Polycopié d'Intégration de Lebesgue et Probabilités
L3 MIDO

Cours de M. Trashorras

Compilé par Samuel Lelouch avec Gemini

20 novembre 2025

Table des matières

Chapitre 2 : Intégration par rapport à une mesure

I. Compléments et Rappels (Exercices)

Exemple 1: Exercice : Unicité de la mesure

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, stable par intersection finie, tq $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$.

- Soient μ et ν deux mesures sur $(E, \mathcal{E})$ tq $\forall A \in \mathcal{C},\ \mu(A) = \nu(A)$.
- On suppose que $\forall n \geq 0$, il existe une suite **croissante** $(E_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ tq $\forall n, \mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$ et $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Montrer que μ et ν sont σ-finies sur $(E, \mathcal{E})$ et égales.

Réponse : En effet, en posant $\forall n \geq 0$, et tout $A \in \mathcal{E}$:

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n)$$

$$\nu_n(A) = \nu(A \cap E_n)$$

On définit 2 mesures finies sur $(E, \mathcal{E})$ tq $\forall A \in \mathcal{C}$, on a :

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) = \mu(E_n) - \mu(A^c \cap E_n) \quad \text{(car } \mathcal{C} \text{ stable par intersection)}$$

$$= \nu(E_n) - \nu(A^c \cap E_n) = \nu_n(A)$$

Or on a 2 cas :

- **1er cas :** $\mu_n(E) = \nu_n(E) = 0$. Alors $\mu_n = \nu_n$ sur $(E, \mathcal{E})$.
- **2ème cas :** $\mu_n(E) = \nu_n(E) \neq 0$. Et alors les probabilités $\tilde{\mu}_n(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_n(E)}$ et $\tilde{\nu}_n(A) = \frac{\nu_n(A)}{\nu_n(E)}$ coïncident sur $\mathcal{C}$. Donc d'après l'exemple déjà vu sur $(E, \mathcal{E})$, on a $\nu_n = \mu_n$ sur $(E, \mathcal{E})$.

Ainsi, $\forall n \geq 0$ et tout $A \in \mathcal{E}$, on a :

$$\nu_n(A) = \nu(A \cap E_n) = \mu(A \cap E_n) = \mu_n(A)$$

De plus :

$$\nu(A) = \lim_{n \to \infty} \nu(A \cap E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap E_n) = \mu(A)$$

d'après la propriété de continuité croissante des mesures.

Remarque

Conséquence de l'exo précédent, $\mu = \nu$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Puisque en notant $\mathcal{C} = \{]a, b],\ a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$, on a :

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$.
- $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_n =]-n, n]$ nous donne une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$ tq $\mathbb{R} = \bigcup E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \nu(E_n) = \mu(E_n) = 2n$.

Exemple 2: Réponse question (dérivabilité/mesurabilité)

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$
$$= \limsup_n n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)$$

où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geq 1$, $f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc mesurable. Donc f' est mesurable en tant que limsup d'une suite de fonctions mesurables.

II. Intégration des fonctions étagées positives

Définition 1: Fonction étagée

On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est étagée si et seulement si :

- f est mesurable ($\mathcal{E} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable).
- f prend un nombre fini de valeurs.

Ainsi $f(E) = \{f(x), x \in E\} \subset \mathbb{R}$ est un ensemble fini et :

$$f = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\alpha\})}$$

Cette représentation de f est unique, on dit que c'est la **représentation canonique** de f.

Remarque

Toutes les fonctions en escalier sont des fonctions étagées, mais la réciproque est fausse car par exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas une fonction en escalier.

Définition 2: Intégrale d'une fonction étagée

Soit $f : E \to F$ une fonction étagée positive de représentation canonique $f = \sum_{\alpha\in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\alpha\})}$. On appelle intégrale de f sur E par rapport à la mesure μ :

$$\int_E f d\mu = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\}))$$

Remarque

1. f est à valeurs réelles.
2. Il est possible que $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Ici, si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$\alpha \times +\infty = +\infty, \quad \infty \times \infty = \infty, \quad \alpha \geq 0 \implies \alpha \times \infty = +\infty, \quad \alpha = 0 \implies \alpha \times (+\infty) = 0$$

4. Si $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ définie sur $E = \mathbb{R}, \mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu = \lambda$ (la mesure de Lebesgue) :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1 \times \lambda(\mathbb{Q}) + 0 \times \lambda(\mathbb{Q}^c)$$

puisque $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 1 \times \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} + 0 \times \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^c}$.

$$= 1 \times 0 + 0 \times (+\infty) = 0$$

5. Si f est étagée positive, nécessairement $\int_E f d\mu \in [0, +\infty]$. Si $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$:

$$\int_{\mathbb{R}} g d\lambda = 1 \times \lambda(\mathbb{R}^*) + 0 \times \lambda(\mathbb{R}^{*-})$$

$$= 1 \times +\infty + 0 \times (+\infty) = +\infty + 0 = +\infty$$

Définition 3: Exemple (suite)

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Si $F : E \to \mathbb{R}^+$ est une fonction étagée alors :

$$F = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\alpha\})}$$

$$= \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}} \quad (\leftarrow \text{somme finie})$$

On définit :

$$\int_E F d\mu = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\})) \in [0, +\infty]$$

Exemple 3: Mesure de Dirac

Soit E un ensemble non vide, $a \in E$ et δ_a la mesure de Dirac en a sur $(E, \mathcal{P}(E))$. $\forall A \subset E$:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $f : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction étagée positive $f = \sum \alpha \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\alpha\})}$. Il existe un **unique** $\alpha \in f(E)$ tq $a \in \{f = \alpha\}$.

$$\int_E f d\delta_a = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \delta_a(\{f = \alpha\})$$

$$= \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \delta_a(\{f = \alpha\}) \quad (\text{avec } \delta_a(\{f = \alpha\}) = 0 \text{ sauf pour } \alpha \text{ tq } f(a) = \alpha)$$

$$= f(a)$$

Proposition 1: Propriété de la représentation

Soit $f : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction étagée positive. Pour toute représentation de f de la forme :

$$f = \sum_{i \in I} a_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{où } I \text{ est un ensemble fini}$$

et les $(A_i)_{i \in I}$ constituent une partition de E en parties mesurables, on a :

$$\int_E f d\mu = \sum_{i \in I} a_i \mu(A_i)$$

Remarque

$E = [0, 2]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 3 & \text{si } x \in]1,2] \end{cases} \qquad F = 1 \times \mathbb{1}_{[0,1]} + 3\mathbb{1}_{]1,2]}$$

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} F &= 1 \times \mathbb{1}_{[0,1]} + 1 \times \mathbb{1}_{]1,1.1]} + 3 \times \mathbb{1}_{]1.1,2]} \\ &= 1 \times \mathbb{1}_{[0,1.1]} + 2 \times \mathbb{1}_{]1,2]} \quad \text{(Pas une partition)} \end{aligned}$$

<u>Preuve :</u> Soit $f = \sum_{i \in I} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ où I est un ensemble fini et les $(A_i)_{i \in I}$ constituent une partition de E en éléments de $\mathcal{E}$. En particulier, $\forall i \in I$, $a_i \in f(E)$.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i \mu(A_i) &= \sum_{\alpha \in f(E)} \left(\sum_{\substack{i \in I \\ a_i = \alpha}} a_i \mu(A_i) \right) = \sum_{\alpha \in f(E)} \left(\sum_{\substack{i \in I \\ a_i = \alpha}} \alpha \mu(A_i) \right) \\ &= \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \left(\sum_{\substack{i \in I \\ a_i = \alpha}} \mu(A_i) \right) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu \left(\bigcup_{\substack{i \in I \\ a_i = \alpha}} A_i \right) \\ &= \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(f^{-1}(\{\alpha\})) \end{aligned}$$

Proposition 2: Propriétés de l'intégrale (Fonctions étagées)

Soient $f, g : E \to \mathbb{R}^+$ des fonctions étagées positives et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

1. La fonction λf est étagée positive et :

$$\int_E (\lambda f) d\mu = \lambda \int_E f d\mu$$

2. La fonction $f + g$ est étagée positive et :

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

3. Si $\forall x \in E, f(x) \geq g(x)$ alors :

$$\int_E f d\mu \geq \int_E g d\mu$$

Preuve : **1** - Soit $f : E \to \mathbb{R}^+$ est étagée positive et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Comme $f = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\alpha\})}$, on a $\lambda f = \sum_{\alpha \in f(E)} \lambda \alpha \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\alpha\})}$. Donc :

$$\int_E (\lambda f) d\mu = \sum_{\alpha \in f(E)} \lambda \alpha \mu(\{f = \alpha\}) = \lambda \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) = \lambda \int_E f d\mu$$

2 - Soient $f, g : E \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions étagées positives.

$$f = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}} = \sum_{i \in I} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$$g = \sum_{\beta \in g(E)} \beta \mathbb{1}_{\{g=\beta\}} = \sum_{j \in J} b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

I est un ensemble fini, $(A_i)_{i \in I}$ est une partition mesurable de E. J est un ensemble fini, $(B_j)_{j \in J}$ est une partition mesurable de E. Les ensembles $(A_i \cap B_j)_{i \in I, j \in J}$ constituent une partition mesurable de E.

$$f + g = \sum_{(i,j) \in I \times J} (a_i + b_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

$$\int_E (f+g) d\mu = \sum_{(i,j) \in I \times J} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{(i,j) \in I \times J} b_j \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i \in I} \left| \sum_{j \in J} a_i \mu(A_i \cap B_j) \right| + \sum_{j \in J} \left| \sum_{i \in I} b_j \mu(A_i \cap B_j) \right|$$

$$= \sum_{i \in I} a_i \left(\sum_{j \in J} \mu(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j \in J} b_j \left(\sum_{i \in I} \mu(A_i \cap B_j) \right)$$

$$= \sum_{i \in I} a_i \mu \left(\bigcup_{j \in J} A_i \cap B_j \right) + \sum_{j \in J} b_j \mu \left(\bigcup_{i \in I} A_i \cap B_j \right)$$

$$= \sum_{i \in I} a_i \mu(A_i) + \sum_{j \in J} b_j \mu(B_j)$$

$$= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

3 - Soient $f, g : E \to \mathbb{R}^+$ étagées positives, tq $\forall x \in E, f(x) \geq g(x)$. Alors :

$$\int_E f d\mu = \int_E (f - g + g) d\mu$$

$$= \int_E (f-g) d\mu + \int_E g d\mu$$

Or $f - g \geq 0$, donc $\int_E (f-g) d\mu \geq 0$.

$$\geq \int_E g d\mu$$

Proposition 3: Calcul via partition quelconque

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^+$ et $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{E}$. Si $f = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors f est une fonction étagée positive et $\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)$.

Preuve : D'après la proposition précédente, si $f = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_N \geq 0$ et $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu = \int_E \left(\sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{A_i} \right) d\mu &= \sum_{i=1}^N \int_E a_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \int_E \mathbb{1}_{A_i} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)\end{aligned}$$

Remarque

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction en escalier. Il existe donc une subdivision $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N = b$ de $[a,b]$ tq f est constante sur les intervalles $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ $\forall i \in [\![0, N-1]\!]$. On peut donc écrire :

$$f = \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2}\right) \mathbb{1}_{]\sigma_i, \sigma_{i+1}[} + \sum_{j=0}^N f(\sigma_j) \mathbb{1}_{\{\sigma_j\}}$$

et on a vu que $\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2}\right)(\sigma_{i+1} - \sigma_i)$.
Or, en notant λ la mesure de Lebesgue :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} \left(\sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2}\right) \mathbb{1}_{]\sigma_i, \sigma_{i+1}[} \right) &+ \sum_{j=0}^N f(\sigma_j) \mathbb{1}_{\{\sigma_j\}} d\lambda \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{[a,b]} f(\dots) \mathbb{1}_{]\sigma_i, \sigma_{i+1}[} d\lambda + \sum_{j=0}^N f(\sigma_j) \int_{[a,b]} \mathbb{1}_{\{\sigma_j\}} d\lambda \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2}\right) \lambda(]\sigma_i, \sigma_{i+1}[) + \sum_{j=0}^N f(\sigma_j) \lambda(\{\sigma_j\}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2}\right)(\sigma_{i+1} - \sigma_i) + \sum_{j=0}^N f(\sigma_j) \times 0 \\ &= \int_a^b f(t)dt\end{aligned}$$

III. Intégrale des fonctions mesurables positives

Définition 4: Intégrale d'une fonction mesurable positive

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. On appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ la quantité notée :

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E h d\mu : \begin{array}{l} h : E \to \mathbb{R} \text{ étagée positive} \\ h \leq f \end{array} \right\}$$

Remarque

1. Dès que f est mesurable et positive, $\int_E f d\mu$ est correctement définie.
2. $\int_E f d\mu \in [0, +\infty]$.
3. f est à valeurs dans $[0, +\infty]$.
4. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction étagée positive, on a toujours avec cette nouvelle définition :

$$\int_E f d\mu = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\})$$

Proposition 4: Propriétés basiques

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : E \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables.

1. Si $f \geq g$ alors $\int_E f d\mu \geq \int_E g d\mu$.
2. Si $\mu(\{f > 0\}) = \mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0$ alors $\int_E f d\mu = 0$.

Preuve : **1** - Puisque $f \geq g$.

$$\{h : E \to \mathbb{R}^+ \text{ étagée}, h \leq g\} \subset \{h : E \to \mathbb{R}^+ \text{ étagée}, h \leq f\}$$

donc $\left\{\int_E h d\mu, \ldots, h \leq g\right\} \subset \left\{\int_E h d\mu, \ldots, h \leq f\right\}$. donc $\sup \left\{\int_E h d\mu, h \leq g\right\} \leq \sup \left\{\int_E h d\mu, h \leq f\right\}$.

$$\int_E g d\mu \leq \int_E f d\mu$$

2 - Soit h une fonction étagée positive telle que $0 \leq h \leq f$. On a $h = \sum_{\alpha \in h(E)} \alpha \mathbb{1}_{\{h=\alpha\}}$. Et nécessairement pour tout $\alpha \in h(E)$, $\alpha = 0$ et $\mu(h = \alpha) = 0$. Car si on avait pour un $\alpha \in h(E)$, $\alpha > 0$ et $\mu(h = \alpha) \neq 0$, on aurait $\mu(f > 0) \geq \mu(h = \alpha) > 0$. Ainsi pour toute fonction étagée $h : E \to \mathbb{R}^+$ tq $h \leq f$, on a :

$$\int_E h d\mu = \sum_{\alpha \in h(E)} \alpha \mu(h = \alpha) = 0$$

Donc $\int_E f d\mu = \sup_h \{\int_E h d\mu\} = \sup\{0\} = 0$.

Chapitre 3 : Espaces L^p

I. Définitions et inégalité de Hölder

Définition 5: Espaces $\mathcal{L}^p$

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et p un nombre réel, $p \geq 1$. On pose :

$$\mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu) = \left\{ f : E \to \mathbb{R},\ \text{mesurable, tq } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

$$\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{E}, \mu) = \{ f : E \to \mathbb{R},\ \text{mesurable, tq } \exists C > 0 \text{ tq } |f| \leq C\ \mu\text{-p.p.} \}$$

Remarque

On a vu que la relation binaire $\sim$ définie sur l'ensemble des fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$ à valeurs réelles :

$$f \sim g \iff f = g\ \mu\text{-p.p.}$$

est une relation d'équivalence.

Définition 6: Espace L^p

$\forall p \in [1, +\infty]$, on pose $L^p(E, \mathcal{E}, \mu) = \mathcal{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)/ \sim$.

Définition 7: Normes

$\forall p \in [1, +\infty]$ et toute fonction mesurable on pose :

- Si $p \in [1, +\infty[$, $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$
- $\|f\|_\infty = \inf\{ A \in [0, +\infty] : |f| \leq A\ \mu\text{-p.p.} \}$

Exemple 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. On a que $\|f\|_\infty = 0$ puisque $|f| \leq 0$ λ-p.p.

Proposition 5: Supremum essentiel

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable. On a que $\|f\|_\infty$ est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}^+$ qui majore $|f|$ μ-p.p. Autrement dit, si $A \in \overline{\mathbb{R}}^+$ vérifie $|f| \leq A$ μ-p.p. alors $A \geq \|f\|_\infty$.

Preuve : Soit $B = \{ A \in [0, +\infty] \text{ tq } |f| \leq A\ \mu\text{-p.p.} \}$.

- **1er cas :** $B = \emptyset$. Alors $\|f\|_\infty = +\infty$ et il n'existe aucun réel A tel que $|f| \leq A$ p.p., donc $+\infty$ est bien le plus petit élément de $[0, +\infty]$ qui majore $|f|$ μ-p.p.
- **2ème cas :** $B \neq \emptyset$. On pose $D = \bigcap_{m \in B \cap \mathbb{Q}} \{ |f| \leq m \}$. On a :

$$\mu(D^c) \leq \sum_{m \in B \cap \mathbb{Q}} \mu(\{ |f| > m \}) = 0$$

Comme B est un intervalle de la forme $[z, +\infty[$ ou $]z, +\infty[$, on a que $B \cap \mathbb{Q}$ contient une suite (m_n) qui décroît vers $\inf B = \|f\|_\infty$. Or $\forall n \geq 0$ et $\forall x \in D$, on a $|f(x)| \leq m_n$, donc $\forall x \in D$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$. Donc $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-p.p.
Par définition de $\|f\|_\infty$, il ne peut y avoir de réel M strictement plus petit que $\|f\|_\infty$ tel que $|f| \leq M$ μ-p.p.

Définition 8: Exposants conjugués

Soient $p, q \in [1, +\infty]$. On dit que p et q sont conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarque

1 et $+\infty$ sont conjugués.

Proposition 6: Inégalité de Hölder

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ conjugués et $f, g : E \to \mathbb{R}$ mesurables :

$$\int_E |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Preuve :

- **1er cas :** $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$. Supposons que $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ μ-p.p., donc $fg = 0$ μ-p.p., donc $\int_E |fg| d\mu = 0 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
- **2ème cas :** $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$. On peut supposer que $f \in L^p$ et $g \in L^q$.
  - **1er sous-cas :** Si $p = 1$ et $q = \infty$. On a $|g| \leq \|g\|_\infty$ μ-p.p. Donc $|fg| \leq |f| \|g\|_\infty$ μ-p.p. Donc $\int_E |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int_E |f| d\mu \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.
  - **2ème sous-cas :** Si $p, q \in]1, +\infty[$. $\forall u, v \in \mathbb{R}^+$ et $\forall \alpha \in]0, 1[$, $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha) v$. Car :
    - $u = 0$ ou $v = 0$ (trivial).
    - $u > 0$ et $v > 0$, c'est alors une conséquence de la convexité de $x \mapsto e^x$.

    $\forall x \in E$, en prenant $\alpha = \frac{1}{p}$, $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$.

    $$u = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}, \quad v = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

    Donc on a :

    $$u^\alpha v^{1-\alpha} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

    Donc :

    $$\int_E \frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} d\mu \leq \frac{1}{p} \int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} d\mu + \frac{1}{q} \int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

    Donc $\int_E |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Remarque

1. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec p et q conjugués alors $fg \in L^1$.
2. Si $p = q = 2$, c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Si μ est une mesure finie, en prenant $g = 1, \forall p \geq 1$, on a :

$$\int_E |f| d\mu = \int_E |f \cdot 1| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \times (\mu(E))^{\frac{1}{q}}$$

Donc $\forall p \geq 1,\ L^p \subset L^1$. En particulier, $\forall r \geq 1, \forall p \geq 1$, en posant $r' = pr > r$. On a :

$$\int_E |f|^r d\mu \leq \left(\int_E |f|^{rp} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} (\mu(E))^{\frac{1}{q}}$$

donc :

$$\left(\int_E |f|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} = \|f\|_r \leq \|f\|_{r'} (\mu(E))^{\frac{1}{qr}}$$

donc si $r' > r$, on a $L^{r'} \subset L^r$. Si μ est une probabilité, $r \mapsto \|f\|_r$ est croissante.

II. Inégalité de Jensen

Proposition 7: Inégalité de Jensen

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace de probabilité, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et $F : E \to I$ une fonction mesurable. Si les fonctions F et $\varphi(F)$ sont μ-intégrables alors :

$$\varphi\left(\int_E F d\mu \right) \leq \int_E \varphi(F) d\mu$$

Preuve : On pose $E_\varphi = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in I,\ \varphi(t) \geq at + b\}$. Et $\forall t \in I$, on a $\varphi(t) = \sup_{(a,b) \in E_\varphi}(at + b)$. Donc $\forall x \in E$, $a, b \in E_\varphi$, on a $\varphi(F(x)) \geq aF(x) + b$. Donc $\forall (a, b) \in E_\varphi$, on a :

$$\int_E \varphi(F) d\mu \geq a \int_E F d\mu + b$$

donc :

$$\int_E \varphi(F) d\mu \geq \sup_{(a,b) \in E_\varphi} \left(a \int_E F d\mu + b \right) = \varphi\left(\int_E F d\mu \right)$$

III. L'espace de Banach $L^p(E, \mathcal{E}, \mu)$

Proposition 8: Inégalité de Minkowski

Soit $p \in [1, +\infty]$. Pour toutes les fonctions $f, g : E \to \mathbb{R}$ mesurables :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Preuve :

- **1er cas :** $p = 1$. $\forall x \in E,\ |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ d'où $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.
- **2ème cas :** $p = +\infty$. On peut supposer que $\|f\|_\infty < +\infty$ et $\|g\|_\infty < +\infty$. Alors $|f| \leq \|f\|_\infty$ et $|g| \leq \|g\|_\infty$ p.p. Donc comme $\forall x \in E,\ |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, on a $|f + g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ μ-p.p. Donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

- **3ème cas :** $1 < p < +\infty$. Si $\|f+g\|_p = 0$, l'inégalité est évidemment vraie. On va supposer que $\|f+g\|_p \neq 0$. On a :

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$$

Donc :

$$\int_E |f+g|^p d\mu \leq \int_E |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_E |g||f+g|^{p-1} d\mu$$

On applique Hölder avec $u = |f|$ ou $|g|$ et $v = |f+g|^{p-1}$:

$$\leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Or $(p-1)q = (p-1)\frac{p}{p-1} = p$. Donc :

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Donc :

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Or $p - \frac{p}{q} = p(1-\frac{1}{q}) = p\frac{1}{p} = 1$. D'où $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Remarque

$\forall p \in [1, +\infty]$, tous $f, g \in L^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f + \lambda g \in L^p$. Donc L^p est un SEV de L^0.

$$\mathcal{L}^0 = \{f : E \to \mathbb{R} \text{ mesurables}\} \text{ est un espace vectoriel}$$

$$L^0 = \mathcal{L}^0 / \sim$$

Proposition 9: Espace de Banach

$\forall p \in [1, +\infty]$, l'espace L^p est un espace vectoriel normé complet (un espace de Banach).

<u>Preuve :</u>

- **Espace vectoriel :** $\checkmark$ (Déjà vu)
- **Norme :**
  - Inégalité triangulaire : $\iff$ Inégalité de Minkowski.
  - Homogénéité : Si $p \in [1, +\infty[$, $f \in L^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

    $$\|\lambda f\|_p = \left(\int |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$$

    Si $p = +\infty$, exercice.
  - Séparation : Soit $f \in L^p$. $\|f\|_p = 0 \implies f = 0$ μ-p.p.
- **Complet :**

  <u>**1er cas :**</u> $p \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de L^p. Pour montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge, il suffit de montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite convergente. On peut extraire de $(f_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite $(g_n)_{n\geq 0}$ telle que :

  $$\forall n \geq 0 \text{ et } \forall m \geq n, \quad \|g_n - g_m\|_p \leq \frac{1}{2^n}$$

En particulier, $\forall n \geq 0$, on a $\|g_n - g_{n+1}\|_p \leq \frac{1}{2^n}$.
On considère la série de fonctions positives $\sum |g_{n+1} - g_n|$.

continuité de $x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$

$$\begin{aligned}
\left(\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1} - g_n|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &\overset{\text{C.S}}{=} \left(\int_E \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |g_{n+1} - g_n|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_E \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} |g_{n+1} - g_n|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{TCM}}{=} \left(\lim_{N\to\infty} \int_E \left(\sum_{n=1}^{N} |g_{n+1} - g_n|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\boxed{\left[\left(\int_E \left(\sum_{n=1}^{N} |g_{n+1} - g_n|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]}}_{= \left\|\sum_{n=1}^{N} |g_{n+1} - g_n|\right\|_p} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\left\|\sum_{n=1}^{N} |g_{n+1} - g_n|\right\|_p\right) \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \|g_{n+1} - g_n\|_p\right) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Inégalité de Minkowski

Donc la série de terme général $|g_{n+1} - g_n|$ est absolument convergente μ-p.p. Donc en posant $h = g_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(g_{n+1} - g_n)$ (quitte à prendre $h = 0$ sur la partie mesurable de E où la série de terme général $g_{n+1} - g_n$ n'est pas absolument convergente), on définit une fonction mesurable h telle que $h = \lim_{n\to\infty} g_n$ μ-p.p.

1. **Est-ce que** $h \in L^p$ **?** On a :

$$\int_E |h|^p d\mu = \int_E \liminf |g_n|^p d\mu \leq \liminf \int_E |g_n|^p d\mu < +\infty$$

(car (g_n) est une suite de Cauchy dans $L^p \implies (\|g_n\|_p)_n$ est bornée). Donc $h \in L^p$.

2. **Est-ce que** $g_n \xrightarrow{L^p} h$ **?** Autrement dit, $\|g_n - h\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

$$\begin{aligned}
\int_E |g_n - h|^p d\mu = \int_E \liminf_{N\to\infty} |g_n - g_N|^p d\mu &\leq \liminf_{N\to\infty} \int_E |g_n - g_N|^p d\mu \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{n_p}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

<u>**2ème cas :**</u> $p = +\infty$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de L^∞. On a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon,\ \forall n, p \geq N_\epsilon, \quad \|f_n - f_p\|_\infty < \epsilon$$

Donc $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon,\ \forall n, p \geq N_\epsilon,\ \exists A_{n,p,\epsilon} \in \mathcal{E}$ telle que $\forall x \notin A_{n,p,\epsilon}$, $|f_n(x) - f_p(x)| < \epsilon$ et $\mu(A_{n,p,\epsilon}) = 0$.

En prenant :

$$A = \bigcap_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcap_{n \geq N_\epsilon} \bigcap_{p \geq N_\epsilon} A_{n,p,\epsilon}^c \in \mathcal{E}$$

On a $\mu(A^c) = 0$ car A^c est une réunion dénombrable de parties mesurables de mesure nulle.
On peut modifier la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ en posant $\tilde{f}_n(x) = 0, \forall x \in A^c$, $\forall n \geq 0$. $\forall x \in A$, on a : $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall n, p \geq N_\epsilon$, $|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_p(x)| < \epsilon$. Autrement dit, $\forall x \in A$, $(\tilde{f}_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}$, donc convergente, et on note $f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x)$.
1 - Est-ce que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$**?** $\forall n, p \in \mathbb{N}$.

$$|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_p(x)| \leq \|\tilde{f}_n - \tilde{f}_p\|_\infty \quad \mu\text{-p.p.}$$

Donc :

$$|\tilde{f}_n(x) - f(x)| = \lim_{p\to\infty} |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_p(x)| \leq \sup_{m\geq n} \|f_n - f_m\|_\infty \quad \mu\text{-p.p.}$$

Donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{m\geq n} \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
2 - Est-ce que $f \in L^\infty$**?** $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty$ μ-p.p. Donc comme $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans L^p (ici L^∞), alors $(\|f_n\|_\infty)_{n\geq 0}$ est bornée et donc f est bien bornée. Donc $f \in L^\infty$, ce qui conclut la preuve.

Proposition 10: Extraction de sous-suite

$\forall p \in [1, +\infty]$, si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de L^p, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite qui converge μ-p.p.

Définition 9: Espaces de suites ℓ^p

Dans le cas particulier où $E = \mathbb{N}$ et $\mu =$ la mesure de comptage, on note $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p < +\infty\}$ et :

$$\ell^\infty = L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u \text{ est une suite bornée}\}$$

Proposition 11: Espace de Hilbert L^2

L'espace $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_E f g d\mu$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1: Représentation de Riesz

Si H est un espace de Hilbert réel, alors pour toute forme linéaire continue ϕ définie sur H, il existe $v \in H$ tq $\forall u \in H,\ \phi(u) = \langle u, v \rangle$.

IV. Le Théorème de Radon-Nikodym

Définition 10: Absolue continuité et singularité

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ et ν 2 mesures définies sur $\mathcal{E}$.

1. On dit que ν est **absolument continue** par rapport à μ (noté $\nu \ll \mu$) si :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

2. On dit que ν et μ sont **étrangères** (noté $\nu \perp \mu$) s'il existe $N \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $\nu(N^c) = 0$.

Remarque

Si $(E, \mathcal{E}, \mu)$ est un espace mesuré et $f : E \to [0, +\infty]$ mesurable, alors on définit une mesure ν sur $\mathcal{E}$ en posant :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \nu(A) = \int_E f \mathbb{1}_A d\mu$$

et ν est absolument continue par rapport à μ.

Théorème 2: de Radon-Nikodym

Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ et ν deux mesures σ-finies sur $(E, \mathcal{E})$. Il existe un unique couple (ν_a, ν_s) de mesures σ-finies sur $(E, \mathcal{E})$ tq :

1. $\nu = \nu_a + \nu_s$
2. ν_a est absolument continue par rapport à μ ($\nu_a \ll \mu$) et ν_s et μ sont étrangères ($\nu_s \perp \mu$).

De plus, il existe une fonction mesurable positive g définie sur E tq :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \nu_a(A) = \int_E g \mathbb{1}_A d\mu$$

et g est unique à un ensemble de μ-mesure près.

Preuve : **1er cas :** On commence par supposer que μ et ν sont des mesures finies.

1er sous-cas : On suppose que pour toute fonction $f : E \to [0, +\infty]$ mesurable, on a $\int_E f d\nu \leq \int_E f d\mu$ (c'est-à-dire $\nu \leq \mu$). On définit sur $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ la fonction ϕ suivante :

$$f \mapsto \int_E f d\nu$$

ϕ est correctement définie car μ étant une mesure finie, $L^2(\mu) \subset L^1(\mu)$ et $\forall f \in L^1(\mu)$, $\int_E |f| d\nu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty$. L'application ϕ est linéaire, donc ϕ est une forme linéaire et pour tout $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$, d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} |\phi(f)| = \left| \int_E f d\nu \right| &\leq \int_E |f| d\nu \leq \left(\int_E f^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}} (\nu(E))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_E f^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} (\nu(E))^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_2 (\nu(E))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Donc ϕ est une forme linéaire continue définie sur l'espace de Hilbert $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$. Donc d'après le théorème de Riesz, il existe $h \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ tel que :

$$\forall f \in L^2(\mu), \quad \phi(f) = \langle f, h \rangle = \int_E fhd\mu$$

En particulier, $\forall A \in \mathcal{E}$, en prenant $f = \mathbb{1}_A$, on a :

$$\nu(A) = \int_E \mathbb{1}_A d\nu = \phi(f) = \int_E \mathbb{1}_A hd\mu$$

donc $\nu \ll \mu$. On va maintenant montrer que $0 \leq h \leq 1$ μ-p.p. En effet, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\mu(\{h > 1 + \varepsilon\}) \geq \nu(\{h > 1 + \varepsilon\}) = \int_E \mathbb{1}_{\{h > 1+\varepsilon\}} hd\mu \geq (1 + \varepsilon)\mu(\{h > 1 + \varepsilon\})$$

donc $\forall \varepsilon > 0$, $\mu(\{h > 1 + \varepsilon\}) = 0$. De même pour $\mu(\{h < -\varepsilon\}) = 0$. Donc $0 \leq h \leq 1$ μ-p.p.

2ème sous-cas : On ne suppose plus que $\nu \leq \mu$. Cependant, on a encore que $\nu \leq \nu + \mu$ puisque si $f : E \to [0, +\infty]$ est mesurable :

$$\int_E fd(\mu + \nu) = \int_E fd\nu + \int_E fd\mu \geq \int_E fd\nu$$

Donc d'après ce qui précède, il existe une fonction mesurable h telle que $\forall x \in E, h(x) \in [0, 1]$ et pour toute fonction $f \in L^2(\mu + \nu)$:

$$\int_E fd\nu = \int_E fhd(\mu + \nu) = \int_E fhd\mu + \int_E fhd\nu$$

Donc :

$$\int_E f(1 - h)d\nu = \int_E fhd\mu \quad (*)$$

En particulier, l'égalité précédente est vraie pour toutes les fonctions étagées positives f et, comme $\forall x \in E, h(x) \in [0, 1]$, elle est vraie pour toutes les fonctions mesurables positives comme conséquence du TCM.

On pose $N = \{x \in E : h(x) = 1\} \in \mathcal{E}$. L'égalité $(*)$ avec $f = \mathbb{1}_N$ donne :

$$\int_E \mathbb{1}_N(1 - h)d\nu = \int_E \mathbb{1}_N 0 d\nu = 0$$

$$\int_E fhd\mu = \int_E \mathbb{1}_N hd\mu = \int_E \mathbb{1}_N 1 d\mu = \mu(N)$$

Donc $\mu(N) = 0$. La mesure ν_s définie sur $\mathcal{E}$ par $\nu_s(A) = \nu(A \cap N)$ est donc étrangère à μ. Pour toute fonction $f : E \to [0, +\infty[$ mesurable, en appliquant $(*)$ à $\frac{f}{1-h}\mathbb{1}_{N^c}$:

$$\int_E \frac{f}{1 - h}\mathbb{1}_{N^c}(1 - h)d\nu = \int_E f\mathbb{1}_{N^c}d\nu = \int_E \frac{f}{1 - h}\mathbb{1}_{N^c}hd\mu$$

$$= \int_E fgd\mu \quad \text{avec } g = \frac{h}{1 - h}\mathbb{1}_{N^c}$$

On définit une mesure sur $\mathcal{E}$ en posant $\nu_a(A) = \nu(A \cap N^c)$. On vient d'établir que pour toute fonction $f : E \to [0, +\infty[$ mesurable :

$$\int_E f\mathbb{1}_{N^c}d\nu = \int_E fgd\mu$$

En particulier pour tout $A \in \mathcal{E}$, en prenant $f = \mathbb{1}_A$:

$$\int_E \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{N^c}d\nu = \nu(A \cap N^c) = \nu_a(A) = \int_E \mathbb{1}_A gd\mu$$

Donc ν_a est bien absolument continue par rapport à μ et $\nu = \nu_a + \nu_s$.

Unicité : Supposons qu'il existe une autre décomposition $(\widetilde{\nu_a}, \widetilde{\nu_s})$ de ν avec les mêmes propriétés.

$$\nu_a(A) + \nu_s(A) = \widetilde{\nu_a}(A) + \widetilde{\nu_s}(A)$$

$$\nu_a(A) - \widetilde{\nu_a}(A) = \widetilde{\nu_s}(A) - \nu_s(A)$$

Or $\nu_a \ll \mu$ et $\widetilde{\nu_a} \ll \mu \implies \nu_a - \widetilde{\nu_a} \ll \mu$. Et $\nu_s \perp \mu$ et $\widetilde{\nu_s} \perp \mu \implies \widetilde{\nu_s} - \nu_s \perp \mu$. Le seul moyen d'être à la fois absolument continu et étranger à μ est d'être la mesure nulle. Donc $\nu_a = \widetilde{\nu_a}$ et $\nu_s = \widetilde{\nu_s}$.

Finalement, $g = \tilde{g}$ μ-p.p.

$$\int_E g \nVdash_{\{g > \tilde{g}\}} d\mu = \nu_a(\{g > \tilde{g}\})$$

$$\int_E \tilde{g} \nVdash_{\{\tilde{g} > g\}} d\mu = \widetilde{\nu_a}(\{\tilde{g} > g\})$$

Mais $\nu_a(\{g > \tilde{g}\}) = \widetilde{\nu_a}(\{g > \tilde{g}\})$. Donc $\int_E (g - \tilde{g}) \nVdash_{\{g > \tilde{g}\}} d\mu = 0$. Donc $\mu(\{g > \tilde{g}\}) = 0$.

Chapitre 4 : Mesures Produits

I. Généralités sur les espaces produits et les tribus produits

Soient $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ deux espaces mesurables.

Définition 11: Tribu produit

On appelle tribu produit la tribu sur $E_1 \times E_2$, notée $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, définie par :

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sigma\left(\{B_1 \times B_2,\ B_1 \in \mathcal{E}_1,\ B_2 \in \mathcal{E}_2\}\right)$$

On appelle **pavé** toute partie $B_1 \times B_2$ de $E_1 \times E_2$ où $B_1 \in \mathcal{E}_1$ et $B_2 \in \mathcal{E}_2$.

Remarque

L'intersection de 2 pavés est un pavé.
Soient $A_1, B_1 \in \mathcal{E}_1$ et $A_2, B_2 \in \mathcal{E}_2$.

$$\begin{aligned}(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) &= \{(x_1, x_2) : x_1 \in A_1 \text{ et } x_1 \in B_1,\ x_2 \in A_2 \text{ et } x_2 \in B_2\} \\ &= (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)\end{aligned}$$

Proposition 12: Propriété des projections

La tribu $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est la plus petite tribu sur $E_1 \times E_2$ pour laquelle les projections :

$$\begin{aligned} p_1 : E_1 \times E_2 &\to E_1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} p_2 : E_1 \times E_2 &\to E_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_2 \end{aligned}$$

sont mesurables.

Preuve :

- p_1 est $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ mesurable car $\forall A_1 \in \mathcal{E}_1$, on a :

$$p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times E_2 \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$$

- Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur $E_1 \times E_2$ telle que p_1 et p_2 sont $\mathcal{F} - \mathcal{E}_1$ mesurables et $\mathcal{F} - \mathcal{E}_2$ mesurables.
  On a alors $\forall A_1 \in \mathcal{E}_1$, que $p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times E_2 \in \mathcal{F}$ et $\forall A_2 \in \mathcal{E}_2$, $p_2^{-1}(A_2) = E_1 \times A_2 \in \mathcal{F}$.
  Et comme $\mathcal{F}$ est une tribu :

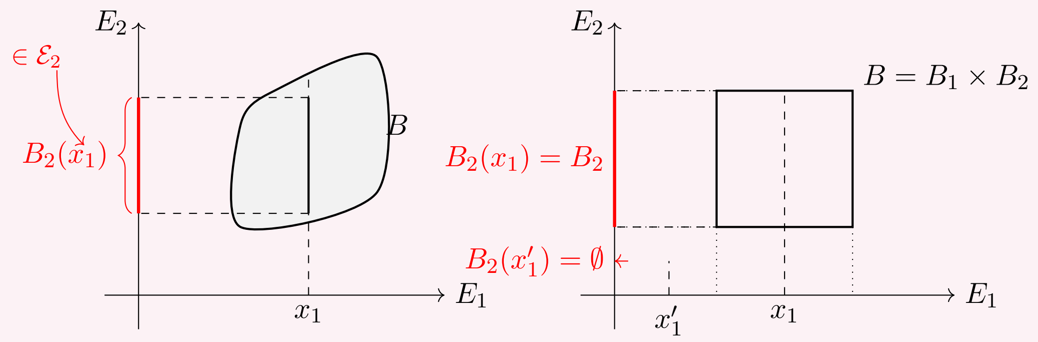
$$(A_1 \times E_2) \cap (E_1 \times A_2) = A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}$$

  Donc $\mathcal{F}$ contient tous les pavés, donc $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{F}$.

Proposition 13: Propriété de section

Tout $B \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ vérifie la propriété suivante :

- $\forall x_1 \in E_1, \quad B_2(x_1) = \{x_2 \in E_2 : (x_1, x_2) \in B\} \in \mathcal{E}_2$
- $\forall x_2 \in E_2, \quad B_1(x_2) = \{x_1 \in E_1 : (x_1, x_2) \in B\} \in \mathcal{E}_1$



<u>Preuve :</u> On note $\mathcal{D}$ la classe des parties de $E_1 \times E_2$ ayant la propriété suivante :

$$B \in \mathcal{D} \iff \forall x_1 \in E_1,\ B_2(x_1) = \{x_2 \in E_2 : (x_1, x_2) \in B\} \in \mathcal{E}_2$$

On montre que $\mathcal{D}$ est une tribu sur $E_1 \times E_2$.

- $E_1 \times E_2 \in \mathcal{D}$. En effet $\forall x_1 \in E_1$, $(E_1 \times E_2)_2(x_1) = E_2 \in \mathcal{E}_2$.
- Soit $A \in \mathcal{D}$.
$$\forall x_1 \in E_1,\ (A^c)_2(x_1) = \{x_2 \in E_2 : (x_1, x_2) \in A^c\}$$
$$= \{x_2 \in E_2 : (x_1, x_2) \notin A\} = (A_2(x_1))^c \in \mathcal{E}_2 \quad \text{puisque } \mathcal{E}_2 \text{ est une tribu.}$$
Donc $\mathcal{D}$ est stable par passage au complémentaire.
- Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}$.
$$\forall x_1 \in E_1,\ (\bigcup_{n\geq 0} A_n)_2(x_1) = \{x_2 \in E_2 : (x_1, x_2) \in \bigcup_{n\geq 0} A_n\}$$
$$= \bigcup_{n\geq 0} \{x_2 \in E_2 : (x_1, x_2) \in A_n\} = \bigcup_{n\geq 0} (A_n)_2(x_1) \in \mathcal{E}_2$$
Donc $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable, donc $\mathcal{D}$ est une tribu.
- $\mathcal{D}$ contient les pavés.
$$\forall (B_1, B_2) \in E_1 \times E_2,$$
$$\forall x_1 \in E_1, \quad (B_1 \times B_2)_2(x_1) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_1 \notin B_1 \\ B_2 & \text{si } x_1 \in B_1 \end{cases} \in \mathcal{E}_2$$

Donc $\mathcal{D}$ est une tribu qui contient tous les pavés, donc elle contient $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

$$\forall B \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2,\ \forall x_1 \in E_1,\ B_2(x_1) \in \mathcal{E}_2.$$

II. Construction de la mesure produit

Proposition 14: Rappel

$\forall C \in \mathcal{C}\ \pi(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathcal{C})$ et si deux mesures σ-finies coïncident sur un π-système alors elles sont égales.

Proposition 15: Construction des mesures produits

Soient $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés où μ_1 et μ_2 sont des mesures σ-finies.

1. $\forall A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, les applications :

$$\begin{aligned} g_1 : E_1 &\to [0, +\infty] \\ x_1 &\mapsto \mu_2(A_2(x_1)) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} g_2 : E_2 &\to [0, +\infty] \\ x_2 &\mapsto \mu_1(A_1(x_2)) \end{aligned}$$

   sont mesurables.

2. Les fonctions m et m' définies sur $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ par :

$$m(A) = \int_{E_1} g_1 d\mu_1 \quad \text{et} \quad m'(A) = \int_{E_2} g_2 d\mu_2$$

   sont des mesures.

3. Pour tout $A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2$, on a :

$$m(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \quad \text{et} \quad m'(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

   et m et m' sont des mesures σ-finies.

4. Les mesures m et m' sont égales sur $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. Donc $\forall A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$:

$$\int_{E_1} g_1 d\mu_1 = \int_{E_2} g_2 d\mu_2$$

   et on note : $\mu_1 \otimes \mu_2 = m = m'$.

Preuve :

1. On commence par supposer que μ_2 est une mesure finie. On pose $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 : x_1 \mapsto \mu_2(A_2(x_1))$ est mesurable$\}$. Et on va montrer que $\mathcal{D}$ est une classe monotone sur $E_1 \times E_2$ qui contient les pavés.

   i) $E_1 \times E_2 \in \mathcal{D}$ car $\forall x_1 \in E_1$, $(E_1 \times E_2)_2(x_1) = E_2$. Donc $x_1 \mapsto \mu_2((E_1 \times E_2)_2(x_1)) = \mu_2(E_2)$ est constante donc mesurable.

   ii) Soient $A, B \in \mathcal{D}$ tq $A \subset B$. Pour tout $x_1 \in E_1$:

$$\begin{aligned} (B \backslash A)_2(x_1) = \{y \in E_2 : (x_1, y) \in B \backslash A\} &= \{y \in E_2 : (x_1, y) \in B\} \backslash \{y \in E_2 : (x_1, y) \in A\} \\ &= B_2(x_1) \setminus A_2(x_1) \end{aligned}$$

   Donc comme μ_2 est une mesure finie :

$$\forall x_1 \in E_1,\ \mu_2((B \setminus A)_2(x_1)) = \mu_2(B_2(x_1)) - \mu_2(A_2(x_1))$$

   donc $x_1 \mapsto \mu_2((B \setminus A)_2(x_1))$ est mesurable (car différence de fonctions mesurables).

   iii) Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{D}$. Comme $\forall x_1 \in E_1$, $(\bigcup_{n \geq 0} A_n)_2(x_1) = \bigcup_{n \geq 0} (A_n)_2(x_1)$, on a :

$$\mu_2((\bigcup_{n \geq 0} A_n)_2(x_1)) = \mu_2(\bigcup_{n \geq 0} (A_n)_2(x_1)) = \lim_{n \to +\infty} \mu_2((A_n)_2(x_1))$$

   donc $x_1 \mapsto \mu_2((\bigcup_{n \geq 0} A_n)_2(x_1))$ est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables. Donc $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{D}$.

iv) $\forall (B_1 \times B_2) \in E_1 \times E_2$ et $\forall x_1 \in E_1$, on a $(B_1 \times B_2)_2(x_1) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_1 \notin B_1 \\ B_2 & \text{si } x_1 \in B_1 \end{cases}$. Donc

$$\mu_2((B_1 \times B_2)_2(x_1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \notin B_1 \\ \mu_2(B_2) & \text{si } x_1 \in B_1 \end{cases} = \mu_2(B_2)\mathbb{1}_{B_1}(x_1) \text{ qui est mesurable.}$$

Donc $\mathcal{D}$ est une classe monotone qui contient les pavés. La classe des pavés étant stable par intersection finie et engendrant $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, on a $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{D}$. Donc $\forall A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, x_1 \mapsto \mu_2(A_2(x_1))$ est mesurable.

À présent, considérons μ_2 σ-finie plutôt que finie. Il existe une suite croissante $(F_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{E}_2$ tq $\forall n \geq 0$, $\mu_2(F_n) < +\infty$ et $\bigcup_{n\geq 0} F_n = E_2$. Définissons la mesure sur $\mathcal{E}_2$ par $\mu_2^n(A) = \mu_2(A \cap F_n)$. Elle est une mesure finie $\forall n \geq 0$. Donc $x_1 \mapsto \mu_2^n(A_2(x_1))$ est mesurable $\forall A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. Mais $\forall x_1 \in E_1$:

$$\mu_2(A_2(x_1)) = \mu_2(A \cap (\bigcup_{n\geq 0} F_n)_2(x_1)) = \lim_{n\to+\infty} \mu_2((A \cap F_n)_2(x_1))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mu_2^n(A_2(x_1))$$

Donc $x_1 \mapsto \mu_2(A_2(x_1))$ est limite simple d'une suite de fonctions mesurables, donc mesurable.

2. On va montrer que l'application définie sur $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ par $m : A \to \int_{E_1} \mu_2(A_2(x_1))\mu_1(dx_1)$ est une mesure sur $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.
   - $m(\emptyset) = 0$.
   - Soit $(A^n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ 2-à-2 disjoints. Alors $\forall x_1 \in E_1$, $((A^n)_2(x_1))_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{E}_2$ 2-à-2 disjoints. Donc :

$$m(\bigcup_{n\geq 0} A^n) = \int_{E_1} \mu_2((\bigcup_{n\geq 0} A^n)_2(x_1))\mu_1(dx_1) = \int_{E_1} \mu_2(\bigcup_{n\geq 0} (A^n)_2(x_1))\mu_1(dx_1)$$

$$= \int_{E_1} \sum_{n\geq 0} \mu_2((A^n)_2(x_1))\mu_1(dx_1) = \sum_{n\geq 0} \int_{E_1} \mu_2((A^n)_2(x_1))\mu_1(dx_1) = \sum_{n\geq 0} m(A^n)$$

3. $\forall A \in \mathcal{E}_1$ et $B \in \mathcal{E}_2$.

$$m(A \times B) = \int_{E_1} \mu_2((A \times B)_2(x_1))\mu_1(dx_1) = \int_{E_1} \mu_2(B)\mathbb{1}_A(x_1)\mu_1(dx_1) = \mu_2(B)\mu_1(A)$$

$$m'(A \times B) = \int_{E_2} \mu_1((A \times B)_1(y))\mu_2(dy) = \int_{E_2} \mu_1(A)\mathbb{1}_B(y)\mu_2(dy) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

4. Puisque μ_1 est σ-finie, il existe une suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{E}_1$ tq $E_1 = \bigcup A_n$ et $\forall n \geq 0, \mu_1(A_n) < \infty$. Idem pour μ_2 avec une suite $(B_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{E}_2$. On a ainsi une suite croissante $(A_n \times B_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ tq :

$$E_1 \times E_2 = \bigcup_{n\geq 0} A_n \times B_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0,\ m(A_n \times B_n) = \mu_1(A_n)\mu_2(B_n) = m'(A_n \times B_n) < +\infty$$

Donc m et m' sont σ-finies et comme de plus m et m' sont égales sur les pavés, elles sont égales sur $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ (d'après le résultat rappelé au début du paragraphe).

Remarque

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère $\mu_1 = \lambda$ (Lebesgue), $\mu_2 =$ mesure de comptage. μ_2 n'est pas σ-finie.

Avec $C = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} \mu_2(C_2(x_1))\mu_1(dx_1) = \int_{\mathbb{R}} 1 d\lambda = +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mu_1(C_1(x_2))\mu_2(dx_2) = \int_{\mathbb{R}} 0 d\mu_2 = 0$$

III. Théorèmes de Fubini

Proposition 16: Théorème de Fubini-Tonelli ou Fubini-positif

Soient $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés avec μ_1 et μ_2 des mesures σ-finies et $F : E_1 \times E_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mesurable **positive**.

1. Les fonctions

$$x_1 \in E_1 \mapsto \int_{E_2} F(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)$$
$$x_2 \in E_2 \mapsto \int_{E_1} F(x_1,x_2)\mu_1(dx_1)$$

sont mesurables.

2. On a :

$$\begin{aligned}\int_{E_1 \times E_2} F d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} F(x_1,x_2)\mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} F(x_1,x_2)\mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2)\end{aligned}$$

Preuve :

1. Soit $C \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ et $F = \mathbb{1}_C$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_C(x_1,x_2) &= \begin{cases} 1 & \text{si } (x_1,x_2) \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 \in C_2(x_1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{C_2(x_1)}(x_2) = \mathbb{1}_{C_1(x_2)}(x_1)\end{aligned}$$

Dans ce cas particulier :

$$x_1 \mapsto \int_{E_2} \mathbb{1}_C(x_1,x_2)\mu_2(dx_2) = \int_{E_2} \mathbb{1}_{C_2(x_1)}(x_2)\mu_2(dx_2) = \mu_2(C_2(x_1))$$

est bien mesurable (d'après la construction de la mesure produit). Donc les affirmations sont vraies pour les fonctions indicatrices. Par linéarité de l'intégrale, elles sont vraies pour les fonctions étagées positives.

2. On commence par supposer que F est étagée positive. On note $(a_\ell, A^\ell)_{\ell=1,\dots,n}$ les éléments de la représentation canonique de F. Pour tout $(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$, on a :

$$F(x_1,x_2) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \mathbb{1}_{A^\ell}(x_1,x_2) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \mathbb{1}_{A_2^\ell(x_1)}(x_2) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \mathbb{1}_{A_1^\ell(x_2)}(x_1)$$

$$\int_{E_1\times E_2} F d(\mu_1\otimes\mu_2) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell(\mu_1\otimes\mu_2)(A^\ell) \quad \text{(def de } \mu_1\otimes\mu_2)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \int_{E_1} \mu_2(A_2^\ell(x_1))\mu_1(dx_1)$$
$$= \int_{E_1} \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \mu_2(A_2^\ell(x_1))\right)\mu_1(dx_1)$$

Or $\int_{E_2}\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \mathbb{1}_{A^\ell}(x_1,x_2)\mu_2(dx_2) = \int_{E_2} F(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)$.

$$= \int_{E_1}\left(\int_{E_2} F(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)\right)\mu_1(dx_1)$$

Les deux égalités sont donc vraies pour les fonctions étagées positives.
Maintenant, soit F une fonction mesurable positive et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions étagées positives qui converge simplement vers F. D'après le TCM (Théorème de Convergence Monotone), on a :

$$\int_{E_2} F(x_1,x_2)\mu_2(dx_2) = \int_{E_2}\lim_{n\to\infty} f_n(x_1,x_2)\mu_2(dx_2) = \lim_{n\to\infty}\int_{E_2} f_n(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)$$

donc $x_1 \mapsto \int_{E_2} F(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)$ est une fonction limite simple d'une suite de fonctions mesurables donc elle est mesurable.
De plus :

$$\int_{E_1\times E_2} F d(\mu_1\otimes\mu_2) = \lim_{n\to\infty}\int_{E_1\times E_2} f_n d(\mu_1\otimes\mu_2)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{E_1}\left(\int_{E_2} f_n(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)\right)\mu_1(dx_1)$$
$$= \int_{E_1}\lim_{n\to\infty}\left(\int_{E_2} f_n(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)\right)\mu_1(dx_1) \quad \text{(par le TCM sur } E_1)$$
$$= \int_{E_1}\left(\int_{E_2} F(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)\right)\mu_1(dx_1)$$

Proposition 17: Théorème de Fubini-Lebesgue

Soient $(E_1,\mathcal{E}_1,\mu_1)$ et $(E_2,\mathcal{E}_2,\mu_2)$ deux espaces mesurés où μ_1 et μ_2 sont σ-finies et $F\in L^1(E_1\times E_2,\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2,\mu_1\otimes\mu_2)$.

1. On a :
   - $x_2\mapsto F(x_1,x_2)$ est dans $L^1(E_2,\mathcal{E}_2,\mu_2)$ pour μ_1-presque tout x_1.
   - $x_1\mapsto F(x_1,x_2)$ est dans $L^1(E_1,\mathcal{E}_1,\mu_1)$ pour μ_2-presque tout x_2.
2. Les fonctions :
   - $x_1\mapsto \int_{E_2} F(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)$ sont définies μ_1-p.p. et appartiennent à $L^1(E_1,\mathcal{E}_1,\mu_1)$.
   - $x_2\mapsto \int_{E_1} F(x_1,x_2)\mu_1(dx_1)$ sont définies μ_2-p.p. et appartiennent à $L^1(E_2,\mathcal{E}_2,\mu_2)$.
3. On a :
$$\int_{E_1\times E_2} F d(\mu_1\otimes\mu_2) = \int_{E_1}\left(\int_{E_2} F(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)\right)\mu_1(dx_1)$$
$$= \int_{E_2}\left(\int_{E_1} F(x_1,x_2)\mu_1(dx_1)\right)\mu_2(dx_2)$$

Preuve :

1. Puisque $F \in L^1(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, on a :

$$\int_{E_1 \times E_2} |F| d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |F(x_1, x_2)| \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) < +\infty$$

   Donc $\int_{E_2} |F(x_1, x_2)| \mu_2(dx_2) < +\infty$ μ_1-p.p. Donc $x_2 \mapsto F(x_1, x_2)$ est dans $L^1(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ μ_1-p.p.
2. Donc pour μ_1 presque partout x_1 :

$$x_1 \mapsto \int_{E_2} F(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) = \int_{E_2} F^+(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) - \int_{E_2} F^-(x_1, x_2) \mu_2(dx_2)$$

   est bien définie (différence finie). De plus :

$$\begin{aligned}\int_{E_1} \left| \int_{E_2} F(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right| \mu_1(dx_1) &\leq \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |F(x_1, x_2)| \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{E_1 \times E_2} |F| d(\mu_1 \otimes \mu_2) < +\infty\end{aligned}$$

   Donc $x_1 \mapsto \int_{E_2} F(x_1, x_2) \mu_2(dx_2)$ est un élément de $L^1(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$.
3. Puisque $F \in L^1(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, on a :

$$\int_{E_1 \times E_2} F^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} F^+(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) < +\infty$$

$$\int_{E_1 \times E_2} F^- d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} F^-(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) < +\infty$$

   D'où l'égalité énoncée par soustraction.

IV. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Définition 12: Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Sur la base de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue, on définit par récurrence sur $d \geq 2$, la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ en utilisant que :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^d &= \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ \lambda^{\otimes d} &= \lambda^{\otimes d-1} \otimes \lambda\end{aligned}$$

Exemple 5: Hyperplan

Soient $a_1, \dots, a_d$ des réels tous non nuls et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $D = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1 x_1 + \dots + a_d x_d = \alpha\}$. Et on suppose que $a_d \neq 0$. On a que $\lambda^{\otimes d}(D) = 0$. Car :

$$\lambda^{\otimes d}(D) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_D(x_1, \dots, x_d) \lambda(dx_d) \right) \lambda^{\otimes d-1}(dx_1 \dots dx_{d-1})$$

Or pour $x_1, \dots, x_{d-1}$ fixés, l'ensemble $\{x_d \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_d) \in D\}$ est un singleton (car $a_d \neq 0$) ou vide. Sa mesure de Lebesgue est donc nulle.

$$= 0$$

Proposition 18: Propriétés de la mesure de Lebesgue

Soit d un entier naturel, $d \geq 1$.

1. La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est invariante par translation : $\forall x \in \mathbb{R}^d$ et $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a :
$$\lambda(x + B) = \lambda(B)$$
2. **Réciproquement**, si μ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ finie sur les parties mesurables bornées de $\mathbb{R}^d$ et invariante par translation, alors il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\mu = c\lambda$.

Preuve :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on note $\tau_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par $u \mapsto u - x$. On a $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\tau_x^{-1}(B) = x + B$. Donc $\lambda(\tau_x^{-1}(B)) = \lambda(x + B)$. Donc $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto \lambda(x + B)$ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
   - **Supposons que** $d = 1$ **:** Il suffit de montrer que λ et λ^{τ_x} coïncident sur les boréliens de la forme $]a, b[$ pour pouvoir conclure. (Ceci est une conséquence du corollaire du théorème de la classe monotone déjà utilisé précédemment). Clairement :
   $$\lambda(x+]a, b[) = \lambda(]a + x, b + x[) = (b + x) - (a + x) = b - a = \lambda(]a, b[)$$
   - **Si** $d \geq 2$ **:** $\forall A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a que $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Et on a que $x + A_1 \times \cdots \times A_d = (x_1 + A_1) \times (x_2 + A_2) \times \cdots \times (x_d + A_d) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ avec $x = (x_1, \ldots, x_d)$. Donc :
   $$\lambda^{\otimes d}(A_1 \times \cdots \times A_d) = \lambda_1(A_1) \times \cdots \times \lambda_1(A_d)$$
   Et :
   $$\begin{aligned} \lambda^{\otimes d}(x + A_1 \times \cdots \times A_d) &= \lambda^{\otimes d}((x_1 + A_1) \times \cdots \times (x_d + A_d)) \\ &= \lambda_1(x_1 + A_1) \ldots \lambda_1(x_d + A_d) \\ &= \lambda_1(A_1) \ldots \lambda_1(A_d) = \lambda^{\otimes d}(A_1 \times \cdots \times A_d) \end{aligned}$$
   Donc $\lambda^{\otimes d}$ et $\lambda^{\otimes d, \tau_x}$ coïncident sur la classe des pavés. Comme cette classe est stable par intersection finie et qu'elle engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, à nouveau, d'après le corollaire du théorème de la classe monotone déjà utilisé, $\lambda^{\otimes d} = \lambda^{\otimes d, \tau_x}$.
2. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ finie sur les parties bornées mesurables de $\mathbb{R}^d$ et invariante par translation. On pose $C = \mu([0, 1[^d)$. $\forall m \geq 1$, on découpe $[0, 1[^d$ en translatés de $[0, 1/m[^d$. La propriété d'additivité de μ entraîne que :
$$C = \mu([0, 1[^d) = m^d \mu([0, 1/m[^d)$$
donc $\mu([0, 1/m[^d) = \frac{C}{m^d}$. Soient $a_1, \ldots, a_d \geq 0$, $\forall m \geq 1$.
$$\prod_{i=1}^{d} [0, \frac{\lfloor m a_i \rfloor}{m}[\subset \prod_{i=1}^{d} [0, a_i[\subset \prod_{i=1}^{d} [0, \frac{\lfloor m a_i \rfloor + 1}{m}[$$
$$\mu\left(\prod_{i=1}^{d} [0, \frac{\lfloor m a_i \rfloor}{m}[\right) \leq \mu\left(\prod_{i=1}^{d} [0, a_i[\right) \leq \mu\left(\prod_{i=1}^{d} [0, \frac{\lfloor m a_i \rfloor + 1}{m}[\right)$$
$$\frac{C}{m^d} \prod_{i=1}^{d} \lfloor m a_i \rfloor \leq \mu\left(\prod_{i=1}^{d} [0, a_i[\right) \leq \frac{C}{m^d} \prod_{i=1}^{d} (\lfloor m a_i \rfloor + 1)$$
Donc en prenant $m \to \infty$, $\mu(\prod_{i=1}^{d} [0, a_i[) = C \prod_{i=1}^{d} a_i = C\lambda(\prod_{i=1}^{d} [0, a_i[)$. Donc μ et $c\lambda$ sont égales sur tous les rectangles $\prod_{i=1}^{d} [0, a_i[$ (avec $a_i > 0$). Donc sur tous les rectangles $\prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i[$ puisqu'elles sont invariantes par translation. Comme la classe des pavés rectangles engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et est stable par intersection finie, d'après le corollaire habituel du théorème des classes monotones, $\mu = c\lambda$.

V. Changement de variable

Proposition 19: Formule du changement de variable affine

Soit M une matrice $d \times d$ inversible, $a \in \mathbb{R}^d$ et $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ définie par $\phi(x) = Mx + a$. La mesure image λ^d par ϕ^{-1} vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda^d(\phi^{-1}(A)) = \lambda^d(\phi(A)) = |\det M|\lambda^d(A)$$

<u>Preuve :</u> Comme ϕ est bijective et ϕ^{-1} continue, on a bien que $\phi(A) = (\phi^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et même $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto \lambda(\phi(A)) = \lambda^{\phi^{-1}}(A)$ est une mesure.

$$\lambda^d(\phi(A)) = \lambda^d(MA + a) = \lambda^d(MA)$$

puisque λ^d est invariante par translation. Et la mesure $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto \lambda^d(MA)$ est invariante par translation elle aussi car :

$$\forall b \in \mathbb{R}^d, \ \lambda^d(M(A+b)) = \lambda^d(MA + Mb) = \lambda^d(MA)$$

car λ^d est invariante par translation. On a que l'image MA de toute partie A bornée de $\mathbb{R}^d$ par $x \mapsto Mx$ est bornée, donc $\forall A \subset \mathbb{R}^d$ mesurable bornée, $\lambda^d(MA) < \infty$. Donc d'après le résultat précédent, il existe un réel $c > 0$ tel que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda^d(MA) = c\lambda^d(A)$.

- **1er cas :** On suppose que M est orthogonale. En prenant B la boule de rayon 1 de $\mathbb{R}^d$, on a $MB = B$ donc :
$$\lambda^d(MB) = \lambda^d(B)$$
et $\lambda^d(MB) = c\lambda^d(B)$ donc $c = 1 = |\det(M)|$.
- **2ème cas :** M est symétrique et définie positive. Comme M est inversible, M est définie positive donc il existe une matrice orthogonale P et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_d > 0$ tels que :
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_d \end{pmatrix} = D = \lambda_d\left(\prod_{i=1}^{d}[0, \alpha_i[\right) = \prod_{i=1}^{d} \alpha_i = \det(M)$$
En prenant $A = P[0,1]^d$, on a :
$$\lambda^d(MA) = \lambda^d(MP[0,1]^d) = \lambda^d(PP^{-1}MP[0,1]^d)$$
$$= \lambda^d(PD[0,1]^d) = \lambda^d(P\prod_{i=1}^{d}[0,\alpha_i])$$
Comme P est orthogonale, $\lambda^d(P\ldots) = \lambda^d(\ldots)$, donc :
$$= \lambda^d(\prod_{i=1}^{d}[0,\alpha_i]) = \prod_{i=1}^{d} \alpha_i = \det(M) = \det(M)\lambda^d([0,1]^d)$$
Donc $c = \det(M)$.
- **3ème cas :** M est inversible quelconque. Alors $M = PS$ où $S = (M^TM)^{1/2}$ est symétrique définie positive et $P = MS^{-1}$ est orthogonale (Décomposition polaire).
$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \ \lambda^d(MA) = \lambda^d(PSA) \overset{1er\ cas}{=} \lambda^d(SA) = \det S \cdot \lambda^d(A)$$
$$= |\det M|\lambda^d(A)$$
Mais $|\det S|^2 = \det(M)^2$ et $\det S > 0$ donc $\det(S) = |\det(M)|$.

Théorème 3: Formule du changement de variables

Soient $U, V \subset \mathbb{R}^d$ des ouverts et $\phi : U \to V$ avec ϕ un C^1-difféomorphisme.

1. Pour toute fonction $f : V \to \mathbb{R}^+$ borélienne :

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\phi(x))|J_\phi(x)|dx$$

2. $\forall f : V \to \mathbb{R}$ borélienne, on a que :

$$f \in L^1(V, \mathcal{B}(V), \lambda_d) \iff (f \circ \phi)|J_\phi| \in L^1(U, \mathcal{B}(U), \lambda_d)$$

et si c'est le cas :

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\phi(x))|J_\phi(x)|dx$$

Chapitre 5 : Fondements de la théorie des probabilités

I. Espace de probabilité

Expérience aléatoire : Une expérience dont on ne connaît pas le résultat à l'avance mais dont on connaît tous les résultats possibles.

Définition 13: Espace de probabilité

On appelle espace de probabilité un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où :

- Ω est un ensemble (Ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire).
- $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω (Ensemble de questions sur le résultat de l'expérience qui a pour réponse oui ou non).
- $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité définie sur $\mathcal{A}$.

On appelle **événements** les éléments de $\mathcal{A}$ et $\mathbb{P}$ mesure la probabilité d'observer des événements considérés.

II. Variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

Définition 14: Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction mesurable définie sur Ω à valeurs dans E.

Définition 15: Loi d'une variable aléatoire

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. On appelle **loi de X** l'image par X de la probabilité $\mathbb{P}$. C'est la probabilité $\mathbb{P}^X$ sur $(E, \mathcal{E})$ définie par :

$$B \in \mathcal{E} \longmapsto \mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

Définition 16: Variable aléatoire discrète

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. On dit que X est une variable aléatoire **discrète** s'il existe $M \in \mathcal{E}$ dénombrable t.q. :

$$\mathbb{P}(X \in M) = 1$$

Remarque

On peut supposer sans perte de généralité que $M \subset X(\Omega)$.

Proposition 20: Loi d'une v.a. discrète

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète. On a :

$$\mathbb{P}^X = \sum_{x \in M} p_x \delta_x$$

où $M \in \mathcal{E}$, $M \subset X(\Omega)$ est dénombrable et $\forall x \in M$, $p_x = \mathbb{P}(X = x)$.

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^X(B) &= \mathbb{P}(X \in B) \\
&= \mathbb{P}(X \in B \cap M) \\
&= \sum_{x \in B \cap M} \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x \in M} p_x \delta_x(B) \\
&= \left(\sum_{x \in M} p_x \delta_x \right)(B)
\end{aligned}$$

□

Exemple 6: Exemple de calcul

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi donnée par :

$$p_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ (1-p)^{n-1} p & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

(Loi géométrique). Calculons $\mathbb{P}(X$ est un nombre pair$)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = 2k) \\
&= \sum_{k \geq 1} (1-p)^{2k-1} p \\
&= p(1-p) \sum_{k \geq 1} ((1-p)^2)^{k-1} \\
&= p(1-p) \sum_{j \geq 0} ((1-p)^2)^j \\
&= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p} \xrightarrow[p \to 1]{} 0 \quad \text{et} \quad \xrightarrow[p \to 0]{} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Définition 17: Variable aléatoire à densité

On dit d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qu'elle est une v.a. **à densité** quand sa loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ mesurable, positive, unique à un ensemble de mesure de Lebesgue nulle près telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) d\lambda(x)$$

On dit de f qu'elle est la **densité** de X.

Définition 18: Tribu engendrée

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. On appelle tribu engendrée par X la tribu :

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\}$$

C'est la plus petite tribu sur Ω pour laquelle X est mesurable.

Proposition 21: Factorisation (Lemme de Doob-Dynkin)

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Il y a équivalence entre :

1. Y est $\sigma(X)$-mesurable.
2. Il existe une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $Y = f(X)$.

Démonstration. $2 \implies 1$: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \sigma(X)$ car $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$. Donc Y est $\sigma(X)$-mesurable.

$1 \implies 2$: On commence par supposer que Y est étagée. Il existe $N \geq 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, $A_1, \ldots, A_N \in \sigma(X)$ t.q.

$$Y = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$\forall i \in [\![1, N]\!]$, puisque $A_i \in \sigma(X)$, il existe $B_i \in \mathcal{E}$ t.q. $A_i = X^{-1}(B_i)$. Donc $Y = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{1}_{X^{-1}(B_i)} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{1}_{B_i}(X) = f(X)$ où $f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{1}_{B_i}$.

Soit Y une v.a. $\sigma(X)$-mesurable quelconque. On sait qu'il existe une suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ de v.a. étagées et $\sigma(X)$-mesurables t.q. pour $\omega \in \Omega$, $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$. D'après le point précédent, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions mesurables définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ t.q. $\forall \omega \in \Omega$, $Y_n(\omega) = f_n(X(\omega))$. En posant $D = \{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe}\}$. On se donne une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable t.q. $Y = f(X)$ en posant la limite sur D et 0 sinon. $\square$

Remarque

Si $A \in \sigma(X)$ alors $\mathbb{1}_A$ est $\sigma(X)$-mesurable donc il existe une fonction f mesurable t.q. $\mathbb{1}_A = f(X)$. Donc on peut décider si A a lieu ou pas dès qu'on connait la valeur de X.

III. Espérance mathématique

Définition 19: Espérance

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Si X est de signe constant ou si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on appelle espérance de X :

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ et que pour chaque $i = 1 \dots d$, $\mathbb{E}[X_i]$ est définie, on pose :

$$\mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d] \end{pmatrix}$$

Remarque

Quand elle est définie, $\mathbb{E}[X]$ est une intégrale de Lebesgue. On peut donc utiliser toutes les propriétés de l'intégrale de Lebesgue dans l'étape de $\mathbb{E}[X]$.

Proposition 22: Théorème du transfert

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. et $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable t.q. $g(X)$ est de signe constant ou $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$. On a :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X) d\mathbb{P} = \int_E g d\mathbb{P}^X$$

Proposition 23: Loi image

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. Si il existe une probabilité ν sur $(E, \mathcal{E})$ t.q. pour toute fonction $g : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée on a :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_E g d\nu$$

Alors ν est la loi de X.

Démonstration. En utilisant $g = \mathbb{1}_B, \forall B \in \mathcal{E}$. $\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X)] = \int \mathbb{1}_B d\nu = \nu(B)$. □

Remarque

Si $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E$ des v.a. sont telles que pour toute fonction $g : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on a $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, alors X et Y ont la même loi.

Exemple 7: Densité uniforme

Si X admet pour densité $\mathbb{1}_{[0,1]}$ (X suit la loi uniforme sur $[0,1]$), alors X et $1-X$ ont la même loi. En effet, $\forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée :

$$\mathbb{E}[g(1-X)] = \int_{\mathbb{R}} g(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(u)\mathbb{1}_{[0,1]}(u)du$$

(changement de variable $u = 1-x$). Donc X et $1-X$ ont la même loi. Cependant, $\mathbb{P}(X = 1-X) = \mathbb{P}(X = 1/2) = 0$.

Proposition 24: Espérance variable discrète

Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. discrète et $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Si g est de signe constant ou si $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in M} g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

où M est la partie dénombrable de X.

Démonstration. On suppose que $g \geq 0$.

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_E gd\mathbb{P}^X = \int_E gd\left(\sum_{x\in M} p_x\delta_x\right)$$

$$= \sum_{x\in M} p_x\left(\int_E gd\delta_x\right) = \sum_{x\in M} g(x)p_x = \sum_{x\in M} g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Si $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$, alors $\sum_{x\in M} |g(x)|\mathbb{P}(X = x) < +\infty$. Et $\int_E g^+ d\mathbb{P}^X = \sum_{x\in M} g^+(x)\mathbb{P}(X = x)$, $\int_E g^- d\mathbb{P}^X = \sum_{x\in M} g^-(x)\mathbb{P}(X = x)$. Donc $\int_E gd\mathbb{P}^X = \sum_{x\in M}(g^+(x) - g^-(x))\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in M} g(x)\mathbb{P}(X = x)$. $\square$

Proposition 25: Espérance variable à densité

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. de densité f, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Si $g(x)$ est de signe constant ou $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$, alors :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)d\lambda(x)$$

Démonstration. $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} gd\mathbb{P}^X$ et $\mathbb{P}^X$ admet f pour densité : $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}^X(B) = \int_{\mathbb{R}} f\mathbb{1}_B d\lambda$. (Suite classique intégrale de Lebesgue). $\square$

IV. Variables aléatoires de carré intégrable

Puisque $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\forall p,q$ t.q. $1 \leq p \leq q$, on a $L^q(\mathbb{P}) \subset L^p(\mathbb{P})$ et même $\forall X \in L^p$, on a $\|X\|_p \leq \|X\|_q$. En particulier, $L^2(\mathbb{P}) \subset L^1(\mathbb{P})$ et si $X, Y \in L^2(\mathbb{P})$ alors $X, Y \in L^1(\mathbb{P})$ puisque $\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$ (Cauchy-Schwarz).

L'espace $L^2(\mathbb{P})$ muni de $< X, Y >= \mathbb{E}[XY]$ est un espace de Hilbert.

Définition 20: Variance

Soit $X \in L^2(\mathbb{R})$. On appelle variance de X :

$$V(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Remarque

1. $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ (König-Huygens).
2. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[(X-a)^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] - a)^2] = \text{Var}(X) + 2\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]](\mathbb{E}[X] - a) + (\mathbb{E}[X] - a)^2$. Comme $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = 0$, on a $\mathbb{E}[(X-a)^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X] - a)^2$. Donc $\inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[(X-a)^2] = \text{Var}(X)$ et cet inf est atteint en $a = \mathbb{E}[X]$.

Proposition 26: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \in L^2(\mathbb{P})$. $\forall a > 0$ on a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

Démonstration. $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geq a^2) \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2] = \frac{1}{a^2}\text{Var}(X)$ par Markov. □

Proposition 27: Propriétés de la variance

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}$, $V(aX+b) = a^2V(X)$.
- Si $\text{Var}(X) = 0$ alors $X = \mathbb{E}[X]$ p.s.

Démonstration. $\text{Var}(X) = \int_\Omega |X - \mathbb{E}[X]|^2 d\mathbb{P} = 0 \implies X - \mathbb{E}[X] = 0$ p.s. car c'est une intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable positive. □

Définition 21: Covariance et Dispersion

Soit $(X,Y) \in (L^2(\mathbb{P}))^2$ des v.a. réelles. La covariance de X et Y est définie par :

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ t.q. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \in L^2(\mathbb{P})$.

$$D_X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T] = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$$

est appelée **matrice de dispersion** ou covariance de X.

Proposition 28: Propriétés de la Covariance

Soit $(X,Y) \in (L^2(\mathbb{P}))^2$.

1. Si X est une v.a. réelle : $\text{Cov}(X,X) = \text{Var}(X)$.

2. Si X et Y sont des v.a. réelles : $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y,X)$.
3. Sur l'ensemble des v.a. réelles de carré intégrable, $(X,Y) \mapsto \text{Cov}(X,Y)$ est bilinéaire.
4. Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ avec chacune de ses composantes dans $L^2(\mathbb{P})$. $\forall A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R}), B \in \mathbb{R}^k$:
$$D_{AX+B} = AD_X A^T$$

Démonstration. $Y = AX + B$. $Y - \mathbb{E}[Y] = Y - \mathbb{E}[AX+B] = A(X - \mathbb{E}[X])$. Donc :

$$\begin{aligned} D_{AX+B} &= \mathbb{E}[(AX+B-\mathbb{E}[AX+B])(AX+B-\mathbb{E}[AX+B])^T] \\ &= \mathbb{E}[A(X-\mathbb{E}[X])(X-\mathbb{E}[X])^T A^T] \\ &= A\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(X-\mathbb{E}[X])^T]A^T \\ &= AD_X A^T \end{aligned}$$

□

Remarque

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{P})$: $D_X = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$ est une matrice symétrique associée à D_X et est positive. En effet, $\forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$\text{Var}(\sum_{i=1}^d \lambda_i X_i) = \text{Cov}(\sum_{i=1}^d \lambda_i X_i, \sum_{j=1}^d \lambda_j X_j) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(X_i, X_j) \geq 0$$

Si la forme bilinéaire associée à D_X n'est pas définie positive (i.e. D_X non inversible), alors $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \neq 0$ t.q. $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d = \lambda_0$ p.s.

Exemple 8: Problème de Bercy (Approximation affine)

Question : Soient $X, Y_1, \dots, Y_d$ des v.a. de carrés intégrables. Quelle est la meilleure approximation de X par une fonction affine de $Y_1, \dots, Y_d$? Autrement dit, on cherche à minimiser $(\beta_0, \dots, \beta_d) \mapsto \mathbb{E}[|X - \beta_0 - \beta_1 Y_1 - \dots - \beta_d Y_d|^2]$.
Proposition : On a $\inf_{\beta_0, \dots, \beta_d} \mathbb{E}[|X - \beta_0 - \dots - \beta_d Y_d|^2] = \mathbb{E}[|X - Z|^2]$ où $Z = \mathbb{E}[X] + \sum_{j=1}^d \alpha_j (Y_j - \mathbb{E}[Y_j])$ et les coefficients α étant n'importe quelle solution de :

$$\sum_{j=1}^d \alpha_j \text{Cov}(Y_j, Y_k) = \text{Cov}(X, Y_k), \forall k \in [\![1, d]\!]$$

Si D_Y est inversible, $\alpha = D_Y^{-1} \text{Cov}(X, Y)$.
Preuve : Soit H le sous-espace de $L^2(\mathbb{P})$. $H = \text{Vect}(1, Y_1 - \mathbb{E}[Y_1], \dots, Y_d - \mathbb{E}[Y_d])$. C'est un s.e.v. de dim finie de $L^2(\mathbb{P})$. La variable aléatoire $Z \in H$ qui minimise $U \mapsto \|X - U\|_2$ sur H est la projection orthogonale de X sur H. i.e. $X - Z \perp$ à tous les éléments de H. En notant $Z =$

$\alpha_0 + \sum_{j=1}^d \alpha_j(Y_j - \mathbb{E}[Y_j])$. Nécessairement $\mathbb{E}[Z] = \alpha_0 = \mathbb{E}[X]$ (car orthogonal à 1). $\forall k \in [\![1, d]\!]$:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}[(X-Z)(Y_k - \mathbb{E}[Y_k])] \\
&= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] - Z)(Y_k - \mathbb{E}[Y_k])] \\
&= \mathrm{Cov}(X, Y_k) - \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])(Y_k - \mathbb{E}[Y_k])] \\
&= \mathrm{Cov}(X, Y_k) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^d \alpha_j (Y_j - \mathbb{E}[Y_j])(Y_k - \mathbb{E}[Y_k])\right] \\
&= \mathrm{Cov}(X, Y_k) - \sum_{j=1}^d \alpha_j \mathrm{Cov}(Y_j, Y_k)
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ vérifient les conditions trouvées, alors $X - Z$ est orthogonal à H donc Z minimise bien la fonction considérée.

Exemple 9: Exercice

Si X et Y sont 2 v.a. réelles ayant la même fonction de répartition, alors elles ont la même loi.
Réponse : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$. Alors $\mathbb{P}^X$ et $\mathbb{P}^Y$ coïncident sur les éléments de la classe $\mathcal{C} = \{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. Mais $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies et $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$. Et $\mathbb{P}^X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^Y(\mathbb{R}) = 1$. Donc $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^Y$.

V. Fonction caractéristique

Définition 22: Transformée de Fourier d'une mesure

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. On appelle transformée de Fourier la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x} \mu(dx)$$

où $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_d x_d$.

Proposition 29: Injectivité

La fonction définie sur l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}^d$ par $F[\mu] : \mu \to \hat{\mu}$ est injective.

Définition 23: Fonction caractéristique

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction caractéristique de X la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$\varphi_X(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi\cdot X}]$$

où $\xi \cdot X = \xi_1 X_1 + \cdots + \xi_d x_d$.

Remarque

$F(\mathbb{P}^X)(\xi) = \varphi_X(\xi)$. $\varphi_X = \varphi_Y \implies X$ et Y ont la même loi.

Chapitre 6 : Indépendance

I. Événements indépendants

Définition 24: Indépendance de deux événements

Deux événements $A, B \in \mathcal{A}$ sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque

1. Deux événements indépendants sous $\mathbb{P}$ peuvent ne plus l'être sous une autre probabilité.
2. Tous les événements de probabilité 0 ou 1 sont indépendants de tous les événements.

Exemple 10: Exercice

Si A et B sont indépendants, alors :

- A^c et B sont indépendants.
- A et B^c sont indépendants.
- A^c et B^c sont indépendants.

(Preuve laissée en exercice)

Définition 25: Probabilité conditionnelle

Soit $A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathbb{P}(A) > 0$. On appelle probabilité « sachant A » la probabilité définie par :

$$\mathbb{P}(\cdot|A) : B \in \mathcal{A} \longmapsto \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarque

1. Si A et B sont indépendants (et $\mathbb{P}(A) > 0$), alors $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.
2. Il ne faut pas confondre « indépendant » et « incompatible » (disjoints).

Définition 26: Indépendance mutuelle

Soit un entier $n \geq 2$. On dit que des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si $\forall p \in [\![2, n]\!]$ et $\forall \{i_1, \ldots, i_p\} \subset [\![1, n]\!]$ (2 à 2 distincts), on a :

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_p})$$

Exemple 11: Indépendance 2 à 2 vs Mutuelle

A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants ssi :

- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

- ET $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$
- ET $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$
- ET $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

Exemple 12: Lancer de dés

Lancer de dés distincts à 6 faces, équilibrés (Rouge et Vert).

- $E =$ Rouge tombe sur 4.
- $F =$ Somme égale à $6 \leftarrow \{(1,5),(2,4),\dots,(5,1)\}$ (5 cas).
- $G =$ Somme égale à $7 \leftarrow \{(1,6),\dots,(6,1)\}$ (6 cas).

E est indépendant de G mais E n'est pas indépendant de F.

- $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{6}$.
- $\mathbb{P}(E \cap F) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{36}$.
- $\mathbb{P}(E \cap G) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(G)$ (car $\mathbb{P}(G) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$).

Définition 27: Système complet d'événements

Soit I un ensemble dénombrement (fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$). On dit qu'une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements ssi :

- Les $(A_i)_{i\in I}$ sont 2 à 2 disjoints (incompatibles).
- $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = 1$.

Proposition 30: Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements (Causes). $\forall B \in \mathcal{A}$ (Conséquence) :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Si $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Proposition 31: Formule de Bayes (Probabilité des causes)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements t.q. $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) > 0$. Alors $\forall B \in \mathcal{A}$ et $\forall j \in I$ t.q. $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Exemple 13: Questionnaire étudiant

Étudiante interrogée. Connait la réponse avec proba $p \in]0,1[$. Quelle est la probabilité qu'elle connaisse la réponse sachant qu'elle a répondu correctement ? Système complet :

- C : Connait la réponse.

- C^c : Ne connait pas la réponse.

On cherche $\mathbb{P}(\text{Connait la réponse}|\text{réponse est correcte})$. On suppose que si elle ne connait pas, elle choisit au hasard parmi m réponses ($\mathbb{P}(\text{correct}|C^c) = 1/m$). Si elle connait, $\mathbb{P}(\text{correct}|C) = 1$.

$$= \frac{\mathbb{P}(\text{Réponse correcte}|\text{Connait})\mathbb{P}(\text{Connait})}{\mathbb{P}(\text{Correct}|\text{Connait})\mathbb{P}(\text{Connait}) + \mathbb{P}(\text{Correct}|\text{Connait pas})\mathbb{P}(\text{Connait pas})}$$

$$= \frac{1 \times p}{1 \times p + \frac{1}{m}(1-p)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

II. Tribus indépendantes et variables aléatoires indépendantes

Soit $n \geq 2$.

Définition 28: Indépendance de sous-tribus

Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ sont indépendantes ssi $\forall A_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, \forall A_n \in \mathcal{B}_n$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n)$$

Remarque

1. $A, B \in \mathcal{A}$ sont indépendants ssi $\sigma(\{A\})$ et $\sigma(\{B\})$ sont indépendantes. Rappel : $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.
2. Si $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ sont indépendantes, $\forall p \in [\![2, n]\!]$ et $\forall (i_1, \dots, i_p) \in [\![1, n]\!]$ (2 à 2 distincts), $\mathcal{B}_{i_1}, \dots, \mathcal{B}_{i_p}$ sont indépendantes.

On suppose donnés des espaces mesurables $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ et $(F_1, \mathcal{F}_1), \dots, (F_n, \mathcal{F}_n)$.

Définition 29: Variables aléatoires indépendantes

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ sont indépendantes.

Remarque

1. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi $\forall A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, \forall A_n \in \mathcal{E}_n$:

   $$\mathbb{P}(X_1 \in A_1 \cap \dots \cap X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

   Rappel : $\sigma(X_i) = \{X_i^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}_i\}$.
2. S'il existe des sous-tribus sur Ω, $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ t.q. :
   - $\forall i \in [\![1, n]\!]$, X_i est $\mathcal{B}_i - \mathcal{E}_i$ mesurable.
   - $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ sont indépendantes.

   Alors $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.
3. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_i : E_i \to F_i$ mesurable, alors : $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Lemme 1: Indépendance et π-systèmes

Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$. On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}_i$ t.q. :

- $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{B}_i$
- $\mathcal{C}_i$ est stable par intersection finie (π-système).
- $\Omega \in \mathcal{C}_i$

et $\forall C_1 \in \mathcal{C}_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}_n$:

$$\mathbb{P}(C_1 \cap \dots \cap C_n) = \mathbb{P}(C_1) \times \dots \times \mathbb{P}(C_n)$$

Alors $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ sont indépendantes.

Démonstration. La preuve se fait en n étapes. **1-** Soient $C_2 \in \mathcal{C}_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}_n$ quelconques mais fixés. Soit $\mathcal{M}_1 = \{B_1 \in \mathcal{B}_1 : \mathbb{P}(B_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(C_2) \dots \mathbb{P}(C_n)\}$. $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone :

- $\Omega \in \mathcal{M}_1$ car $\mathbb{P}(\Omega \cap C_2 \dots) = \mathbb{P}(C_2 \dots) = 1 \times \mathbb{P}(C_2) \dots$
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_1$ t.q. $A \subset B$. $\mathbb{P}((B \setminus A) \cap \dots) = \mathbb{P}(B \cap \dots) - \mathbb{P}(A \cap \dots)$ par linéarité... $= (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(C_2) \dots = \mathbb{P}(B \setminus A)\mathbb{P}(C_2) \dots$ Donc $B \setminus A \in \mathcal{M}_1$.
- Soit $(B_m)_{m \geq 0}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}_1$. Par continuité croissante de $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}((\bigcup B_m) \cap C_2 \dots) = \lim \mathbb{P}(B_m \cap \dots) = \lim \mathbb{P}(B_m)\mathbb{P}(C_2) \dots = \mathbb{P}(\bigcup B_m)\mathbb{P}(C_2) \dots$ Donc $\bigcup B_m \in \mathcal{M}_1$.

Comme $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{M}_1$, on a $\mathcal{M}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{M}_1$. Mais $\mathcal{C}_1$ est stable par intersection finie, donc $\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{M}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{M}_1$. Donc $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \forall C_2 \in \mathcal{C}_2, \dots, \forall C_n \in \mathcal{C}_n$, l'égalité produit est vraie.

2- Soient $B_1 \in \mathcal{B}_1, C_3 \in \mathcal{C}_3, \dots, C_n \in \mathcal{C}_n$ quelconques mais fixés. $\mathcal{M}_2 = \{B_2 \in \mathcal{B}_2 : \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap C_3 \dots) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2) \dots\}$. Est une classe monotone qui contient $\mathcal{C}_2$, donc $\mathcal{B}_2 = \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{M}_2$ pour les mêmes raisons qu'en (1). Donc $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \forall B_2 \in \mathcal{B}_2, \forall C_3 \in \mathcal{C}_3 \dots$ l'égalité tient.

3- et plus : Et ainsi de suite jusqu'à n. □

Proposition 32: Propriété d'indépendance par paquets

Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ des sous-tribus sur Ω de $\mathcal{A}$, indépendantes. $\forall p \in [\![2, n]\!]$ et tous entiers $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_p = n$. Les tribus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n_1}) \\
\mathcal{D}_j &= \sigma(\mathcal{B}_{n_{j-1}+1}, \dots, \mathcal{B}_{n_j}) \\
&\vdots \\
\mathcal{D}_p &= \sigma(\mathcal{B}_{n_{p-1}+1}, \dots, \mathcal{B}_{n_p})
\end{aligned}$$

sont indépendantes.

Démonstration. $\forall j \in [\![1, p]\!]$, on pose :

$$\mathcal{G}_j = \{B_{n_{j-1}+1} \cap \dots \cap B_{n_j} \mid B_k \in \mathcal{B}_k \text{ pour } k \in [\![n_{j-1}+1, n_j]\!]\} \subset \mathcal{D}_j$$

Les $\mathcal{G}_j$ sont des π-systèmes (stables par intersection) car l'intersection de deux éléments de $\mathcal{G}_j$ reste une intersection d'éléments des $\mathcal{B}_k$ (qui sont des tribus, donc stables par intersection). $\Omega \in \mathcal{G}_j$.

De plus, les $\mathcal{G}_j$ vérifient la condition d'indépendance produit car les $\mathcal{B}_k$ sont toutes indépendantes entre elles. D'après le Lemme précédent, il suffit de montrer que $\sigma(\mathcal{G}_j) = \mathcal{D}_j$.

* Puisque $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{D}_j$, on a $\sigma(\mathcal{G}_j) \subset \mathcal{D}_j$.

* Réciproquement : $\forall i \in \{n_{j-1}+1, \dots, n_j\}, \forall B \in \mathcal{B}_i$, on a :

$$B = \Omega \cap \dots \cap \Omega \cap B \cap \Omega \cap \dots \cap \Omega \in \mathcal{G}_j$$

Donc $\forall i \in \{n_{j-1}+1, \dots, n_j\}$, $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{G}_j \subset \sigma(\mathcal{G}_j)$. Donc :

$$\sigma(\mathcal{B}_{n_{j-1}+1}, \dots, \mathcal{B}_{n_j}) = \sigma\left(\bigcup_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mathcal{B}_i\right) \subset \sigma(\mathcal{G}_j)$$

Donc $\mathcal{D}_j \subset \sigma(\mathcal{G}_j)$.

Conclusion : $\mathcal{D}_j = \sigma(\mathcal{G}_j)$ et les $\mathcal{D}_j$ sont indépendantes. □

Remarque

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des V.A. indépendantes $X_i : \Omega \to E_i$. Et pour $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_p = n$, on a des fonctions :

$$\begin{aligned} &f_1 : E_1 \times \dots \times E_{n_1} \to F_1 \\ &f_j : E_{n_{j-1}+1} \times \dots \times E_{n_j} \to F_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

mesurables, alors : $f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), \dots, f_j(X_{n_{j-1}+1}, \dots, X_{n_j}), \dots$ sont indépendantes.

Proposition 33

Les v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si :

$$\mathbb{P}^{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{X_n}$$

Ceci est une égalité sur $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, pour toutes fonctions mesurables positives $f_i : E_i \to \mathbb{R}^+$ ($1 \leq i \leq n$), alors :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[f_i(X_i)]$$

Démonstration. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi $\forall F_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, F_n \in \mathcal{E}_n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(X_1,\dots,X_n)}(F_1 \times \dots \times F_n) &= \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in F_1 \times \dots \times F_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in F_1, \dots, X_n \in F_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \in F_n) \\ &= \mathbb{P}^{X_1}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}^{X_n}(F_n) \\ &= (\mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{X_n})(F_1 \times \dots \times F_n) \end{aligned}$$

Donc $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi $\mathbb{P}^{(X_1,\dots,X_n)}$ et $\mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{X_n}$ coïncident sur la classe des pavés. Cette classe :

- est stable par intersection finie,
- engendre $\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n$,
- contient $E_1 \times \dots \times E_n$ (qui vérifie l'égalité).

Donc $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ssi $\mathbb{P}^{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{X_n}$.

Finalement, si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_i : E_i \to \mathbb{R}^+$ sont mesurables positives :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right] &= \int_{E_1 \times \dots \times E_n} f_1(x_1) \dots f_n(x_n) d\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)} \\
&= \int (f_1(x_1) \dots f_n(x_n)) d(\mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{X_n}) \\
&= \int_{E_1 \times \dots \times E_{n-1}} (f_1 \dots f_{n-1}) \left(\int_{E_n} f_n(x_n) d\mathbb{P}^{X_n}(x_n) \right) d\mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes d\mathbb{P}^{X_{n-1}} \\
&\text{(Fubini-Tonelli car positif)} \\
&= \mathbb{E}[f_n(X_n)] \times \dots \times \mathbb{E}[f_1(X_1)] \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[f_i(X_i)]
\end{aligned}$$

□

Proposition 34

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ($X_i : \Omega \to E_i$) et on se donne $g_1, \dots, g_n$ mesurables $g_i : E_i \to \mathbb{R}$.
Alors si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g_i(X_i)$ est intégrable, on a que $\prod_{i=1}^n g_i(X_i)$ est intégrable et :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[g_i(X_i)]$$

Remarque

Si X_1 et X_2 sont des v.a.r. indépendantes et intégrables, alors $X_1 X_2$ est intégrable.
Sans l'hypothèse d'indépendance, "X_1 et X_2 sont intégrables" ne suffit pas pour garantir que $X_1 X_2$ est intégrable.
Cependant, si $X_1, X_2 \in L^2(\mathbb{P})$ alors $X_1 X_2 \in L^1(\mathbb{P})$ (Cauchy-Schwarz).

Remarque

X_1 et X_n sont indépendantes ssi pour toutes les fonctions $g_1, \dots, g_n$ mesurables **bornées** $g_i : E_i \to \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[g_i(X_i)]$$

Remarque

Si X_1 et X_2 sont indépendantes et intégrables :

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] \implies \text{Cov}(X_1, X_2) = 0$$

La réciproque est fausse : il existe des v.a. t.q. $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ mais X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Preuve de la proposition. Par récurrence :
$\underline{\mathcal{P}(2) :}$ On pose $f(x_1, x_2) = g_1(x_1) g_2(x_2)$.

On a :

$$\begin{aligned} f^+(x_1,x_2) &= g_1^+(x_1)g_2^+(x_2) + g_1^-(x_1)g_2^-(x_2) \\ f^-(x_1,x_2) &= g_1^+(x_1)g_2^-(x_2) + g_1^-(x_1)g_2^+(x_2) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f^+(X_1,X_2)] &= \mathbb{E}[g_1^+(X_1)g_2^+(X_2) + g_1^-(X_1)g_2^-(X_2)] \\ &= \mathbb{E}[g_1^+(X_1)]\mathbb{E}[g_2^+(X_2)] + \mathbb{E}[g_1^-(X_1)]\mathbb{E}[g_2^-(X_2)] < +\infty \end{aligned}$$

(car les espérances sont finies par hypothèse d'intégrabilité).
De même, $\mathbb{E}[f^-(X_1,X_2)] < +\infty$.
Donc $f(X_1,X_2) = g_1(X_1)g_2(X_2)$ est intégrable.

De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_1(X_1)g_2(X_2)] &= \mathbb{E}\left[(g_1^+(X_1) - g_1^-(X_1))(g_2^+(X_2) - g_2^-(X_2))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[g_1^+(X_1)g_2^+(X_2) - g_1^+(X_1)g_2^-(X_2) - g_1^-(X_1)g_2^+(X_2) + g_1^-(X_1)g_2^-(X_2)\right] \\ &= \mathbb{E}[g_1^+(X_1)g_2^+(X_2)] - \mathbb{E}[g_1^+(X_1)g_2^-(X_2)] - \mathbb{E}[g_1^-(X_1)g_2^+(X_2)] + \mathbb{E}[g_1^-(X_1)g_2^-(X_2)] \\ &= \mathbb{E}[g_1^+(X_1)]\mathbb{E}[g_2^+(X_2)] - \mathbb{E}[g_1^+(X_1)]\mathbb{E}[g_2^-(X_2)] - \mathbb{E}[g_1^-(X_1)]\mathbb{E}[g_2^+(X_2)] + \mathbb{E}[g_1^-(X_1)]\mathbb{E}[g_2^-(X_2)] \\ &= \left(\mathbb{E}[g_1^+(X_1)] - \mathbb{E}[g_1^-(X_1)]\right)\left(\mathbb{E}[g_2^+(X_2)] - \mathbb{E}[g_2^-(X_2)]\right) \\ &= \mathbb{E}[g_1(X_1)]\mathbb{E}[g_2(X_2)] \end{aligned}$$

Soit n quelconque mais fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Soient $g_1,\dots,g_{n+1}$ des fonctions mesurables $g_i : E_i \to \mathbb{R}$ telles que $g_1(X_1),\dots,g_{n+1}(X_{n+1})$ sont intégrables.
On a donc $g_1(X_1)\dots g_n(X_n)g_{n+1}(X_{n+1}) = h(X_1,\dots,X_n)g_{n+1}(X_{n+1})$.
Avec $h(X_1,\dots,X_n)$ intégrable d'après $\mathcal{P}(n)$.
C'est le produit de 2 v.a. intégrables et indépendantes (indépendance par paquets). Donc $g_1(X_1)\dots g_{n+1}(X_{n+1})$ est intégrable d'après $\mathcal{P}(2)$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_1(X_1)\dots g_{n+1}(X_{n+1})] &= \mathbb{E}[h(X_1\dots X_n)g_{n+1}(X_{n+1})] \\ &= \mathbb{E}[g_1(X_1)\dots g_n(X_n)]\mathbb{E}[g_{n+1}(X_{n+1})] \quad \text{(d'après } \mathcal{P}(2)) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[g_i(X_i)] \times \mathbb{E}[g_{n+1}(X_{n+1})] \quad \text{(d'après } \mathcal{P}(n)) \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$). □

Proposition 35

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a. réelles.

1. Si $(X_1,\dots,X_n)$ admet $p(x_1,\dots,x_n)$ comme densité, alors chaque X_i admet $x_i \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_n$ comme densité.
2. Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et chaque X_i admet une densité p_i, alors $(X_1,\dots,X_n)$ admet $\prod_{i=1}^n p_i$ pour densité.
3. S'il existe des fonctions mesurables positives $g_1,\dots,g_n$ telles que $(X_1,\dots,X_n)$ admet $\prod_{i=1}^n g_i(x_i)$ pour densité, alors $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes. (Et pour tout i, $\exists c_i > 0$ t.q. X_i admet $c_i g_i$ comme densité).

Démonstration. **1)** Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a que $\forall i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{X_i}(A) &= \mathbb{P}(X_i \in A) \\
&= \mathbb{P}((X_1, \dots, X_i, \dots, X_n) \in \mathbb{R} \times \dots \times A \times \dots \times \mathbb{R}) \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\dots\times A\times\dots\times\mathbb{R}} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_A \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots \hat{dx_i} \dots dx_n \right) dx_i \quad \text{(Fubini positif)}
\end{aligned}$$

D'où $x_i \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p(\dots) d\dots$ est une densité pour X_i.

2) Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurable bornée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_n)] &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) d\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) d(\mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{X_n})(dx_1 \dots dx_n) \\
&\quad \text{(Fubini-Lebesgue car g est bornée)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x_1 \dots x_n) p_n(x_n) dx_n \right) d\mathbb{P}^{(X_1 \dots X_{n-1})}(dx_1 \dots dx_{n-1}) \\
&= \dots \text{ (Récurrence / Fubini successifs)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) p_1(x_1) \dots p_n(x_n) dx_1 \dots dx_n
\end{aligned}$$

3) Puisque $\prod_{i=1}^n g_i$ est une densité, on a :

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^n g_i(x_i) \right) dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} g_i(x_i) dx_i \right)$$

Donc en posant $K_i = \int_{\mathbb{R}} g_i(x_i) dx_i$, on a $K_i \in]0, +\infty[$ et $\prod K_i = 1$.

D'après le premier point de la proposition, chaque X_i admet une densité qui se déduit de $\prod g_i$ en intégrant :

$$\begin{aligned}
p_i(x_i) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_1(x_1) \dots g_i(x_i) \dots g_n(x_n) dx_1 \dots \hat{dx_i} \dots dx_n \\
&= g_i(x_i) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{j \neq i} g_j(x_j) d(\dots) \\
&= g_i(x_i) \prod_{j \neq i} \left(\int_{\mathbb{R}} g_j(x_j) dx_j \right) \\
&= \frac{g_i(x_i)}{K_i} \quad (\text{car } \prod K_j = 1)
\end{aligned}$$

Reste à montrer que $X_1 \dots X_n$ sont indépendantes.

Pour tout choix de fonctions boréliennes bornées $h_1 \dots h_n$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h_1(X_1) \dots h_n(X_n)] &= \int_{\mathbb{R}^n} h_1(x_1) \dots h_n(x_n) g_1(x_1) \dots g_n(x_n) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} h_1(x_1) \dots h_n(x_n) \frac{g_1(x_1)}{K_1} \dots \frac{g_n(x_n)}{K_n} dx_1 \dots dx_n \quad (\text{car } \prod K_i = 1) \\
&= \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} h_i(x_i) \frac{g_i(x_i)}{K_i} dx_i \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[h_i(X_i)]
\end{aligned}$$

Donc $X_1 \dots X_n$ sont indépendantes. $\square$

Proposition 36

Les composantes d'un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ sont indépendantes ssi $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\varphi_{(X_1,\dots,X_n)}(\xi) = \varphi_{X_1}(\xi_1) \dots \varphi_{X_n}(\xi_n)$$

(Où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$).

Démonstration. **Sens direct ($\implies$)** : Supposons que $X_1 \dots X_n$ sont indépendantes. Alors $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{(X_1,\dots,X_n)}(\xi) &= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \xi_j X_j}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^n e^{i\xi_j X_j}\right] \end{aligned}$$

Or les fonctions $u \mapsto e^{i\xi_j u}$ sont mesurables bornées.
Donc, par indépendance :

$$= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{i\xi_j X_j}] = \varphi_{X_1}(\xi_1) \dots \varphi_{X_n}(\xi_n)$$

Réciproquement ($\impliedby$) : Soit $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

$$\begin{aligned} \varphi_{(X_1,\dots,X_n)}(\xi) = \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \xi_j X_j}\right] &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^n \xi_j x_j} d\mathbb{P}^{(X_1 \dots X_n)}(x_1 \dots x_n) \\ &= \varphi_{\mathbb{P}^{(X_1 \dots X_n)}}(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1}(\xi_1) \dots \varphi_{X_n}(\xi_n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{i\xi_j X_j}] &= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_j x_j} d\mathbb{P}^{X_j}(x_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{i\xi_j x_j} d(\mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{X_n}) \\ &= \varphi_{\mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{X_n}}(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

Comme la transformation de Fourier est injective :

$$\mathbb{P}^{(X_1 \dots X_n)} = \mathbb{P}^{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{X_n}$$

Donc $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. $\square$

III. Sommes de variables aléatoires

Proposition 37

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et $f, g \in L^1(\lambda)$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\lambda(dy) < +\infty \quad \text{pour } \lambda\text{-presque tout } x \in \mathbb{R}^d$$

et même :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\lambda(dy) \right| \lambda(dx) \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Démonstration. D'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\lambda(dy) \right) \lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\lambda(dx) \right) \lambda(dy) \\
&\quad \text{(changement de variable } u = x - y\text{)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|\lambda(du) \right) \lambda(dy) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\lambda(dy) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|\lambda(du) \right) \\
&= \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty
\end{aligned}$$

On a donc que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|dy < +\infty \text{ donc } \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy < +\infty$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \right| \lambda(dx) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\lambda(dy)\lambda(dx) \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_1
\end{aligned}$$

□

Définition 30: Produit de convolution

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. On appelle produit de convolution de f et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy & \text{si } \int |f(x-y)g(y)|dy < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 38: Propriétés de la convolution

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.

1. $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$
2. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
3. $f * g = g * f$

Démonstration. 1 et 2 sont des conséquences de la proposition précédente.

3- On a $\forall x \in \mathbb{R}^d$ t.q. $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|dy < +\infty$:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)g(x-u)du = (g * f)(x)$$

(en posant $u = x - y$).

Si $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|dy = +\infty$, alors $(f * g) = 0$ mais aussi $\int |f(u)||g(x-u)|du = +\infty$ donc $(g * f)(x) = 0$. □

Définition 31: Convolution de mesures

Soient μ et ν deux probabilités sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On appelle produit de convolution de μ et ν la mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ qui est la mesure image de $\mu \otimes \nu$ par l'application $s : (x, y) \mapsto x + y$. Notée $\mu * \nu$.

Remarque

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mu \otimes \nu \xrightarrow{s:(x,y)\mapsto x+y} \mathbb{R}^d, \mu * \nu$$
$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (\mu * \nu)(A) = (\mu \otimes \nu)(s^{-1}(A))$$

Proposition 39

Soient μ et ν des mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable positive ou mesurable bornée :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)(\mu * \nu)(dz) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x + y)\mu(dx) \right) \nu(dy)$$

Démonstration. $0^{\text{ème}}$ cas : Il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\varphi = \mathbb{1}_A$. Alors $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)(\mu * \nu)(dz) = (\mu * \nu)(A) = (\mu \otimes \nu)(s^{-1}(A))$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{x+y\in A}\mu(dx) \right) \nu(dy) &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x + y)(\mu \otimes \nu)(dx, dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{s^{-1}(A)}(x, y)(\mu \otimes \nu)(dx, dy) \\ &= (\mu \otimes \nu)(s^{-1}(A))\end{aligned}$$

D'où l'égalité dans ce cas.

1^{er} cas : φ est une fonction étagée positive. Alors l'égalité est une conséquence du $0^{\text{ème}}$ cas et de la propriété de linéarité de l'intégrale. Etc... (Standard measure theory extension). □

Proposition 40: Somme de v.a. indépendantes

Soient X et Y des v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
1- La v.a. $X + Y$ est de la loi $\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y$. Si de plus X admet une densité p_X et Y admet p_Y, alors $X + Y$ admet $p_X * p_Y$ comme densité.
2- On a $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$.
3- Si X et Y sont de carré intégrable :

$$D_{X+Y} = D_X + D_Y$$

Démonstration. Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable bornée :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(X + Y)] &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \varphi(x + y)d\mathbb{P}^{(X,Y)}(dx, dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \varphi(x + y)d(\mathbb{P}^X \otimes \mathbb{P}^Y)(dx, dy) \quad \text{(car indépendance)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u)d(\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y)(du) \quad \text{(d'après la prop précédente)}\end{aligned}$$

Donc $X+Y$ a pour loi $\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y$.

Si de plus X et Y admettent des densités alors (d'après Fubini, puisque tout est positif) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varphi(X+Y)] &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)p_X(x)dx\, p_Y(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)p_X(x)dx\, p_Y(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \varphi(u)p_X(u-v)p_Y(v)dudv \quad (\text{changement } u=x+y, v=y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u)\left(\int_{\mathbb{R}^d} p_X(u-v)p_Y(v)dv\right)du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u)(p_X * p_Y)(u)du
\end{aligned}$$

Donc $X+Y$ admet $p_X * p_Y$ comme densité.

2- $\forall \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}(\xi) &= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^d \xi_j(X_j+Y_j)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\sum \xi_j X_j} \times e^{i\sum \xi_j Y_j}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\sum \xi_j X_j}\right]\mathbb{E}\left[e^{i\sum \xi_j Y_j}\right] \quad (\text{par indépendance}) \\
&= \varphi_X(\xi)\varphi_Y(\xi)
\end{aligned}$$

3- X est carré intégrable ssi $\forall i \in [\![1,d]\!]$, X_i est de carré intégrable. Donc si X et Y sont de carré intégrable, $X+Y$ est de carré intégrable. $\forall (i,j) \in [\![1,d]\!]^2$:

$$\begin{aligned}
[D_{X+Y}]_{i,j} &= \mathrm{Cov}(X_i+Y_i, X_j+Y_j) \\
&= \mathrm{Cov}(X_i,X_j) + \mathrm{Cov}(Y_i,Y_j) + \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)}_{=0} + \underbrace{\mathrm{Cov}(Y_i,X_j)}_{=0} \\
&= [D_X]_{i,j} + [D_Y]_{i,j}
\end{aligned}$$

□

IV. Variables gaussiennes, vecteurs gaussiens

Définition 32: Variable gaussienne réelle

On dit qu'une v.a. réelle X est de loi gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ ($m \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$) si :

- $X = m$ p.s. (auquel cas $\sigma^2 = 0$)
- OU $\mathrm{Var}[X] \neq 0$ et X admet $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ comme densité.

Proposition 41: Propriétés $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$

Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $\mathbb{E}[X] = m$, $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$. Et $\forall t \in \mathbb{R}$:

- $\mathbb{E}[e^{tX}] = e^{tm + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$
- $\mathbb{E}[e^{itX}] = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

Démonstration. (Voir TD, exo 6) □

Définition 33: Vecteur gaussien

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire. On dit que X est un vecteur gaussien si $\forall (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{i=1}^d t_i X_i$ est une v.a. réelle gaussienne.

Remarque

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien, alors $\forall i \in [\![1, d]\!]$, X_i est une v.a. réelle gaussienne. **Attention :** La réciproque est fausse.

Proposition 42: Transformation affine

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien et $B \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$, $R \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur $Y = BX + R \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien avec :

$$\mathbb{E}[Y] = B\mathbb{E}[X] + R \quad \text{et} \quad D_Y = BD_XB^T$$

Démonstration. Toute combinaison linéaire de $Y_1 \dots Y_n$ est une combinaison linéaire de composantes de X plus une constante, donc une v.a. réelle gaussienne. Donc Y est un vecteur gaussien. □

Proposition 43: Fonction caractéristique d'un vecteur gaussien

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien. Pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\varphi_X(\xi) = e^{i\xi \cdot m - \frac{1}{2}\xi^T D_X \xi}$$

où $m = \mathbb{E}[X]$ et D_X est la matrice de dispersion de X.

Démonstration. Soit $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. $Y = \xi \cdot X = \xi_1 X_1 + \dots + \xi_d X_d = \xi^T X$ est une v.a. réelle gaussienne. $\mathbb{E}[\xi^T X] = \xi^T \mathbb{E}[X] = \xi^T m$. $\mathrm{Var}[\xi^T X] = D_{\xi^T X} = \xi^T D_X \xi$. Donc $\xi \cdot X \sim \mathcal{N}(\xi^T m, \xi^T D_X \xi)$. Donc :

$$\begin{aligned} \varphi_X(\xi) &= \mathbb{E}[e^{i\xi^T X}] = \varphi_{\xi^T X}(1) \\ &= e^{i(1)\xi^T m - \frac{1}{2}(1)^2 \xi^T D_X \xi} \\ &= e^{i\xi^T m - \frac{1}{2}\xi^T D_X \xi} \end{aligned}$$

□

Proposition 44: Composantes indépendantes et vecteur gaussien

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. réelles **indépendantes** de lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathcal{N}(m_d, \sigma_d^2)$ respectivement. Alors $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien.

Démonstration. $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \varphi_X(\xi) &= \varphi_{X_1}(\xi_1) \dots \varphi_{X_d}(\xi_d) = \prod_{j=1}^{d} e^{i m_j \xi_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2 \xi_j^2} \\ &= e^{i\xi^T m - \frac{1}{2}\xi^T D_X \xi} \end{aligned}$$

Où $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix}$ et $D_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_d^2 \end{pmatrix}$. Donc X est bien un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de dispersion D_X. □

Proposition 45: Existence de vecteurs gaussiens

À toute matrice D symétrique et positive et à tout vecteur $m \in \mathbb{R}^d$, on peut associer un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, D)$.

Démonstration. Comme D est symétrique et positive, il existe une matrice C t.q. $D = CC^T$. En partant de variables aléatoires $X_1, \dots, X_d$ indépendantes toutes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, on définit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, I_d)$. Et $Y = CX + m$ est un vecteur gaussien avec : $\mathbb{E}[Y] = C\mathbb{E}[X] + m = m$ $\text{Var}[Y] = CD_X C^T = CI_d C^T = CC^T = D$. Donc $Y \sim \mathcal{N}(m, D)$. □

Remarque

$$X_i \sim \mathcal{N} \text{ indép.} \Longrightarrow X = (X_i) \text{ vecteur gaussien} \Longrightarrow X_i \text{ v.a. gaussiennes}$$

Recip. Fausse

Pas forcément indépendantes

Que $X_1, \dots, X_d$ soient des v.a. gaussiennes ne garantit pas que X est un vecteur gaussien.

Proposition 46: Densité d'un vecteur gaussien

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ un vecteur de loi $\mathcal{N}_d(m, D)$. Alors X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ ssi D est inversible, et dans ce cas :

$$f(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det D}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T D^{-1}(x-m)}$$

est la densité de la loi de X.

Remarque

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ dans $\mathbb{R}$, $Y = \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien. $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} X$. $D_Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (non inversible).

Proposition 47: Caractérisation de l'indépendance

Les composantes d'un vecteur gaussien $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ sont indépendantes ssi D_X est diagonale.

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Si $X_1, \dots, X_d$ sont indépendantes alors $\forall i, j \in [\![1, d]\!], i \neq j$: $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] = \mathbb{E}[\dots]\mathbb{E}[\dots] = 0$. Donc D_X est diagonale.

($\Longleftarrow$) Réciproquement : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\varphi_X(\xi) &= e^{im^T\xi - \frac{1}{2}\xi^T D_X \xi} \\
&\text{(car } D_X \text{ est diagonale)} \\
&= e^{i\sum_{j=1}^d m_j\xi_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \sigma_j^2\xi_j^2} \\
&= \prod_{j=1}^d e^{im_j\xi_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2\xi_j^2} \\
&= \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(\xi_j)
\end{aligned}$$

Donc les composantes de X sont indépendantes. □

Chapitre 7 : Convergence de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

I. Plusieurs notions de convergence

Définition 34: Modes de convergence

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des v.a. à valeurs dans un espace métrique (E, d).

1. On dit que (X_n) converge vers X **presque sûrement** (p.s.) si :
$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\}) = 1$$
On note : $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.
2. On dit que (X_n) converge **en probabilité** ($\mathbb{P}$) vers X si :
$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
On note : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
3. Si (X_n) et X sont à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on dit que X_n converge vers X **dans** L^p ($p \in [1, +\infty[$) si :
$$\mathbb{E}[\|X_n - X\|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
On note : $X_n \xrightarrow{L^p} X$.
4. On dit que (X_n) converge **en loi** vers X si :
$$\forall \psi : E \to \mathbb{R} \text{ continue bornée : } \mathbb{E}[\psi(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[\psi(X)]$$

Remarque

$\forall \epsilon, \epsilon' > 0$
$$\epsilon \leq \epsilon' \implies \{\|X_n - X\| > \epsilon'\} \subseteq \{\|X_n - X\| > \epsilon\}$$
donc si $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \to 0 \implies \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon') \to 0$.

II. La métrique sur L^0

On note $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (ou L^0) l'ensemble des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 48: Métrique de la convergence en probabilité

On se donne $d : L^0 \times L^0 \to \mathbb{R}_+$ définie par :
$$d(X, Y) = \mathbb{E}[\|X - Y\| \wedge 1]$$
Alors :

1. d est une distance (sur l'espace L^0 où l'on identifie les v.a. égales p.s.).

2. d est compatible avec la convergence en probabilité :

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff d(X_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3. (L^0, d) est un espace métrique complet.

Démonstration. **1) d est une distance**

- Symétrie : $d(X,Y) = \mathbb{E}[\|X-Y\| \wedge 1] = \mathbb{E}[\|Y-X\| \wedge 1] = d(Y,X)$.
- Séparation : $d(X,Y) = 0 \iff \mathbb{E}[\|X-Y\| \wedge 1] = 0$. Comme $\|X-Y\| \wedge 1 \geq 0$, ceci est équivalent à $\|X-Y\| \wedge 1 = 0$ p.s. $\implies \|X-Y\| = 0$ p.s. $\implies X = Y$ p.s.
- Inégalité triangulaire :

Exemple 14: Exercice

Montrer que $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^d)^3$, on a $\|x-y\| \wedge 1 \leq \|x-z\| \wedge 1 + \|z-y\| \wedge 1$. (En intégrant cette inégalité, on obtient $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$).

2) Compatibilité avec la convergence $\mathbb{P}$

($\implies$) Supposons $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Soit $\epsilon \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
d(X_n, X) &= \mathbb{E}[\|X_n - X\| \wedge 1] \\
&= \mathbb{E}[(\|X_n - X\| \wedge 1) \cdot \mathbb{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}] + \mathbb{E}[(\|X_n - X\| \wedge 1) \cdot \mathbb{1}_{\|X_n - X\| \leq \epsilon}] \\
&\leq \mathbb{E}[1 \cdot \mathbb{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}] + \mathbb{E}[\epsilon \cdot \mathbb{1}_{\|X_n - X\| \leq \epsilon}] \\
&\leq \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) + \epsilon
\end{aligned}$$

Comme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, on a $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc, $\forall \epsilon \in]0,1[$, il existe N t.q. $\forall n \geq N$, $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \leq \epsilon$. Pour $n \geq N$, on a $d(X_n, X) \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$. Ceci montre que $d(X_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

($\impliedby$) Réciproquement, supposons $d(X_n, X) \to 0$. Soit $\epsilon \in]0,1[$ (comme sur l'image).

$$\begin{aligned}
d(X_n, X) &= \mathbb{E}[\|X_n - X\| \wedge 1] \\
&= \mathbb{E}[(\|X_n - X\| \wedge 1)\mathbb{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}] + \mathbb{E}[(\|X_n - X\| \wedge 1)\mathbb{1}_{\|X_n - X\| \leq \epsilon}] \\
&\geq \mathbb{E}[(\|X_n - X\| \wedge 1)\mathbb{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}]
\end{aligned}$$

Sur l'événement $\{\|X_n - X\| > \epsilon\}$, comme $\epsilon < 1$, on a $\|X_n - X\| \wedge 1 \geq \epsilon \wedge 1 = \epsilon$.

$$\begin{aligned}
d(X_n, X) &\geq \mathbb{E}[\epsilon \cdot \mathbb{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}] \\
d(X_n, X) &\geq \epsilon \cdot \mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon)
\end{aligned}$$

On a donc (l'inégalité de Markov sur la v.a. $\|X_n - X\| \wedge 1$) :

$$\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} d(X_n, X)$$

Puisque $d(X_n, X) \to 0$, on a $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \to 0$.

3) (L^0, d) est complet (La preuve de ce point est l'objet de la Proposition 49 qui suit). □

Proposition 49: Complétude de l'espace $L^1(d)$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeur dans $\mathbb{R}^d$ qui est une suite de Cauchy pour $d(X,Y) = \mathbb{E}[\|X-Y\| \wedge 1]$. Alors il existe une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $d(X_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Démonstration.

- Il suffit de montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite convergente.
- $(X_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ t.q. $\forall n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[\|Y_{n+1} - Y_n\| \wedge 1] = d(Y_n, Y_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}$$

On a, d'après le Théorème de Convergence Monotone (ou Fubini-Tonelli) :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \|Y_{k+1} - Y_k\| \wedge 1\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\|Y_{k+1} - Y_k\| \wedge 1]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < +\infty$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \|Y_{k+1} - Y_k\| \wedge 1 < +\infty$ p.s.

Or, $\forall \omega \in \Omega$, si $\sum_{k=1}^{+\infty} (\|Y_{k+1}(\omega) - Y_k(\omega)\| \wedge 1) < +\infty$, nécessairement il n'y a qu'un nombre fini d'entiers k t.q. $\|Y_{k+1}(\omega) - Y_k(\omega)\| > 1$. Par conséquent $\sum_{k=1}^{+\infty} \|Y_{k+1} - Y_k\| < +\infty$ p.s.

Par conséquent, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} (Y_{k+1} - Y_k)$ converge presque partout (car $\mathbb{R}^d$ est complet). Et on pose $X = Y_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (Y_{k+1} - Y_k)$. On a alors $\forall n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\|X - Y_n\| &= \left\| Y_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (Y_{k+1} - Y_k) - \left(Y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (Y_{k+1} - Y_k) \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=n}^{+\infty} (Y_{k+1} - Y_k) \right\| \\
&\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|Y_{k+1} - Y_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{(p.s.)}
\end{aligned}$$

On a donc $Y_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Donc $d(Y_n, X) = \mathbb{E}[\|Y_n - X\| \wedge 1] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. d'après le TCD (Théorème de Convergence Dominée) car :

- $\|Y_n - X\| \wedge 1 \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$
- $\forall n \geq 1, \|Y_n - X\| \wedge 1 \leq 1$ et $\mathbb{E}[1] = 1 < +\infty$.

La sous-suite (Y_n) converge vers X pour la métrique d. Puisque (X_n) est de Cauchy, cela implique que la suite entière (X_n) converge vers X pour d. □

Proposition 50: 0

Si $(X_n)_{n\geq 1}$ et X sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $(X_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ t.q. $Y_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Exemple 15: Unicité de la limite

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, X et Y des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que :

1. Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $X_n \xrightarrow{p.s.} Y$ alors $X = Y$ p.s.
2. Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ alors $X = Y$ p.s.
3. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ et $X_n \xrightarrow{L^p} Y$ alors $X = Y$ p.s.

Proposition 51: 1

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ t.q. il existe une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ t.q. $X_n \xrightarrow{L^p} X$ et t.q. il existe $r \in]p, +\infty]$ t.q. la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans L^r (i.e. $\sup_n \mathbb{E}[\|X_n\|^r] < +\infty$). Alors $\forall p' \in [p, r[$ on a $X_n \xrightarrow{L^{p'}} X$.

Proposition 52: 2

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ $(p \geq 1)$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Preuve de (2). Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $\mathbb{E}[\|X_n - X\| \wedge 1] = d(X_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. d'après le TCD car $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \implies \|X_n - X\| \wedge 1 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

- $\forall n \geq 1, \|X_n - X\| \wedge 1 \leq 1$.

donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. □

Preuve de la proposition (1). D'après la Proposition 50, $(X_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ qui converge presque sûrement vers X. $\forall p' \in [p, r[$ on a que...

Remarque

Rappel : Dans les espaces de proba, $\forall p' \geq p \geq 1$, l'application $p \mapsto \|X\|_{L^p} = (\mathbb{E}[\|X\|^p])^{1/p}$ est croissante (par l'inégalité de Jensen).

Soit $p' \in [p, r[$. $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|X_n - X\|^{p'}] &= \mathbb{E}[\|X_n - X\|^{p'} \mathbb{1}_{\|X_n - X\| \leq \epsilon}] + \mathbb{E}[\|X_n - X\|^{p'} \mathbb{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}] \\ &\leq \epsilon^{p'} + \mathbb{E}[\|X_n - X\|^{p'} \mathbb{1}_{\|X_n - X\| > \epsilon}]\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder avec $q = r/p'$ et r_H (indice Hölder) t.q. $1/q + 1/r_H = 1 \implies r_H = \frac{r}{r - p'}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|X_n - X\|^{p'} \mathbb{1}_{\dots}] &\leq \left(\mathbb{E}[(\|X_n - X\|^{p'})^{r/p'}]\right)^{p'/r} (\mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\dots})^{r_H}])^{1/r_H} \\ &= (\mathbb{E}[\|X_n - X\|^r])^{p'/r} (\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon))^{(r-p')/r}\end{aligned}$$

La suite (X_n) est bornée dans L^r, et $X \in L^r$ aussi (par Fatou sur la sous-suite p.s.), donc $\|X_n - X\|_r$ est borné par une constante C.

$$\mathbb{E}[\|X_n - X\|^{p'}] \leq \epsilon^{p'} + (C)^{p'} (\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon))^{(r-p')/r}$$

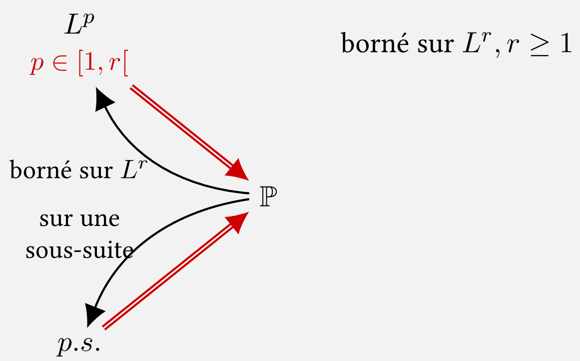
Puisque $X_n \xrightarrow{L^p} X$, on a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ (par Proposition 52). Donc $\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \epsilon) \to 0$.

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[\|X_n - X\|^{p'}] \leq \epsilon^{p'}$$

Ceci est vrai $\forall \epsilon > 0$, donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\|X_n - X\|^{p'}] = 0$. $\square$

Remarque

Schéma des convergences :



Exemple 16: Contre-exemples

1. Trouver un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 1}$ et X t.q. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et on n'a pas $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.
2. Trouver $(Y_n)_{n\geq 1}$ et Y t.q. $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ et $Y_n \xrightarrow{L^p} Y$ et on n'a pas $Y_n \xrightarrow{L^q} Y$ (pour $q > p$).

III. Loi des grands nombres

Théorème 4: Loi faible des grands nombres (WLLN)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles, indépendantes, de même loi t.q. $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$. On a :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathbb{E}[X_1]$$

Démonstration. Calculons l'espérance et la variance de la moyenne empirique $\bar{X}_n$.

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k]$$

Comme les X_k sont de même loi, $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}[X_1]$ pour tout k.

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{n}(n\mathbb{E}[X_1]) = \mathbb{E}[X_1]$$

Calculons la variance :

$$\mathbb{E}\left[|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]|^2\right] = \mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right]$$

Comme les X_k sont indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances.

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}[X_k]$$

Comme les X_k sont de même loi, $\mathrm{Var}[X_k] = \mathrm{Var}[X_1]$ (qui est finie car $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$).

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2}(n\mathrm{Var}[X_1]) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}[X_1] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On a donc $\mathbb{E}[|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]|^2] \to 0$, ce qui est la définition de $\bar{X}_n \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}[X_1]$. (Notons $S_n = \sum X_k$, on a $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}[X_1]$). □

Exemple 17: Exercice (Variantes WLLN)

Montrer que le résultat (WLLN en $\mathbb{P}$) est encore vrai si :

- On remplace "indépendantes" par "$\forall n \neq m, \mathrm{Cov}(X_n, X_m) = 0$" (variables décorrélées).
- On remplace "de même loi" par "$\forall n \geq 1, \mathbb{E}[X_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}[X_n] \leq C < +\infty$" (espérance constante et variances uniformément bornées).
- On remplace "de même loi de carré intégrable" par "il existe $C > 0, \forall n, \mathbb{E}[X_n^2] < C$".

Théorème 5: Loi forte des grands nombres (SLLN)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi (i.i.d.) telle que X_n est intégrable (i.e. $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$). On a :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$$

"Preuve" sous condition d'intégrabilité de X_1^2 ?

Démonstration. De même que dans la preuve de la loi faible, $\forall n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]|^2] = \frac{1}{n}\mathrm{Var}[X_1]$$

En notant $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on a $\bar{X}_n = S_n/n$. Regardons la sous-suite des carrés n^2 :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_{n^2}}{n^2} - \mathbb{E}[X_1]\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}[X_1]$$

Considérons la série de ces espérances :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_{n^2}}{n^2} - \mathbb{E}[X_1]\right)^2\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}[X_1] = \mathrm{Var}[X_1]\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$$

Par Fubini-Tonelli (ou TCM), on peut intervertir somme et espérance :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{S_{n^2}}{n^2} - \mathbb{E}[X_1]\right)^2\right] < +\infty$$

On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{S_{n^2}}{n^2} - \mathbb{E}[X_1]\right)^2 < +\infty$ p.s. Le terme général d'une série convergente tend vers 0, donc :

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$$

Ceci prouve la convergence p.s. pour la sous-suite n^2. Il faut maintenant l'étendre à n.

On suppose d'abord que les v.a. X_n sont positives ($X_n \geq 0$). $\forall n \geq 1$, il existe un unique entier $k \geq 1$ t.q. $k^2 \leq n < (k+1)^2$.

donc $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}[X_1]$

donc :

$$\frac{S_{k^2}}{(k+1)^2} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_{(k+1)^2}}{k^2}$$

$$\underbrace{\frac{S_{k^2}}{k^2}}_{\substack{\downarrow p.s. \\ \mathbb{E}[X_1]}} \cdot \underbrace{\frac{k^2}{(k+1)^2}}_{\to 1} \leq \frac{S_n}{n} \leq \underbrace{\frac{S_{(k+1)^2}}{(k+1)^2}}_{\substack{\downarrow p.s. \\ \mathbb{E}[X_1]}} \cdot \underbrace{\frac{(k+1)^2}{k^2}}_{\to 1}$$

donc $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$

donc $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$

Dans le cas général on a $X_k = X_k^+ - X_k^-$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^+ \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_1^+]$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^- \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_1^-]$ donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^+ - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^- \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1^+] - \mathbb{E}[X_1^-] = \mathbb{E}[X_1^+ - X_1^-] = \mathbb{E}[X_1]\end{aligned}$$

□