Polycopié de Calcul Différentiel et Équations Différentielles
L3 MIDO

Cours de Borris Haspot
Retranscrit par Bastien Marbaud et Victor Barbera
Compilé par Samuel Lelouch avec Gemini

27 novembre 2025

Table des matières

Calcul Différentiel

I. Théorème d'inversion locale

Définition 1: C1-difféomorphisme

Soient U un ouvert de E, V un ouvert de F. On dit que $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme lorsque :

- f bijective
- $f \in \mathcal{C}^1$ et $f^{-1} \in \mathcal{C}^1$

Remarque

La notion de difféomorphisme induit l'utilisation d'ouverts (naturel si on veut vérifier que l'application est différentiable).

Si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V :

$$\forall x \in U, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in V, f(f^{-1}(y)) = y$$

Par dérivation en chaîne :

$$df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = id_E \quad \text{et} \quad df(f^{-1}(y)) \circ df^{-1}(y) = id_F$$

$df(x)$ et $df^{-1}(y)$ sont donc des applications linéaires inversibles, avec $df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ et $df^{-1}(y) \in \mathcal{L}(F, E)$.

$(df(x))^{-1} = df^{-1}(y) = df^{-1}(f(x))$
$\implies \dim E = \dim F$.

Théorème 1: Théorème d'inversion locale

Soient U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df(x_0)$ est inversible.

Alors il existe un ouvert U' de x_0 ($U' \subset U$) et V' un ouvert de $y_0 = f(x_0)$ tels que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U' sur V'.

De plus, $\forall y \in V', df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1}$.

Preuve :

On pose $\Phi : U \times F \to F$

$$(x, y) \mapsto y - f(x)$$

Φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ car f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Calculons la différentielle partielle de Φ par rapport à x au point (x_0, y_0) :

$$d\Phi_x(x_0, y_0) : E \to F$$

$$v \mapsto d\Phi_x(x_0, y_0)(v) = -df(x_0)(v)$$

On a $d\Phi_x(x_0, y_0) = -df(x_0)$.
C'est bien une application inversible (par hypothèse sur $df(x_0)$). On peut donc appliquer le Théorème des Fonctions Implicites.
Vérifions le point de base : $\Phi(x_0, y_0) = y_0 - f(x_0) = 0$ (car $f(x_0) = y_0$).

Ainsi, il existe :

- U_1 un ouvert de x_0 dans E (que nous nommerons U')
- V_1 un ouvert de y_0 dans F (que nous nommerons V')
- $\varphi : V' \to U'$ une application de classe $\mathcal{C}^1$

telle que :

$$\forall y \in V', \exists! x \in U' \text{ t.q. } \Phi(x, y) = 0, \text{ et cet } x \text{ est } x = \varphi(y)$$

Or, $\Phi(x, y) = 0 \iff f(x) = y$.
On a donc $f(x) = y \iff x = \varphi(y)$. Ceci signifie que f est bijective de U' sur V', et que son application inverse f^{-1} est φ.
On a $f^{-1} = \varphi$, et on sait que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Donc $f : U' \to V'$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U' sur V'. □

Définition 2: Difféomorphisme local

Une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$) de classe $\mathcal{C}^1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local si :
$\forall x \in \Omega$, il existe U_x un voisinage ouvert de x et V_x un voisinage ouvert de $f(x)$ tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Proposition 1: Caractérisation Difféomorphisme local

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local si et seulement si $\forall x \in \Omega$, $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est inversible.

Preuve :

($\Rightarrow$) Si f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local. $\forall x \in \Omega$, $\exists U_x, V_x$ ouverts tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-diff. Donc $f^{-1}(f(x)) = x$ et $df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = id_{\mathbb{R}^n}$. Donc $df(x)$ est inversible.

($\Leftarrow$) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible. D'après le Th. d'Inversion Locale, $\forall x$, $\exists U_x$ (voisinage de x) et V_x (voisinage de $f(x)$) tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-diff. C'est la définition d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local. □

Corollaire 1: Application ouverte

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local. L'application f est ouverte :
Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (avec $U \subset \Omega$), alors $f(U)$ est un ouvert.

Preuve :

Soit $y \in f(U)$. Il existe $x \in U$ tq $y = f(x)$. Comme f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local, $df(x)$ est inversible. Donc il existe par le Th. d'Inversion Locale un voisinage de x, U_x, et un voisinage de $f(x)$, V_x, tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-diff.
On choisit U_x assez petit pour que $U_x \subset U$. On en déduit que $f(U_x) = V_x$. On a $y = f(x) \in V_x$ (qui est ouvert) et $V_x = f(U_x) \subset f(U)$.
On a trouvé un voisinage ouvert de y (c'est V_x) inclus dans $f(U)$. On en déduit que $f(U)$ est ouvert.
□

Remarque

Un $\mathcal{C}^1$-diff. local n'est pas toujours injectif (globalement).
Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$

$$(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

f est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais pas injective : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = f(x, y + 2\pi)$.
Calculons la Jacobienne $Jf(x,y)$:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(Jf(x,y)) &= (e^x \cos y)(e^x \cos y) - (-e^x \sin y)(e^x \sin y) \\ &= e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} > 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $df(x,y)$ est inversible, et f est un $\mathcal{C}^\infty$-diff. local.

Proposition 2: Difféo local + injectif

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-diff. local (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$). Si f est injective, alors f est un $\mathcal{C}^1$-diff. de Ω sur $f(\Omega)$.

Preuve :

$f : \Omega \to f(\Omega)$ avec f injective, donc f est bijective (par définition de $f(\Omega)$).
De plus, f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local, donc f est ouverte (d'après Cor. 1). Donc $f(\Omega)$ est un ouvert. f va bien d'un ouvert vers un autre ouvert.

- f est de classe $\mathcal{C}^1$.
- f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local donc $\forall x \in \Omega, \exists U_x$ (voisinage ouvert de x) et V_x (voisinage ouvert de $f(x)$) tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

En notant $\tilde{f}_x : V_x \to U_x$ l'inverse de ce difféomorphisme, on a $\tilde{f}_x = f^{-1}|_{V_x}$. Cela signifie que f^{-1} est localement $\mathcal{C}^1$, donc f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $f(\Omega)$. $\square$

Corollaire 2: Cas 1D

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I sur $f(I)$.

Définition 3: Difféomorphisme Global

Soient Ω et Λ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.
On dit que $f : \Omega \to \Lambda$ est un $\mathcal{C}^1$-**difféomorphisme global** si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Λ.

(C'est-à-dire, f est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$, et son inverse $f^{-1} : \Lambda \to \Omega$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$).

Théorème 2: Théorème d'Inversion Globale

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f est **injective** et f est un $\mathcal{C}^1$-**difféomorphisme local** (i.e. $\det(Jf(x)) \neq 0$ pour tout

$x \in \Omega$),
Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de Ω sur l'ouvert $f(\Omega)$.

II. Théorème de Hadamard

Définition 4: Application propre

Soient X, Y des espaces métriques (de dim. finie). On dit que $f : X \to Y$ est une application **propre** si f est continue et si $\forall K \subset Y$ compact, $f^{-1}(K)$ est un compact.

Remarque

f continue $\not\Rightarrow f$ propre.
En effet, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée (ex : $\arctan$). Pour M assez grand, $K = [-M, M]$ est compact. $f^{-1}(K) = f^{-1}([-M, M]) = \mathbb{R}$, qui n'est pas compact.

Proposition 3: Caractérisation application propre (R^n)

Une application continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est propre
$\Longleftrightarrow$
$\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

Preuve :

($\Leftarrow$) Supposons $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$. Ceci est équivalent à dire : $\forall M > 0, \exists N_M > 0$ tq $\forall \|x\| \geq N_M, \|f(x)\| \geq M$. Ou, par contraposée : si $f^{-1}(E)$ est borné dans $\mathbb{R}^n$, alors E est borné dans $\mathbb{R}^n$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. K est fermé et borné. $f^{-1}(K)$ est fermé (car f est continue et K est fermé). K est borné, donc $f^{-1}(K)$ est borné (par l'hypothèse).
$f^{-1}(K)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, donc $f^{-1}(K)$ est compact. f est donc propre.

($\Rightarrow$) Si f est propre. Supposons par l'absurde que $\|f(x)\|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.
La négation est : $\exists M > 0$ tq $\forall N > 0, \exists x_N$ tq $\|x_N\| \geq N$ et $\|f(x_N)\| \leq M$.
On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\|x_n\| \to +\infty$ (donc (x_n) n'est pas bornée) et $f(x_n) \leq M$.
Soit $E = \{f(x_n), n \in \mathbb{N}\}$. E est borné. Soit $K = \bar{E}$ (la fermeture de E). K est fermé et borné, donc K est compact.
Par hypothèse, f est propre, donc $f^{-1}(K)$ est compact.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \in K$, donc $x_n \in f^{-1}(K)$. La suite (x_n) est une suite d'un compact, elle doit donc être bornée.
Ceci est une CONTRADICTION avec $\|x_n\| \to +\infty$. $\square$

Proposition 4: Propre implique fermée

Une application propre $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est **fermée** (i.e. si F est un fermé de X, $f(F)$ est un fermé de Y).

Preuve :

Soit F un fermé de X. Soit (y_n) une suite de $f(F)$ tq $y_n \to y$ avec $y \in Y$. Il faut mq $y \in f(F)$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f(F)$, donc $\exists x_n \in F$ tq $y_n = f(x_n)$.
Soit $K = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{y\}$. K est un compact de Y (car la suite converge). Comme f est propre, $f^{-1}(K)$ est un compact de X.
$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in K \implies x_n \in f^{-1}(K)$.
(x_n) est une suite dans un compact $f^{-1}(K)$. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ tq $x_{\phi(n)} \to x^*$ avec $x^* \in f^{-1}(K)$ (car $f^{-1}(K)$ est compact, donc fermé).
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{\phi(n)} \in F$. Puisque F est fermé, la limite x^* est dans F. Donc $x^* \in F$.

Comme f est continue, $f(x_{\phi(n)}) \to f(x^*)$. Or, $f(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)}$ et (y_n) converge vers y, donc $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y.
Par unicité de la limite, $f(x^*) = y$.
Puisque $x^* \in F$, on a $y = f(x^*) \in f(F)$. Donc $f(F)$ est fermé. $\square$

Théorème 3: Théorème de Hadamard

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local. Si f est propre, alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
(Cela implique que f est bijective, donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$).

Proposition 5: Hadamard (avec injectivité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local. Si f est injective et propre, alors $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Preuve :

$f : \mathbb{R}^n \to f(\mathbb{R}^n)$ est injective et un $\mathcal{C}^1$-diff. local, donc (par Prop. 2) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $f(\mathbb{R}^n)$.
Il suffit donc de vérifier que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- $f(\mathbb{R}^n)$ est non-vide.
- $\mathbb{R}^n$ est un ouvert. f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local, donc f est ouverte. Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert.
- $\mathbb{R}^n$ est un fermé. f est propre, donc f est fermée (par Prop. 4). Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé.

$f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-ensemble non-vide, ouvert et fermé de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe, $\implies$ $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. $\square$

III. Un peu de géométrie différentielle

Définition 5: Hypersurface régulière

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$. On dit que $\Sigma = f^{-1}(\{0\})$ est une **hypersurface régulière** de classe $\mathcal{C}^1$ si :

1. Σ est non-vide.
2. $\forall a \in \Sigma, df(a) \neq 0$ (i.e. $f'(a) \neq 0$).

$f(x) = 0$ est alors une équation cartésienne de l'hypersurface Σ.

Si $a \in \Sigma$, l'hyperplan affine de vecteur normal $\nabla f(a)$ et passant par a est appelé **hyperplan tangent** à Σ en a.

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x - a, \nabla f(a) \rangle = 0\}$$

(où $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^T \in \mathbb{R}^n$)

Proposition 6: Hyperplan est hypersurface

Tout hyperplan de $\mathbb{R}^n$ est une hypersurface.

Preuve :

Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. H est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.
Soit $(a_1, ..., a_{n-1})$ une base de H. $\exists b \in \mathbb{R}^n$ tq $(a_1, ..., a_{n-1}, b)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
On pose l l'application linéaire (la forme linéaire) tq $l(a_i) = 0$ (pour $i = 1..n-1$) et $l(b) = 1$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i + \lambda_n b$. $l(x) = \lambda_n l(b) = \lambda_n$.
On a construit la forme linéaire $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tq $Ker(l) = H$.
De plus, l est une application linéaire en dimension finie, elle est donc continue et $\mathcal{C}^\infty$. l est de classe $\mathcal{C}^1$.
$\forall x \in \mathbb{R}^n, dl(x) = l$. $H = l^{-1}(\{0\}) = Ker(l)$. $\forall x \in H, dl(x) = l \neq 0$ (car l est non nulle, $l(b) = 1$).
Donc H est une hypersurface. $\square$

Définitions (Courbes et Surfaces)

Si $n = 2$, on dit que Σ est une **courbe régulière** de $\mathbb{R}^2$.
Si $n = 3$, on dit que Σ est une **surface régulière** de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 7: Paramétrage local (Chartes)

Soit Σ une hypersurface régulière de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^n$, soit $a \in \Sigma$.
Alors il existe V un voisinage de a ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et U un voisinage de 0 ouvert dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et une application $\varphi : U \to \Sigma \cap V$ de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, tq $\varphi(0) = a$ et vérifiant $rg(d\varphi(h')) = n - 1 \quad \forall h' \in U$.

Remarque

Soit $h \in \mathbb{R}^n$, $h = (h', h_n)$ avec $h' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $h_n \in \mathbb{R}$. $\varphi : U \to \Sigma \cap V$ est bijective. $\Sigma \cap V$ est alors, d'une certaine manière, un objet de dimension $n - 1$ car U est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Preuve :

Soit Σ une hypersurface régulière de classe $\mathcal{C}^1$. $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$) de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\Sigma = f^{-1}(\{0\})$.
On pose $g : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ (où $\tilde{\Omega} = \{h \in \mathbb{R}^n | a + h \in \Omega\}$ est un ouvert) par :

$$g(h) \mapsto f(a+h)$$

g est $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial g}{\partial h_n}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.
On sait que $df(a) \neq 0$ (car $a \in \Sigma$ et Σ est régulière). $\implies \exists p \in \{1, ..., n\}$ tq $\frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$.
Sans perte de généralité, supposons $p = n$. (Si $p \neq n$, on permute les coordonnées x_p et x_n avec un difféomorphisme $\tilde{f}$, et on a $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$).
On a $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$. On applique le Th. des Fonctions Implicites à g au point 0. On a $g(0) = f(a) = 0$.
On regarde la différentielle partielle par rapport à la n-ième variable : $dg_{h_n}(0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $v \mapsto \frac{\partial g}{\partial h_n}(0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot v$ Cette application est inversible car $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$.
Ainsi, il existe :

- U un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ (voisinage de $0' \in \mathbb{R}^{n-1}$)
- V_n un ouvert de $\mathbb{R}$ (voisinage de $0 \in \mathbb{R}$)
- $\psi : U \to V_n$ (implicite) tq $\forall h' \in U, \exists! h_n \in V_n$
$$g(h', h_n) = 0 \iff h_n = \psi(h')$$

$\forall (h', h_n) \in U \times V_n$, on a $f(a + (h', h_n)) = 0 \iff h_n = \psi(h')$.
Posons $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ par $h' \mapsto a + (h', \psi(h'))$. (On pose $V = (a + U \times V_n)$ qui est un voisinage ouvert de a).
φ est $\mathcal{C}^1$ car ψ l'est. $\varphi(0) = a + (0, \psi(0)) = a$ (car $g(0,0) = 0 \implies \psi(0) = 0$).
Pour $y \in \Sigma \cap V$, $y = a + (h', h_n)$ avec $(h', h_n) \in U \times V_n$ et $f(y) = 0$. $f(y) = 0 \implies g(h', h_n) = 0 \implies h_n = \psi(h')$. D'où $y = a + (h', \psi(h')) = \varphi(h')$. Donc φ est surjective sur $\Sigma \cap V$.
De plus, $\varphi(h'_1) = \varphi(h'_2) \implies a + (h'_1, \psi(h'_1)) = a + (h'_2, \psi(h'_2)) \implies h'_1 = h'_2$. Donc φ est injective.

Donc $\varphi : U \to \Sigma \cap V$ est bijective.
Considérons la Jacobienne de φ (pour déterminer le rang) : $h' \in U, J\varphi(h') = d\varphi(h') \in \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R})$.

$$\varphi(h') = \begin{pmatrix} a_1 + h_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} + h_{n-1} \\ a_n + \psi(h') \end{pmatrix}$$

La i-ème ligne de $J\varphi(h')$ est $\frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j}(h')$. Si $i \in \{1, ..., n-1\}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j} = \delta_{ij}$ (Kronecker). La n-ième ligne est $(\frac{\partial \psi}{\partial h_1}(h'), ..., \frac{\partial \psi}{\partial h_{n-1}}(h'))$.

$$J\varphi(h') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial h_1} & \frac{\partial \psi}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Cette matrice (n lignes, n-1 colonnes) contient la matrice identité I_{n-1}. Elle est donc de rang $n-1$.
$\implies rg(d\varphi(h')) = n-1 \quad \forall h' \in U$. $\square$

Remarque

On dit que $(h_1, ..., h_{n-1})$ constitue un système de coordonnées locales relatives au paramétrage de φ.

Proposition 8: Hyperplan tangent (paramétré)

Soit Σ une hypersurface régulière, $a \in \Sigma$ et φ un paramétrage de Σ au voisinage de a tq $\varphi(0) = a$. Alors l'hyperplan tangent à Σ en a (défini par f) coïncide avec l'hyperplan H passant par a et dirigé par l'image de $d\varphi(0)$.

$$H = a + Im(d\varphi(0)) = a + Vect\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial h_1}(0), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial h_{n-1}}(0)\right\}$$

Preuve :

On a $f(\varphi(h')) = 0 \quad \forall h' \in U$.
En différentiant cette composition en $h' = 0$:

$$df(\varphi(0)) \circ d\varphi(0) = 0$$

Puisque $\varphi(0) = a$, on a $df(a) \circ d\varphi(0) = 0$.
Cela signifie que $\forall v \in \mathbb{R}^{n-1}$, $df(a)(d\varphi(0)(v)) = 0$.

$$\implies Im(d\varphi(0)) \subset Ker(df(a))$$

On regarde les dimensions : $d\varphi(0) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. $rg(d\varphi(0)) = n - 1$ (vu dans la preuve précédente). $\implies \dim(Im(d\varphi(0))) = n - 1$.
$df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire. Elle est non nulle (car $a \in \Sigma$ hypersurface régulière, $df(a) \neq 0$). Par le théorème du rang, $\dim(Ker(df(a))) = \dim(\mathbb{R}^n) - rg(df(a)) = n - 1$.

Puisque $\dim(Im(d\varphi(0))) = \dim(Ker(df(a)))$ et que l'un est inclus dans l'autre :

$$Im(d\varphi(0)) = Ker(df(a))$$

L'hyperplan tangent H (défini par f) est l'hyperplan affine passant par a et de direction $Ker(df(a))$.
$H = a + Ker(df(a)) = a + Im(d\varphi(0))$.

(Transcription des images)

$$Ker(df(0)) = \{x \in \mathbb{R}^n, df(0)(x) = 0\}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot x_i = 0\right\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, \nabla f(0)\rangle = 0\}$$

□

Équations Différentielles

I. Équations Différentielles

(Partie II du cours)

1 Introduction et Problème de Cauchy simple

Exemple 1

(E) : $x'(t) = ax(t)$ est une équation différentielle. L'inconnue est un couple (J, x) où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J. On a un ensemble de solutions de (E) de la forme $x(t) = \lambda e^{at}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (C'est-à-dire de la forme $(J = \mathbb{R}, x(t) = \lambda e^{at})$).
Comment trouver les solutions ? On cherche une fonction x telle que $x'(t) - ax(t) = 0$. On multiplie par e^{-at} :

$$(x(t)e^{-at})' = x'(t)e^{-at} - ae^{-at}x(t) = (x'(t) - ax(t))e^{-at} = 0$$

Sur un intervalle ouvert, on en déduit que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad x(t)e^{-at} = \lambda \implies x(t) = \lambda e^{at}$$

On a donc : $\forall J$ intervalle ouvert, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(J, x(t) = \lambda e^{at})$ est une solution.

1.1 Problème de l'Unicité et Problème de Cauchy

Questions : Comment avoir une unique solution au problème (E) ?

a) Il est pertinent de considérer une solution dite **"maximale"** sur un intervalle J (cela signifie qu'on ne peut pas étendre la solution sur un intervalle plus grand au sens de l'inclusion stricte).
b) (E) a une infinité de solutions maximales $(\mathbb{R}, \lambda e^{at})$ paramétrées par $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) Si on veut définir une unique solution de (E), on doit ajouter une **condition initiale** de type $x(t_0) = x_0$.

Définition 6: Problème de Cauchy (simple)

On appelle **Problème de Cauchy** le système (E') :

$$(E') \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.
(E') admet une unique solution maximale : $x(t) = \lambda e^{at}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$. On détermine λ avec la condition initiale : $x(t_0) = \lambda e^{at_0} = x_0 \implies \lambda = x_0 e^{-at_0}$. La solution unique est $x(t) = (x_0 e^{-at_0})e^{at} = x_0 e^{a(t-t_0)}$.

Notations

$\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$ (différentes manières d'écrire une dérivée).

2 Équation différentielle du premier ordre

Définition 7: Équation différentielle du premier ordre

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$. On considère (1) :

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t) \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

- (1) est dite du **premier ordre** parce que seules des dérivées d'ordre 1 apparaissent.
- (1) est une équation du premier ordre **explicite**.
- Par ailleurs, les équations de la forme $G(t, x'(t), x(t)) = 0$ sont dites du premier ordre **implicites**.
- (L'équation (1) est **autonome** si F ne dépend pas du temps t (i.e. $F(t, x) = F(x)$). Dans le cas contraire, l'équation est **non-autonome**.

Définition 8: Solution d'une EDO

Une **solution** de (1) est décrite par un couple (J, X), où J est un intervalle ouvert et $X : J \to \mathbb{R}^d$ est une fonction dérivable sur J, telle que :

- $\forall t \in J, \quad (t, X(t)) \in \Omega$
- $\forall t \in J, \quad X'(t) = F(t, X(t))$

avec $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$. La solution est le couple (J, X).

Exemple 2

Pour $x'(t) = ax(t)$, on a $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(t, x) \mapsto ax$.

Remarque

Si on étendait la définition à des intervalles non nécessairement ouverts (ex : $J = [a, b]$), on pourrait définir $X'(b)$ comme :

$$X'(b) = \lim_{t \to b^-} \frac{X(t) - X(b)}{t - b}$$

3 Régularité des Solutions

Proposition 9: Régularité de la solution

Si $F \in \mathcal{C}^n(\Omega)$, alors si (J, X) est une solution de (1), on a $X \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$.

Preuve :

Soit (J, X) une solution de (1). Puisque X est dérivable sur J, X est continue sur J, donc $X \in \mathcal{C}^0(J)$.
Supposons par l'absurde que $X \notin \mathcal{C}^{n+1}(J)$. Soit k la régularité maximale de X, c'est-à-dire $X \in \mathcal{C}^k(J)$ avec $k < n + 1$. (Puisque $X \in \mathcal{C}^0(J)$, ce k existe et $k \geq 0$).
On a $X'(t) = F(t, X(t))$. L'application $t \mapsto (t, X(t))$ est de classe $\mathcal{C}^k$. On sait que $F \in \mathcal{C}^n(\Omega)$. Puisque $k < n + 1$ (et k, n sont des entiers), on a $k \leq n$. Donc F est a fortiori de classe $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Par composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$, l'application $t \mapsto F(t, X(t))$ est $\mathcal{C}^k(J)$. On en déduit donc que $X' \in \mathcal{C}^k(J)$.
Mais si $X' \in \mathcal{C}^k(J)$, alors $X \in \mathcal{C}^{k+1}(J)$. Ceci contredit notre hypothèse que k était la régularité maximale de X. L'hypothèse de départ est donc fausse. On a $X \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$. □

Remarque

Si $F \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, alors $X \in \mathcal{C}^1(J)$. (X est mieux que dérivable !).

4 Théorèmes d'Existence et d'Unicité

Définition 9: Problème de Cauchy (Général)

Le système (2) :

$$(2) \qquad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in \Omega$ est appelé **Problème de Cauchy**.

Définition 10: Solution Maximale

Une solution (J, X) de (1) est dite **maximale** si elle ne peut pas être étendue sur un intervalle plus grand au sens de l'inclusion stricte. Autrement dit, il n'existe pas de couple (J', Y) solution de (1) tel que $J \subsetneq J'$ et $Y|_J = X$.

On se pose deux questions fondamentales :

- **Question 1 :** Pour quelle régularité de F le problème de Cauchy (2) a-t-il **au moins une** solution maximale ?
- **Question 2 :** Pour quelle régularité de F le problème de Cauchy (2) a-t-il une **unique** solution maximale ?

Exemple 3: Non-existence (si F n'est pas continue)

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Considérons le problème de Cauchy (C) : $\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$. Montrons que (C) n'a pas de solutions.

Démonstration par l'absurde :

Supposons par l'absurde que (C) a une solution (J, X) avec $0 \in J$.

1. X doit être dérivable en 0. On a $X'(0) = F(X(0)) = F(0) = 1$.
2. Par définition de la dérivée, $X(t) = X(0) + X'(0) \cdot t + o(t) = t + o(t)$.
3. Cela implique que dans un voisinage V de 0, pour $t \in V \cap J \cap]0, +\infty[$ (c-à-d, $t > 0$ et proche de 0), on a $X(t) > 0$.
4. Pour ces mêmes t, puisque $X(t) > 0$, l'équation différentielle donne $X'(t) = F(X(t)) = -1$.
5. Par le Théorème des Accroissements Finis sur $[0, t]$ (car X est continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$), il existe $c \in]0, t[$ tel que :

$$\frac{X(t) - X(0)}{t - 0} = X'(c)$$

6. Puisque $c \in]0, t[$, on a $c > 0$ et $X(c) > 0$ (si t est assez petit). Donc $X'(c) = -1$. On a $\frac{X(t)-0}{t} = -1$, ce qui donne $X(t) = -t$.
7. **Contradiction.** On a $X(t) = -t < 0$ (car $t > 0$), mais l'étape 3 nous donnait $X(t) > 0$.

L'hypothèse qu'une solution existe est donc fausse. $\square$

Théorème 4: Peano-Arzelà (Admis)

(Réponse à la Question 1) Supposons que F est **continue** sur Ω. Alors le problème de Cauchy (2) a **au moins une** solution maximale (J, X). *Théorème admis.*

Exemple 4: Non-unicité (si F est continue mais non-Lipschitzienne)

Considérons le problème : $\begin{cases} x'(t) = 3(x(t))^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$. Ici, $F(x) = 3x^{2/3}$. F est continue sur $\mathbb{R}$ (par composition de fonctions continues).
F n'est pas localement Lipschitzienne en 0.

Démonstration :

Supposons par l'absurde que F est localement Lipschitzienne. Alors il existerait $C > 0$ et un voisinage de 0 tels que $\forall x$ dans ce voisinage :

$$|F(x) - F(0)| \leq C|x - 0|$$

$$|3x^{2/3} - 0| \leq C|x| \implies 3|x|^{2/3} \leq C|x|$$

Pour $x \neq 0$, $3 \leq C|x|^{1/3}$. En faisant tendre $x \to 0$, on obtient $3 \leq 0$, ce qui est absurde. (La note du cours utilise $\frac{|F(x)-F(0)|}{|x-0|} = \frac{3x^{2/3}}{x} = \frac{3}{x^{1/3}}$ qui tend vers l'infini en 0, donc n'est pas bornée). $\square$

Ce problème admet (au moins) deux solutions maximales :

- **Solution 1 :** $X_1(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Vérification :* $X_1'(t) = 0$. $3(X_1(t))^{2/3} = 3(0)^{2/3} = 0$. $X_1(0) = 0$. C'est une solution.
- **Solution 2 :** $X_2(t) = t^3$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Vérification :* $X_2'(t) = 3t^2$. $3(X_2(t))^{2/3} = 3((t^3))^{2/3} = 3(t^2) = 3t^2$. $X_2(0) = 0^3 = 0$. C'est une solution.

On a $(\mathbb{R}, X_1)$ et $(\mathbb{R}, X_2)$ qui sont deux solutions maximales distinctes pour le même problème de Cauchy.

Théorème 5: Cauchy-Lipschitz (Version simple)

(Réponse à la Question 2)

1. Si F est **Lipschitzienne** sur Ω, alors le problème de Cauchy (2) admet une **unique solution maximale** (J, X).
2. De plus, toutes les solutions de (1) (non-maximales) sont des restrictions de l'unique solution maximale.

Corollaire 3: Unicité locale

Supposons F Lipschitzienne sur Ω. Soient (J, X) et (J', Y) deux solutions de (1). S'il existe $t_0 \in$

$J \cap J'$ tel que $X(t_0) = Y(t_0)$, alors :

$$\forall t \in J \cap J', \quad X(t) = Y(t)$$

Preuve :

Considérons l'intervalle $I = J \cap J'$, qui est un intervalle ouvert contenant t_0. Les deux couples $(I, X|_I)$ et $(I, Y|_I)$ sont solutions du même problème de Cauchy (2) :

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(t_0) = X(t_0)(= Y(t_0)) \end{cases} \quad \text{sur } I$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème admet une unique solution maximale (J_m, Z). Par définition de la solution maximale, les solutions $(I, X|_I)$ et $(I, Y|_I)$ doivent être des restrictions de (J_m, Z). Cela signifie que $\forall t \in I$, $X(t) = Z(t)$ et $Y(t) = Z(t)$. Par conséquent, $X(t) = Y(t)$ pour tout $t \in J \cap J'$. □

5 Corollaire de Cauchy-Lipschitz (Non-croisement)

Corollaire 4: Non-croisement des solutions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne. Soient (J, x) et (J', y) deux solutions maximales du problème (E) $y'(t) = f(t, y(t))$.

Si il existe $t_0 \in J \cap J'$ tel que $x(t_0) < y(t_0)$,
Alors : $\forall t \in J \cap J'$, $x(t) < y(t)$.

Preuve :

Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in J \cap J'$ tel que $x(t_1) > y(t_1)$. (Nous avons $x(t_0) < y(t_0)$ et $x(t_1) > y(t_1)$).

Considérons la fonction $z(t) = x(t) - y(t)$. z est continue sur l'intervalle $I = [\min(t_0, t_1), \max(t_0, t_1)] \subset J \cap J'$. On a $z(t_0) = x(t_0) - y(t_0) < 0$ et $z(t_1) = x(t_1) - y(t_1) > 0$.

Par le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) appliqué à z, il existe $t_2 \in I$ tel que $z(t_2) = 0$, c'est-à-dire $x(t_2) = y(t_2)$.

Maintenant, (J, x) et (J', y) sont toutes deux des solutions maximales du **même** problème de Cauchy :

$$(E') \quad \begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(t_2) = x(t_2) \end{cases}$$

(puisque $y(t_2) = x(t_2)$).

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité de la solution maximale), on en déduit que $J = J'$ et $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in J$. Ceci est absurde, car on a supposé $x(t_0) < y(t_0)$. □

Question : Dans quel cadre les solutions peuvent-elles cesser d'exister ?

Exemple 5

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} m'(t) = m(t)^2 \\ m(0) = 0 \end{cases}$$

Ici, $f(t, m) = m^2$. f est $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^1$ et Lipschitzienne sur tout compact). Par Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale. La fonction $m(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$ est une solution évidente. Par unicité, c'est l'unique solution maximale. L'intervalle de définition est $J = \mathbb{R}$.

Exemple 6: Phénomène d'explosion

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

En séparant les variables (quand $x \neq 0$) : $\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 1 \implies \left(-\frac{1}{x(t)}\right)' = 1$
En intégrant : $-\frac{1}{x(t)} = t + C$.
Avec $x(0) = 1$, on a $-\frac{1}{1} = 0 + C \implies C = -1$.
Donc $-\frac{1}{x(t)} = t - 1$, ce qui donne $x(t) = \frac{1}{1-t}$.

On vérifie : $x'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ et $x(t)^2 = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2$. La solution est le couple (J, x) avec $J =]-\infty, 1[$ et $x(t) = \frac{1}{1-t}$.

On observe que (J, x) est une solution maximale. En effet, supposons par l'absurde qu'on puisse l'étendre en une solution $(\tilde{J}, \tilde{x})$ avec $J \subsetneq \tilde{J}$ (donc $1 \in \tilde{J}$). Alors $\tilde{x}$ devrait être dérivable sur $\tilde{J}$, et donc continue en $t = 1$. Cela impliquerait que $\lim_{t \to 1^-} \tilde{x}(t)$ existe et est finie. Or, $\lim_{t \to 1^-} x(t) = \lim_{t \to 1^-} \frac{1}{1-t} = +\infty$. Ceci est une contradiction.

Conclusion : Si la solution n'est pas "globale" (définie sur I en entier), on observe un phénomène d'explosion : $|x(t)| \to +\infty$ lorsque t tend vers la borne de J.

6 Convergence vers la frontière et sortie des compacts

Définition 11: Valeur d'adhérence

Soit $\gamma : J \to \mathbb{R}^d$ une fonction, et $t^* = \sup J \in \bar{\mathbb{R}}$.
On dit que $y^* \in \mathbb{R}^d$ est une **valeur d'adhérence** de γ lorsque $t \to t^*$ s'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de J telle que $t_n \to t^*$ et $\gamma(t_n) \to y^*$.

(Formellement : $\forall V$ voisinage ouvert de y^*, $\forall W$ voisinage de t^*, $W \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$).

Remarque

La fermeture de J est considérée dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 12: Convergence vers la frontière

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1 + d$), J un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\gamma : J \to \Omega$. Soit $t^* = \sup J$ (ou $\inf J$). On dit que $\gamma(t)$ **converge vers la frontière de** Ω (notée $Fr(\Omega)$ ou $Bd(\Omega)$) lorsque $t \to t^*$, si γ n'admet **aucune valeur d'adhérence dans** Ω.
On note : $\gamma(t) \underset{t \to t^*}{\longrightarrow} Bd(\Omega)$.

Remarque

$\gamma(t) \to Bd(\Omega)$ est équivalent à dire que γ n'a pas de valeur d'adhérence (lorsque $t \to t^*$) ou que ses valeurs d'adhérence sont dans $Bd(\Omega)$.

Proposition 10: Théorème de sortie des compacts

Soit $\gamma : J \to \Omega$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\gamma(t) \underset{t \to t^*}{\longrightarrow} Fr(\Omega)$.
2. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un voisinage V de t^* tel que $\forall t \in V \cap J$, $\gamma(t) \notin K$.

Preuve :

($1 \implies 2$) : Supposons $\gamma(t) \to Fr(\Omega)$. Supposons par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que : $\forall V$ voisinage de t^*, $\exists t \in V \cap J$ tel que $\gamma(t) \in K$. On peut alors construire une suite (t_n) dans J telle que $t_n \to t^*$ et $\gamma(t_n) \in K$. K est compact, donc on peut extraire une sous-suite $(\gamma(t_{k(n)}))$ qui converge vers $y^* \in K$. Puisque $t_{k(n)} \to t^*$ et $\gamma(t_{k(n)}) \to y^*$, y^* est une valeur d'adhérence de γ. Comme $K \subset \Omega$, $y^* \in \Omega$. Ceci contredit l'hypothèse (1) que γ n'a pas de valeur d'adhérence dans Ω. Absurde.

($2 \implies 1$) : Supposons que γ "sort de tout compact". Supposons par l'absurde que γ ne converge pas vers $Fr(\Omega)$. Cela signifie (par définition) que γ admet (au moins) une valeur d'adhérence $y^* \in \Omega$. Par définition d'une valeur d'adhérence, il existe une suite $(t_n) \to t^*$ telle que $\gamma(t_n) \to y^*$. Puisque Ω est un ouvert et $y^* \in \Omega$, on peut choisir un $\epsilon > 0$ tel que le compact $K = \bar{B}(y^*, \epsilon)$ soit inclus dans Ω. Puisque $\gamma(t_n) \to y^*$, pour n assez grand, $\gamma(t_n) \in K$. Cela signifie que pour tout voisinage V de t^* (contenant les t_n pour n grand), il existe des $t_n \in V \cap J$ tels que $\gamma(t_n) \in K$. Ceci contredit l'hypothèse (2). Absurde. $\square$

Remarque

Cas d'un domaine "tube" $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$ (où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert). Soit $\gamma(t) = (t, x(t))$ une solution.
Alors $\gamma(t) \underset{t \to t^*}{\longrightarrow} Fr(\Omega)$ est équivalent à :

$$t^* \in \{\inf I, \sup I\} \quad \text{OU} \quad \|x(t)\| \underset{t \to t^*}{\longrightarrow} +\infty$$

Preuve de la remarque :

Nous devons prouver l'équivalence.

Sens 1 : ($\Leftarrow$)
Supposons que $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$ OU $\|x(t)\| \to +\infty$. Nous voulons montrer que $\gamma(t) \to Fr(\Omega)$, c'est-à-dire que $\gamma(t)$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$.
Supposons par l'absurde qu'il existe une valeur d'adhérence $y^* \in \Omega$. Par définition, $y^* = (t_{adh}, x^*)$ avec $t_{adh} \in I$ et $x^* \in \mathbb{R}^d$. Il existerait alors une suite (t_n) dans J telle que $t_n \to t^*$ et $\gamma(t_n) =$

$(t_n, x(t_n)) \to y^*$.
Ceci implique $t_n \to t_{adh}$ et $x(t_n) \to x^*$. Par unicité de la limite, $t^* = t_{adh}$.
On a donc $t^* \in I$. Cela contredit l'hypothèse $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$ (car I est ouvert).
De plus, $x(t_n) \to x^*$ implique $\|x(t_n)\| \to \|x^*\|$, qui est une valeur finie. Cela contredit l'hypothèse $\|x(t)\| \to +\infty$.
Puisque les deux cas de l'hypothèse mènent à une contradiction, notre supposition (l'existence d'une valeur d'adhérence $y^* \in \Omega$) est fausse. Donc $\gamma(t) \to Fr(\Omega)$.

Sens 2 : (⇒)
Supposons que $\gamma(t) \to Fr(\Omega)$. Nous voulons montrer que $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$ OU $\|x(t)\| \to +\infty$.
Supposons par l'absurde que la conclusion est fausse. La négation est : $t^* \notin \{\inf I, \sup I\}$ **ET** $\|x(t)\|$ ne tend pas vers $+\infty$.
$t^* \notin \{\inf I, \sup I\}$ signifie $t^* \in I$ (car I est ouvert).
$\|x(t)\|$ ne tend pas vers $+\infty$ (quand $t \to t^*$) signifie qu'il existe une suite (t_n) dans J telle que $t_n \to t^*$ et la suite $(\|x(t_n)\|)$ est bornée.
Puisque la suite $(x(t_n))$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x(t_{k(n)}))$ qui converge vers un $x^* \in \mathbb{R}^d$.
La suite $(t_{k(n)})$ converge toujours vers $t^* \in I$.
Par conséquent, la sous-suite $\gamma(t_{k(n)}) = (t_{k(n)}, x(t_{k(n)}))$ converge vers $y^* = (t^*, x^*)$.
Puisque $t^* \in I$ et $x^* \in \mathbb{R}^d$, on a $y^* \in I \times \mathbb{R}^d = \Omega$.
Cela signifie que $\gamma(t)$ admet une valeur d'adhérence y^* *dans* Ω. Ceci contredit notre hypothèse de départ ($\gamma(t) \to Fr(\Omega)$). L'hypothèse par l'absurde est donc fausse, et la conclusion est vraie. □

7 Caractérisation des solutions maximales

Théorème 6: Caractérisation des solutions maximales

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{1+d}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne. Soit (J, x) une solution de $x'(t) = F(t, x(t))$.

Alors (J, x) est une solution maximale **si et seulement si** :

- $(t, x(t)) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} Fr(\Omega)$
  ET
- $(t, x(t)) \underset{t \to \inf J}{\longrightarrow} Fr(\Omega)$

Remarque

On a choisi F de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne pour assurer l'existence et l'unicité (via Cauchy-Lipschitz).
On pourrait simplement supposer F continue et appliquer le théorème de Peano-Arzelà (pour l'existence).

Théorème 7: Critère d'explosion (Domaine "Tube")

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$. Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne. Soit (J, x) une solution maximale de $x'(t) = F(t, x(t))$.

Alors on a :

- $\sup J = \sup I$ OU $\lim_{t \to \sup J} \|x(t)\| = +\infty$.
  ET

- $\inf J = \inf I$ OU $\lim_{t \to \inf J} \|x(t)\| = +\infty$.

(C'est le critère d'explosion en temps fini).

Remarque

Pour $x'(t) = x(t)$, on a $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc $I = \mathbb{R}$. Les solutions sont $x_\lambda(t) = \lambda e^t$. L'intervalle maximal est $J = \mathbb{R}$.
On a $\sup J = \sup I = +\infty$ et $\inf J = \inf I = -\infty$.
On vérifie : $\lim_{t \to \inf J} x_\lambda(t) = 0$ (pas d'explosion).
$\lim_{t \to \sup J} x_\lambda(t) = \pm\infty$ (explosion, si $\lambda \neq 0$).

Remarque

Pour $d = 1$.
$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = +\infty \implies \lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$
Si x est solution du problème, $x'(t) = f(t, x(t))$
Alors x est continue et donc si $\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$
Alors :

- $\lim_{t \to \sup J} x(t) = +\infty$.
  OU
- $\lim_{t \to \sup J} x(t) = -\infty$.

(Par continuité de x)

Remarque

Pour $d \geq 2$. Soit $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \end{pmatrix} \; \forall t \in \mathbb{R}$.
On a $\|x(t)\|^2 = (e^t \cos(t))^2 + (-e^t \sin(t))^2 = e^{2t}(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = e^{2t}$.
Donc $\|x(t)\| = e^t$.
On a bien $\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = +\infty$.
Cependant, $x(t)$ (le vecteur) n'admet pas de limite en $+\infty$ (il spirale vers l'infini).

Théorème d'existence globale

Corollaire 5: Théorème d'existence globale

Soit $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$. Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne. Soit (J, x) une solution maximale du problème $x'(t) = F(t, x(t))$ avec $t_0 \in J$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Supposons que :

1. $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in [t_0, \sup J[$
   Alors $\sup J = \sup I$.
2. $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in]\inf J, t_0]$
   Alors $\inf J = \inf I$.
3. $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in J$
   Alors $J = I$ et donc (J, x) est une solution globale.

Preuve :

1°) Supposons par l'absurde que $\sup J < \sup I$.

Alors, par le critère d'explosion (Théorème 7), la solution maximale (J, x) vérifie :

$$\|x(t)\| \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} +\infty$$

Or, $\forall t \in [t_0, \sup J[$, on a $\|x(t)\| \leq g(t)$.
g est continue sur le compact $[t_0, \sup J] \subset I$.
g est donc bornée sur ce compact. Il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, \sup J]$, $g(t) \leq M$.
On en déduit que $\forall t \in [t_0, \sup J[$, $\|x(t)\| \leq M$.

Ceci est absurde car $\|x(t)\| \to +\infty$ quand $t \to \sup J$.
Donc, $\sup J = \sup I$.

2°) (La preuve pour $\inf J$ est identique).

3°) (Le point 3 est une conséquence directe de 1°) et 2°)). □

8 Caractérisation des solutions maximales (Suite)

Preuve du Théorème 6 :

Nous devons prouver une équivalence.

Sens 1 : (⇒)
Supposons que $(t, x(t)) \to Fr(\Omega)$ (lorsque $t \to \sup J$ et $t \to \inf J$). Supposons par l'absurde que (J, x) n'est pas une solution maximale.
Cela implique qu'il existe une solution $(J', \tilde{x})$ de (E) telle que $J \subsetneq J'$ et $\forall t \in J, \tilde{x}(t) = x(t)$.

Supposons par exemple que $\sup J < \sup J'$. Puisque $\tilde{x}$ est solution sur J', $\tilde{x}$ est continue sur J'. Donc $\tilde{x}(t) \underset{t \to \sup J^-}{\longrightarrow} \tilde{x}(\sup J)$ (une valeur finie, car $\sup J \in J'$).
Comme $\tilde{x}(t) = x(t)$ sur J, on a $x(t) \underset{t \to \sup J^-}{\longrightarrow} \tilde{x}(\sup J)$.
Donc $\gamma(t) = (t, x(t)) \underset{t \to \sup J^-}{\longrightarrow} (\sup J, \tilde{x}(\sup J))$.
Le point $(\sup J, \tilde{x}(\sup J))$ est une valeur d'adhérence de $\gamma(t)$. Puisque $(J', \tilde{x})$ est une solution, on a $(\sup J, \tilde{x}(\sup J)) \in \Omega$.

Ceci est ABSURDE, car on a supposé que $\gamma(t) = (t, x(t))$ tendait vers la frontière de Ω (et ne devait donc avoir aucune valeur d'adhérence *dans* Ω).

Sens 2 : (⇐)
Supposons maintenant que (J, x) est une solution maximale de (E). Nous devons montrer que $(t, x(t)) \to Fr(\Omega)$ lorsque $t \to \sup J$ (la preuve est identique pour $\inf J$).

Supposons par l'absurde que $(t, x(t))$ ne tend pas vers $Fr(\Omega)$ lorsque $t \to \sup J$. Par définition (en prenant la négation), cela signifie qu'il existe (au moins) **une** valeur d'adhérence (β, x^*) *dans* Ω, où $\beta = \sup J$. (Note : si $\sup J = +\infty$, on ne peut pas avoir de valeur d'adhérence $(t, x(t)) \to (\beta, x^*) \in \Omega$ car β serait infini). Donc, on a nécessairement $\sup J = \beta < +\infty$.
Il existe une suite $(t_n) \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \to \sup J$ et $x(t_n) \to x^*$, avec $(\sup J, x^*) \in \Omega$.

D'après le théorème de Peano-Arzelà, le problème de Cauchy (C) suivant :

$$(C) \qquad \begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(\sup J) = x^* \end{cases}$$

(qui a un sens car $(\sup J, x^*) \in \Omega$), a au moins une solution $\tilde{x}$ définie sur un intervalle ouvert $I_\epsilon =]\sup J - \epsilon, \sup J + \epsilon[$ (avec $\epsilon > 0$ petit).

Posons $X_1(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in J \\ \tilde{x}(t) & \text{si } t \in [\sup J, \sup J + \epsilon[\end{cases}$
Vérifions que $X_1(t)$ est une solution de (E) sur $J_1 =]\inf J, \sup J + \epsilon[$.
Puisque X est dérivable sur J et $\tilde{x}$ est dérivable sur $]\sup J, \sup J + \epsilon[$, il suffit de vérifier la continuité et la dérivabilité en $\sup J$.

Continuité en $\sup J$ **:**
On a $\lim_{t \to \sup J^+} X_1(t) = \lim_{t \to \sup J^+} \tilde{x}(t) = \tilde{x}(\sup J) = x^*$ (car $\tilde{x}$ est solution de (C)).
Le **Lemme 1** (prouvé ci-dessous) nous assure que $x(t) \to x^*$ lorsque $t \to \sup J^-$. Donc $\lim_{t \to \sup J^-} X_1(t) = \lim_{t \to \sup J^-} x(t) = x^*$.
Les limites à gauche et à droite coïncident, X_1 est continue en $\sup J$.

Dérivabilité en $\sup J$ **:**
X_1 est continue sur J_1 et dérivable sur $J_1 \setminus \{\sup J\}$.
Pour $h > 0$ (dérivée à droite) :

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{X_1(\sup J + h) - X_1(\sup J)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{x}(\sup J + h) - x^*}{h} \\ &= \tilde{x}'(\sup J) = F(\sup J, \tilde{x}(\sup J)) = F(\sup J, x^*) \end{aligned}$$

Pour $h < 0$ (dérivée à gauche) :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{X_1(\sup J + h) - X_1(\sup J)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{x(\sup J + h) - x^*}{h}$$

On considère $Y_1(t)$ le prolongement par continuité de x sur $J \cup \{\sup J\}$, avec $Y_1(\sup J) = x^*$.
On applique le Théorème des Accroissements Finis à Y_1 sur $[\sup J + h, \sup J]$. Il existe $c_h \in]\sup J + h, \sup J[$ tel que :

$$\frac{Y_1(\sup J) - Y_1(\sup J + h)}{-h} = Y_1'(c_h) = x'(c_h)$$

$$\frac{x^* - x(\sup J + h)}{-h} = \frac{x(\sup J + h) - x^*}{h} = F(c_h, x(c_h))$$

Quand $h \to 0^-$, on a $c_h \to \sup J^-$. Par continuité de F et de x (prouvée par le Lemme 1), on a :

$$\lim_{h \to 0^-} F(c_h, x(c_h)) = F(\sup J, x^*)$$

Les dérivées à gauche et à droite sont égales à $F(\sup J, x^*)$. Donc X_1 est dérivable en $\sup J$ et $X_1'(\sup J) = F(\sup J, X_1(\sup J))$.

Conclusion : (J_1, X_1) (avec $J_1 =]\inf J, \sup J + \epsilon[$) est une solution de (E) avec $X_1(t) = x(t)$ sur J.
Puisque $J \subsetneq J_1$, cela contredit le fait que (J, x) est maximale. L'hypothèse de départ (le fait que $\gamma(t)$ admette une valeur d'adhérence dans Ω) est donc fausse. $\square$

Lemme 1: Lemme 1 (Convergence au bord)

Si F est $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne, $\sup J = \beta < +\infty$, et $(t, x(t))$ admet **une** valeur d'adhérence $(\beta, x^*) \in \Omega$ quand $t \to \sup J$, alors $\lim_{t \to \sup J} (t, x(t)) = (\beta, x^*)$.

Preuve du Lemme 1 :

On sait que $(\beta, x^*) \in \Omega$, qui est un ouvert. Il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\bar{B}((\beta, x^*), \epsilon) \subset \Omega$. Puisque F est continue sur l'ouvert Ω, F est bornée sur le compact $\bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$.
$\exists M > 0$ t.q. $\forall (t, x) \in \bar{B}((\beta, x^*), \epsilon), \quad \|F(t, x)\| < M$.

Par définition de la valeur d'adhérence (β, x^*), $\exists (t_n)$ t.q. $t_n \to \beta$ et $x(t_n) \to x^*$. Choisissons N assez grand tel que les conditions (H) soient vérifiées :

$$(H) \quad \begin{cases} t_N > \beta - \frac{\epsilon}{2M} \\ \|x(t_N) - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ |t_N - \beta| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

On applique le Lemme 2 (prouvé ci-dessous). D'après le Lemme 2, on a $\forall t \in [t_N, \beta[$, $\|x(t) - x^*\| < \epsilon$.

Ceci est vrai $\forall \epsilon > 0$ (en choisissant N suffisamment grand pour chaque ϵ). L'intervalle $[t_N, \beta[$ est un voisinage à gauche de β. On a donc montré que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (ici $\delta = \beta - t_N$) tel que $t \in]\beta - \delta, \beta[\implies \|x(t) - x^*\| < \epsilon$.
C'est la définition de $\lim_{t \to \beta^-} x(t) = x^*$.
Puisque $\lim_{t \to \beta^-} t = \beta$, on a bien $\lim_{t \to \sup J} (t, x(t)) = (\beta, x^*)$. $\square$

Lemme 2: Lemme 2

(Avec les conditions (H) de la preuve ci-dessus), on a :

$$\forall t \in [t_N, \beta[, \quad \|x(t) - x^*\| < \epsilon$$

Preuve du Lemme 2 :

Observation : Avec les conditions (H), on a $(t_N, x(t_N)) \in B((\beta, x^*), \epsilon)$ car :

$$\|(t_N, x(t_N)) - (\beta, x^*)\| = \max(|t_N - \beta|, \|x(t_N) - x^*\|) < \epsilon \quad \text{(d'après H.)}$$

Supposons par l'absurde que la proposition n'est pas vraie.

$$\exists t \in [t_N, \beta[\text{ tel que } \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon.$$

Posons $T_\epsilon = \inf\{t \in [t_N, \beta[\quad | \quad \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon\}$.
T_ϵ existe car l'ensemble est non vide et minoré par t_N. Par continuité de x, on a $\|x(T_\epsilon) - x^*\| = \epsilon$.
(Et $T_\epsilon > t_N$ car $\|x(t_N) - x^*\| \leq \epsilon/2 < \epsilon$).

Par définition de T_ϵ, $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$, on a $\|x(s) - x^*\| \leq \epsilon$. On a aussi $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$, $|s - \beta| \leq |t_N - \beta| < \epsilon$ (car $s < \beta$).
Donc $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$, $(s, x(s)) \in \bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$.
Sur ce compact, la fonction F est bornée : $\|F(s, x(s))\| < M$.

On intègre l'EDO : $x(T_\epsilon) - x(t_N) = \int_{t_N}^{T_\epsilon} F(s, x(s))ds$.

$$\|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| \leq \int_{t_N}^{T_\epsilon} \|F(s, x(s))\|ds \leq \int_{t_N}^{T_\epsilon} M ds = M(T_\epsilon - t_N)$$

On sait $t_N < T_\epsilon < \beta$, donc $T_\epsilon - t_N < \beta - t_N < \frac{\epsilon}{2M}$ (par (H)).
En substituant, l'inégalité devient **stricte** :

$$\|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| < M \cdot (\frac{\epsilon}{2M}) = \frac{\epsilon}{2}$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$\|x(T_\epsilon) - x^*\| \leq \|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| + \|x(t_N) - x^*\|$$

$$\|x(T_\epsilon) - x^*\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(*Note : L'inégalité devient stricte car le premier terme est* $< \frac{\epsilon}{2}$ *et le second est* $\leq \frac{\epsilon}{2}$)

Ceci est une **CONTRADICTION**, car T_ϵ est défini tel que $\|x(T_\epsilon) - x^*\| = \epsilon$. □

9 Cauchy-Lipschitz (Cadre général)

Définition 13: Localement Lipschitzienne

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+d}$ un ouvert et $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$. On dit que F est **localement Lipschitzienne** (par rapport à x) si :
$\forall (t_0, x_0) \in \Omega, \exists V$ un voisinage de (t_0, x_0) dans Ω tel que F est Lipschitzienne sur $V \cap \Omega$.

Proposition 11: Caractérisation (Localement Lipschitzienne)

$F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est localement Lipschitzienne
$\iff$
$\forall K$ compact de Ω, F est Lipschitzienne sur K.
($\forall K$ compact $\subset \Omega, \exists L_K > 0$ t.q. $\forall (t,x),(t,y) \in K, \|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L_K\|x - y\|$)

Preuve :

Soit C un compact de Ω. $\forall x \in C \subset \Omega, \exists r_x > 0$ (rayon) t.q. F est Lipschitzienne sur $B(x, r_x)$. La famille $(B(x, r_x))_{x \in C}$ est un recouvrement ouvert de C.
Par la propriété de Borel-Lebesgue (Heine-Borel), C est compact, donc on peut extraire un sous-recouvrement fini : $C \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i)$.
(Preuve par l'absurde de l'existence d'un nombre de Lebesgue ρ) : Supposons que (la propriété) n'est pas vraie. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n = \frac{1}{n}$, $\exists y_n \in C$ t.q. $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, $B(y_n, \frac{1}{n}) \not\subset B(x_i, r_i)$.
(y_n) est une suite de C compact. Il existe une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ t.q. $y_{\phi(n)} \to y^* \in C$.
Puisque $y^* \in C$, $\exists i \in \{1, \ldots, N\}$ t.q. $y^* \in B(x_i, r_i)$. Puisque $B(x_i, r_i)$ est ouvert, pour n assez grand, $B(y_{\phi(n)}, \frac{1}{\phi(n)}) \subset B(x_i, r_i)$. Ceci contredit la construction de la suite (y_n).

(Soit ρ ce nombre de Lebesgue.)
Soient $x, y \in C$.
Cas 1 : $\|x - y\| < \rho$. Alors $\exists i$ t.q. $\{x, y\} \subset B(x_i, r_i)$. F est Lipschitzienne sur ce voisinage avec la constante C_i.

$$\|F(x) - F(y)\| \leq C_i\|x - y\| \leq \left(\max_{i=1..N} C_i\right) \|x - y\|$$

Cas 2 : $\|x - y\| \geq \rho$.

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|F(x)\| + \|F(y)\| \leq 2 \sup_{z \in C} \|F(z)\|$$

(Soit $M = \sup_{z \in C} \|F(z)\|$, qui existe car F est continue sur le compact C).
Puisque $\|x - y\| \geq \rho \implies 1 \leq \frac{\|x-y\|}{\rho}$, on a :

$$\|F(x) - F(y)\| \leq 2M = 2M \cdot 1 \leq 2M\frac{\|x - y\|}{\rho} = \left(\frac{2M}{\rho}\right) \|x - y\|$$

i.e. $\forall x, y \in C$:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \max\left(\max_{i=1..N} C_i, \frac{2\sup_{z\in C}\|F(z)\|}{\rho}\right)\|x-y\|$$

Ce qui prouve que F est Lipschitzienne sur C. □

10 Preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz (Existence locale)

Remarque

Si F est localement Lipschitzienne $\implies$ F est continue.

Si F est $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne $\implies$ F est localement Lipschitzienne. (L'inverse n'est pas forcément vrai).

Exemple 7: Fonction non Lipschitzienne

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Regardons le taux d'accroissement en 0 : $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h\ln h}{h} = \ln h \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
f n'est pas dérivable en 0.

De plus, pour $m \in \mathbb{N}$, prenons $x_m = e^{-m}$ et $y_m = 0$. $\frac{|f(x_m)-f(0)|}{|x_m-0|} = |\ln(e^{-m})| = |-m| = m \to +\infty$.
Le rapport n'est pas borné, donc f n'est pas Lipschitzienne au voisinage de 0. Cependant, f est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (car elle est $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert).

Remarque

Hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz : $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$). $(t,x) \mapsto F(t,x)$.

1. F est continue sur Ω.
2. F est localement Lipschitzienne en la seconde variable x.

C'est-à-dire : $\exists V$ voisinage de (t_0, x_0) dans Ω, $\exists k > 0$ tels que :

$$\forall (t,X),(t,Y) \in V, \quad \|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq k\|X-Y\|$$

Remarque

F localement Lipschitzienne en x est équivalent à : Pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists k_K > 0$ tel que $\forall (t,X),(t,Y) \in K$, on a :

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq k_K\|X-Y\|$$

Théorème 8: Cauchy-Lipschitz (Cadre Général)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Supposons que :

- F est continue sur Ω.
- F est localement Lipschitzienne par rapport à x.

Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy :

$$(E) \qquad \begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une **unique solution maximale** (J, x).

Preuve du Théorème (via un Lemme d'existence locale)

Lemme 3: Existence et Unicité Locale

Sous les conditions du Théorème, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un $a > 0$ suffisamment petit tel que le problème (E) a une **unique solution** sur l'intervalle $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Remarque

$[t_0 - a, t_0 + a]$ n'est pas un intervalle ouvert. On définit la dérivée aux bornes par la limite à droite ou à gauche :

$$x'(t_0 - a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{x(t_0 - a + h) - x(t_0 - a)}{h}$$

$$x'(t_0 + a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{x(t_0 + a + h) - x(t_0 + a)}{h}$$

Et pour $t \in]t_0 - a, t_0 + a[$, $x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$.

Preuve du Lemme :

Sans restriction, on va supposer que $t_0 = 0$. Nous allons démontrer l'existence et l'unicité en utilisant les deux lemmes suivants. $\square$

Lemme 4: Équivalence Différentielle / Intégrale

Soit X une fonction continue sur $[-a, a]$. X est solution de (E) sur $[-a, a]$ (c'est-à-dire $\mathcal{C}^1$ et vérifie l'équation)

$\Longleftrightarrow$

X satisfait l'équation intégrale suivante pour tout $t \in [-a, a]$:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds$$

Preuve du Lemme 4 :

($\Rightarrow$) Si X est une solution de (E) sur $[-a, a]$. On a $\forall s \in [-a, a]$, $X'(s) = F(s, X(s))$. En intégrant cette équation sur $[0, t]$:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t X'(s) ds = x_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds$$

De plus X est continue sur $[-a, a]$ car dérivable.

($\Leftarrow$) Réciproque. Supposons que X est continue et vérifie l'équation intégrale. $s \mapsto F(s, X(s))$ est continue sur $[-a, a]$ par composition de fonctions continues (car F est continue et X est continue). $\implies g : t \mapsto \int_0^t F(s, X(s))ds$ est dérivable sur $[-a, a]$.
Démontrons cela : Pour tout $t \in [0, a]$, formons le taux d'accroissement :

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} F(s, X(s))ds - \int_0^t F(s, X(s))ds\right)$$
$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(s, X(s))ds$$

(avec h suffisamment petit pour que $t + h \in [-a, a]$).
On effectue le changement de variable $s = t + \theta h$ (donc $ds = hd\theta$).

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h)) \cdot hd\theta = \int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h))d\theta$$

Par continuité de F et X, on a :

$$F(t + \theta h, X(t + \theta h)) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} F(t, X(t))$$

De plus, la fonction $s \mapsto F(s, X(s))$ est continue sur le compact $[-a, a]$, donc elle est bornée. $\exists M > 0$ tel que $\|F(s, X(s))\| \leq M$. Donc $\|F(t + \theta h, X(t + \theta h))\| \leq M$.
On peut appliquer le **Théorème de Convergence Dominée** (avec la fonction constante M intégrable sur $[0, 1]$ car $\int_0^1 Md\theta = M < +\infty$).

$$\lim_{h \to 0} \int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h))d\theta = \int_0^1 \lim_{h \to 0} F(t + \theta h, X(t + \theta h))d\theta$$
$$= \int_0^1 F(t, X(t))d\theta = F(t, X(t))$$

Donc g est dérivable et $g'(t) = F(t, X(t))$. Ainsi, $X(t) = x_0 + g(t)$ est dérivable et $X'(t) = F(t, X(t))$. Enfin, $X(0) = x_0 + 0 = x_0$. Donc X est solution. $\square$

Lemme 5: Existence et Unicité dans E_a

Il existe $a > 0$ suffisamment petit tel que l'équation intégrale :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(s, X(s))ds$$

admet une **unique solution** dans l'espace E_a.

Preuve du Lemme 5 :

On veut prouver que le problème admet une unique solution. Soit $r > 0$ tel que la boule fermée $B((0, x_0), r) \subset \Omega$ (possible car Ω est ouvert).

Sur ce compact $\overline{B}((0, x_0), r)$:

1. F est continue, donc F est bornée sur ce compact. $\exists M_r > 0$ tel que $\forall (t, X) \in \overline{B}((0, x_0), r), \|F(t, X)\| \leq M_r$.
2. F est localement Lipschitzienne en x, donc F est Lipschitzienne sur ce compact. $\exists k_r > 0$ tel que $\forall (t, X), (t, Y) \in \overline{B}((0, x_0), r), \|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq k_r\|X - Y\|$.

Nous allons travailler dans l'espace fonctionnel E_a défini par :

$$E_a = \{X \in \mathcal{C}^0([-a,a], \mathbb{R}^d) \quad | \quad X(0) = x_0 \text{ et } \|X - x_0\|_\infty \leq r\}$$

avec $a \leq r$.

Justification de la condition (Condition 1) $a \leq r$: On impose la condition $a \leq r$. En effet, pour que $F(t, X(t))$ soit défini, il faut que $(t, X(t)) \in \Omega$. On veut donc s'assurer que $\forall t \in [-a,a], (t, X(t)) \in \overline{B}((0,x_0), r) \subset \Omega$. En munissant $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ de la norme infinie $\|(t,x)\|_\infty = \max(|t|, \|x\|)$, la condition d'appartenance à la boule s'écrit :

$$\|(t, X(t)) - (0, x_0)\|_\infty \leq r \iff \max(|t - 0|, \|X(t) - x_0\|) \leq r$$

Ceci équivaut à :

$$|t| \leq r \quad \text{et} \quad \|X(t) - x_0\| \leq r$$

Pour que la première partie ($|t| \leq r$) soit vraie pour tout $t \in [-a,a]$, il faut et il suffit que $a \leq r$. La seconde partie est assurée par la définition même de l'espace E_a.

Preuve que E_a est complet : $\mathcal{C}^0([-a,a])$ muni de la norme infini est un espace de Banach. Montrons que E_a est un fermé de cet espace. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E_a telle que $X_n \to X$ uniformément sur $[-a,a]$.

1. Pour tout n, $X_n(0) = x_0$. Par convergence simple en 0, $X(0) = \lim X_n(0) = x_0$.
2. Pour tout n, $\|X_n - x_0\|_\infty \leq r$. Par passage à la limite dans l'inégalité large, $\|X - x_0\|_\infty \leq r$.

Donc $X \in E_a$. E_a est un fermé d'un espace complet, donc E_a est complet.

Définissons l'application $\Phi : E_a \to E_a$.

$$\Phi(X) : t \mapsto x_0 + \int_0^t F(s, X(s))ds$$

Vérifions que Φ est bien définie : Pour $X \in E_a$, $s \mapsto X(s)$ est continue. F est continue. Donc $s \mapsto F(s, X(s))$ est continue. Donc $\Phi(X)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (primitive d'une continue), donc $\Phi(X) \in \mathcal{C}^0([-a,a])$.

Condition 2 : Stabilité (Φ envoie E_a dans E_a) Soit $X \in E_a$. On a $\|\Phi(X)(0) - x_0\| = 0$. Il faut montrer que $\|\Phi(X)(t) - x_0\| \leq r$ pour tout $t \in [-a,a]$.

$$\|\Phi(X)(t) - x_0\| = \left\| \int_0^t F(s, X(s))ds \right\| \leq \left| \int_0^t \|F(s, X(s))\| ds \right|$$

Comme $X \in E_a$, pour tout $s \in [-a,a]$, $(s, X(s)) \in \overline{B}((0,x_0), r)$. Donc $\|F(s, X(s))\| \leq M_r$.

$$\|\Phi(X)(t) - x_0\| \leq M_r |t| \leq M_r a$$

Pour que $\Phi(X) \in E_a$, il suffit d'imposer :

$$M_r a \leq r$$

Condition 3 : Contraction Soient $Y_1, Y_2 \in E_a$.

$$\|\Phi(Y_1)(t) - \Phi(Y_2)(t)\| = \left\| \int_0^t (F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s)))ds \right|$$

$$\leq \left| \int_0^t \|F(s, Y_1(s)) - F(s, Y_2(s))\| ds \right|$$

Comme $Y_1, Y_2 \in E_a$, les points sont dans le compact où F est Lipschitzienne de constante k_r.

$$\leq \left| \int_0^t k_r \|Y_1(s) - Y_2(s)\| ds \right|$$
$$\leq k_r |t| \sup_{s \in [-a,a]} \|Y_1(s) - Y_2(s)\|$$
$$\leq k_r a \|Y_1 - Y_2\|_\infty$$

En passant au sup sur t :

$$\|\Phi(Y_1) - \Phi(Y_2)\|_\infty \leq (k_r a) \|Y_1 - Y_2\|_\infty$$

Pour que Φ soit une contraction stricte, il faut imposer :

$$k_r a < 1$$

Conclusion : Si a satisfait les conditions :

$$\begin{cases} a \leq r \\ M_r a \leq r \\ k_r a < 1 \end{cases}$$

Alors Φ est une contraction de l'espace complet E_a dans lui-même. D'après le Théorème du Point Fixe de Banach, Φ admet un unique point fixe $z \in E_a$. Donc l'équation intégrale admet une unique solution dans E_a. □

Suite de la preuve du Lemme principal (Unicité globale) :

Le Lemme 5 nous donne une unique solution X_1 appartenant à E_a. Supposons par l'absurde qu'il existe une autre solution X_2 définie sur $[-a, a]$ (qui ne serait pas dans E_a).
Puisque X_2 est solution, X_2 est continue (car dérivable) sur $[-a, a]$. On suppose sans restriction que $T \geq 0$. Soit $T_1 = \inf\{t \in [0, a] : \|X_2(t) - x_0\| > r\}$. Cet ensemble est non vide (sinon $X_2 \in E_a$). Comme $X_2(0) = x_0$, par continuité, l'ensemble est minoré par 0, donc T_1 existe.
On a $\|X_2(T_1) - x_0\| = r$ (par continuité). Et pour tout $t < T_1$, $\|X_2(t) - x_0\| \leq r$.
Sur l'intervalle $[0, T_1]$, X_2 vérifie l'équation intégrale :

$$X_2(T_1) - x_0 = \int_0^{T_1} F(s, X_2(s)) ds$$

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \leq \int_0^{T_1} \|F(s, X_2(s))\| ds$$

Comme pour $s \in [0, T_1]$, $(s, X_2(s))$ est dans la boule $B((0, x_0), r)$ (car la norme est $\leq r$), on peut majorer par M_r.

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \leq \int_0^{T_1} M_r ds = M_r T_1$$

Or $T_1 \leq a$. Et on a choisi a tel que $M_r a < r$ (on peut choisir l'inégalité stricte dans la condition 1, $M_r a \leq r/2$ par exemple).
Si on prend $M_r a < r$, alors :

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \leq M_r a < r$$

Ceci contredit le fait que $\|X_2(T_1) - x_0\| = r$.
L'hypothèse d'existence d'un point de sortie est donc fausse. X_2 reste dans E_a sur tout l'intervalle.
Par unicité dans E_a, $X_2 = X_1$. □

Suite de la preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz

Remarque

D'après le lemme précédent, on déduit que pour $a > 0$ suffisamment petit, il existe une unique solution du problème (E) sur $]t_0 - a, t_0 + a[$.

Lemme 6: Unicité globale sur l'intersection

Soit (J_x, x) et (J_y, y) deux solutions du problème (E). Alors $\forall t \in J_x \cap J_y, \quad x(t) = y(t)$.

Preuve du lemme :

On pose $J^* = J_x \cap J_y$. C'est un intervalle ouvert (comme intersection de deux intervalles ouverts). On veut montrer que $F = \{t \in J^* | x(t) = y(t)\}$ est égal à J^*.
J^* est connexe car c'est un intervalle. Nous allons vérifier que F est un ouvert-fermé non vide de J^*.

F est non vide : $t_0 \in J_x$ et $t_0 \in J_y$, donc $t_0 \in J^*$. On a $x(t_0) = y(t_0) = x_0$. Donc $t_0 \in F$.

F est fermé dans J^* : Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F telle que $t_n \to t^*$ dans J^*. $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \in F \implies x(t_n) = y(t_n)$. Par continuité de x et y en $t^* \in J^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x(t_n) = x(t^*) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} y(t_n) = y(t^*)$$

$\implies x(t^*) = y(t^*)$. Donc $t^* \in F$. F est fermé.

F est ouvert : Soit $t_* \in F \subset J^*$ (intervalle ouvert). Considérons le nouveau problème de Cauchy (E') centré en t_* :

$$(E') \quad \begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_*) = x(t_*) = y(t_*) \end{cases}$$

D'après le lemme d'existence locale (Lemme 3), on nous dit qu'il existe $a > 0$ suffisamment petit tel que le problème (E') a une **unique solution** sur l'intervalle $]t_* - a, t_* + a[$.
Or, x et y sont bien solutions de (E') sur cet intervalle (puisqu'ils sont solutions de (E) sur J^* qui contient $]t_* - a, t_* + a[$). Par unicité de la solution sur $]t_* - a, t_* + a[$, on a :

$$\forall t \in]t_* - a, t_* + a[, \quad x(t) = y(t)$$

Donc $]t_* - a, t_* + a[\subset F$. Ceci prouve que F est un voisinage de chacun de ses points, et donc F est un ouvert de J^*.

Conclusion : F est un ouvert-fermé non vide de J^*. Comme J^* est connexe, on a $F = J^*$. $\square$

Construction de la solution maximale

Posons $J_{max} = \bigcup_{(J,Y)} J$, où l'union est prise sur toutes les solutions (J, Y) du problème (E) $\begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_0) = x_0 \end{cases}$.
J_{max} est une union d'intervalles ouverts contenant tous t_0. L'union n'est pas vide (car on sait qu'il existe au moins une solution locale sur $]t_0 - a, t_0 + a[$). J_{max} est donc un intervalle ouvert (car c'est une union connexe, car tous les ensembles contiennent t_0) et $t_0 \in J_{max}$.

Définissons Y_{max} sur J_{max} : Soit $t \in J_{max}$. Par définition de J_{max}, $\exists (J, Y)$ solution de (E) telle que $t \in J$. On pose $Y_{max}(t) = Y(t)$.
Vérifions que cette définition est bien correcte (ne dépend pas du choix de la solution (J, Y)) : Soit

$t \in J_{max}$. Soient (J_1, Y_1) et (J_2, Y_2) deux solutions de (E) telles que $t \in J_1$ et $t \in J_2$. On a $t \in J_1 \cap J_2$. D'après le lemme d'unicité (Lemme 6), on a $Y_1(t) = Y_2(t)$. La valeur de $Y_{max}(t)$ ne dépend pas du choix de la solution.

Vérifions que (J_{max}, Y_{max}) est solution : Soit $t \in J_{max}$. $\exists (J, Y)$ solution tq $t \in J$. J est ouvert, donc $\exists \epsilon > 0$ tq $]t - \epsilon, t + \epsilon[\subset J \subset J_{max}$. Par définition de Y_{max}, $\forall t' \in]t - \epsilon, t + \epsilon[$, $Y_{max}(t') = Y(t')$. Donc $Y'_{max}(t) = Y'(t) = F(t, Y(t)) = F(t, Y_{max}(t))$. Donc $\forall t \in J_{max}, Y'_{max}(t) = F(t, Y_{max}(t))$.
Par définition de Y_{max}, on a $Y_{max}(t_0) = Y(t_0) = x_0$ (en prenant une solution (J, Y) qui contient t_0).
Donc (J_{max}, Y_{max}) est solution de (E). Par définition de J_{max} (comme union de tous les domaines), (J_{max}, Y_{max}) est la solution maximale.

II. Équations autonomes

Définition 14: Équation autonome

Une équation autonome prend la forme :

$$x'(t) = G(x(t))$$

où $G : \Omega \to \mathbb{R}^d$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. $x \mapsto G(x)$.

Remarque

Une équation autonome est une équation non-autonome particulière. On pose $\Omega_F = \mathbb{R} \times \Omega$ (ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$) et $F : \Omega_F \to \mathbb{R}^d$

$$(t, x) \mapsto G(x)$$

Remarque

On peut transformer une équation non-autonome $x'(t) = F(t, x(t))$ en une équation autonome (en augmentant la dimension). Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$). Posons $Y(t) = (t, x(t)) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Alors $Y'(t) = (1, x'(t))$.

$$Y'(t) = (1, F(t, x(t)))$$

On pose $G : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$

$$Y \mapsto G(Y) = (1, F(Y))$$

L'équation $x'(t) = F(t, x(t))$ est équivalente à l'équation autonome $Y'(t) = G(Y(t))$.

Proposition 12: Équivalence Non-Autonome / Autonome

(J, x) est solution maximale du problème $\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (avec $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$) $\iff$ (J, Y) avec $Y(t) = (t, x(t))$ est solution maximale de l'équation autonome $Y'(t) = G(Y(t))$ avec $G : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$ et $Y(t_0) = (t_0, x(t_0)) \in \Omega$.

Remarque

Tout résultat sur un système autonome peut se traduire sur un système non-autonome. L'idée de passer d'un système non-autonome à un système autonome n'est pas très pertinente car on augmente la dimension.

Proposition 13: Invariance par translation (Syst. autonomes)

Soit (E) $x'(t) = G(x(t))$ avec $G : \Omega \to \mathbb{R}^d$ localement Lipschitzienne sur Ω (ouvert de $\mathbb{R}^d$). Soient (J_x, x) et (J_y, y) deux solutions maximales de (E). Soit $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $t_0 \in J_x$ et $t_0 + s \in J_y$ et :

$$x(t_0) = x_0 = y(t_0 + s)$$

Alors $J_x = \{t \in \mathbb{R} | t + s \in J_y\}$ et $\forall t \in J_x, x(t) = y(t + s)$.

Preuve :

Posons $z(t) = y(t + s)$. On a $z'(t) = y'(t + s) = G(y(t + s)) = G(z(t))$.

L'intervalle de définition de z est $J_z = \{t | t + s \in J_y\}$. On a $z(t_0) = y(t_0 + s) = x(t_0)$.
Donc (J_z, z) est solution du problème de Cauchy (CC) :

$$(CC) \quad \begin{cases} w'(t) = G(w(t)) \\ w(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Montrons que (J_z, z) est une solution maximale. Si elle ne l'est pas, $\exists(\tilde{J}_z, \tilde{z})$ solution de (CC) tq $J_z \subsetneq \tilde{J}_z$ et $\tilde{z}|_{J_z} = z$. Posons $\tilde{y}(t) = \tilde{z}(t - s)$. Le domaine de $\tilde{y}$ est $\tilde{J}_y = \{t \in \mathbb{R} | t - s \in \tilde{J}_z\}$. On a $\tilde{J}_y \supset \{t \in \mathbb{R} | t - s \in J_z\} = J_y$, et l'inclusion est stricte. De plus, $\forall t \in J_y$, $\tilde{y}(t) = \tilde{z}(t - s) = z(t - s) = y(t)$. $(\tilde{J}_y, \tilde{y})$ étend (J_y, y), ce qui là est absurde car (J_y, y) est maximale.
Donc (J_z, z) est une solution maximale de (CC).
(J_x, x) est aussi une solution maximale de (CC). Par unicité de la solution maximale (Théorème de Cauchy-Lipschitz, car G est loc. Lipschitz), on a :

$$J_x = J_z \quad \text{et} \quad \forall t \in J_x, x(t) = z(t)$$

Ce qui donne : $J_x = \{t | t + s \in J_y\}$ et $x(t) = y(t + s)$. □

Remarque

Si le système est non-autonome : $z(t) = y(t + s) \implies z'(t) = y'(t + s) = F(t + s, y(t + s)) = F(t + s, z(t))$. Il n'y a pas de raison que $F(t + s, z(t)) = F(t, z(t))$.

Remarque

Dans le cadre d'un système autonome, la condition initiale peut être fixée en $t_0 = 0$ sans perte de généralité. Si (J_2, x_2) est solution de (E) avec $x_2(0) = x_0$, alors (J_1, x_1) avec $J_1 = \{t_0 + t | t \in J_2\}$ et $x_1(t) = x_2(t - t_0)$ est solution de (E) avec $x_1(t_0) = x_0$.

Définition 15: Trajectoire

La **trajectoire** d'une solution (J, x) d'une équation autonome est l'ensemble :

$$T_x = \{x(t) | t \in J\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

Proposition 14: Propriétés des Trajectoires

Supposons G localement Lipschitzienne. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$.
a) Si deux solutions maximales du problème $x'(t) = G(x(t))$ prennent la valeur x_0 (à des temps t_0 et t_1), alors elles ont la même trajectoire.
b) Les trajectoires associées à deux solutions maximales sont soit les mêmes, soit disjointes.

Preuve :

a) Soient (J_1, x_1) et (J_2, x_2) deux solutions maximales tq $\exists t_0 \in J_1, t_0 + s \in J_2$ (pour un s) avec $x_1(t_0) = x_2(t_0 + s) = x_0$. D'après la proposition d'invariance par translation, on a : $J_2 = \{t + s | t \in J_1\}$ et $x_1(t) = x_2(t + s) \quad \forall t \in J_1$.
$T_{x_1} = \{x_1(t) | t \in J_1\}$ $T_{x_2} = \{x_2(t') | t' \in J_2\}$
En posant $t' = t + s$: $T_{x_1} = \{x_2(t + s) | t \in J_1\} = \{x_2(t') | t' \in J_2\} = T_{x_2}$.

b) Soient T_{x_1} et T_{x_2} deux trajectoires.

- Cas 1 : $T_{x_1} \cap T_{x_2} \neq \emptyset$. Alors $\exists x_0 \in T_{x_1} \cap T_{x_2}$. D'après a), $T_{x_1} = T_{x_2}$.
- Cas 2 : $T_{x_1} \cap T_{x_2} = \emptyset$. Les trajectoires sont disjointes.

□

III. Équilibres et Stabilité des Équations Autonomes

1 Notion d'équilibre

Considérons le problème (E) :

$$X'(t) = F(t, X(t))$$

avec $F : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne en x, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Dans la suite, nous nous intéressons particulièrement au cas autonome $X'(t) = G(X(t))$ où $G : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

Définition 16: Solution stationnaire

X est une solution stationnaire de (E) sur $J = \mathbb{R}$ si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = C \in \mathbb{R}^d$$

où C est une constante.

Définition 17: Point d'équilibre

$X^* \in \Omega$ est un point d'équilibre si $G(X^*) = 0$.

Remarque

Si G est localement lipschitzienne, alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) = G(X(t)) \\ X(t_0) = X^* \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur $J = \mathbb{R}$, qui est la fonction constante $X(t) = X^*$. En effet, $X'(t) = 0$ et $G(X(t)) = G(X^*) = 0$, donc l'équation est vérifiée. L'unicité est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Proposition 15: Comportement asymptotique et équilibre

Soit (J, X) une solution maximale du problème autonome $X'(t) = G(X(t))$ avec G localement lipschitzienne.
Soit $X^* \in \Omega$. Si :

$$\lim_{t \to \sup J} X(t) = X^*$$

Alors :

1. $\sup J = +\infty$.
2. $G(X^*) = 0$ (c'est-à-dire que X^* est un point d'équilibre).

Preuve :

1. Montrons que $\sup J = +\infty$.
Supposons que $\lim_{t\to\sup J} X(t) = X^*$.
On a $J \subset \mathbb{R}$. Comme la limite existe et vaut $X^* \in \Omega$, X est bornée sur $[t_0, \sup J[$. En effet, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour t assez proche de $\sup J$ (sur $[\sup J - \varepsilon, \sup J[$), on a $||X(t) - X^*|| < 1$, donc $||X(t)|| < 1 + ||X^*||$.
De plus, X est continue sur tout segment inclus dans J donc aussi bornée sur $[t_0, \sup J - \varepsilon]$. Ainsi, la fonction X est bornée sur J.

D'après le **critère d'explosion**, pour une solution maximale, nous avons l'alternative suivante :

$$\text{Soit } \sup J = +\infty, \quad \text{soit } \lim_{t \to \sup J} \|X(t)\| = +\infty \text{ (ou } X(t) \text{ s'approche du bord de } \Omega).$$

Or, nous venons de montrer que $X(t)$ est bornée (et converge vers $X^* \in \Omega$, donc reste dans un compact de Ω). La deuxième option est donc impossible. On a forcément $\sup J = +\infty$.
2. Montrons que $G(X^*) = 0$**.**
Supposons par l'absurde que $G(X^*) \neq 0$.
Pour tout $t \in J$, on a $X'(t) = G(X(t))$. Puisque $X(t) \to X^*$ quand $t \to +\infty$ et que G est continue, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} X'(t) = \lim_{t \to +\infty} G(X(t)) = G(X^*) \neq 0$$

Cela signifie qu'il existe une composante $i \in \{1, \dots, d\}$ telle que $G_i(X^*) \neq 0$. Supposons par exemple $G_i(X^*) > 0$.
On peut écrire :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} X'(s)ds \implies X_i(t) = X_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} G_i(X(s))ds$$

Puisque $G_i(X(s)) \to G_i(X^*) > 0$, par définition de la limite, il existe $T > t_0$ tel que pour tout $s \geq T$, $G_i(X(s)) > \frac{G_i(X^*)}{2}$.
Alors pour $t \geq T$:

$$X_i(t) = X_i(T) + \int_{T}^{t} G_i(X(s))ds \geq X_i(T) + (t - T)\frac{G_i(X^*)}{2}$$

Quand $t \to +\infty$, le terme de droite tend vers $+\infty$. Donc $X_i(t) \to +\infty$.
Or, par hypothèse, $X(t) \to X^*$, donc $X_i(t) \to X_i^* \in \mathbb{R}$. C'est une contradiction.
On en déduit que $G(X^*) = 0$. □

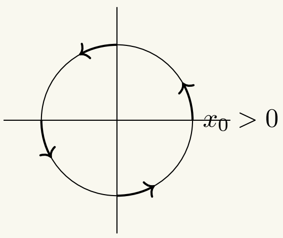
Remarque

La réciproque est fausse. Si $\sup J = +\infty$, la limite $\lim_{t \to +\infty} X(t)$ n'existe pas forcément.

Exemple 8: Oscillateur harmonique

Considérons le système défini sur $J = \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \qquad \text{avec } F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



La solution est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$X^* = \binom{0}{0}$ est un équilibre.

Ici, $\sup J = +\infty$. Pourtant, $\lim_{t \to +\infty} X(t)$ n'existe pas (le point tourne indéfiniment sur le cercle unité). L'origine $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre, mais la solution ne converge pas vers lui.

2 Stabilité des équilibres

Définition 18: Équilibre attractif et répulsif

Soit X^* un point d'équilibre de $X' = G(X)$.

- **Attractif :** L'équilibre X^* est dit attractif s'il existe un voisinage ouvert V de X^* tel que pour toute solution maximale (J, X) avec $X(t_0) \in V$, on a :
$$\sup J = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} X(t) = X^*$$
- **Répulsif :** L'équilibre X^* est dit répulsif s'il existe un voisinage ouvert V de X^* tel que pour toute solution maximale (J, X) avec $X(t_0) \in V \setminus \{X^*\}$, la solution finit par sortir de V. C'est-à-dire :
$$\exists T \in J \ \ \forall t \in [T, +\infty[, \quad X(t) \notin V$$

3 Équations autonomes en dimension 1

Nous considérons ici le cas $d = 1$. L'équation s'écrit :

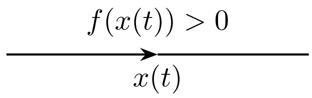
$$x'(t) = f(x(t))$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne.

Ligne de phase

On définit la notion de **ligne de phase** en représentant l'axe des réels et le sens de parcours des solutions :

- Si $f(x) > 0$, la dérivée $x'(t)$ est positive, donc $x(t)$ croît (flèche vers la droite $\rightarrow$).



- Si $f(x) < 0$, la dérivée $x'(t)$ est négative, donc $x(t)$ décroît (flèche vers la gauche $\leftarrow$).
- Si $f(x) = 0$, c'est un point d'équilibre.

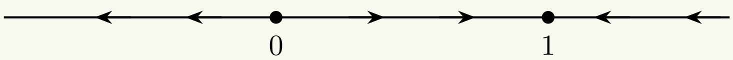
Exemple 9: L'équation logistique

Soit l'équation $x' = rx(1-x)$ avec $r > 0$. Ici $f(x) = rx(1-x)$.

- Équilibres : $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$.
- Signe de f :
  - Sur $]-\infty, 0[$, $f(x) < 0$ (décroissant).
  - Sur $]0, 1[$, $f(x) > 0$ (croissant).
  - Sur $]1, +\infty[$, $f(x) < 0$ (décroissant).

Ainsi :

- 1 est un point d'équilibre **attractif**. Il existe un voisinage $V =]0, +\infty[$ tel que toute solution partant dans V tend vers 1.
- 0 est un point d'équilibre **répulsif**.



Proposition 16: Dynamique en dimension 1

Considérons une équation autonome :

$$x'(t) = g(x(t))$$

avec g localement lipschitzienne.
Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Soit (J, x) une solution maximale vérifiant $x(t_0) = x_0$.
Soit x_+ le plus petit équilibre de g tel que $x_0 \leq x_+$ (S'il n'existe pas, on note $x_+ = +\infty$). Soit x_- le plus grand équilibre de g tel que $x_- \leq x_0$ (S'il n'existe pas, on note $x_- = -\infty$).

1. Si $g(x_0) = 0$, alors $J = \mathbb{R}$ et $x(t) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
2. Si $g(x_0) > 0$, alors x est une fonction **strictement croissante** vérifiant :

$$\lim_{t \to \inf J} x(t) = x_- \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \sup J} x(t) = x_+$$

3. Si $g(x_0) < 0$, alors x est une fonction **strictement décroissante** vérifiant :

$$\lim_{t \to \sup J} x(t) = x_- \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \inf J} x(t) = x_+$$

4. Si $\lim_{t \to \sup J} x(t) = x^*$ avec $x^* \in \mathbb{R}$, alors $\sup J = +\infty$.
   Si $\lim_{t \to \inf J} x(t) = x^*$ avec $x^* \in \mathbb{R}$, alors $\inf J = -\infty$.

Remarque

Soit il n'existe pas d'équilibre x^* tel que $x^* > x_0$, dans ce cas, $x^+ = +\infty$. Sinon, on pose :

$$x^+ = \inf \underbrace{\{y \in [x_0, +\infty[\mid g(y) = 0\}}_{E}$$

$E \neq \emptyset$ (car $\exists x^* > x_0$ tel que $g(x^*) = 0$) $\implies \inf E$ existe. E est minoré par x_0.
Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^+$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : g(x_n) = 0 \implies g(x^+) = 0 \quad \text{par continuité de } g \text{ en } x^+.$$

Donc $x^+ \in E$.

Preuve :

Cas trivial : Si $g(x_0) = 0$, alors x_0 est un équilibre. Par unicité de la solution (Cauchy-Lipschitz), $x(t) = x_0$ pour tout t.
Cas $g(x_0) > 0$:
1. Signe de g sur l'intervalle : D'après la définition de x_- et x_+, il n'y a pas d'équilibre dans l'intervalle $]x_-, x_+[$. La fonction g ne s'annule pas sur cet intervalle. Comme g est continue et $g(x_0) > 0$, par le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI), on a :

$$\forall y \in]x_-, x_+[, \quad g(y) > 0$$

2. Confinement de la solution :
Si x_+ ou x_- ne sont pas finis, alors c'est trivial ($-\infty < x(t) < +\infty, \forall t \in J$)
Montrons que pour tout $t \in J$, $x(t) \in]x_-, x_+[$. Supposons par l'absurde qu'il existe t_1 tel que $x(t_1) \geq x_+$ (dans le cas $x_+ < +\infty$). Puisque x est continue, par le TVI, il existe un temps τ entre t_0 et t_1 tel que $x(\tau) = x_+$. Or, nous avons montré que $g(x_+) = 0$. Donc la fonction constante $y(t) = x_+$ est une solution. Par unicité de Cauchy-Lipschitz, les trajectoires ne peuvent pas se croiser. Donc $x(t)$ ne peut jamais atteindre x_+. De même, $x(t)$ ne peut jamais atteindre x_-.

Ainsi $\forall t \in J, x(t) \in]x_-, x_+[$. Comme $x(t) \in]x_-, x_+[$, on a $x'(t) = g(x(t)) > 0$. Donc la solution x est **strictement croissante**.
3. Étude des limites (Cas par Cas) : Comme x est croissante, elle admet une limite en $\sup J$.

- **Cas** $x_+ < +\infty$ **:** La solution est bornée par x_+. D'après le **critère d'explosion**, on a nécessairement $\sup J = +\infty$. Soit $L = \lim_{t \to +\infty} x(t)$. D'après la proposition précédente, L est un équilibre ($g(L) = 0$). Comme x est croissante partant de x_0, on a $x_0 < L \leq x_+$. Or il n'y a aucun équilibre entre x_0 et x_+. Donc nécessairement $L = x_+$.
- **Cas** $x_+ = +\infty$ **:**
  - Si $\sup J < +\infty$, par le critère d'explosion, $x(t)$ doit sortir de tout compact, donc $\lim x(t) = +\infty$.
  - Si $\sup J = +\infty$. Supposons que la limite soit finie $L < \infty$. Alors L serait un équilibre (car asymptote). Mais $L > x_0$, donc $L \in E_+$, ce qui contredit $x_+ = +\infty$ (ensemble vide). Donc $\lim x(t) = +\infty$.

Le raisonnement est analogue pour $t \to \inf J$ et pour le cas $g(x_0) < 0$. $\square$

IV. Solutions explicites en dimension 1

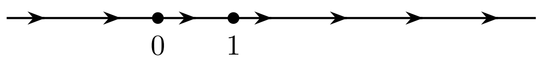
1 Exemple

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Heuristique :

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1 \quad \forall t \in J \text{ avec } (J, x) \text{ une solution maximale}$$

$f(x) = x^2$, f est $\mathcal{C}^1$.



D'après ce que l'on a vu, on sait que la solution (J, x) est strictement croissante et satisfait :

$$\lim_{t \to \sup J} x(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \inf J} x(t) = 0$$

donc $\inf J = -\infty$.

$J =]-\infty, \sup J[$. $\forall t \in J,\ x(t) > 0$.

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1 \quad \forall t \in J \quad (\forall t \in J,\ x(t) \neq 0)$$

On intègre entre 0 et t et on obtient :

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x(0)} = t \implies -\frac{1}{x(t)} + 1 = t \implies -\frac{1}{x(t)} = t - 1 \implies \frac{1}{x(t)} = 1 - t \implies x(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$\sup J = 1.$$

De manière plus générale, on peut considérer des équations de la forme $x'(t) = R(t)g(x(t))$.
$x'(t) = x^2(t)$ est donnée dans ce cadre avec $R(t) = 1$ et $g(X) = X^2$.

Afin d'être dans le cadre de Cauchy-Lipschitz, on suppose :

- $R : I \to \mathbb{R}$ continue (I ouvert de $\mathbb{R}$)
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne.

$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\Omega = I \times \mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$

$$(t, x) \to R(t)g(x)$$

f est continue car produit de fonctions continues. f est localement lipschitzienne en x :

$\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0$ t.q f lipschitzienne sur $V = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ($[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset I$)
$\forall (t, x), (t, y) \in V$

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &\leq |R(t)||g(x) - g(y)| \\ &\leq R(t) \cdot C_\varepsilon |x - y| \\ &\leq C_\varepsilon \cdot \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |R(t)||x - y| \end{aligned}$$

Solution maximale de :

$$\begin{cases} y'(t) = R(t)g(y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Heuristique : $\forall t \in J, \frac{x'(t)}{x(t)} = R(t)$ pourvu que $g(y(t)) \neq 0$.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^{t} R(s) ds$$

G est une primitive de $\frac{1}{g}$ (pourvu que l'on soit dans une zone où g ne s'annule pas). R continue donc admet une primitive H.

$$\begin{aligned} G(x(t)) - G(x(t_0)) &= H(t) - H(t_0) \\ &= G(x(t_0)) + H(t) - H(t_0) \end{aligned}$$

Si G inversible sur un ouvert dans lequel $x(t)$ prend ses valeurs, on aura :

$$x(t) = G^{-1}(G(x_0) + (H(t) - H(t_0))) \quad \forall t \in J$$

Proposition 17

Considérons le problème de Cauchy (1) :

$$\begin{cases} x'(t) = R(t)g(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$R : I \to \mathbb{R}$ continue. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement Lipschitz. Soit (J, x) la solution maximale de (1).

1. Si $g(x_0) = 0$ alors $x(t) = x_0 \quad \forall t \in J \quad J = I$.
2. Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\forall t \in J \quad g(x(t)) \neq 0$ et $\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{t_0}^{t} R(s) ds$.

Preuve :

1) Si $g(x_0) = 0$, $y : \substack{I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto x_0}$ est solution du pb car :

$$\begin{aligned} y'(t) = 0 &= g(y(t))R(t) \\ &= g(x_0)R(t) \\ &= 0 \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

En appliquant le thm de Cauchy-Lipschitz avec $f(t, x) = R(t)g(x)$ qui est continue sur $I \times \mathbb{R}$ et localement Lipschitz en x. On a par unicité $x(t) = x_0$ $\forall t \in J$ avec $J = I$.
2) Supposons par l'absurde $\exists t_1 \in J, g(x(t_1)) = 0$. Soit (J, x) sol max du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = R(t)g(y(t)) \\ y(t_1) = x(t_1) \end{cases}$$

En utilisant le thm de Cauchy-Lipschitz on a par unicité de la solut° maximale $x(t) = x(t_1)$ avec $J = I$. ABSURDE car $x(t_0) = x_0 \neq x(t_1)$ car $g(x_0) \neq 0$ et $g(x(t_1)) = 0$.
$\forall t \in J, \ g(x(t)) \neq 0$

$$\begin{cases} g \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ donc} \\ x : J \to \mathbb{R} \text{ continue} \end{cases}$$

La fonction $t \mapsto g(x(t))$ est continue $J \to \mathbb{R}$ avec $\forall t \in J, \ g(x(t)) \neq 0$. Donc par le TVI, $\forall t \in J$, la fonction $t \mapsto g(x(t))$ est de signe constant.
On a $x'(t) = R(t)g(x(t))$. Donc $\forall t \in J, \ \frac{x'(t)}{g(x(t))} = R(t)$.
On intègre entre t_0 et t :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{g(x(s))} \, ds = \int_{t_0}^{t} R(s) \, ds$$

Posons le changement de variable :

$$\begin{cases} u = x(s) \\ du = x'(s)\,ds \end{cases} \implies \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} R(s)\,ds$$

□

Remarque

On observe que $\forall s \in J,\ x'(s) = g(x(s))R(s)$. Supposons sans restriction que $g(x(s)) > 0\ \forall s \in J$. Soit $V = J \cap R^{-1}(\mathbb{R}^*)$. V est un ouvert car intersection d'ouverts. En effet, R est continue et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert.

Pour rendre les choses rigoureuses, on a $V = \bigcup_{i \in A} C_i$ avec C_i des intervalles ouverts qui sont les composantes connexes de V. On en déduit :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{g(x(s))}\,ds = \sum_{i \in A} \int_{C_i \cap [t_0,t]} \frac{x'(s)}{g(x(s))}\,ds$$

Le changement de variable $u = x(s)$ est rigoureux car sur C_i, on a $R(t) > 0$ (ou $R(t) < 0$) pour tout $t \in C_i$. Donc $x'(t) = g(x(t))R(t)$ garde un signe constant (strictement positif ou strictement négatif) $\forall t \in C_i$.
Conclusion : x est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de C_i sur $x(C_i)$ par le théorème d'inversion locale (cadre global).

Remarque

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(u)}\,du = \int_{t_0}^{t} R(s)\,ds$$

Pour $t \in J$, on sait que sur l'intervalle $J_t = [\min(x_0, x(t)), \max(x_0, x(t))]$:

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall u \in J_t,\ g(u) > \alpha > 0 \text{ ou } g(u) < -\alpha < 0.$$

Car g est continue sur le compact J_t et ne s'annule pas ($\forall u \in J_t,\ g(u) \neq 0$).
Par le TVI, on sait que $g(u) > 0$ ou $g(u) < 0$ pour tout $u \in J_t$ (et par extension sur l'image connexe).
(1) $\forall u \in J_t \quad g(u) \geq \inf_{\alpha \in J_t} g(\alpha) = g(\beta_{t_1}) = \alpha_t \quad (\alpha_t \in \mathbb{R}_+^*)$

Puisque $u \to \frac{1}{u}$ est continue sur J_t, cette fonction admet une primitive que l'on note :

$$\varphi(x(t)) - \varphi(x_0) = \int_{t_0}^{t} R(s)ds$$

Puisque sur $J_t \quad \varphi'(u) = \frac{1}{g(u)}$

- cas 1 : $g(u) > 0\ \forall u \in J_t$ alors φ str. $\nearrow$ et donc inversible.
- cas 2 : $g(u) < 0\ \forall t \in J_t$ et la même chose.

φ inversible sur J_t et $x(t) = \varphi^{-1}\left(\varphi(x_0) + \int_{t_0}^{t} R(s)ds\right)$

Remarque

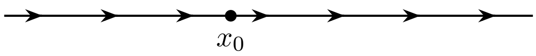
Si on regarde :

$$\begin{cases} x'(t) = K(x(t))^{\alpha} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$K > 0$ alors si $\alpha > 1$ la solution maximale de (E) est définie sur :

- $]-\infty, T[$ si $x_0 > 0$ avec $T < +\infty \quad (\to \lim_{t \to T} x(t) = +\infty)$
- $]T, +\infty[$ si $x_0 < 0$ avec $T < +\infty \quad (\to \lim_{t \to T} x(y) = -\infty)$

(1) $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ avec $f(x) = |x|^\alpha$ (**Attention :** c'est bien $\mathcal{C}^1$). On est bien dans le cas de Cauchy-Lipschitz.



$f(x) = |x|^\alpha$
$x^+ = +\infty$
$x^- = 0$

$x_0 > 0$ on a vu que $\forall t \in J\ x(t) > 0$. x est strictement croissante sur J avec $\lim_{t \to \inf J} x(t) = 0$ et $\lim_{t \to \sup J} x(t) = +\infty$.
$x'(t) = |x|^\alpha(t) \quad \forall t \in J = x^\alpha(t)$ car $\forall t \in J\ x(t) > 0$

$$\frac{x'(t)}{x^\alpha(t)} = 1 \quad \forall t \in J$$

On intègre entre t_0 et t on a :

$$\frac{x^{1-\alpha}(t)}{1-\alpha} - \frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t - t_0$$

$$x^{1-\alpha}(t) - x_0^{1-\alpha} = (1-\alpha)(t-t_0) \iff \frac{1}{x^{\alpha-1}(t)} = \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} + (1-\alpha)(t-t_0)$$

$$\iff x(t) = \left(\frac{1}{\frac{1}{x_0^{\alpha-1}} + (1-\alpha)(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$J =]-\infty, T[$ avec $\frac{1}{x_0^{\alpha-1}} + (1-\alpha)(T-t_0) = 0$

$$\iff T = t_0 + \frac{1}{(\alpha-1)x_0^{\alpha-1}} < +\infty$$

On observe $\lim_{t \to T} x(t) = +\infty$.

2 Équations différentielles linéaires en dimension 1

- $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$

$a, b : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle ouvert) et a, b continue.
$x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et localement lipschitz en x.

$$(t, x) \longrightarrow a(t)x + b(t)$$

Soit A une primitive de a sur I (A existe car a est continue).

Proposition 18: (H) : $x'(t) = a(t)x(t)$

1. Les solutions maximales de H s'écrivent sous la forme $x(t) = \lambda e^{A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Le problème $(C) = \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ a une unique solution maximale $x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$ $\forall t \in I$.

Preuve :

On est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz, soit (X, J) une solution maximale.

$$y(t) = x(t)e^{-A(t)}$$

$$y'(t) = x'(t)e^{-A(t)} - x(t)a(t)e^{-A(t)}$$

$$= \exp(-A(t))(x'(t) - a(t)x(t))$$

$\forall t \in J\ y'(t) = 0$. J est connexe, y dérivable i.e $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ y(t) = \lambda$ i.e $x(t) = \lambda e^{A(t)}$. Puisque cette solution est maximale on doit avoir $J = I$ car la fct° $t \to \lambda e^{A(t)}$ est bien définie sur I.
2. D'après 1 on a $x(t) = \lambda e^{A(t)}$ $\forall t \in J$. Choississons $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$ $\forall t \in I$ $x(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$.

$$x(t_0) = \lambda = x_0$$
$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \forall t \in I$$

□

Proposition 19: (NH) : $a(t)x(t) + b(t)$

1. Les solutions maximales de (NH) sont définies sur I et données par la formule de Duhamel :
$$\forall t \in J \quad x(t) = \lambda e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_s^t a(u)du}\, ds \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
2. Le problème (NH) avec données initiale $x(t_0) = x_0$ a une unique solution globale avec $\lambda = x_0$, $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$.
3. Soit x_p une solution de (NH) alors les solution de (NH) s'écrivent $x(t) = x_p(t) + \lambda e^{A(t)}$. On dit que (NH) est somme d'une solution particulière de (NH) et d'une solution de (H).
$$S_{NH} = \{\text{ensemble des solutions de (NH)}\}$$
$$S_H = \{\text{ensemble des solutions de (H)}\}$$
On a $S_{NH} = x_p(\cdot) + S_H$.
4. Les solutions de (NH) forment un espace affine de dimension 1 dont l'espace vectoriel associé correspond aux solutions de (H).

Preuve :

Preuve des points 1 et 2 : Soit (X, J) une solution maximale de (E) avec $t_0 \in J$.
(Méthode de la variation de la constante) On pose : $x(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ où A est une primitive de a sur I. λ est $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^1$. On dérive :

$$x'(t) = \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)a(t)e^{A(t)}$$

Or $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. Donc :

$$\lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)\lambda(t)e^{A(t)} + b(t)$$
$$\implies \lambda'(t)e^{A(t)} = b(t)$$
$$\implies \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

On intègre entre t_0 et t :
$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\, ds$$

On remplace dans l'expression de $x(t)$:

$$x(t) = \left(\lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\, ds\right) e^{A(t)}$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \lambda(t_0)e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(t)}e^{-A(s)}\,ds \\
&= \lambda(t_0)e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(t)-A(s)}\,ds
\end{aligned}
$$

En posant $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$, en utilisant la formule de Chasles, on a $A(t) - A(s) = \int_s^t a(u)du$. D'où la formule :

$$
x(t) = \lambda e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)\,ds
$$

En particulier, puisque la formule ⊛ est valide pour tout $t \in I$ (car les fonctions a et b sont continues sur I tout entier), on en déduit que $J = I$ et donc la solution est globale.
Considérons le problème de Cauchy (C) :

$$
(C) \quad \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{avec } t_0 \in I
$$

D'après le Thm de Cauchy-Lipschitz, (C) a une unique solution maximale qui est globale (cf. 1°).
On a pour tout $t \in I$:

$$
x(t) = \lambda\exp\left(\int_{t_0}^t a(u)du\right) + \int_{t_0}^t b(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds
$$

Avec la condition initiale, on trouve $x(t_0) = \lambda = x_0$.
On peut décomposer cette solution en deux parties :

$$
\forall t \in I, \quad x(t) = \underbrace{x_0\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)}_{\substack{\text{Solution du problème} \\ \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}}} + \underbrace{\int_{t_0}^t b(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds}_{\substack{\text{Solution du problème} \\ \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}}}
$$

Preuve du point 3 (Structure de l'espace) : Soit x_p une solution globale du problème (NH) : $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$. Soit x une solution quelconque globale de (NH). Posons $y(t) = x(t) - x_p(t)$ pour tout $t \in I$. Dérivons y :

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= x'(t) - x_p'(t) \\
&= (a(t)x(t) + b(t)) - (a(t)x_p(t) + b(t)) \\
&= a(t)(x(t) - x_p(t)) = a(t)y(t)
\end{aligned}
$$

Donc $\tilde{y}$ est solution de l'équation homogène (H) : $\tilde{y}'(t) = a(t)\tilde{y}(t)$.
On a donc $S_{NH} = x_p(\cdot) + S_H$ avec :

$$
S_H = \{f : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto x(t) \mid (I, x(\cdot)) \text{ solution de (H)}\}
$$

$$
S_H = \left\{t \mapsto \lambda\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}
$$

On observe que $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in S_H \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in I, x(t) = \lambda\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$.

$$
(\lambda_1 x)(t) = \lambda_1 x(t) = \lambda_1\lambda\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)
$$

Comme $\lambda_1\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 x \in S_H$.
De même, soient $x_1, x_2 \in S_H$, alors $\exists \lambda_1, \lambda_2$ tels que :

$$
x_1(t) = \lambda_1\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)
$$

$$x_2(t) = \lambda_2 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \quad \forall t \in I$$

$$x_1(t) + x_2(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)\left(e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\right)$$

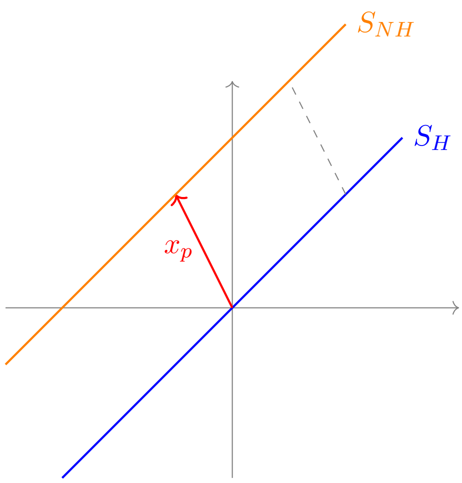
$$\implies x_1 + x_2 \in S_H$$

S_H est un espace vectoriel :

$$S_H = \text{vect}\left\{ \substack{I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)} \right\}$$

$$\dim S_H = 1$$

S_H est une droite vectorielle puisque $S_{NH} = x_p + S_H$.



S_{NH} est un espace affine de dimension 1. □

Remarque

Pour calculer les solutions explicites de (NH) :

1. On essaie de trouver une solution particulière $x_p(t)$ (souvent évidente ou de même forme que $b(t)$) et on écrit ensuite la solution générale sous la forme $t \mapsto x_p(t) + \lambda e^{A(t)}$.
2. Si on n'arrive pas à trouver une solution particulière intuitivement, on utilise la **formule de Duhamel** (variation de la constante).

3 Principe de superposition

Proposition 20: Critère de superposition

Soient a, b_1, b_2 des fonctions continues sur I.

- Soit x_1 une solution de $x'(t) = a(t)x(t) + b_1(t)$.
- Soit x_2 une solution de $x'(t) = a(t)x(t) + b_2(t)$.

Alors $x = x_1 + x_2$ est solution du problème :

$$y'(t) = a(t)y(t) + (b_1(t) + b_2(t))$$

Preuve :

Calcul direct :

$$x'(t) = (x_1 + x_2)'(t) = x_1'(t) + x_2'(t)$$

$$= (a(t)x_1(t) + b_1(t)) + (a(t)x_2(t) + b_2(t))$$

$$= a(t)(x_1(t) + x_2(t)) + b_1(t) + b_2(t)$$
$$= a(t)x(t) + (b_1(t) + b_2(t))$$

$\square$

Exemple 10: Application du principe de superposition

Exercice : Résoudre l'équation :

$$x'(t) = -x(t) + t + e^t$$

On identifie les seconds membres $b_1(t) = t$ et $b_2(t) = e^t$.
On décompose le problème en cherchant des solutions particulières pour :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + t & \text{Forme candidate : } \alpha t + \beta \\ x_2'(t) = -x_2(t) + e^t & \text{Forme candidate : } \alpha e^t \end{cases}$$

V. Principe de Comparaison

1 Sous-solutions et Sur-solutions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x'(t) = f(t, x(t)) \tag{2}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue sur Ω et localement lipschitzienne en x. On suppose $\Omega = I \times \mathbb{R}$ avec I un intervalle ouvert.

Définition 19: Sous-solutions et Sur-solutions

On définit la notion de sous-solution et sur-solution de (E).
Soit $J \subset I$ un intervalle ouvert.

- On dit que (J, x) est une **sur-solution** de (E) si :

$$\forall t \in J, \quad x'(t) \geq f(t, x(t))$$

- On dit que (J, y) est une **sous-solution** de (E) si :

$$\forall t \in J, \quad y'(t) \leq f(t, y(t))$$

2 Heuristique

On veut résoudre le problème $(C) : x'(t) = f(t, x(t))$. Soit g une fonction de $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (t, x) \in I \times \mathbb{R},\ f(t, x) \leq g(t, x)$.

Si (J, x) est solution maximale de (E) avec $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in J$), alors $\forall t \in J$:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \leq g(t, x(t))$$

Ainsi, (J, x) est une sous-solution du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si g est continue et localement lipschitzienne en x, on va montrer que pour (x_1, J_1) une solution maximale de (C_1) (le problème associé à g), on a :

$$\forall t \in [t_0, \sup J[\cap [t_0, \sup J_1[: \quad x(t) \leq x_1(t)$$

Si $\sup J < +\infty$, alors $\sup J \geq \sup J_1$ ou $x(t) \to -\infty$ quand $t \to \sup J$ (d'après le critère d'explosion).

3 Principe de comparaison

Lorsque l'on définit la notion de sous et sur-solutions, il est entendu que x et y sont dérivables.

Remarque

Si u est une sous-solution de (E) sur J et v est une sur-solution de (E) sur J, alors on a :

$$\forall t \in J, \quad u'(t) \leq f(t, u(t))$$

$$\forall t \in J, \quad v'(t) \geq f(t, v(t))$$

Attention : Cela n'implique pas que $u'(t) \leq v'(t)$.

Exemple 11: Contre-exemple sur les dérivées

Considérons :

$$u(t) = e^t, \quad x(t) = 0, \quad v(t) = -e^{-t}$$

Equation (E) : $x'(t) = 2x(t)$.
u est une sous-solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

$$u'(t) = e^t \leq 2e^t = 2u(t) \quad \text{(Vrai)}$$

v est une sur-solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$?

$$v'(t) = e^{-t} \geq 2(-e^{-t}) = 2v(t) \quad \text{(Vrai pour } t \geq 0)$$

Cependant, regardons l'ordre des dérivées : $u'(t) = e^t$ et $v'(t) = e^{-t}$. On n'a pas nécessairement d'ordre simple entre elles (dépend du signe de t et de l'équation).
Ici, on a bien u sous-solution, v sur-solution, et x solution de (E). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = e^t \leq 2e^t = 2u(t)$ et $v'(t) = e^{-t} \geq -2e^{-t} = 2v(t)$.

3.1 Cas Linéaire

Proposition 21: Principe de comparaison (Cas linéaire)

Soient a et b des fonctions continues sur I. Soit u une sous-solution et v une sur-solution de :

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

Alors :

$$\text{Si } u(t_0) \leq v(t_0), \quad \text{alors } u(t) \leq v(t) \quad \forall t \geq t_0 \text{ (dans l'intervalle de définition)}$$

Remarque

Si u est définie sur $t \in]T_0, \tilde{T}_0[$ et v est définie sur $t \in]T_1, \tilde{T}_1[$. On considère $t \in [t_0, +\infty[\cap]T_0, \tilde{T}_0[\cap]T_1, \tilde{T}_1[$.

Preuve :

Considérons $w(t) = v(t) - u(t)$ pour t dans l'intersection des domaines. w est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$w'(t) = v'(t) - u'(t)$$

Or $v'(t) \geq a(t)v(t) + b(t)$ (sur-solution) et $u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t)$ (sous-solution). Donc :

$$w'(t) \geq (a(t)v(t) + b(t)) - (a(t)u(t) + b(t))$$

$$w'(t) \geq a(t)(v(t) - u(t)) = a(t)w(t)$$

On a donc l'inégalité différentielle $w'(t) - a(t)w(t) \geq 0$.
Soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$. Posons $z(t) = e^{-A(t)}w(t)$. Dérivons $z(t)$:

$$z'(t) = -a(t)e^{-A(t)}w(t) + e^{-A(t)}w'(t)$$

$$z'(t) = e^{-A(t)}(w'(t) - a(t)w(t))$$

Comme $e^{-A(t)} > 0$ et $w'(t) - a(t)w(t) \geq 0$, on a :

$$z'(t) \geq 0 \quad \forall t \in]T_0, \tilde{T}_0[\cap]T_1, \tilde{T}_1[$$

Donc z est croissante sur cet intervalle (Théorème des accroissements finis).
On a supposé $u(t_0) \leq v(t_0)$, donc $w(t_0) = v(t_0) - u(t_0) \geq 0$. Ainsi $z(t_0) = w(t_0)e^{-A(t_0)} \geq 0$.
Comme z est croissante, pour tout $t \geq t_0$, $z(t) \geq z(t_0) \geq 0$. Or $z(t) = e^{-A(t)}w(t)$ et $e^{-A(t)} > 0$, donc $w(t) \geq 0$. C'est-à-dire $v(t) \geq u(t)$ pour tout $t \geq t_0$. □

Remarque

Si $u'(t) \leq a(t)u(t)$ pour tout $t \geq t_0$, alors u est une sous-solution du problème homogène (H) : $y'(t) = a(t)y(t)$. Soit v la solution du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(0) = u(0) \end{cases}$$

u est sous-solution de (H), v est solution (donc sur-solution) de (H). En appliquant le résultat précédent en $t_0 = 0$ (car $v(0) = u(0)$), on peut écrire :

$$\forall t \geq 0, \quad u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t a(s)ds} = v(t)$$

C'est l'**Inégalité de Gronwall**.

3.2 Cas Non-Linéaire

Proposition 22: Principe de comparaison (Cas général)

Soit $f \in \mathcal{C}^1$ (ou $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et localement lipschitzienne en x). Soit u une sous-solution et v une sur-solution du problème :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Si $u(t_0) \leq v(t_0)$, alors :

$$\forall t \geq t_0, \quad u(t) \leq v(t)$$

Preuve :

Posons $w(t) = v(t) - u(t)$. On a $w'(t) = v'(t) - u'(t)$. D'après les définitions :

$$\forall t, \quad v'(t) \geq f(t, v(t))$$

$$\forall t, \quad u'(t) \leq f(t, u(t))$$

Donc :

$$w'(t) \geq f(t, v(t)) - f(t, u(t))$$

On veut factoriser cette différence.

$$f(t, v(t)) - f(t, u(t)) = a(t)(v(t) - u(t))$$

où l'on définit la fonction $a(t)$ par :

$$a(t) = \begin{cases} \frac{f(t,v(t)) - f(t,u(t))}{v(t) - u(t)} & \text{si } v(t) \neq u(t) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t)) & \text{si } v(t) = u(t) \end{cases}$$

Si $u(t) \neq v(t)$:

$$f(t, v(t)) - f(t, u(t)) = a(t)(v(t) - u(t))$$

Si $u(t) = v(t)$:

$$f(t, v(t)) - f(t, u(t)) = 0$$

Supposons que a est continue. Alors on peut appliquer la proposition précédente (cas linéaire). Pour tout $t \geq t_0$, on compare $w(t)$ avec la solution w_1 du problème :

$$\begin{cases} z'(t) = a(t)z(t) \\ z(t_0) = w(t_0) \end{cases}$$

w est une sur-solution de $z' = a(t)z$ (car $w' \geq aw$) et w_1 est une solution (donc sous-solution). Or $w(t_0) = v(t_0) - u(t_0) \geq 0$. Et la solution explicite est $w_1(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$. Comme $w(t_0) \geq 0$ et l'exponentielle est positive, $w_1(t) \geq 0$.

Le principe de comparaison linéaire implique $w(t) \geq w_1(t) \geq 0$. Donc $v(t) \geq u(t)$ pour tout $t \geq t_0$. $\square$