrow[t \rightarrow t^*]{} Fr(\Omega)$  est équivalent à :

$$t^* \in \{\inf I, \sup I\} \quad \text{OU} \quad \|x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow t^*]{} +\infty$$

#### Preuve de la remarque :

Nous devons prouver l'équivalence.

##### Sens 1 : ( $\Leftarrow$ )

Supposons que  $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$  OU  $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ . Nous voulons montrer que  $\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$ , c'est-à-dire que  $\gamma(t)$  n'a pas de valeur d'adhérence dans  $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe une valeur d'adhérence  $y^* \in \Omega$ . Par définition,  $y^* = (t_{adh}, x^*)$  avec  $t_{adh} \in I$  et  $x^* \in \mathbb{R}^d$ . Il existerait alors une suite  $(t_n)$  dans  $J$  telle que  $t_n \rightarrow t^*$  et  $\gamma(t_n) =$

$(t_n, x(t_n)) \rightarrow y^*$ .

Ceci implique  $t_n \rightarrow t_{adh}$  et  $x(t_n) \rightarrow x^*$ . Par unicité de la limite,  $t^* = t_{adh}$ .

On a donc  $t^* \in I$ . Cela contredit l'hypothèse  $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$  (car  $I$  est ouvert).

De plus,  $x(t_n) \rightarrow x^*$  implique  $\|x(t_n)\| \rightarrow \|x^*\|$ , qui est une valeur finie. Cela contredit l'hypothèse  $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ .

Puisque les deux cas de l'hypothèse mènent à une contradiction, notre supposition (l'existence d'une valeur d'adhérence  $y^* \in \Omega$ ) est fausse. Donc  $\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$ .

### Sens 2 : ( $\Rightarrow$ )

Supposons que  $\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$ . Nous voulons montrer que  $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$  OU  $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$ .

Supposons par l'absurde que la conclusion est fausse. La négation est :  $t^* \notin \{\inf I, \sup I\}$  ET  $\|x(t)\|$  ne tend pas vers  $+\infty$ .

$t^* \notin \{\inf I, \sup I\}$  signifie  $t^* \in I$  (car  $I$  est ouvert).

$\|x(t)\|$  ne tend pas vers  $+\infty$  (quand  $t \rightarrow t^*$ ) signifie qu'il existe une suite  $(t_n)$  dans  $J$  telle que  $t_n \rightarrow t^*$  et la suite  $(\|x(t_n)\|)$  est bornée.

Puisque la suite  $(x(t_n))$  est bornée dans  $\mathbb{R}^d$ , par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite  $(x(t_{k(n)}))$  qui converge vers un  $x^* \in \mathbb{R}^d$ .

La suite  $(t_{k(n)})$  converge toujours vers  $t^* \in I$ .

Par conséquent, la sous-suite  $\gamma(t_{k(n)}) = (t_{k(n)}, x(t_{k(n)}))$  converge vers  $y^* = (t^*, x^*)$ .

Puisque  $t^* \in I$  et  $x^* \in \mathbb{R}^d$ , on a  $y^* \in I \times \mathbb{R}^d = \Omega$ .

Cela signifie que  $\gamma(t)$  admet une valeur d'adhérence  $y^*$  dans  $\Omega$ . Ceci contredit notre hypothèse de départ ( $\gamma(t) \rightarrow Fr(\Omega)$ ). L'hypothèse par l'absurde est donc fausse, et la conclusion est vraie.  $\square$

## 7 Caractérisation des solutions maximales

### Théorème 6: Caractérisation des solutions maximales

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{1+d}$ ,  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^1$  ou Lipschitzienne. Soit  $(J, x)$  une solution de  $x'(t) = F(t, x(t))$ .

Alors  $(J, x)$  est une solution maximale si et seulement si :

- $(t, x(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \sup J]{} Fr(\Omega)$
- ET
- $(t, x(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \inf J]{} Fr(\Omega)$

### Remarque

On a choisi  $F$  de classe  $\mathcal{C}^1$  ou Lipschitzienne pour assurer l'existence et l'unicité (via Cauchy-Lipschitz).

On pourrait simplement supposer  $F$  continue et appliquer le théorème de Peano-Arzelà (pour l'existence).

### Théorème 7: Critère d'explosion (Domaine "Tube")

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$ . Soit  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^1$  ou Lipschitzienne. Soit  $(J, x)$  une solution maximale de  $x'(t) = F(t, x(t))$ .

Alors on a :

- $\sup J = \sup I$  OU  $\lim_{t \rightarrow \sup J} \|x(t)\| = +\infty$ .
- ET

- $\inf J = \inf I$  OU  $\lim_{t \rightarrow \inf J} \|x(t)\| = +\infty$ .  
(C'est le critère d'explosion en temps fini).

### Remarque

Pour  $x'(t) = x(t)$ , on a  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , donc  $I = \mathbb{R}$ . Les solutions sont  $x_\lambda(t) = \lambda e^t$ . L'intervalle maximal est  $J = \mathbb{R}$ .

On a  $\sup J = \sup I = +\infty$  et  $\inf J = \inf I = -\infty$ .

On vérifie :  $\lim_{t \rightarrow \inf J} x_\lambda(t) = 0$  (pas d'explosion).

$\lim_{t \rightarrow \sup J} x_\lambda(t) = \pm\infty$  (explosion, si  $\lambda \neq 0$ ).

### Remarque

Pour  $d = 1$ .

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = +\infty \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$

Si  $x$  est solution du problème,  $x'(t) = f(t, x(t))$

Alors  $x$  est continue et donc si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$

Alors :

- $\lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = +\infty$ .

OU

- $\lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = -\infty$ .

(Par continuité de  $x$ )

### Remarque

Pour  $d \geq 2$ . Soit  $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \end{pmatrix} \forall t \in \mathbb{R}$ .

On a  $\|x(t)\|^2 = (e^t \cos(t))^2 + (-e^t \sin(t))^2 = e^{2t}(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = e^{2t}$ .

Donc  $\|x(t)\| = e^t$ .

On a bien  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = +\infty$ .

Cependant,  $x(t)$  (le vecteur) n'admet pas de limite en  $+\infty$  (il spirale vers l'infini).

## Théorème d'existence globale

### Corollaire 5: Théorème d'existence globale

Soit  $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$ . Soit  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^1$  ou Lipschitzienne. Soit  $(J, x)$  une solution maximale du problème  $x'(t) = F(t, x(t))$  avec  $t_0 \in J$ . Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Supposons que :

1.  $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in [t_0, \sup J]$   
Alors  $\sup J = \sup I$ .
2.  $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in ]\inf J, t_0]$   
Alors  $\inf J = \inf I$ .
3.  $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in J$   
Alors  $J = I$  et donc  $(J, x)$  est une solution globale.

### Preuve :

1°) Supposons par l'absurde que  $\sup J < \sup I$ .

Alors, par le critère d'explosion (Théorème 7), la solution maximale  $(J, x)$  vérifie :

$$\|x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \sup J]{} +\infty$$

Or,  $\forall t \in [t_0, \sup J[$ , on a  $\|x(t)\| \leq g(t)$ .

$g$  est continue sur le compact  $[t_0, \sup J] \subset I$ .

$g$  est donc bornée sur ce compact. Il existe  $M > 0$  tel que  $\forall t \in [t_0, \sup J], g(t) \leq M$ .

On en déduit que  $\forall t \in [t_0, \sup J[, \|x(t)\| \leq M$ .

Ceci est absurde car  $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow \sup J$ .

Donc,  $\sup J = \sup I$ .

2°) (La preuve pour  $\inf J$  est identique).

3°) (Le point 3 est une conséquence directe de 1°) et 2°)). □

## 8 Caractérisation des solutions maximales (Suite)

### Preuve du Théorème 6 :

Nous devons prouver une équivalence.

#### Sens 1 : ( $\Rightarrow$ )

Supposons que  $(t, x(t)) \rightarrow Fr(\Omega)$  lorsque  $t \rightarrow \sup J$  et  $t \rightarrow \inf J$ . Supposons par l'absurde que  $(J, x)$  n'est pas une solution maximale.

Cela implique qu'il existe une solution  $(J', \tilde{x})$  de (E) telle que  $J \subsetneq J'$  et  $\forall t \in J, \tilde{x}(t) = x(t)$ .

Supposons par exemple que  $\sup J < \sup J'$ . Puisque  $\tilde{x}$  est solution sur  $J'$ ,  $\tilde{x}$  est continue sur  $J'$ . Donc  $\tilde{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \sup J^-]{} \tilde{x}(\sup J)$  (une valeur finie, car  $\sup J \in J'$ ).

Comme  $\tilde{x}(t) = x(t)$  sur  $J$ , on a  $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \sup J^-]{} \tilde{x}(\sup J)$ .

Donc  $\gamma(t) = (t, x(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \sup J^-]{} (\sup J, \tilde{x}(\sup J))$ .

Le point  $(\sup J, \tilde{x}(\sup J))$  est une valeur d'adhérence de  $\gamma(t)$ . Puisque  $(J', \tilde{x})$  est une solution, on a  $(\sup J, \tilde{x}(\sup J)) \in \Omega$ .

Ceci est ABSURDE, car on a supposé que  $\gamma(t) = (t, x(t))$  tendait vers la frontière de  $\Omega$  (et ne devait donc avoir aucune valeur d'adhérence *dans*  $\Omega$ ).

#### Sens 2 : ( $\Leftarrow$ )

Supposons maintenant que  $(J, x)$  est une solution maximale de (E). Nous devons montrer que  $(t, x(t)) \rightarrow Fr(\Omega)$  lorsque  $t \rightarrow \sup J$  (la preuve est identique pour  $\inf J$ ).

Supposons par l'absurde que  $(t, x(t))$  ne tend pas vers  $Fr(\Omega)$  lorsque  $t \rightarrow \sup J$ . Par définition (en prenant la négation), cela signifie qu'il existe (au moins) **une** valeur d'adhérence  $(\beta, x^*)$  dans  $\Omega$ , où  $\beta = \sup J$ . (Note : si  $\sup J = +\infty$ , on ne peut pas avoir de valeur d'adhérence  $(t, x(t)) \rightarrow (\beta, x^*) \in \Omega$  car  $\beta$  serait infini). Donc, on a nécessairement  $\sup J = \beta < +\infty$ .

Il existe une suite  $(t_n) \in J^{\mathbb{N}}$  telle que  $t_n \rightarrow \sup J$  et  $x(t_n) \rightarrow x^*$ , avec  $(\sup J, x^*) \in \Omega$ .

D'après le théorème de Peano-Arzelà, le problème de Cauchy (C) suivant :

$$(C) \quad \begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(\sup J) = x^* \end{cases}$$

(qui a un sens car  $(\sup J, x^*) \in \Omega$ ), a au moins une solution  $\tilde{x}$  définie sur un intervalle ouvert  $I_\epsilon = [\sup J - \epsilon, \sup J + \epsilon]$  (avec  $\epsilon > 0$  petit).

$$\text{Posons } X_1(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in J \\ \tilde{x}(t) & \text{si } t \in [\sup J, \sup J + \epsilon] \end{cases}$$

Vérifions que  $X_1(t)$  est une solution de (E) sur  $J_1 = [\inf J, \sup J + \epsilon]$ .

Puisque  $x$  est dérivable sur  $J$  et  $\tilde{x}$  est dérivable sur  $[\sup J, \sup J + \epsilon]$ , il suffit de vérifier la continuité et la dérivabilité en  $\sup J$ .

#### Continuité en $\sup J$ :

On a  $\lim_{t \rightarrow \sup J^+} X_1(t) = \lim_{t \rightarrow \sup J^+} \tilde{x}(t) = \tilde{x}(\sup J) = x^*$  (car  $\tilde{x}$  est solution de (C)).

Le \*\*Lemme 1\*\* (prouvé ci-dessous) nous assure que  $x(t) \rightarrow x^*$  lorsque  $t \rightarrow \sup J^-$ . Donc  $\lim_{t \rightarrow \sup J^-} X_1(t) = \lim_{t \rightarrow \sup J^-} x(t) = x^*$ .

Les limites à gauche et à droite coïncident,  $X_1$  est continue en  $\sup J$ .

#### Dérivabilité en $\sup J$ :

$X_1$  est continue sur  $J_1$  et dérivable sur  $J_1 \setminus \{\sup J\}$ .

Pour  $h > 0$  (dérivée à droite) :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{X_1(\sup J + h) - X_1(\sup J)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{x}(\sup J + h) - x^*}{h} \\ &= \tilde{x}'(\sup J) = F(\sup J, \tilde{x}(\sup J)) = F(\sup J, x^*) \end{aligned}$$

Pour  $h < 0$  (dérivée à gauche) :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{X_1(\sup J + h) - X_1(\sup J)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(\sup J + h) - x^*}{h}$$

On considère  $Y_1(t)$  le prolongement par continuité de  $x$  sur  $J \cup \{\sup J\}$ , avec  $Y_1(\sup J) = x^*$ .

On applique le Théorème des Accroissements Finis à  $Y_1$  sur  $[\sup J + h, \sup J]$ . Il existe  $c_h \in [\sup J + h, \sup J]$  tel que :

$$\begin{aligned} \frac{Y_1(\sup J) - Y_1(\sup J + h)}{-h} &= Y'_1(c_h) = x'(c_h) \\ \frac{x^* - x(\sup J + h)}{-h} &= \frac{x(\sup J + h) - x^*}{h} = F(c_h, x(c_h)) \end{aligned}$$

Quand  $h \rightarrow 0^-$ , on a  $c_h \rightarrow \sup J^-$ . Par continuité de  $F$  et de  $x$  (prouvée par le Lemme 1), on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} F(c_h, x(c_h)) = F(\sup J, x^*)$$

Les dérivées à gauche et à droite sont égales à  $F(\sup J, x^*)$ . Donc  $X_1$  est dérivable en  $\sup J$  et  $X'_1(\sup J) = F(\sup J, X_1(\sup J))$ .

**Conclusion :**  $(J_1, X_1)$  (avec  $J_1 = [\inf J, \sup J + \epsilon]$ ) est une solution de (E) avec  $X_1(t) = x(t)$  sur  $J$ .

Puisque  $J \subsetneq J_1$ , cela contredit le fait que  $(J, x)$  est maximale. L'hypothèse de départ (le fait que  $\gamma(t)$  admette une valeur d'adhérence dans  $\Omega$ ) est donc fausse.  $\square$

#### Lemme 1: Lemme 1 (Convergence au bord)

Si  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  ou Lipschitzienne,  $\sup J = \beta < +\infty$ , et  $(t, x(t))$  admet une valeur d'adhérence  $(\beta, x^*) \in \Omega$  quand  $t \rightarrow \sup J$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \sup J} (t, x(t)) = (\beta, x^*)$ .

#### Preuve du Lemme 1 :

On sait que  $(\beta, x^*) \in \Omega$ , qui est un ouvert. Il existe  $\epsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $\bar{B}((\beta, x^*), \epsilon) \subset \Omega$ . Puisque  $F$  est continue sur l'ouvert  $\Omega$ ,  $F$  est bornée sur le compact  $\bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$ .  
 $\exists M > 0$  t.q.  $\forall (t, x) \in \bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$ ,  $\|F(t, x)\| < M$ .

Par définition de la valeur d'adhérence  $(\beta, x^*)$ ,  $\exists (t_n)$  t.q.  $t_n \rightarrow \beta$  et  $x(t_n) \rightarrow x^*$ . Choisissons  $N$  assez grand tel que les conditions (H) soient vérifiées :

$$(H) \quad \begin{cases} t_N > \beta - \frac{\epsilon}{2M} \\ \|x(t_N) - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ |t_N - \beta| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

On applique le Lemme 2 (prouvé ci-dessous). D'après le Lemme 2, on a  $\forall t \in [t_N, \beta[$ ,  $\|x(t) - x^*\| < \epsilon$ .

Ceci est vrai  $\forall \epsilon > 0$  (en choisissant  $N$  suffisamment grand pour chaque  $\epsilon$ ). L'intervalle  $[t_N, \beta[$  est un voisinage à gauche de  $\beta$ . On a donc montré que  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  (ici  $\delta = \beta - t_N$ ) tel que  $t \in ]\beta - \delta, \beta[ \implies \|x(t) - x^*\| < \epsilon$ .

C'est la définition de  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t) = x^*$ .

Puisque  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} t = \beta$ , on a bien  $\lim_{t \rightarrow \sup J} (t, x(t)) = (\beta, x^*)$ .  $\square$

### Lemme 2: Lemme 2

(Avec les conditions (H) de la preuve ci-dessus), on a :

$$\forall t \in [t_N, \beta[, \|x(t) - x^*\| < \epsilon$$

### Preuve du Lemme 2 :

**Observation :** Avec les conditions (H), on a  $(t_N, x(t_N)) \in B((\beta, x^*), \epsilon)$  car :

$$\|(t_N, x(t_N)) - (\beta, x^*)\| = \max(|t_N - \beta|, \|x(t_N) - x^*\|) < \epsilon \quad (\text{d'après H.})$$

Supposons par l'absurde que la proposition n'est pas vraie.

$$\exists t \in [t_N, \beta[ \text{ tel que } \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon.$$

Posons  $T_\epsilon = \inf \{t \in [t_N, \beta[ \mid \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon\}$ .

$T_\epsilon$  existe car l'ensemble est non vide et minoré par  $t_N$ . Par continuité de  $x$ , on a  $\|x(T_\epsilon) - x^*\| = \epsilon$ . (Et  $T_\epsilon > t_N$  car  $\|x(t_N) - x^*\| \leq \epsilon/2 < \epsilon$ ).

Par définition de  $T_\epsilon$ ,  $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$ , on a  $\|x(s) - x^*\| \leq \epsilon$ . On a aussi  $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$ ,  $|s - \beta| \leq |t_N - \beta| < \epsilon$  (car  $s < \beta$ ).

Donc  $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$ ,  $(s, x(s)) \in \bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$ .

Sur ce compact, la fonction  $F$  est bornée :  $\|F(s, x(s))\| < M$ .

On intègre l'EDO :  $x(T_\epsilon) - x(t_N) = \int_{t_N}^{T_\epsilon} F(s, x(s)) ds$ .

$$\|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| \leq \int_{t_N}^{T_\epsilon} \|F(s, x(s))\| ds \leq \int_{t_N}^{T_\epsilon} M ds = M(T_\epsilon - t_N)$$

On sait  $t_N < T_\epsilon < \beta$ , donc  $T_\epsilon - t_N < \beta - t_N < \frac{\epsilon}{2M}$  (par (H)).

En substituant, l'inégalité devient **stricte** :

$$\|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| < M \cdot \left(\frac{\epsilon}{2M}\right) = \frac{\epsilon}{2}$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$\|x(T_\epsilon) - x^*\| \leq \|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| + \|x(t_N) - x^*\|$$

$$\|x(T_\epsilon) - x^*\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(Note : L'inégalité devient stricte car le premier terme est  $< \frac{\epsilon}{2}$  et le second est  $\leq \frac{\epsilon}{2}$ )

Ceci est une **CONTRADICTION**, car  $T_\epsilon$  est défini tel que  $\|x(T_\epsilon) - x^*\| = \epsilon$ .  $\square$

## 9 Cauchy-Lipschitz (Cadre général)

### Définition 13: Localement Lipschitzienne

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+d}$  un ouvert et  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . On dit que  $F$  est **localement Lipschitzienne** (par rapport à  $x$ ) si :

$\forall (t_0, x_0) \in \Omega, \exists V$  un voisinage de  $(t_0, x_0)$  dans  $\Omega$  tel que  $F$  est Lipschitzienne sur  $V \cap \Omega$ .

### Proposition 11: Caractérisation (Localement Lipschitzienne)

$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  est localement Lipschitzienne

$\iff$

$\forall K$  compact de  $\Omega$ ,  $F$  est Lipschitzienne sur  $K$ .

$(\forall K \text{ compact } \subset \Omega, \exists L_K > 0 \text{ t.q. } \forall (t, x), (t, y) \in K, \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L_K \|x - y\|)$

### Preuve :

Soit  $C$  un compact de  $\Omega$ .  $\forall x \in C \subset \Omega, \exists r_x > 0$  (rayon) t.q.  $F$  est Lipschitzienne sur  $B(x, r_x)$ . La famille  $(B(x, r_x))_{x \in C}$  est un recouvrement ouvert de  $C$ .

Par la propriété de Borel-Lebesgue (Heine-Borel),  $C$  est compact, donc on peut extraire un sous-recouvrement fini :  $C \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i)$ .

(Preuve par l'absurde de l'existence d'un nombre de Lebesgue  $\rho$ ) : Supposons que (la propriété) n'est pas vraie.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \rho_n = \frac{1}{n}, \exists y_n \in C$  t.q.  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, B(y_n, \frac{1}{n}) \not\subset B(x_i, r_i)$ .

$(y_n)$  est une suite de  $C$  compact. Il existe une sous-suite  $(y_{\phi(n)})$  t.q.  $y_{\phi(n)} \rightarrow y^* \in C$ .

Puisque  $y^* \in C, \exists i \in \{1, \dots, N\}$  t.q.  $y^* \in B(x_i, r_i)$ . Puisque  $B(x_i, r_i)$  est ouvert, pour  $n$  assez grand,  $B(y_{\phi(n)}, \frac{1}{\phi(n)}) \subset B(x_i, r_i)$ . Ceci contredit la construction de la suite  $(y_n)$ .

(Soit  $\rho$  ce nombre de Lebesgue.)

Soient  $x, y \in C$ .

Cas 1 :  $\|x - y\| < \rho$ . Alors  $\exists i$  t.q.  $\{x, y\} \subset B(x_i, r_i)$ .  $F$  est Lipschitzienne sur ce voisinage avec la constante  $C_i$ .

$$\|F(x) - F(y)\| \leq C_i \|x - y\| \leq \left( \max_{i=1..N} C_i \right) \|x - y\|$$

Cas 2 :  $\|x - y\| \geq \rho$ .

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|F(x)\| + \|F(y)\| \leq 2 \sup_{z \in C} \|F(z)\|$$

(Soit  $M = \sup_{z \in C} \|F(z)\|$ , qui existe car  $F$  est continue sur le compact  $C$ ).

Puisque  $\|x - y\| \geq \rho \implies 1 \leq \frac{\|x - y\|}{\rho}$ , on a :

$$\|F(x) - F(y)\| \leq 2M = 2M \cdot 1 \leq 2M \frac{\|x - y\|}{\rho} = \left( \frac{2M}{\rho} \right) \|x - y\|$$

i.e.  $\forall x, y \in C :$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \max \left( \max_{i=1..N} C_i, \frac{2 \sup_{z \in C} \|F(z)\|}{\rho} \right) \|x - y\|$$

Ce qui prouve que  $F$  est Lipschitzienne sur  $C$ . □

## 10 Preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz (Existence locale)

### Remarque

Si  $F$  est localement Lipschitzienne  $\implies F$  est continue.

Si  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  ou Lipschitzienne  $\implies F$  est localement Lipschitzienne. (L'inverse n'est pas forcément vrai).

### Exemple 7: Fonction non Lipschitzienne

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Regardons le taux d'accroissement en 0 :  $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h \ln h}{h} = \ln h \xrightarrow[h \rightarrow 0^+]{} -\infty$ .  
 $f$  n'est pas dérivable en 0.

De plus, pour  $m \in \mathbb{N}$ , prenons  $x_m = e^{-m}$  et  $y_m = 0$ .  $\frac{|f(x_m)-f(0)|}{|x_m-0|} = |\ln(e^{-m})| = |-m| = m \rightarrow +\infty$ .

Le rapport n'est pas borné, donc  $f$  n'est pas Lipschitzienne au voisinage de 0. Cependant,  $f$  est localement Lipschitzienne sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (car elle est  $\mathcal{C}^1$  sur cet ouvert).

### Remarque

Hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz :  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  (où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{d+1}$ ).  $(t, x) \mapsto F(t, x)$ .

1.  $F$  est continue sur  $\Omega$ .
2.  $F$  est localement Lipschitzienne en la seconde variable  $x$ .

C'est-à-dire :  $\exists V$  voisinage de  $(t_0, x_0)$  dans  $\Omega$ ,  $\exists k > 0$  tels que :

$$\forall (t, X), (t, Y) \in V, \quad \|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq k \|X - Y\|$$

### Remarque

$F$  localement Lipschitzienne en  $x$  est équivalent à : Pour tout compact  $K \subset \Omega$ ,  $\exists k_K > 0$  tel que  $\forall (t, X), (t, Y) \in K$ , on a :

$$\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq k_K \|X - Y\|$$

### Théorème 8: Cauchy-Lipschitz (Cadre Général)

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  et  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Supposons que :

- $F$  est continue sur  $\Omega$ .
- $F$  est localement Lipschitzienne par rapport à  $x$ .

Alors, pour tout  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , le problème de Cauchy :

$$(E) \quad \begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une **unique solution maximale**  $(J, x)$ .

### Preuve du Théorème (via un Lemme d'existence locale)

#### Lemme 3: Existence et Unicité Locale

Sous les conditions du Théorème, pour tout  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , il existe un  $a > 0$  suffisamment petit tel que le problème (E) a une **unique solution** sur l'intervalle  $[t_0 - a, t_0 + a]$ .

#### Remarque

$[t_0 - a, t_0 + a]$  n'est pas un intervalle ouvert. On définit la dérivée aux bornes par la limite à droite ou à gauche :

$$x'(t_0 - a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t_0 - a + h) - x(t_0 - a)}{h}$$

$$x'(t_0 + a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{x(t_0 + a + h) - x(t_0 + a)}{h}$$

Et pour  $t \in ]t_0 - a, t_0 + a[$ ,  $x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ .

### Preuve du Lemme :

Sans restriction, on va supposer que  $t_0 = 0$ . Nous allons démontrer l'existence et l'unicité en utilisant les deux lemmes suivants.  $\square$

#### Lemme 4: Équivalence Différentielle / Intégrale

Soit  $X$  une fonction continue sur  $[-a, a]$ .  $X$  est solution de (E) sur  $[-a, a]$  (c'est-à-dire  $\mathcal{C}^1$  et vérifie l'équation)

$\iff$

$X$  satisfait l'équation intégrale suivante pour tout  $t \in [-a, a]$  :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(s, X(s))ds$$

### Preuve du Lemme 4 :

( $\Rightarrow$ ) Si  $X$  est une solution de (E) sur  $[-a, a]$ . On a  $\forall s \in [-a, a]$ ,  $X'(s) = F(s, X(s))$ . En intégrant cette équation sur  $[0, t]$  :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t X'(s)ds = x_0 + \int_0^t F(s, X(s))ds$$

De plus  $X$  est continue sur  $[-a, a]$  car dérivable.

( $\Leftarrow$ ) Réciproque. Supposons que  $X$  est continue et vérifie l'équation intégrale.  $s \mapsto F(s, X(s))$  est continue sur  $[-a, a]$  par composition de fonctions continues (car  $F$  est continue et  $X$  est continue).  $\implies g : t \mapsto \int_0^t F(s, X(s))ds$  est dérivable sur  $[-a, a]$ .

Démontrons cela : Pour tout  $t \in [0, a]$ , formons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \int_0^{t+h} F(s, X(s))ds - \int_0^t F(s, X(s))ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} F(s, X(s))ds \end{aligned}$$

(avec  $h$  suffisamment petit pour que  $t + h \in [-a, a]$ ).

On effectue le changement de variable  $s = t + \theta h$  (donc  $ds = h d\theta$ ).

$$= \frac{1}{h} \int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h)) \cdot h d\theta = \int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h)) d\theta$$

Par continuité de  $F$  et  $X$ , on a :

$$F(t + \theta h, X(t + \theta h)) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} F(t, X(t))$$

De plus, la fonction  $s \mapsto F(s, X(s))$  est continue sur le compact  $[-a, a]$ , donc elle est bornée.  $\exists M > 0$  tel que  $\|F(s, X(s))\| \leq M$ . Donc  $\|F(t + \theta h, X(t + \theta h))\| \leq M$ .

On peut appliquer le **Théorème de Convergence Dominée** (avec la fonction constante  $M$  intégrable sur  $[0, 1]$  car  $\int_0^1 M d\theta = M < +\infty$ ).

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h)) d\theta &= \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} F(t + \theta h, X(t + \theta h)) d\theta \\ &= \int_0^1 F(t, X(t)) d\theta = F(t, X(t)) \end{aligned}$$

Donc  $g$  est dérivable et  $g'(t) = F(t, X(t))$ . Ainsi,  $X(t) = x_0 + g(t)$  est dérivable et  $X'(t) = F(t, X(t))$ . Enfin,  $X(0) = x_0 + 0 = x_0$ . Donc  $X$  est solution.  $\square$

### Lemme 5: Existence et Unicité dans $E_a$

Il existe  $a > 0$  suffisamment petit tel que l'équation intégrale :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds$$

admet une **unique solution** dans l'espace  $E_a$ .

### Preuve du Lemme 5 :

On veut prouver que le problème admet une unique solution. Soit  $r > 0$  tel que la boule fermée  $B((0, x_0), r) \subset \Omega$  (possible car  $\Omega$  est ouvert).

Sur ce compact  $\overline{B}((0, x_0), r)$  :

1.  $F$  est continue, donc  $F$  est bornée sur ce compact.  $\exists M_r > 0$  tel que  $\forall (t, X) \in \overline{B}((0, x_0), r)$ ,  $\|F(t, X)\| \leq M_r$ .
2.  $F$  est localement Lipschitzienne en  $x$ , donc  $F$  est Lipschitzienne sur ce compact.  $\exists k_r > 0$  tel que  $\forall (t, X), (t, Y) \in \overline{B}((0, x_0), r)$ ,  $\|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq k_r \|X - Y\|$ .

Nous allons travailler dans l'espace fonctionnel  $E_a$  défini par :

$$E_a = \{X \in \mathcal{C}^0([-a, a], \mathbb{R}^d) \mid X(0) = x_0 \text{ et } \|X - x_0\|_\infty \leq r\}$$

avec  $a \leq r$ .

**Justification de la condition (Condition 1)**  $a \leq r$  : On impose la condition  $a \leq r$ . En effet, pour que  $F(t, X(t))$  soit défini, il faut que  $(t, X(t)) \in \Omega$ . On veut donc s'assurer que  $\forall t \in [-a, a], (t, X(t)) \in \overline{B}((0, x_0), r) \subset \Omega$ . En munissant  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  de la norme infinie  $\|(t, x)\|_\infty = \max(|t|, \|x\|)$ , la condition d'appartenance à la boule s'écrit :

$$\|(t, X(t)) - (0, x_0)\|_\infty \leq r \iff \max(|t - 0|, \|X(t) - x_0\|) \leq r$$

Ceci équivaut à :

$$|t| \leq r \quad \text{et} \quad \|X(t) - x_0\| \leq r$$

Pour que la première partie ( $|t| \leq r$ ) soit vraie pour tout  $t \in [-a, a]$ , il faut et il suffit que  $a \leq r$ . La seconde partie est assurée par la définition même de l'espace  $E_a$ .

**Preuve que  $E_a$  est complet** :  $\mathcal{C}^0([-a, a])$  muni de la norme infini est un espace de Banach. Montrons que  $E_a$  est un fermé de cet espace. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E_a$  telle que  $X_n \rightarrow X$  uniformément sur  $[-a, a]$ .

1. Pour tout  $n$ ,  $X_n(0) = x_0$ . Par convergence simple en 0,  $X(0) = \lim X_n(0) = x_0$ .
2. Pour tout  $n$ ,  $\|X_n - x_0\|_\infty \leq r$ . Par passage à la limite dans l'inégalité large,  $\|X - x_0\|_\infty \leq r$ .

Donc  $X \in E_a$ .  $E_a$  est un fermé d'un espace complet, donc  $E_a$  est complet.

Définissons l'application  $\Phi : E_a \rightarrow E_a$ .

$$\Phi(X) : t \mapsto x_0 + \int_0^t F(s, X(s))ds$$

**Vérifions que  $\Phi$  est bien définie** : Pour  $X \in E_a$ ,  $s \mapsto X(s)$  est continue.  $F$  est continue. Donc  $s \mapsto F(s, X(s))$  est continue. Donc  $\Phi(X)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (primitive d'une continue), donc  $\Phi(X) \in \mathcal{C}^0([-a, a])$ .

**Condition 2 : Stabilité ( $\Phi$  envoie  $E_a$  dans  $E_a$ )** Soit  $X \in E_a$ . On a  $\|\Phi(X)(0) - x_0\| = 0$ . Il faut montrer que  $\|\Phi(X)(t) - x_0\| \leq r$  pour tout  $t \in [-a, a]$ .

$$\|\Phi(X)(t) - x_0\| = \left\| \int_0^t F(s, X(s))ds \right\| \leq \left| \int_0^t \|F(s, X(s))\| ds \right|$$

Comme  $X \in E_a$ , pour tout  $s \in [-a, a]$ ,  $(s, X(s)) \in \overline{B}((0, x_0), r)$ . Donc  $\|F(s, X(s))\| \leq M_r$ .

$$\|\Phi(X)(t) - x_0\| \leq M_r |t| \leq M_r a$$

Pour que  $\Phi(X) \in E_a$ , il suffit d'imposer :

$$M_r a \leq r$$

**Condition 3 : Contraction** Soient  $Y_1, Y_2 \in E_a$ .

$$\begin{aligned} \|\Phi(Y_1)(t) - \Phi(Y_2)(t)\| &= \left\| \int_0^t (F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s)))ds \right\| \\ &\leq \left| \int_0^t \|F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))\| ds \right| \end{aligned}$$

Comme  $Y_1, Y_2 \in E_a$ , les points sont dans le compact où  $F$  est Lipschitzienne de constante  $k_r$ .

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_0^t k_r \|Y_1(s) - Y_2(s)\| ds \right| \\ &\leq k_r |t| \sup_{s \in [-a, a]} \|Y_1(s) - Y_2(s)\| \\ &\leq k_r a \|Y_1 - Y_2\|_\infty \end{aligned}$$

En passant au sup sur  $t$  :

$$\|\Phi(Y_1) - \Phi(Y_2)\|_\infty \leq (k_r a) \|Y_1 - Y_2\|_\infty$$

Pour que  $\Phi$  soit une contraction stricte, il faut imposer :

$$k_r a < 1$$

**Conclusion :** Si  $a$  satisfait les conditions :

$$\begin{cases} a \leq r \\ M_r a \leq r \\ k_r a < 1 \end{cases}$$

Alors  $\Phi$  est une contraction de l'espace complet  $E_a$  dans lui-même. D'après le Théorème du Point Fixe de Banach,  $\Phi$  admet un unique point fixe  $z \in E_a$ . Donc l'équation intégrale admet une unique solution dans  $E_a$ .  $\square$

**Suite de la preuve du Lemme principal (Unicité globale) :**

Le Lemme 5 nous donne une unique solution  $X_1$  appartenant à  $E_a$ . Supposons par l'absurde qu'il existe une autre solution  $X_2$  définie sur  $[-a, a]$  (qui ne serait pas dans  $E_a$ ).

Puisque  $X_2$  est solution,  $X_2$  est continue (car dérivable) sur  $[-a, a]$ . On suppose sans restriction que  $T \geq 0$ . Soit  $T_1 = \inf\{t \in [0, a] : \|X_2(t) - x_0\| > r\}$ . Cet ensemble est non vide (sinon  $X_2 \in E_a$ ). Comme  $X_2(0) = x_0$ , par continuité, l'ensemble est minoré par 0, donc  $T_1$  existe.

On a  $\|X_2(T_1) - x_0\| = r$  (par continuité). Et pour tout  $t < T_1$ ,  $\|X_2(t) - x_0\| \leq r$ .

Sur l'intervalle  $[0, T_1]$ ,  $X_2$  vérifie l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} X_2(T_1) - x_0 &= \int_0^{T_1} F(s, X_2(s)) ds \\ \|X_2(T_1) - x_0\| &\leq \int_0^{T_1} \|F(s, X_2(s))\| ds \end{aligned}$$

Comme pour  $s \in [0, T_1]$ ,  $(s, X_2(s))$  est dans la boule  $B((0, x_0), r)$  (car la norme est  $\leq r$ ), on peut majorer par  $M_r$ .

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \leq \int_0^{T_1} M_r ds = M_r T_1$$

Or  $T_1 \leq a$ . Et on a choisi  $a$  tel que  $M_r a < r$  (on peut choisir l'inégalité stricte dans la condition 1,  $M_r a \leq r/2$  par exemple).

Si on prend  $M_r a < r$ , alors :

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \leq M_r a < r$$

Ceci contredit le fait que  $\|X_2(T_1) - x_0\| = r$ .

L'hypothèse d'existence d'un point de sortie est donc fausse.  $X_2$  reste dans  $E_a$  sur tout l'intervalle. Par unicité dans  $E_a$ ,  $X_2 = X_1$ .  $\square$

**Suite de la preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz**

### Remarque

D'après le lemme précédent, on déduit que pour  $a > 0$  suffisamment petit, il existe une unique solution du problème (E) sur  $]t_0 - a, t_0 + a[$ .

### Lemme 6: Unicité globale sur l'intersection

Soit  $(J_x, x)$  et  $(J_y, y)$  deux solutions du problème (E). Alors  $\forall t \in J_x \cap J_y, x(t) = y(t)$ .

#### Preuve du lemme :

On pose  $J^* = J_x \cap J_y$ . C'est un intervalle ouvert (comme intersection de deux intervalles ouverts). On veut montrer que  $F = \{t \in J^* | x(t) = y(t)\}$  est égal à  $J^*$ .

$J^*$  est connexe car c'est un intervalle. Nous allons vérifier que  $F$  est un ouvert-fermé non vide de  $J^*$ .

**F est non vide :**  $t_0 \in J_x$  et  $t_0 \in J_y$ , donc  $t_0 \in J^*$ . On a  $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ . Donc  $t_0 \in F$ .

**F est fermé dans  $J^*$  :** Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $F$  telle que  $t_n \rightarrow t^*$  dans  $J^*$ .  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \in F \implies x(t_n) = y(t_n)$ . Par continuité de  $x$  et  $y$  en  $t^* \in J^*$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = x(t^*) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y(t_n) = y(t^*)$$

$\implies x(t^*) = y(t^*)$ . Donc  $t^* \in F$ .  $F$  est fermé.

**F est ouvert :** Soit  $t_* \in F \subset J^*$  (intervalle ouvert). Considérons le nouveau problème de Cauchy (E') centré en  $t_*$  :

$$(E') \quad \begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_*) = x(t_*) = y(t_*) \end{cases}$$

D'après le lemme d'existence locale (Lemme 3), on nous dit qu'il existe  $a > 0$  suffisamment petit tel que le problème (E') a une **unique solution** sur l'intervalle  $]t_* - a, t_* + a[$ .

Or,  $x$  et  $y$  sont bien solutions de (E') sur cet intervalle (puisque'ils sont solutions de (E) sur  $J^*$  qui contient  $]t_* - a, t_* + a[$ ). Par unicité de la solution sur  $]t_* - a, t_* + a[$ , on a :

$$\forall t \in ]t_* - a, t_* + a[, x(t) = y(t)$$

Donc  $]t_* - a, t_* + a[ \subset F$ . Ceci prouve que  $F$  est un voisinage de chacun de ses points, et donc  $F$  est un ouvert de  $J^*$ .

**Conclusion :**  $F$  est un ouvert-fermé non vide de  $J^*$ . Comme  $J^*$  est connexe, on a  $F = J^*$ .  $\square$

### Construction de la solution maximale

Posons  $J_{max} = \bigcup_{(J,Y)} J$ , où l'union est prise sur toutes les solutions  $(J, Y)$  du problème (E)

$$\begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_0) = x_0 \end{cases} .$$

$J_{max}$  est une union d'intervalles ouverts contenant tous  $t_0$ . L'union n'est pas vide (car on sait qu'il existe au moins une solution locale sur  $]t_0 - a, t_0 + a[$ ).  $J_{max}$  est donc un intervalle ouvert (car c'est une union connexe, car tous les ensembles contiennent  $t_0$ ) et  $t_0 \in J_{max}$ .

Définissons  $Y_{max}$  sur  $J_{max}$  : Soit  $t \in J_{max}$ . Par définition de  $J_{max}$ ,  $\exists (J, Y)$  solution de (E) telle que  $t \in J$ . On pose  $Y_{max}(t) = Y(t)$ .

Vérifions que cette définition est bien correcte (ne dépend pas du choix de la solution  $(J, Y)$ ) : Soit

$t \in J_{max}$ . Soient  $(J_1, Y_1)$  et  $(J_2, Y_2)$  deux solutions de (E) telles que  $t \in J_1$  et  $t \in J_2$ . On a  $t \in J_1 \cap J_2$ . D'après le lemme d'unicité (Lemme 6), on a  $Y_1(t) = Y_2(t)$ . La valeur de  $Y_{max}(t)$  ne dépend pas du choix de la solution.

Vérifions que  $(J_{max}, Y_{max})$  est solution : Soit  $t \in J_{max}$ .  $\exists (J, Y)$  solution tq  $t \in J$ .  $J$  est ouvert, donc  $\exists \epsilon > 0$  tq  $]t - \epsilon, t + \epsilon[ \subset J \subset J_{max}$ . Par définition de  $Y_{max}$ ,  $\forall t' \in ]t - \epsilon, t + \epsilon[, Y_{max}(t') = Y(t')$ . Donc  $Y'_{max}(t) = Y'(t) = F(t, Y(t)) = F(t, Y_{max}(t))$ . Donc  $\forall t \in J_{max}, Y'_{max}(t) = F(t, Y_{max}(t))$ . Par définition de  $Y_{max}$ , on a  $Y_{max}(t_0) = Y(t_0) = x_0$  (en prenant une solution  $(J, Y)$  qui contient  $t_0$ ). Donc  $(J_{max}, Y_{max})$  est solution de (E). Par définition de  $J_{max}$  (comme union de tous les domaines),  $(J_{max}, Y_{max})$  est la solution maximale.

## II. Équations autonomes

### Définition 14: Équation autonome

Une équation autonome prend la forme :

$$x'(t) = G(x(t))$$

où  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , avec  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .  $x \mapsto G(x)$ .

### Remarque

Une équation autonome est une équation non-autonome particulière. On pose  $\Omega_F = \mathbb{R} \times \Omega$  (ouvert de  $\mathbb{R}^{d+1}$ ) et  $F : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$(t, x) \mapsto G(x)$$

### Remarque

On peut transformer une équation non-autonome  $x'(t) = F(t, x(t))$  en une équation autonome (en augmentant la dimension). Soit  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  (où  $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ). Posons  $Y(t) = (t, x(t)) \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Alors  $Y'(t) = (1, x'(t))$ .

$$Y'(t) = (1, F(t, x(t)))$$

On pose  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$

$$Y \mapsto G(Y) = (1, F(Y))$$

L'équation  $x'(t) = F(t, x(t))$  est équivalente à l'équation autonome  $Y'(t) = G(Y(t))$ .

### Proposition 12: Équivalence Non-Autonome / Autonome

$(J, x)$  est solution maximale du problème  $\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$  (avec  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^{d+1}$ )  $\iff (J, Y)$  avec  $Y(t) = (t, x(t))$  est solution maximale de l'équation autonome  $Y'(t) = G(Y(t))$  avec  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  et  $Y(t_0) = (t_0, x(t_0)) \in \Omega$ .

### Remarque

Tout résultat sur un système autonome peut se traduire sur un système non-autonome. L'idée de passer d'un système non-autonome à un système autonome n'est pas très pertinente car on augmente la dimension.

### Proposition 13: Invariance par translation (Syst. autonomes)

Soit (E)  $x'(t) = G(x(t))$  avec  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  localement Lipschitzienne sur  $\Omega$  (ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ). Soient  $(J_x, x)$  et  $(J_y, y)$  deux solutions maximales de (E). Soit  $x_0 \in \Omega$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $s \in \mathbb{R}$  tels que  $t_0 \in J_x$  et  $t_0 + s \in J_y$  et :

$$x(t_0) = x_0 = y(t_0 + s)$$

Alors  $J_x = \{t \in \mathbb{R} | t + s \in J_y\}$  et  $\forall t \in J_x, x(t) = y(t + s)$ .

### Preuve :

Posons  $z(t) = y(t + s)$ . On a  $z'(t) = y'(t + s) = G(y(t + s)) = G(z(t))$ .

L'intervalle de définition de  $z$  est  $J_z = \{t | t + s \in J_y\}$ . On a  $z(t_0) = y(t_0 + s) = x(t_0)$ .  
Donc  $(J_z, z)$  est solution du problème de Cauchy (CC) :

$$(CC) \quad \begin{cases} w'(t) = G(w(t)) \\ w(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Montrons que  $(J_z, z)$  est une solution maximale. Si elle ne l'est pas,  $\exists (\tilde{J}_z, \tilde{z})$  solution de (CC) tq  $J_z \subsetneq \tilde{J}_z$  et  $\tilde{z}|_{J_z} = z$ . Posons  $\tilde{y}(t) = \tilde{z}(t - s)$ . Le domaine de  $\tilde{y}$  est  $\tilde{J}_y = \{t \in \mathbb{R} | t - s \in \tilde{J}_z\}$ . On a  $\tilde{J}_y \supset \{t \in \mathbb{R} | t - s \in J_z\} = J_y$ , et l'inclusion est stricte. De plus,  $\forall t \in J_y, \tilde{y}(t) = \tilde{z}(t - s) = z(t - s) = y(t)$ .  $(\tilde{J}_y, \tilde{y})$  étend  $(J_y, y)$ , ce qui là est absurde car  $(J_y, y)$  est maximale.

Donc  $(J_z, z)$  est une solution maximale de (CC).

$(J_x, x)$  est aussi une solution maximale de (CC). Par unicité de la solution maximale (Théorème de Cauchy-Lipschitz, car  $G$  est loc. Lipschitz), on a :

$$J_x = J_z \quad \text{et} \quad \forall t \in J_x, x(t) = z(t)$$

Ce qui donne :  $J_x = \{t | t + s \in J_y\}$  et  $x(t) = y(t + s)$ . □

#### Remarque

Si le système est non-autonome :  $z(t) = y(t + s) \implies z'(t) = y'(t + s) = F(t + s, y(t + s)) = F(t + s, z(t))$ . Il n'y a pas de raison que  $F(t + s, z(t)) = F(t, z(t))$ .

#### Remarque

Dans le cadre d'un système autonome, la condition initiale peut être fixée en  $t_0 = 0$  sans perte de généralité. Si  $(J_2, x_2)$  est solution de (E) avec  $x_2(0) = x_0$ , alors  $(J_1, x_1)$  avec  $J_1 = \{t_0 + t | t \in J_2\}$  et  $x_1(t) = x_2(t - t_0)$  est solution de (E) avec  $x_1(t_0) = x_0$ .

### Définition 15: Trajectoire

La **trajectoire** d'une solution  $(J, x)$  d'une équation autonome est l'ensemble :

$$T_x = \{x(t) | t \in J\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

### Proposition 14: Propriétés des Trajectoires

Supposons  $G$  localement Lipschitzienne. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ .

- a) Si deux solutions maximales du problème  $x'(t) = G(x(t))$  prennent la valeur  $x_0$  (à des temps  $t_0$  et  $t_1$ ), alors elles ont la même trajectoire.
- b) Les trajectoires associées à deux solutions maximales sont soit les mêmes, soit disjointes.

#### Preuve :

a) Soient  $(J_1, x_1)$  et  $(J_2, x_2)$  deux solutions maximales tq  $\exists t_0 \in J_1, t_0 + s \in J_2$  (pour un  $s$ ) avec  $x_1(t_0) = x_2(t_0 + s) = x_0$ . D'après la proposition d'invariance par translation, on a :  $J_2 = \{t + s | t \in J_1\}$  et  $x_1(t) = x_2(t + s) \quad \forall t \in J_1$ .  
 $T_{x_1} = \{x_1(t) | t \in J_1\}$   $T_{x_2} = \{x_2(t') | t' \in J_2\}$   
En posant  $t' = t + s$  :  $T_{x_1} = \{x_2(t + s) | t \in J_1\} = \{x_2(t') | t' \in J_2\} = T_{x_2}$ .

b) Soient  $T_{x_1}$  et  $T_{x_2}$  deux trajectoires.

- Cas 1 :  $T_{x_1} \cap T_{x_2} \neq \emptyset$ . Alors  $\exists x_0 \in T_{x_1} \cap T_{x_2}$ . D'après a),  $T_{x_1} = T_{x_2}$ .
- Cas 2 :  $T_{x_1} \cap T_{x_2} = \emptyset$ . Les trajectoires sont disjointes.

□

### III. Équilibres et Stabilité des Équations Autonomes

#### 1 Notion d'équilibre

Considérons le problème ( $E$ ) :

$$X'(t) = F(t, X(t))$$

avec  $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue et localement lipschitzienne en  $x$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .

Dans la suite, nous nous intéressons particulièrement au cas autonome  $X'(t) = G(X(t))$  où  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

#### Définition 16: Solution stationnaire

$X$  est une solution stationnaire de ( $E$ ) sur  $J = \mathbb{R}$  si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = C \in \mathbb{R}^d$$

où  $C$  est une constante.

#### Définition 17: Point d'équilibre

$X^* \in \Omega$  est un point d'équilibre si  $G(X^*) = 0$ .

#### Remarque

Si  $G$  est localement lipschitzienne, alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) = G(X(t)) \\ X(t_0) = X^* \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur  $J = \mathbb{R}$ , qui est la fonction constante  $X(t) = X^*$ . En effet,  $X'(t) = 0$  et  $G(X(t)) = G(X^*) = 0$ , donc l'équation est vérifiée. L'unicité est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

#### Proposition 15: Comportement asymptotique et équilibre

Soit  $(J, X)$  une solution maximale du problème autonome  $X'(t) = G(X(t))$  avec  $G$  localement lipschitzienne.

Soit  $X^* \in \Omega$ . Si :

$$\lim_{t \rightarrow \sup J} X(t) = X^*$$

Alors :

1.  $\sup J = +\infty$ .
2.  $G(X^*) = 0$  (c'est-à-dire que  $X^*$  est un point d'équilibre).

#### Preuve :

##### 1. Montrons que $\sup J = +\infty$ .

Supposons que  $\lim_{t \rightarrow \sup J} X(t) = X^*$ .

On a  $J \subset \mathbb{R}$ . Comme la limite existe et vaut  $X^* \in \Omega$ ,  $X$  est bornée sur  $[t_0, \sup J]$ . En effet, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour  $t$  assez proche de  $\sup J$  (sur  $[\sup J - \varepsilon, \sup J]$ ), on a  $\|X(t) - X^*\| < 1$ , donc  $\|X(t)\| < 1 + \|X^*\|$ .

De plus,  $X$  est continue sur tout segment inclus dans  $J$  donc aussi bornée sur  $[t_0, \sup J - \varepsilon]$ . Ainsi, la fonction  $X$  est bornée sur  $J$ .

D'après le **critère d'explosion**, pour une solution maximale, nous avons l'alternative suivante :

Soit  $\sup J = +\infty$ , soit  $\lim_{t \rightarrow \sup J} \|X(t)\| = +\infty$  (ou  $X(t)$  s'approche du bord de  $\Omega$ ).

Or, nous venons de montrer que  $X(t)$  est bornée (et converge vers  $X^* \in \Omega$ , donc reste dans un compact de  $\Omega$ ). La deuxième option est donc impossible. On a forcément  $\sup J = +\infty$ .

**2. Montrons que  $G(X^*) = 0$ .**

Supposons par l'absurde que  $G(X^*) \neq 0$ .

Pour tout  $t \in J$ , on a  $X'(t) = G(X(t))$ . Puisque  $X(t) \rightarrow X^*$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et que  $G$  est continue, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(X(t)) = G(X^*) \neq 0$$

Cela signifie qu'il existe une composante  $i \in \{1, \dots, d\}$  telle que  $G_i(X^*) \neq 0$ . Supposons par exemple  $G_i(X^*) > 0$ .

On peut écrire :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t X'(s) ds \implies X_i(t) = X_i(t_0) + \int_{t_0}^t G_i(X(s)) ds$$

Puisque  $G_i(X(s)) \rightarrow G_i(X^*) > 0$ , par définition de la limite, il existe  $T > t_0$  tel que pour tout  $s \geq T$ ,  $G_i(X(s)) > \frac{G_i(X^*)}{2}$ .

Alors pour  $t \geq T$  :

$$X_i(t) = X_i(T) + \int_T^t G_i(X(s)) ds \geq X_i(T) + (t - T) \frac{G_i(X^*)}{2}$$

Quand  $t \rightarrow +\infty$ , le terme de droite tend vers  $+\infty$ . Donc  $X_i(t) \rightarrow +\infty$ .

Or, par hypothèse,  $X(t) \rightarrow X^*$ , donc  $X_i(t) \rightarrow X_i^* \in \mathbb{R}$ . C'est une contradiction.

On en déduit que  $G(X^*) = 0$ .

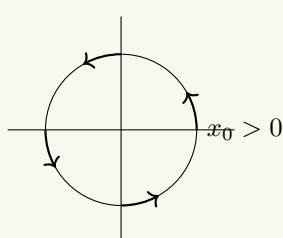
□

### Remarque

La réciproque est fausse. Si  $\sup J = +\infty$ , la limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$  n'existe pas forcément.

### Exemple 8: Oscillateur harmonique

Considérons le système défini sur  $J = \mathbb{R}$ .



$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \quad \text{avec } F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

La solution est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un équilibre.

Ici,  $\sup J = +\infty$ . Pourtant,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$  n'existe pas (le point tourne indéfiniment sur le cercle unité). L'origine  $(0, 0)$  est le seul point d'équilibre, mais la solution ne converge pas vers lui.

## 2 Stabilité des équilibres

### Définition 18: Équilibre attractif et répulsif

Soit  $X^*$  un point d'équilibre de  $X' = G(X)$ .

- **Attractif :** L'équilibre  $X^*$  est dit attractif s'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $X^*$  tel que pour toute solution maximale  $(J, X)$  avec  $X(t_0) \in V$ , on a :

$$\sup J = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = X^*$$

- **Répulsif :** L'équilibre  $X^*$  est dit répulsif s'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $X^*$  tel que pour toute solution maximale  $(J, X)$  avec  $X(t_0) \in V \setminus \{X^*\}$ , la solution finit par sortir de  $V$ . C'est-à-dire :

$$\exists T \in J \quad \forall t \in [T, +\infty[, \quad X(t) \notin V$$

## 3 Équations autonomes en dimension 1

Nous considérons ici le cas  $d = 1$ . L'équation s'écrit :

$$x'(t) = f(x(t))$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est localement lipschitzienne.

### Ligne de phase

On définit la notion de **ligne de phase** en représentant l'axe des réels et le sens de parcours des solutions :

- Si  $f(x) > 0$ , la dérivée  $x'(t)$  est positive, donc  $x(t)$  croît (flèche vers la droite  $\rightarrow$ ).

$$\begin{array}{c} f(x(t)) > 0 \\ \xrightarrow{x(t)} \end{array}$$

- Si  $f(x) < 0$ , la dérivée  $x'(t)$  est négative, donc  $x(t)$  décroît (flèche vers la gauche  $\leftarrow$ ).
- Si  $f(x) = 0$ , c'est un point d'équilibre.

### Exemple 9: L'équation logistique

Soit l'équation  $x' = rx(1 - x)$  avec  $r > 0$ . Ici  $f(x) = rx(1 - x)$ .

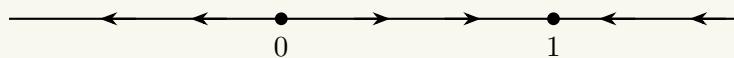
- Équilibres :  $f(x) = 0 \iff x = 0$  ou  $x = 1$ .

- Signe de  $f$  :

- Sur  $]-\infty, 0[$ ,  $f(x) < 0$  (décroissant).
- Sur  $]0, 1[$ ,  $f(x) > 0$  (croissant).
- Sur  $]1, +\infty[$ ,  $f(x) < 0$  (décroissant).

Ainsi :

- 1 est un point d'équilibre **attractif**. Il existe un voisinage  $V = ]0, +\infty[$  tel que toute solution partant dans  $V$  tend vers 1.
- 0 est un point d'équilibre **répulsif**.



## Proposition 16: Dynamique en dimension 1

Considérons une équation autonome :

$$x'(t) = g(x(t))$$

avec  $g$  localement lipschitzienne.

Soit  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $(J, x)$  une solution maximale vérifiant  $x(t_0) = x_0$ .

Soit  $x_+$  le plus petit équilibre de  $g$  tel que  $x_0 \leq x_+$  (S'il n'existe pas, on note  $x_+ = +\infty$ ). Soit  $x_-$  le plus grand équilibre de  $g$  tel que  $x_- \leq x_0$  (S'il n'existe pas, on note  $x_- = -\infty$ ).

1. Si  $g(x_0) = 0$ , alors  $J = \mathbb{R}$  et  $x(t) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .
2. Si  $g(x_0) > 0$ , alors  $x$  est une fonction **strictement croissante** vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow \inf J} x(t) = x_- \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = x_+$$

3. Si  $g(x_0) < 0$ , alors  $x$  est une fonction **strictement décroissante** vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = x_- \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \inf J} x(t) = x_+$$

4. Si  $\lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = x^*$  avec  $x^* \in \mathbb{R}$ , alors  $\sup J = +\infty$ .

Si  $\lim_{t \rightarrow \inf J} x(t) = x^*$  avec  $x^* \in \mathbb{R}$ , alors  $\inf J = -\infty$ .

### Remarque

Soit il n'existe pas d'équilibre  $x^*$  tel que  $x^* > x_0$ , dans ce cas,  $x^+ = +\infty$ . Sinon, on pose :

$$x^+ = \inf \underbrace{\{y \in [x_0, +\infty[ \mid g(y) = 0\}}_E$$

$E \neq \emptyset$  (car  $\exists x^* > x_0$  tel que  $g(x^*) = 0$ )  $\implies \inf E$  existe.  $E$  est minoré par  $x_0$ .

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $E$  telle que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x^+$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : g(x_n) = 0 \implies g(x^+) = 0 \quad \text{par continuité de } g \text{ en } x^+.$$

Donc  $x^+ \in E$ .

### Preuve :

**Cas trivial :** Si  $g(x_0) = 0$ , alors  $x_0$  est un équilibre. Par unicité de la solution (Cauchy-Lipschitz),  $x(t) = x_0$  pour tout  $t$ .

**Cas  $g(x_0) > 0$ :**

**1. Signe de  $g$  sur l'intervalle :** D'après la définition de  $x_-$  et  $x_+$ , il n'y a pas d'équilibre dans l'intervalle  $[x_-, x_+]$ . La fonction  $g$  ne s'annule pas sur cet intervalle. Comme  $g$  est continue et  $g(x_0) > 0$ , par le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI), on a :

$$\forall y \in ]x_-, x_+[, \quad g(y) > 0$$

### 2. Confinement de la solution :

Si  $x_+$  ou  $x_-$  ne sont pas finis, alors c'est trivial ( $-\infty < x(t) < +\infty, \forall t \in J$ )

Montrons que pour tout  $t \in J$ ,  $x(t) \in ]x_-, x_+[$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $t_1$  tel que  $x(t_1) \geq x_+$  (dans le cas  $x_+ < +\infty$ ). Puisque  $x$  est continue, par le TVI, il existe un temps  $\tau$  entre  $t_0$  et  $t_1$  tel que  $x(\tau) = x_+$ . Or, nous avons montré que  $g(x_+) = 0$ . Donc la fonction constante  $y(t) = x_+$  est une solution. Par unicité de Cauchy-Lipschitz, les trajectoires ne peuvent pas se croiser. Donc  $x(t)$  ne peut jamais atteindre  $x_+$ . De même,  $x(t)$  ne peut jamais atteindre  $x_-$ .

Ainsi  $\forall t \in J, x(t) \in ]x_-, x_+[$ . Comme  $x(t) \in ]x_-, x_+[$ , on a  $x'(t) = g(x(t)) > 0$ . Donc la solution  $x$  est **strictement croissante**.

**3. Étude des limites (Cas par Cas)** : Comme  $x$  est croissante, elle admet une limite en  $\sup J$ .

- **Cas  $x_+ < +\infty$**  : La solution est bornée par  $x_+$ . D'après le **critère d'explosion**, on a nécessairement  $\sup J = +\infty$ . Soit  $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ . D'après la proposition précédente,  $L$  est un équilibre ( $g(L) = 0$ ). Comme  $x$  est croissante partant de  $x_0$ , on a  $x_0 < L \leq x_+$ . Or il n'y a aucun équilibre entre  $x_0$  et  $x_+$ . Donc nécessairement  $L = x_+$ .

- **Cas  $x_+ = +\infty$**  :

- Si  $\sup J < +\infty$ , par le critère d'explosion,  $x(t)$  doit sortir de tout compact, donc  $\lim x(t) = +\infty$ .
- Si  $\sup J = +\infty$ . Supposons que la limite soit finie  $L < \infty$ . Alors  $L$  serait un équilibre (car asymptote). Mais  $L > x_0$ , donc  $L \in E_+$ , ce qui contredit  $x_+ = +\infty$  (ensemble vide). Donc  $\lim x(t) = +\infty$ .

Le raisonnement est analogue pour  $t \rightarrow \inf J$  et pour le cas  $g(x_0) < 0$ . □

## IV. Solutions explicites en dimension 1

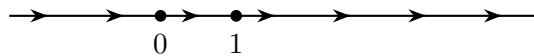
### 1 Exemple

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

**Heuristique :**

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1 \quad \forall t \in J \text{ avec } (J, x) \text{ une solution maximale}$$

$f(x) = x^2$ ,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ .



D'après ce que l'on a vu, on sait que la solution  $(J, x)$  est strictement croissante et satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \inf J} x(t) = 0$$

donc  $\inf J = -\infty$ .

$J = ]-\infty, \sup J[$ .  $\forall t \in J, x(t) > 0$ .

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1 \quad \forall t \in J \quad (\forall t \in J, x(t) \neq 0)$$

On intègre entre 0 et  $t$  et on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(0)} = t &\implies -\frac{1}{x(t)} + 1 = t \implies -\frac{1}{x(t)} = t - 1 \implies \frac{1}{x(t)} = 1 - t \implies x(t) = \frac{1}{1-t} \\ &\sup J = 1. \end{aligned}$$

De manière plus générale, on peut considérer des équations de la forme  $x'(t) = R(t)g(x(t))$ .  $x'(t) = x^2(t)$  est donnée dans ce cadre avec  $R(t) = 1$  et  $g(X) = X^2$ .

Afin d'être dans le cadre de Cauchy-Lipschitz, on suppose :

- $R : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue ( $I$  ouvert de  $\mathbb{R}$ )
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localement lipschitzienne.

$f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\Omega = I \times \mathbb{R}$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$

$$(t, x) \rightarrow R(t)g(x)$$

$f$  est continue car produit de fonctions continues.  $f$  est localement lipschitzienne en  $x$  :

$\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0$  t.q  $f$  lipschitzienne sur  $V = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$   
 $([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset I)$   
 $\forall (t, x), (t, y) \in V$

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &\leq |R(t)||g(x) - g(y)| \\ &\leq R(t) \cdot C_\varepsilon |x - y| \\ &\leq C_\varepsilon \cdot \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |R(t)| |x - y| \end{aligned}$$

Solution maximale de :

$$\begin{cases} y'(t) = R(t)g(y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Heuristique :**  $\forall t \in J$ ,  $\frac{x'(t)}{x(t)} = R(t)$  pourvu que  $g(y(t)) \neq 0$ .

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^t R(s) ds$$

$G$  est une primitive de  $\frac{1}{g}$  (pourvu que l'on soit dans une zone où  $g$  ne s'annule pas).  $R$  continue donc admet une primitive  $H$ .

$$\begin{aligned} G(x(t)) - G(x(t_0)) &= H(t) - H(t_0) \\ &= G(x(t_0)) + H(t) - H(t_0) \end{aligned}$$

Si  $G$  inversible sur un ouvert dans lequel  $x(t)$  prend ses valeurs, on aura :

$$x(t) = G^{-1}(G(x_0) + (H(t) - H(t_0))) \quad \forall t \in J$$

### Proposition 17

Considérons le problème de Cauchy (1) :

$$\begin{cases} x'(t) = R(t)g(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$R : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localement Lipschitz. Soit  $(J, x)$  la solution maximale de (1).

1. Si  $g(x_0) = 0$  alors  $x(t) = x_0 \quad \forall t \in J \quad J = I$ .
2. Si  $g(x_0) \neq 0$  alors  $\forall t \in J \quad g(x(t)) \neq 0$  et  $\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{t_0}^t R(s) ds$ .

**Preuve :**

- 1) Si  $g(x_0) = 0$ ,  $y : \overset{I \rightarrow \mathbb{R}}{t \mapsto x_0}$  est solution du pb car :

$$\begin{aligned} y'(t) &= 0 = g(y(t))R(t) \\ &= g(x_0)R(t) \\ &= 0 \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

En appliquant le thm de Cauchy-Lipschitz avec  $f(t, x) = R(t)g(x)$  qui est continue sur  $I \times \mathbb{R}$  et localement Lipschitz en  $x$ . On a par unicité  $x(t) = x_0 \quad \forall t \in J$  avec  $J = I$ .

- 2) Supposons par l'absurde  $\exists t_1 \in J$ ,  $g(x(t_1)) = 0$ . Soit  $(J, x)$  sol max du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = R(t)g(y(t)) \\ y(t_1) = x(t_1) \end{cases}$$

En utilisant le thm de Cauchy-Lipschitz on a par unicité de la solut° maximale  $x(t) = x(t_1)$  avec  $J = I$ . ABSURDE car  $x(t_0) = x_0 \neq x(t_1)$  car  $g(x_0) \neq 0$  et  $g(x(t_1)) = 0$ .

$\forall t \in J$ ,  $g(x(t)) \neq 0$

$$\begin{cases} g \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ donc} \\ x : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \end{cases}$$

La fonction  $t \mapsto g(x(t))$  est continue  $J \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\forall t \in J$ ,  $g(x(t)) \neq 0$ . Donc par le TVI,  $\forall t \in J$ , la fonction  $t \mapsto g(x(t))$  est de signe constant.

On a  $x'(t) = R(t)g(x(t))$ . Donc  $\forall t \in J$ ,  $\frac{x'(t)}{g(x(t))} = R(t)$ .

On intègre entre  $t_0$  et  $t$  :

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^t R(s) ds$$

Posons le changement de variable :

$$\begin{cases} u = x(s) \\ du = x'(s) ds \end{cases} \implies \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^t R(s) ds$$

□

### Remarque

On observe que  $\forall s \in J$ ,  $x'(s) = g(x(s))R(s)$ . Supposons sans restriction que  $g(x(s)) > 0 \forall s \in J$ . Soit  $V = J \cap R^{-1}(\mathbb{R}^*)$ .  $V$  est un ouvert car intersection d'ouverts. En effet,  $R$  est continue et  $\mathbb{R}^*$  est un ouvert.

Pour rendre les choses rigoureuses, on a  $V = \bigcup_{i \in A} C_i$  avec  $C_i$  des intervalles ouverts qui sont les composantes connexes de  $V$ . On en déduit :

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \sum_{i \in A} \int_{C_i \cap [t_0, t]} \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds$$

Le changement de variable  $u = x(s)$  est rigoureux car sur  $C_i$ , on a  $R(t) > 0$  (ou  $R(t) < 0$ ) pour tout  $t \in C_i$ . Donc  $x'(t) = g(x(t))R(t)$  garde un signe constant (strictement positif ou strictement négatif)  $\forall t \in C_i$ .

**Conclusion :**  $x$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $C_i$  sur  $x(C_i)$  par le théorème d'inversion locale (cadre global).

### Remarque

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{t_0}^t R(s) ds$$

Pour  $t \in J$ , on sait que sur l'intervalle  $J_t = [\min(x_0, x(t)), \max(x_0, x(t))]$  :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall u \in J_t, g(u) > \alpha > 0 \text{ ou } g(u) < -\alpha < 0.$$

Car  $g$  est continue sur le compact  $J_t$  et ne s'annule pas ( $\forall u \in J_t, g(u) \neq 0$ ).

Par le TVI, on sait que  $g(u) > 0$  ou  $g(u) < 0$  pour tout  $u \in J_t$  (et par extension sur l'image connexe).

(1)  $\forall u \in J_t \quad g(u) \geq \inf_{\alpha \in J_t} g(\alpha) = g(\beta_{t_1}) = \alpha_t \quad (\alpha_t \in \mathbb{R}_+^*)$

Puisque  $u \rightarrow \frac{1}{u}$  est continue sur  $J_t$ , cette fonction admet une primitive que l'on note :

$$\varphi(x(t)) - \varphi(x_0) = \int_{t_0}^t R(s) ds$$

Puisque sur  $J_t \quad \varphi'(u) = \frac{1}{g(u)}$

- cas 1 :  $g(u) > 0 \forall u \in J_t$  alors  $\varphi$  str. ↗ et donc inversible.
- cas 2 :  $g(u) < 0 \forall t \in J_t$  et la même chose.

$$\varphi \text{ inversible sur } J_t \text{ et } x(t) = \varphi^{-1} \left( \varphi(x_0) + \int_{t_0}^t R(s) ds \right)$$

### Remarque

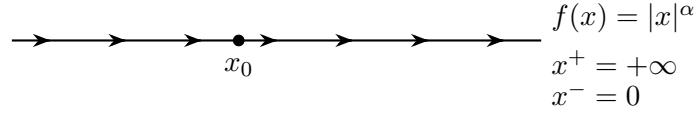
Si on regarde :

$$\begin{cases} x'(t) = K(x(t))^\alpha \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$K > 0$  alors si  $\alpha > 1$  la solution maximale de (E) est définie sur :

- $] -\infty, T[$  si  $x_0 > 0$  avec  $T < +\infty$  ( $\rightarrow \lim_{t \rightarrow T} x(t) = +\infty$ )
- $]T, +\infty[$  si  $x_0 < 0$  avec  $T < +\infty$  ( $\rightarrow \lim_{t \rightarrow T} x(t) = -\infty$ )

$$(1) \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = |x|^\alpha \text{ (Attention : c'est bien } C^1\text{). On est bien dans le cas de Cauchy-Lipschitz.}$$



$x_0 > 0$  on a vu que  $\forall t \in J \ x(t) > 0$ .  $x$  est strictement croissante sur  $J$  avec  $\lim_{t \rightarrow \inf J} x(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = +\infty$ .

$$x'(t) = |x|^\alpha(t) \quad \forall t \in J = x^\alpha(t) \text{ car } \forall t \in J \ x(t) > 0$$

$$\frac{x'(t)}{x^\alpha(t)} = 1 \quad \forall t \in J$$

On intègre entre  $t_0$  et  $t$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{x^{1-\alpha}(t)}{1-\alpha} - \frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} &= t - t_0 \\ x^{1-\alpha}(t) - x_0^{1-\alpha} &= (1-\alpha)(t-t_0) \iff \frac{1}{x^{\alpha-1}(t)} = \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} + (1-\alpha)(t-t_0) \\ \iff x(t) &= \left( \frac{1}{\frac{1}{x_0^{\alpha-1}} + (1-\alpha)(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= ]-\infty, T[ \text{ avec } \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} + (1-\alpha)(T-t_0) = 0 \\ &\iff T = t_0 + \frac{1}{(\alpha-1)x_0^{\alpha-1}} < +\infty \end{aligned}$$

On observe  $\lim_{t \rightarrow T} x(t) = +\infty$ .

## 2 Équations différentielles linéaires en dimension 1

- $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$

$a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  intervalle ouvert) et  $a, b$  continue.

$x'(t) = f(t, x(t))$  avec  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et localement lipschitz en  $x$ .

$$(t, x) \longrightarrow a(t)x + b(t)$$

Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$  ( $A$  existe car  $a$  est continue).

**Proposition 18: (H)** :  $x'(t) = a(t)x(t)$

1. Les solutions maximales de H s'écrivent sous la forme  $x(t) = \lambda e^{A(t)}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. Le problème  $(C)$  =  $\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$  a une unique solution maximale  $x(t) = x_0 \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right) \forall t \in I$ .

**Preuve :**

On est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz, soit  $(X, J)$  une solution maximale.

$$y(t) = x(t)e^{-A(t)}$$

$$y'(t) = x'(t)e^{-A(t)} - x(t)a(t)e^{-A(t)}$$

$$= \exp(-A(t))(x'(t) - a(t)x(t))$$

$\forall t \in J$   $y'(t) = 0$ .  $J$  est connexe,  $y$  dérivable i.e  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$   $y(t) = \lambda$  i.e  $x(t) = \lambda e^{A(t)}$ . Puisque cette solution est maximale on doit avoir  $J = I$  car la fct<sup>o</sup>  $t \rightarrow \lambda e^{A(t)}$  est bien définie sur  $I$ .

2. D'après 1 on a  $x(t) = \lambda e^{A(t)} \forall t \in J$ . Choisissons  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds \forall t \in I$   $x(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$ .

$$x(t_0) = \lambda = x_0$$

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \forall t \in I$$

□

### Proposition 19: (NH) : $a(t)x(t) + b(t)$

1. Les solutions maximales de (NH) sont définies sur  $I$  et données par la formule de Duhamel :

$$\forall t \in J \quad x(t) = \lambda e^{A(t)} + \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_s^t a(u)du} ds \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Le problème (NH) avec données initiale  $x(t_0) = x_0$  a une unique solution globale avec  $\lambda = x_0$ ,  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ .

3. Soit  $x_p$  une solution de (NH) alors les solution de (NH) s'écrivent  $x(t) = x_p(t) + \lambda e^{A(t)}$ . On dit que (NH) est somme d'une solution particulière de (NH) et d'une solution de (H).

$$S_{NH} = \{\text{ensemble des solutions de (NH)}\}$$

$$S_H = \{\text{ensemble des solutions de (H)}\}$$

On a  $S_{NH} = x_p(\cdot) + S_H$ .

4. Les solutions de (NH) forment un espace affine de dimension 1 dont l'espace vectoriel associé correspond aux solutions de (H).

### Preuve :

**Preuve des points 1 et 2 :** Soit  $(X, J)$  une solution maximale de (E) avec  $t_0 \in J$ .

(Méthode de la variation de la constante) On pose :  $x(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$  où  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $I$ .  $\lambda$  est  $C^1$  comme produit de fonctions  $C^1$ . On dérive :

$$x'(t) = \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)a(t)e^{A(t)}$$

Or  $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ . Donc :

$$\begin{aligned} \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)a(t)e^{A(t)} &= a(t)\lambda(t)e^{A(t)} + b(t) \\ \implies \lambda'(t)e^{A(t)} &= b(t) \\ \implies \lambda'(t) &= b(t)e^{-A(t)} \end{aligned}$$

On intègre entre  $t_0$  et  $t$  :

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds$$

On remplace dans l'expression de  $x(t)$  :

$$x(t) = \left( \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds \right) e^{A(t)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda(t_0)e^{A(t)} + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(t)}e^{-A(s)} ds \\ &= \lambda(t_0)e^{A(t)} + \int_{t_0}^t b(s)e^{A(t)-A(s)} ds \end{aligned}$$

En posant  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ , en utilisant la formule de Chasles, on a  $A(t) - A(s) = \int_s^t a(u)du$ . D'où la formule :

$$x(t) = \lambda e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(u)du\right) ds$$

En particulier, puisque la formule  $\circledast$  est valide pour tout  $t \in I$  (car les fonctions  $a$  et  $b$  sont continues sur  $I$  tout entier), on en déduit que  $J = I$  et donc la solution est globale.

Considérons le problème de Cauchy  $(C)$  :

$$(C) \quad \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{avec } t_0 \in I$$

D'après le Thm de Cauchy-Lipschitz,  $(C)$  a une unique solution maximale qui est globale (cf. 1°). On a pour tout  $t \in I$  :

$$x(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^t a(u)du\right) + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(u)du\right) ds$$

Avec la condition initiale, on trouve  $x(t_0) = \lambda = x_0$ .

On peut décomposer cette solution en deux parties :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad x(t) &= \underbrace{x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)}_{\text{Solution du problème}} + \underbrace{\int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(u)du\right) ds}_{\text{Solution du problème}} \\ &\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Preuve du point 3 (Structure de l'espace)** : Soit  $x_p$  une solution globale du problème (NH) :  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ . Soit  $x$  une solution quelconque globale de (NH). Posons  $y(t) = x(t) - x_p(t)$  pour tout  $t \in I$ . Dérivons  $y$  :

$$\begin{aligned} y'(t) &= x'(t) - x'_p(t) \\ &= (a(t)x(t) + b(t)) - (a(t)x_p(t) + b(t)) \\ &= a(t)(x(t) - x_p(t)) = a(t)y(t) \end{aligned}$$

Donc  $\tilde{y}$  est solution de l'équation homogène  $(H)$  :  $\tilde{y}'(t) = a(t)\tilde{y}(t)$ .

On a donc  $S_{NH} = x_p(\cdot) + S_H$  avec :

$$S_H = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x(t) \mid (I, x(\cdot)) \text{ solution de (H)}\}$$

$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On observe que  $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in S_H \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in I, x(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$ .

$$(\lambda_1 x)(t) = \lambda_1 x(t) = \lambda_1 \lambda \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$$

Comme  $\lambda_1 \lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda_1 x \in S_H$ .

De même, soient  $x_1, x_2 \in S_H$ , alors  $\exists \lambda_1, \lambda_2$  tels que :

$$x_1(t) = \lambda_1 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$$

$$x_2(t) = \lambda_2 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \quad \forall t \in I$$

$$x_1(t) + x_2(t) = (\lambda_1 + \lambda_2) \left( e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \right)$$

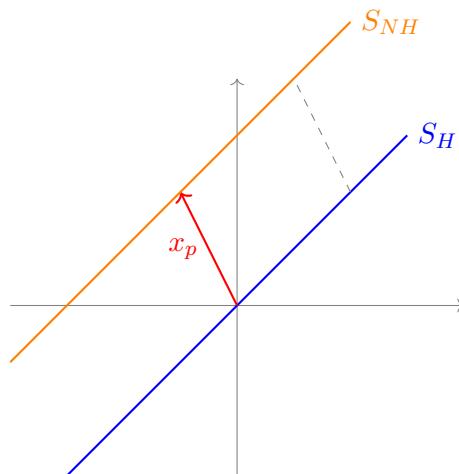
$$\implies x_1 + x_2 \in S_H$$

$S_H$  est un espace vectoriel :

$$S_H = \text{vect} \left\{ t \mapsto \exp \left( \int_{t_0}^t a(s)ds \right) \right\}$$

$$\dim S_H = 1$$

$S_H$  est une droite vectorielle puisque  $S_{NH} = x_p + S_H$ .



$S_{NH}$  est un espace affine de dimension 1. □

#### Remarque

Pour calculer les solutions explicites de ( $NH$ ) :

1. On essaie de trouver une solution particulière  $x_p(t)$  (souvent évidente ou de même forme que  $b(t)$ ) et on écrit ensuite la solution générale sous la forme  $t \mapsto x_p(t) + \lambda e^{A(t)}$ .
2. Si on n'arrive pas à trouver une solution particulière intuitivement, on utilise la **formule de Duhamel** (variation de la constante).

### 3 Principe de superposition

#### Proposition 20: Critère de superposition

Soient  $a, b_1, b_2$  des fonctions continues sur  $I$ .

- Soit  $x_1$  une solution de  $x'(t) = a(t)x(t) + b_1(t)$ .
- Soit  $x_2$  une solution de  $x'(t) = a(t)x(t) + b_2(t)$ .

Alors  $x = x_1 + x_2$  est solution du problème :

$$y'(t) = a(t)y(t) + (b_1(t) + b_2(t))$$

#### Preuve :

Calcul direct :

$$\begin{aligned} x'(t) &= (x_1 + x_2)'(t) = x'_1(t) + x'_2(t) \\ &= (a(t)x_1(t) + b_1(t)) + (a(t)x_2(t) + b_2(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a(t)(x_1(t) + x_2(t)) + b_1(t) + b_2(t) \\
&= a(t)x(t) + (b_1(t) + b_2(t))
\end{aligned}$$

□

### Exemple 10: Application du principe de superposition

**Exercice :** Résoudre l'équation :

$$x'(t) = -x(t) + t + e^t$$

On identifie les seconds membres  $b_1(t) = t$  et  $b_2(t) = e^t$ .

On décompose le problème en cherchant des solutions particulières pour :

$$\begin{cases} x'_1(t) = -x_1(t) + t & \text{Forme candidate : } \alpha t + \beta \\ x'_2(t) = -x_2(t) + e^t & \text{Forme candidate : } \alpha e^t \end{cases}$$

## V. Principe de Comparaison

## VI. Sous-solutions et Sur-solutions

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x'(t) = f(t, x(t)) \quad (2)$$

où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $\Omega$  et localement lipschitzienne en  $x$ . On suppose  $\Omega = I \times \mathbb{R}$  avec  $I$  un intervalle ouvert.

### Définition 19: Sous-solutions et Sur-solutions

On définit la notion de sous-solution et sur-solution de  $(E)$ .

Soit  $J \subset I$  un intervalle ouvert.

- On dit que  $(J, x)$  est une **sur-solution** de  $(E)$  si :

$$\forall t \in J, \quad x'(t) \geq f(t, x(t))$$

- On dit que  $(J, y)$  est une **sous-solution** de  $(E)$  si :

$$\forall t \in J, \quad y'(t) \leq f(t, y(t))$$

### 1 Heuristique

On veut résoudre le problème  $(C) : x'(t) = f(t, x(t))$ . Soit  $g$  une fonction de  $I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}, f(t, x) \leq g(t, x)$ .

Si  $(J, x)$  est solution maximale de  $(E)$  avec  $x(t_0) = x_0$  ( $t_0 \in J$ ), alors  $\forall t \in J$  :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \leq g(t, x(t))$$

Ainsi,  $(J, x)$  est une sous-solution du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si  $g$  est continue et localement lipschitzienne en  $x$ , on va montrer que pour  $(x_1, J_1)$  une solution maximale de  $(C_1)$  (le problème associé à  $g$ ), on a :

$$\forall t \in [t_0, \sup J] \cap [t_0, \sup J_1] : \quad x(t) \leq x_1(t)$$

Si  $\sup J < +\infty$ , alors  $\sup J \geq \sup J_1$  ou  $x(t) \rightarrow -\infty$  quand  $t \rightarrow \sup J$  (d'après le critère d'explosion).

### 2 Principe de comparaison

Lorsque l'on définit la notion de sous et sur-solutions, il est entendu que  $x$  et  $y$  sont dérivables.

#### Remarque

Si  $u$  est une sous-solution de  $(E)$  sur  $J$  et  $v$  est une sur-solution de  $(E)$  sur  $J$ , alors on a :

$$\forall t \in J, \quad u'(t) \leq f(t, u(t))$$

$$\forall t \in J, \quad v'(t) \geq f(t, v(t))$$

**Attention :** Cela n'implique pas que  $u'(t) \leq v'(t)$ .

### Exemple 11: Contre-exemple sur les dérivées

Considérons :

$$u(t) = e^t, \quad x(t) = 0, \quad v(t) = -e^{-t}$$

Equation (E) :  $x'(t) = 2x(t)$ .

$u$  est une sous-solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ ?

$$u'(t) = e^t \leq 2e^t = 2u(t) \quad (\text{Vrai})$$

$v$  est une sur-solution de (E) sur  $\mathbb{R}^+$ ?

$$v'(t) = e^{-t} \geq 2(-e^{-t}) = 2v(t) \quad (\text{Vrai pour } t \geq 0)$$

Cependant, regardons l'ordre des dérivées :  $u'(t) = e^t$  et  $v'(t) = e^{-t}$ . On n'a pas nécessairement d'ordre simple entre elles (dépend du signe de  $t$  et de l'équation).

Ici, on a bien  $u$  sous-solution,  $v$  sur-solution, et  $x$  solution de (E). Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u'(t) = e^t \leq 2e^t = 2u(t)$  et  $v'(t) = e^{-t} \geq -2e^{-t} = 2v(t)$ .

## 2.1 Cas Linéaire

### Proposition 21: Principe de comparaison (Cas linéaire)

Soient  $a$  et  $b$  des fonctions continues sur  $I$ . Soit  $u$  une sous-solution et  $v$  une sur-solution de :

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

Alors :

$$\text{Si } u(t_0) \leq v(t_0), \quad \text{alors } u(t) \leq v(t) \quad \forall t \geq t_0 \text{ (dans l'intervalle de définition)}$$

#### Remarque

Si  $u$  est définie sur  $t \in ]T_0, \tilde{T}_0[$  et  $v$  est définie sur  $t \in ]T_1, \tilde{T}_1[$ . On considère  $t \in [t_0, +\infty] \cap T_0, \tilde{T}_0 \cap T_1, \tilde{T}_1[$ .

#### Preuve :

Considérons  $w(t) = v(t) - u(t)$  pour  $t$  dans l'intersection des domaines.  $w$  est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$w'(t) = v'(t) - u'(t)$$

Or  $v'(t) \geq a(t)v(t) + b(t)$  (sur-solution) et  $u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t)$  (sous-solution). Donc :

$$w'(t) \geq (a(t)v(t) + b(t)) - (a(t)u(t) + b(t))$$

$$w'(t) \geq a(t)(v(t) - u(t)) = a(t)w(t)$$

On a donc l'inégalité différentielle  $w'(t) - a(t)w(t) \geq 0$ .

Soit  $A(t)$  une primitive de  $a(t)$ . Posons  $z(t) = e^{-A(t)}w(t)$ . Dérivons  $z(t)$  :

$$z'(t) = -a(t)e^{-A(t)}w(t) + e^{-A(t)}w'(t)$$

$$z'(t) = e^{-A(t)}(w'(t) - a(t)w(t))$$

Comme  $e^{-A(t)} > 0$  et  $w'(t) - a(t)w(t) \geq 0$ , on a :

$$z'(t) \geq 0 \quad \forall t \in ]T_0, \tilde{T}_0 \cap T_1, \tilde{T}_1[$$

Donc  $z$  est croissante sur cet intervalle (Théorème des accroissements finis).

On a supposé  $u(t_0) \leq v(t_0)$ , donc  $w(t_0) = v(t_0) - u(t_0) \geq 0$ . Ainsi  $z(t_0) = w(t_0)e^{-A(t_0)} \geq 0$ .

Comme  $z$  est croissante, pour tout  $t \geq t_0$ ,  $z(t) \geq z(t_0) \geq 0$ . Or  $z(t) = e^{-A(t)}w(t)$  et  $e^{-A(t)} > 0$ , donc  $w(t) \geq 0$ . C'est-à-dire  $v(t) \geq u(t)$  pour tout  $t \geq t_0$ .  $\square$

### Remarque

Si  $u'(t) \leq a(t)u(t)$  pour tout  $t \geq t_0$ , alors  $u$  est une sous-solution du problème homogène ( $H$ ) :  $y'(t) = a(t)y(t)$ . Soit  $v$  la solution du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(0) = u(0) \end{cases}$$

$u$  est sous-solution de ( $H$ ),  $v$  est solution (donc sur-solution) de ( $H$ ). En appliquant le résultat précédent en  $t_0 = 0$  (car  $v(0) = u(0)$ ), on peut écrire :

$$\forall t \geq 0, \quad u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t a(s)ds} = v(t)$$

C'est l'**Inégalité de Gronwall**.

## 2.2 Cas Non-Linéaire

### Proposition 22: Principe de comparaison (Cas général)

Soit  $f \in \mathcal{C}^1$  (ou  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et localement lipschitzienne en  $x$ ). Soit  $u$  une sous-solution et  $v$  une sur-solution du problème :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Si  $u(t_0) \leq v(t_0)$ , alors :

$$\forall t \geq t_0, \quad u(t) \leq v(t)$$

### Preuve :

Posons  $w(t) = v(t) - u(t)$ . On a  $w'(t) = v'(t) - u'(t)$ . D'après les définitions :

$$\forall t, \quad v'(t) \geq f(t, v(t))$$

$$\forall t, \quad u'(t) \leq f(t, u(t))$$

Donc :

$$w'(t) \geq f(t, v(t)) - f(t, u(t))$$

On veut factoriser cette différence.

$$f(t, v(t)) - f(t, u(t)) = a(t)(v(t) - u(t))$$

où l'on définit la fonction  $a(t)$  par :

$$a(t) = \begin{cases} \frac{f(t, v(t)) - f(t, u(t))}{v(t) - u(t)} & \text{si } v(t) \neq u(t) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t)) & \text{si } v(t) = u(t) \end{cases}$$

Si  $u(t) \neq v(t)$  :

$$f(t, v(t)) - f(t, u(t)) = a(t)(v(t) - u(t))$$

Si  $u(t) = v(t)$  :

$$f(t, v(t)) - f(t, u(t)) = 0$$

Supposons que  $a$  est continue. Alors on peut appliquer la proposition précédente (cas linéaire). Pour tout  $t \geq t_0$ , on compare  $w(t)$  avec la solution  $w_1$  du problème :

$$\begin{cases} z'(t) = a(t)z(t) \\ z(t_0) = w(t_0) \end{cases}$$

$w$  est une sur-solution de  $z' = a(t)z$  (car  $w' \geq aw$ ) et  $w_1$  est une solution (donc sous-solution). Or  $w(t_0) = v(t_0) - u(t_0) \geq 0$ . Et la solution explicite est  $w_1(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$ . Comme  $w(t_0) \geq 0$  et l'exponentielle est positive,  $w_1(t) \geq 0$ .

Le principe de comparaison linéaire implique  $w(t) \geq w_1(t) \geq 0$ . Donc  $v(t) \geq u(t)$  pour tout  $t \geq t_0$ .  $\square$