Polycopié de Calcul Différentiel et Équations Différentielles L3 MIDO

Cours de Borris Haspot
Retranscrit par Bastien Marbaud et Victor Barbera
Compilé par Samuel Lelouch avec Gemini

3 décembre 2025

Table des matières

Calcul Différentiel

I. Théorème d'inversion locale

Définition 1: C1-difféomorphisme

Soient U un ouvert de E, V un ouvert de F. On dit que $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme lorsque :

- f bijective
- $f \in \mathcal{C}^1$ et $f^{-1} \in \mathcal{C}^1$

Remarque

La notion de difféomorphisme induit l'utilisation d'ouverts (naturel si on veut vérifier que l'application est différentiable).

Si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V :

$$\forall x \in U, f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in V, f(f^{-1}(y)) = y$$

Par dérivation en chaîne :

$$df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = id_E \quad \text{et} \quad df(f^{-1}(y)) \circ df^{-1}(y) = id_F$$

$df(x)$ et $df^{-1}(y)$ sont donc des applications linéaires inversibles, avec $df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ et $df^{-1}(y) \in \mathcal{L}(F, E)$.

$(df(x))^{-1} = df^{-1}(y) = df^{-1}(f(x))$
$\implies \dim E = \dim F$.

Théorème 1: Théorème d'inversion locale

Soient U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $df(x_0)$ est inversible.

Alors il existe un ouvert U' de x_0 ($U' \subset U$) et V' un ouvert de $y_0 = f(x_0)$ tels que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U' sur V'.

De plus, $\forall y \in V', df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1}$.

Preuve :

On pose $\Phi : U \times F \to F$

$$(x, y) \mapsto y - f(x)$$

Φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ car f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Calculons la différentielle partielle de Φ par rapport à x au point (x_0, y_0) :

$$d\Phi_x(x_0, y_0) : E \to F$$

$$v \mapsto d\Phi_x(x_0, y_0)(v) = -df(x_0)(v)$$

On a $d\Phi_x(x_0, y_0) = -df(x_0)$.
C'est bien une application inversible (par hypothèse sur $df(x_0)$). On peut donc appliquer le Théorème des Fonctions Implicites.
Vérifions le point de base : $\Phi(x_0, y_0) = y_0 - f(x_0) = 0$ (car $f(x_0) = y_0$).

Ainsi, il existe :

- U_1 un ouvert de x_0 dans E (que nous nommerons U')
- V_1 un ouvert de y_0 dans F (que nous nommerons V')
- $\varphi : V' \to U'$ une application de classe $\mathcal{C}^1$

telle que :

$$\forall y \in V', \exists! x \in U' \text{ t.q. } \Phi(x, y) = 0, \text{ et cet } x \text{ est } x = \varphi(y)$$

Or, $\Phi(x, y) = 0 \iff f(x) = y$.
On a donc $f(x) = y \iff x = \varphi(y)$. Ceci signifie que f est bijective de U' sur V', et que son application inverse f^{-1} est φ.
On a $f^{-1} = \varphi$, et on sait que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Donc $f : U' \to V'$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U' sur V'. □

Définition 2: Difféomorphisme local

Une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$) de classe $\mathcal{C}^1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local si :
$\forall x \in \Omega$, il existe U_x un voisinage ouvert de x et V_x un voisinage ouvert de $f(x)$ tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Proposition 1: Caractérisation Difféomorphisme local

$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local si et seulement si $\forall x \in \Omega$, $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est inversible.

Preuve :

($\Rightarrow$) Si f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local. $\forall x \in \Omega$, $\exists U_x, V_x$ ouverts tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-diff. Donc $f^{-1}(f(x)) = x$ et $df^{-1}(f(x)) \circ df(x) = id_{\mathbb{R}^n}$. Donc $df(x)$ est inversible.

($\Leftarrow$) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible. D'après le Th. d'Inversion Locale, $\forall x$, $\exists U_x$ (voisinage de x) et V_x (voisinage de $f(x)$) tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-diff. C'est la définition d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local. □

Corollaire 1: Application ouverte

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local. L'application f est ouverte :
Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (avec $U \subset \Omega$), alors $f(U)$ est un ouvert.

Preuve :

Soit $y \in f(U)$. Il existe $x \in U$ tq $y = f(x)$. Comme f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local, $df(x)$ est inversible. Donc il existe par le Th. d'Inversion Locale un voisinage de x, U_x, et un voisinage de $f(x)$, V_x, tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-diff.
On choisit U_x assez petit pour que $U_x \subset U$. On en déduit que $f(U_x) = V_x$. On a $y = f(x) \in V_x$ (qui est ouvert) et $V_x = f(U_x) \subset f(U)$.
On a trouvé un voisinage ouvert de y (c'est V_x) inclus dans $f(U)$. On en déduit que $f(U)$ est ouvert.
□

Remarque

Un $\mathcal{C}^1$-diff. local n'est pas toujours injectif (globalement).
Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$

$$(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

f est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais pas injective : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$.
Calculons la Jacobienne $Jf(x, y)$:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(Jf(x, y)) &= (e^x \cos y)(e^x \cos y) - (-e^x \sin y)(e^x \sin y) \\ &= e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} > 0 \end{aligned}$$

Donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $df(x, y)$ est inversible, et f est un $\mathcal{C}^\infty$-diff. local.

Proposition 2: Difféo local + injectif

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-diff. local (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$). Si f est injective, alors f est un $\mathcal{C}^1$-diff. de Ω sur $f(\Omega)$.

Preuve :

$f : \Omega \to f(\Omega)$ avec f injective, donc f est bijective (par définition de $f(\Omega)$).
De plus, f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local, donc f est ouverte (d'après Cor. 1). Donc $f(\Omega)$ est un ouvert. f va bien d'un ouvert vers un autre ouvert.

- f est de classe $\mathcal{C}^1$.
- f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local donc $\forall x \in \Omega, \exists U_x$ (voisinage ouvert de x) et V_x (voisinage ouvert de $f(x)$) tq $f : U_x \to V_x$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

En notant $\tilde{f}_x : V_x \to U_x$ l'inverse de ce difféomorphisme, on a $\tilde{f}_x = f^{-1}|_{V_x}$. Cela signifie que f^{-1} est localement $\mathcal{C}^1$, donc f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $f(\Omega)$. $\square$

Corollaire 2: Cas 1D

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I sur $f(I)$.

Définition 3: Difféomorphisme Global

Soient Ω et Λ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.
On dit que $f : \Omega \to \Lambda$ est un $\mathcal{C}^1$-**difféomorphisme global** si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Λ.

(C'est-à-dire, f est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$, et son inverse $f^{-1} : \Lambda \to \Omega$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$).

Théorème 2: Théorème d'Inversion Globale

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f est **injective** et f est un $\mathcal{C}^1$-**difféomorphisme local** (i.e. $\det(Jf(x)) \neq 0$ pour tout

$x \in \Omega$),
Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de Ω sur l'ouvert $f(\Omega)$.

II. Théorème de Hadamard

Définition 4: Application propre

Soient X, Y des espaces métriques (de dim. finie). On dit que $f : X \to Y$ est une application **propre** si f est continue et si $\forall K \subset Y$ compact, $f^{-1}(K)$ est un compact.

Remarque

f continue $\not\Rightarrow$ f propre.
En effet, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée (ex : $\arctan$). Pour M assez grand, $K = [-M, M]$ est compact. $f^{-1}(K) = f^{-1}([-M, M]) = \mathbb{R}$, qui n'est pas compact.

Proposition 3: Caractérisation application propre (R^n)

Une application continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est propre
$\iff$
$\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

Preuve :

($\Leftarrow$) Supposons $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$. Ceci est équivalent à dire : $\forall M > 0, \exists N_M > 0$ tq $\forall \|x\| \geq N_M, \|f(x)\| \geq M$. Ou, par contraposée : si $f^{-1}(E)$ est borné dans $\mathbb{R}^n$, alors E est borné dans $\mathbb{R}^n$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. K est fermé et borné. $f^{-1}(K)$ est fermé (car f est continue et K est fermé). K est borné, donc $f^{-1}(K)$ est borné (par l'hypothèse).
$f^{-1}(K)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, donc $f^{-1}(K)$ est compact. f est donc propre.

($\Rightarrow$) Si f est propre. Supposons par l'absurde que $\|f(x)\|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.
La négation est : $\exists M > 0$ tq $\forall N > 0, \exists x_N$ tq $\|x_N\| \geq N$ et $\|f(x_N)\| \leq M$.
On peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\|x_n\| \to +\infty$ (donc (x_n) n'est pas bornée) et $f(x_n) \leq M$.
Soit $E = \{f(x_n), n \in \mathbb{N}\}$. E est borné. Soit $K = \bar{E}$ (la fermeture de E). K est fermé et borné, donc K est compact.
Par hypothèse, f est propre, donc $f^{-1}(K)$ est compact.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \in K$, donc $x_n \in f^{-1}(K)$. La suite (x_n) est une suite d'un compact, elle doit donc être bornée.
Ceci est une CONTRADICTION avec $\|x_n\| \to +\infty$. $\square$

Proposition 4: Propre implique fermée

Une application propre $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est **fermée** (i.e. si F est un fermé de X, $f(F)$ est un fermé de Y).

Preuve :

Soit F un fermé de X. Soit (y_n) une suite de $f(F)$ tq $y_n \to y$ avec $y \in Y$. Il faut mq $y \in f(F)$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f(F)$, donc $\exists x_n \in F$ tq $y_n = f(x_n)$.
Soit $K = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{y\}$. K est un compact de Y (car la suite converge). Comme f est propre, $f^{-1}(K)$ est un compact de X.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \in K \implies x_n \in f^{-1}(K)$.
(x_n) est une suite dans un compact $f^{-1}(K)$. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ tq $x_{\phi(n)} \to x^*$ avec $x^* \in f^{-1}(K)$ (car $f^{-1}(K)$ est compact, donc fermé).
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{\phi(n)} \in F$. Puisque F est fermé, la limite x^* est dans F. Donc $x^* \in F$.

Comme f est continue, $f(x_{\phi(n)}) \to f(x^*)$. Or, $f(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)}$ et (y_n) converge vers y, donc $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y.
Par unicité de la limite, $f(x^*) = y$.
Puisque $x^* \in F$, on a $y = f(x^*) \in f(F)$. Donc $f(F)$ est fermé. $\square$

Théorème 3: Théorème de Hadamard

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local. Si f est propre, alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
(Cela implique que f est bijective, donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$).

Proposition 5: Hadamard (avec injectivité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local. Si f est injective et propre, alors $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Preuve :

$f : \mathbb{R}^n \to f(\mathbb{R}^n)$ est injective et un $\mathcal{C}^1$-diff. local, donc (par Prop. 2) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $f(\mathbb{R}^n)$.
Il suffit donc de vérifier que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- $f(\mathbb{R}^n)$ est non-vide.
- $\mathbb{R}^n$ est un ouvert. f est un $\mathcal{C}^1$-diff. local, donc f est ouverte. Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert.
- $\mathbb{R}^n$ est un fermé. f est propre, donc f est fermée (par Prop. 4). Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé.

$f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-ensemble non-vide, ouvert et fermé de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe, $\implies$ $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. $\square$

III. Un peu de géométrie différentielle

Définition 5: Hypersurface régulière

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$. On dit que $\Sigma = f^{-1}(\{0\})$ est une **hypersurface régulière** de classe $\mathcal{C}^1$ si :

1. Σ est non-vide.
2. $\forall a \in \Sigma, df(a) \neq 0$ (i.e. $f'(a) \neq 0$).

$f(x) = 0$ est alors une équation cartésienne de l'hypersurface Σ.

Si $a \in \Sigma$, l'hyperplan affine de vecteur normal $\nabla f(a)$ et passant par a est appelé **hyperplan tangent** à Σ en a.

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x - a, \nabla f(a) \rangle = 0\}$$

(où $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^T \in \mathbb{R}^n$)

Proposition 6: Hyperplan est hypersurface

Tout hyperplan de $\mathbb{R}^n$ est une hypersurface.

Preuve :

Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. H est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - 1$.
Soit $(a_1, ..., a_{n-1})$ une base de H. $\exists b \in \mathbb{R}^n$ tq $(a_1, ..., a_{n-1}, b)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
On pose l l'application linéaire (la forme linéaire) tq $l(a_i) = 0$ (pour $i = 1..n - 1$) et $l(b) = 1$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i + \lambda_n b$. $l(x) = \lambda_n l(b) = \lambda_n$.
On a construit la forme linéaire $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tq $Ker(l) = H$.
De plus, l est une application linéaire en dimension finie, elle est donc continue et $\mathcal{C}^\infty$. l est de classe $\mathcal{C}^1$.
$\forall x \in \mathbb{R}^n, dl(x) = l$. $H = l^{-1}(\{0\}) = Ker(l)$. $\forall x \in H, dl(x) = l \neq 0$ (car l est non nulle, $l(b) = 1$).
Donc H est une hypersurface. $\square$

Définitions (Courbes et Surfaces)

Si $n = 2$, on dit que Σ est une **courbe régulière** de $\mathbb{R}^2$.
Si $n = 3$, on dit que Σ est une **surface régulière** de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 7: Paramétrage local (Chartes)

Soit Σ une hypersurface régulière de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^n$, soit $a \in \Sigma$.
Alors il existe V un voisinage de a ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et U un voisinage de 0 ouvert dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et une application $\varphi : U \to \Sigma \cap V$ de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, tq $\varphi(0) = a$ et vérifiant $rg(d\varphi(h')) = n - 1 \quad \forall h' \in U$.

Remarque

Soit $h \in \mathbb{R}^n$, $h = (h', h_n)$ avec $h' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $h_n \in \mathbb{R}$. $\varphi : U \to \Sigma \cap V$ est bijective. $\Sigma \cap V$ est alors, d'une certaine manière, un objet de dimension $n - 1$ car U est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Preuve :

Soit Σ une hypersurface régulière de classe $\mathcal{C}^1$. $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$) de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\Sigma = f^{-1}(\{0\})$.
On pose $g : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ (où $\tilde{\Omega} = \{h \in \mathbb{R}^n | a + h \in \Omega\}$ est un ouvert) par :

$$g(h) \mapsto f(a+h)$$

g est $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial g}{\partial h_n}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.
On sait que $df(a) \neq 0$ (car $a \in \Sigma$ et Σ est régulière). $\implies \exists p \in \{1, ..., n\}$ tq $\frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$.
Sans perte de généralité, supposons $p = n$. (Si $p \neq n$, on permute les coordonnées x_p et x_n avec un difféomorphisme $\tilde{f}$, et on a $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \neq 0$).
On a $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$. On applique le Th. des Fonctions Implicites à g au point 0. On a $g(0) = f(a) = 0$.
On regarde la différentielle partielle par rapport à la n-ième variable : $dg_{h_n}(0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $v \mapsto \frac{\partial g}{\partial h_n}(0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot v$ Cette application est inversible car $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$.
Ainsi, il existe :

- U un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ (voisinage de $0' \in \mathbb{R}^{n-1}$)
- V_n un ouvert de $\mathbb{R}$ (voisinage de $0 \in \mathbb{R}$)
- $\psi : U \to V_n$ (implicite) tq $\forall h' \in U, \exists! h_n \in V_n$
$$g(h', h_n) = 0 \iff h_n = \psi(h')$$

$\forall (h', h_n) \in U \times V_n$, on a $f(a + (h', h_n)) = 0 \iff h_n = \psi(h')$.
Posons $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ par $h' \mapsto a + (h', \psi(h'))$. (On pose $V = (a + U \times V_n)$ qui est un voisinage ouvert de a).
φ est $\mathcal{C}^1$ car ψ l'est. $\varphi(0) = a + (0, \psi(0)) = a$ (car $g(0,0) = 0 \implies \psi(0) = 0$).
Pour $y \in \Sigma \cap V$, $y = a + (h', h_n)$ avec $(h', h_n) \in U \times V_n$ et $f(y) = 0$. $f(y) = 0 \implies g(h', h_n) = 0 \implies h_n = \psi(h')$. D'où $y = a + (h', \psi(h')) = \varphi(h')$. Donc φ est surjective sur $\Sigma \cap V$.
De plus, $\varphi(h'_1) = \varphi(h'_2) \implies a + (h'_1, \psi(h'_1)) = a + (h'_2, \psi(h'_2)) \implies h'_1 = h'_2$. Donc φ est injective.

Donc $\varphi : U \to \Sigma \cap V$ est bijective.
Considérons la Jacobienne de φ (pour déterminer le rang) : $h' \in U, J\varphi(h') = d\varphi(h') \in \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R})$.

$$\varphi(h') = \begin{pmatrix} a_1 + h_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} + h_{n-1} \\ a_n + \psi(h') \end{pmatrix}$$

La i-ème ligne de $J\varphi(h')$ est $\frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j}(h')$. Si $i \in \{1, ..., n-1\}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial h_j} = \delta_{ij}$ (Kronecker). La n-ième ligne est $(\frac{\partial \psi}{\partial h_1}(h'), ..., \frac{\partial \psi}{\partial h_{n-1}}(h'))$.

$$J\varphi(h') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial h_1} & \frac{\partial \psi}{\partial h_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Cette matrice (n lignes, n-1 colonnes) contient la matrice identité I_{n-1}. Elle est donc de rang $n-1$.
$\implies rg(d\varphi(h')) = n - 1 \quad \forall h' \in U$. □

Remarque

On dit que $(h_1, ..., h_{n-1})$ constitue un système de coordonnées locales relatives au paramétrage de φ.

Proposition 8: Hyperplan tangent (paramétré)

Soit Σ une hypersurface régulière, $a \in \Sigma$ et φ un paramétrage de Σ au voisinage de a tq $\varphi(0) = a$. Alors l'hyperplan tangent à Σ en a (défini par f) coïncide avec l'hyperplan H passant par a et dirigé par l'image de $d\varphi(0)$.

$$H = a + Im(d\varphi(0)) = a + Vect\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial h_1}(0), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial h_{n-1}}(0)\right\}$$

Preuve :

On a $f(\varphi(h')) = 0 \quad \forall h' \in U$.
En différentiant cette composition en $h' = 0$:

$$df(\varphi(0)) \circ d\varphi(0) = 0$$

Puisque $\varphi(0) = a$, on a $df(a) \circ d\varphi(0) = 0$.
Cela signifie que $\forall v \in \mathbb{R}^{n-1}$, $df(a)(d\varphi(0)(v)) = 0$.

$$\implies Im(d\varphi(0)) \subset Ker(df(a))$$

On regarde les dimensions : $d\varphi(0) : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. $rg(d\varphi(0)) = n - 1$ (vu dans la preuve précédente). $\implies \dim(Im(d\varphi(0))) = n - 1$.
$df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire. Elle est non nulle (car $a \in \Sigma$ hypersurface régulière, $df(a) \neq 0$). Par le théorème du rang, $\dim(Ker(df(a))) = \dim(\mathbb{R}^n) - rg(df(a)) = n - 1$.

Puisque $\dim(Im(d\varphi(0))) = \dim(Ker(df(a)))$ et que l'un est inclus dans l'autre :

$$Im(d\varphi(0)) = Ker(df(a))$$

L'hyperplan tangent H (défini par f) est l'hyperplan affine passant par a et de direction $Ker(df(a))$.
$H = a + Ker(df(a)) = a + Im(d\varphi(0))$.

(Transcription des images)

$$Ker(df(0)) = \{x \in \mathbb{R}^n, df(0)(x) = 0\}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot x_i = 0\right\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, \nabla f(0)\rangle = 0\}$$

$\square$

Équations Différentielles

I. Équations Différentielles

(Partie II du cours)

1 Introduction et Problème de Cauchy simple

Exemple 1

(E) : $x'(t) = ax(t)$ est une équation différentielle. L'inconnue est un couple (J, x) où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J. On a un ensemble de solutions de (E) de la forme $x(t) = \lambda e^{at}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (C'est-à-dire de la forme $(J = \mathbb{R}, x(t) = \lambda e^{at})$).
Comment trouver les solutions ? On cherche une fonction x telle que $x'(t) - ax(t) = 0$. On multiplie par e^{-at} :

$$(x(t)e^{-at})' = x'(t)e^{-at} - ae^{-at}x(t) = (x'(t) - ax(t))e^{-at} = 0$$

Sur un intervalle ouvert, on en déduit que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad x(t)e^{-at} = \lambda \implies x(t) = \lambda e^{at}$$

On a donc : $\forall J$ intervalle ouvert, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(J, x(t) = \lambda e^{at})$ est une solution.

1.1 Problème de l'Unicité et Problème de Cauchy

Questions : Comment avoir une unique solution au problème (E) ?

a) Il est pertinent de considérer une solution dite **"maximale"** sur un intervalle J (cela signifie qu'on ne peut pas étendre la solution sur un intervalle plus grand au sens de l'inclusion stricte).
b) (E) a une infinité de solutions maximales $(\mathbb{R}, \lambda e^{at})$ paramétrées par $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) Si on veut définir une unique solution de (E), on doit ajouter une **condition initiale** de type $x(t_0) = x_0$.

Définition 6: Problème de Cauchy (simple)

On appelle **Problème de Cauchy** le système (E') :

$$(E') \qquad \begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.
(E') admet une unique solution maximale : $x(t) = \lambda e^{at}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$. On détermine λ avec la condition initiale : $x(t_0) = \lambda e^{at_0} = x_0 \implies \lambda = x_0 e^{-at_0}$. La solution unique est $x(t) = (x_0 e^{-at_0})e^{at} = x_0 e^{a(t-t_0)}$.

Notations

$\dot{x}(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$ (différentes manières d'écrire une dérivée).

2 Équation différentielle du premier ordre

Définition 7: Équation différentielle du premier ordre

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$. On considère (1) :

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t) \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

- (1) est dite du **premier ordre** parce que seules des dérivées d'ordre 1 apparaissent.
- (1) est une équation du premier ordre **explicite**.
- Par ailleurs, les équations de la forme $G(t, x'(t), x(t)) = 0$ sont dites du premier ordre **implicites**.
- (L'équation (1) est **autonome** si F ne dépend pas du temps t (i.e. $F(t, x) = F(x)$). Dans le cas contraire, l'équation est **non-autonome**.

Définition 8: Solution d'une EDO

Une **solution** de (1) est décrite par un couple (J, X), où J est un intervalle ouvert et $X : J \to \mathbb{R}^d$ est une fonction dérivable sur J, telle que :

- $\forall t \in J, \quad (t, X(t)) \in \Omega$
- $\forall t \in J, \quad X'(t) = F(t, X(t))$

avec $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$. La solution est le couple (J, X).

Exemple 2

Pour $x'(t) = ax(t)$, on a $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(t, x) \mapsto ax$.

Remarque

Si on étendait la définition à des intervalles non nécessairement ouverts (ex : $J = [a, b]$), on pourrait définir $X'(b)$ comme :

$$X'(b) = \lim_{t \to b^-} \frac{X(t) - X(b)}{t - b}$$

3 Régularité des Solutions

Proposition 9: Régularité de la solution

Si $F \in \mathcal{C}^n(\Omega)$, alors si (J, X) est une solution de (1), on a $X \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$.

Preuve :

Soit (J, X) une solution de (1). Puisque X est dérivable sur J, X est continue sur J, donc $X \in \mathcal{C}^0(J)$.
Supposons par l'absurde que $X \notin \mathcal{C}^{n+1}(J)$. Soit k la régularité maximale de X, c'est-à-dire $X \in \mathcal{C}^k(J)$ avec $k < n + 1$. (Puisque $X \in \mathcal{C}^0(J)$, ce k existe et $k \geq 0$).
On a $X'(t) = F(t, X(t))$. L'application $t \mapsto (t, X(t))$ est de classe $\mathcal{C}^k$. On sait que $F \in \mathcal{C}^n(\Omega)$. Puisque $k < n + 1$ (et k, n sont des entiers), on a $k \leq n$. Donc F est a fortiori de classe $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Par composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$, l'application $t \mapsto F(t, X(t))$ est $\mathcal{C}^k(J)$. On en déduit donc que $X' \in \mathcal{C}^k(J)$.
Mais si $X' \in \mathcal{C}^k(J)$, alors $X \in \mathcal{C}^{k+1}(J)$. Ceci contredit notre hypothèse que k était la régularité maximale de X. L'hypothèse de départ est donc fausse. On a $X \in \mathcal{C}^{n+1}(J)$. □

Remarque

Si $F \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, alors $X \in \mathcal{C}^1(J)$. (X est mieux que dérivable !).

4 Théorèmes d'Existence et d'Unicité

Définition 9: Problème de Cauchy (Général)

Le système (2) :

$$(2) \qquad \begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, x_0) \in \Omega$ est appelé **Problème de Cauchy**.

Définition 10: Solution Maximale

Une solution (J, X) de (1) est dite **maximale** si elle ne peut pas être étendue sur un intervalle plus grand au sens de l'inclusion stricte. Autrement dit, il n'existe pas de couple (J', Y) solution de (1) tel que $J \subsetneq J'$ et $Y|_J = X$.

On se pose deux questions fondamentales :

- **Question 1 :** Pour quelle régularité de F le problème de Cauchy (2) a-t-il **au moins une** solution maximale ?
- **Question 2 :** Pour quelle régularité de F le problème de Cauchy (2) a-t-il une **unique** solution maximale ?

Exemple 3: Non-existence (si F n'est pas continue)

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Considérons le problème de Cauchy (C) : $\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$. Montrons que (C) n'a pas de solutions.

Démonstration par l'absurde :

Supposons par l'absurde que (C) a une solution (J, X) avec $0 \in J$.

1. X doit être dérivable en 0. On a $X'(0) = F(X(0)) = F(0) = 1$.
2. Par définition de la dérivée, $X(t) = X(0) + X'(0) \cdot t + o(t) = t + o(t)$.
3. Cela implique que dans un voisinage V de 0, pour $t \in V \cap J \cap]0, +\infty[$ (c-à-d, $t > 0$ et proche de 0), on a $X(t) > 0$.
4. Pour ces mêmes t, puisque $X(t) > 0$, l'équation différentielle donne $X'(t) = F(X(t)) = -1$.
5. Par le Théorème des Accroissements Finis sur $[0, t]$ (car X est continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$), il existe $c \in]0, t[$ tel que :

$$\frac{X(t) - X(0)}{t - 0} = X'(c)$$

6. Puisque $c \in]0, t[$, on a $c > 0$ et $X(c) > 0$ (si t est assez petit). Donc $X'(c) = -1$. On a $\frac{X(t)-0}{t} = -1$, ce qui donne $X(t) = -t$.
7. **Contradiction.** On a $X(t) = -t < 0$ (car $t > 0$), mais l'étape 3 nous donnait $X(t) > 0$.

L'hypothèse qu'une solution existe est donc fausse. $\square$

Théorème 4: Peano-Arzelà (Admis)

(Réponse à la Question 1) Supposons que F est **continue** sur Ω. Alors le problème de Cauchy (2) a **au moins une** solution maximale (J, X). *Théorème admis.*

Exemple 4: Non-unicité (si F est continue mais non-Lipschitzienne)

Considérons le problème : $\begin{cases} x'(t) = 3(x(t))^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$. Ici, $F(x) = 3x^{2/3}$. F est continue sur $\mathbb{R}$ (par composition de fonctions continues).
F n'est pas localement Lipschitzienne en 0.

Démonstration :

Supposons par l'absurde que F est localement Lipschitzienne. Alors il existerait $C > 0$ et un voisinage de 0 tels que $\forall x$ dans ce voisinage :

$$|F(x) - F(0)| \leq C|x - 0|$$

$$|3x^{2/3} - 0| \leq C|x| \implies 3|x|^{2/3} \leq C|x|$$

Pour $x \neq 0$, $3 \leq C|x|^{1/3}$. En faisant tendre $x \to 0$, on obtient $3 \leq 0$, ce qui est absurde. (La note du cours utilise $\frac{|F(x)-F(0)|}{|x-0|} = \frac{3x^{2/3}}{x} = \frac{3}{x^{1/3}}$ qui tend vers l'infini en 0, donc n'est pas bornée). $\square$

Ce problème admet (au moins) deux solutions maximales :

- **Solution 1 :** $X_1(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Vérification :* $X_1'(t) = 0$. $3(X_1(t))^{2/3} = 3(0)^{2/3} = 0$. $X_1(0) = 0$. C'est une solution.
- **Solution 2 :** $X_2(t) = t^3$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. *Vérification :* $X_2'(t) = 3t^2$. $3(X_2(t))^{2/3} = 3((t^3))^{2/3} = 3(t^2) = 3t^2$. $X_2(0) = 0^3 = 0$. C'est une solution.

On a $(\mathbb{R}, X_1)$ et $(\mathbb{R}, X_2)$ qui sont deux solutions maximales distinctes pour le même problème de Cauchy.

Théorème 5: Cauchy-Lipschitz (Version simple)

(Réponse à la Question 2)

1. Si F est **Lipschitzienne** sur Ω, alors le problème de Cauchy (2) admet une **unique solution maximale** (J, X).
2. De plus, toutes les solutions de (1) (non-maximales) sont des restrictions de l'unique solution maximale.

Corollaire 3: Unicité locale

Supposons F Lipschitzienne sur Ω. Soient (J, X) et (J', Y) deux solutions de (1). S'il existe $t_0 \in$

$J \cap J'$ tel que $X(t_0) = Y(t_0)$, alors :

$$\forall t \in J \cap J', \quad X(t) = Y(t)$$

Preuve :

Considérons l'intervalle $I = J \cap J'$, qui est un intervalle ouvert contenant t_0. Les deux couples $(I, X|_I)$ et $(I, Y|_I)$ sont solutions du même problème de Cauchy (2) :

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(t_0) = X(t_0)(= Y(t_0)) \end{cases} \quad \text{sur } I$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème admet une unique solution maximale (J_m, Z). Par définition de la solution maximale, les solutions $(I, X|_I)$ et $(I, Y|_I)$ doivent être des restrictions de (J_m, Z). Cela signifie que $\forall t \in I$, $X(t) = Z(t)$ et $Y(t) = Z(t)$. Par conséquent, $X(t) = Y(t)$ pour tout $t \in J \cap J'$. □

5 Corollaire de Cauchy-Lipschitz (Non-croisement)

Corollaire 4: Non-croisement des solutions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne. Soient (J, x) et (J', y) deux solutions maximales du problème (E) $y'(t) = f(t, y(t))$.

Si il existe $t_0 \in J \cap J'$ tel que $x(t_0) < y(t_0)$,
Alors : $\forall t \in J \cap J'$, $x(t) < y(t)$.

Preuve :

Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1 \in J \cap J'$ tel que $x(t_1) > y(t_1)$. (Nous avons $x(t_0) < y(t_0)$ et $x(t_1) > y(t_1)$).

Considérons la fonction $z(t) = x(t) - y(t)$. z est continue sur l'intervalle $I = [\min(t_0, t_1), \max(t_0, t_1)] \subset J \cap J'$. On a $z(t_0) = x(t_0) - y(t_0) < 0$ et $z(t_1) = x(t_1) - y(t_1) > 0$.

Par le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) appliqué à z, il existe $t_2 \in I$ tel que $z(t_2) = 0$, c'est-à-dire $x(t_2) = y(t_2)$.

Maintenant, (J, x) et (J', y) sont toutes deux des solutions maximales du **même** problème de Cauchy :

$$(E') \quad \begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(t_2) = x(t_2) \end{cases}$$

(puisque $y(t_2) = x(t_2)$).

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité de la solution maximale), on en déduit que $J = J'$ et $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in J$. Ceci est absurde, car on a supposé $x(t_0) < y(t_0)$. □

Question : Dans quel cadre les solutions peuvent-elles cesser d'exister ?

Exemple 5

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} m'(t) = m(t)^2 \\ m(0) = 0 \end{cases}$$

Ici, $f(t, m) = m^2$. f est $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^1$ et Lipschitzienne sur tout compact). Par Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale. La fonction $m(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$ est une solution évidente. Par unicité, c'est l'unique solution maximale. L'intervalle de définition est $J = \mathbb{R}$.

Exemple 6: Phénomène d'explosion

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

En séparant les variables (quand $x \neq 0$) : $\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 1 \implies \left(-\frac{1}{x(t)}\right)' = 1$
En intégrant : $-\frac{1}{x(t)} = t + C$.
Avec $x(0) = 1$, on a $-\frac{1}{1} = 0 + C \implies C = -1$.
Donc $-\frac{1}{x(t)} = t - 1$, ce qui donne $x(t) = \frac{1}{1-t}$.

On vérifie : $x'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ et $x(t)^2 = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2$. La solution est le couple (J, x) avec $J =]-\infty, 1[$ et $x(t) = \frac{1}{1-t}$.

On observe que (J, x) est une solution maximale. En effet, supposons par l'absurde qu'on puisse l'étendre en une solution $(\tilde{J}, \tilde{x})$ avec $J \subsetneq \tilde{J}$ (donc $1 \in \tilde{J}$). Alors $\tilde{x}$ devrait être dérivable sur $\tilde{J}$, et donc continue en $t = 1$. Cela impliquerait que $\lim_{t \to 1^-} \tilde{x}(t)$ existe et est finie. Or, $\lim_{t \to 1^-} x(t) = \lim_{t \to 1^-} \frac{1}{1-t} = +\infty$. Ceci est une contradiction.

Conclusion : Si la solution n'est pas "globale" (définie sur I en entier), on observe un phénomène d'explosion : $|x(t)| \to +\infty$ lorsque t tend vers la borne de J.

6 Convergence vers la frontière et sortie des compacts

Définition 11: Valeur d'adhérence

Soit $\gamma : J \to \mathbb{R}^d$ une fonction, et $t^* = \sup J \in \bar{\mathbb{R}}$.
On dit que $y^* \in \mathbb{R}^d$ est une **valeur d'adhérence** de γ lorsque $t \to t^*$ s'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de J telle que $t_n \to t^*$ et $\gamma(t_n) \to y^*$.

(Formellement : $\forall V$ voisinage ouvert de y^*, $\forall W$ voisinage de t^*, $W \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$).

Remarque

La fermeture de J est considérée dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 12: Convergence vers la frontière

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1 + d$), J un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\gamma : J \to \Omega$. Soit $t^* = \sup J$ (ou $\inf J$). On dit que $\gamma(t)$ **converge vers la frontière de** Ω (notée $Fr(\Omega)$ ou $Bd(\Omega)$) lorsque $t \to t^*$, si γ n'admet **aucune valeur d'adhérence dans** Ω.
On note : $\gamma(t) \underset{t \to t^*}{\longrightarrow} Bd(\Omega)$.

Remarque

$\gamma(t) \to Bd(\Omega)$ est équivalent à dire que γ n'a pas de valeur d'adhérence (lorsque $t \to t^*$) ou que ses valeurs d'adhérence sont dans $Bd(\Omega)$.

Proposition 10: Théorème de sortie des compacts

Soit $\gamma : J \to \Omega$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\gamma(t) \underset{t \to t^*}{\longrightarrow} Fr(\Omega)$.
2. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un voisinage V de t^* tel que $\forall t \in V \cap J$, $\gamma(t) \notin K$.

Preuve :

$(1 \implies 2)$: Supposons $\gamma(t) \to Fr(\Omega)$. Supposons par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que : $\forall V$ voisinage de t^*, $\exists t \in V \cap J$ tel que $\gamma(t) \in K$. On peut alors construire une suite (t_n) dans J telle que $t_n \to t^*$ et $\gamma(t_n) \in K$. K est compact, donc on peut extraire une sous-suite $(\gamma(t_{k(n)}))$ qui converge vers $y^* \in K$. Puisque $t_{k(n)} \to t^*$ et $\gamma(t_{k(n)}) \to y^*$, y^* est une valeur d'adhérence de γ. Comme $K \subset \Omega$, $y^* \in \Omega$. Ceci contredit l'hypothèse (1) que γ n'a pas de valeur d'adhérence dans Ω. Absurde.

$(2 \implies 1)$: Supposons que γ "sort de tout compact". Supposons par l'absurde que γ ne converge pas vers $Fr(\Omega)$. Cela signifie (par définition) que γ admet (au moins) une valeur d'adhérence $y^* \in \Omega$. Par définition d'une valeur d'adhérence, il existe une suite $(t_n) \to t^*$ telle que $\gamma(t_n) \to y^*$. Puisque Ω est un ouvert et $y^* \in \Omega$, on peut choisir un $\epsilon > 0$ tel que le compact $K = \bar{B}(y^*, \epsilon)$ soit inclus dans Ω. Puisque $\gamma(t_n) \to y^*$, pour n assez grand, $\gamma(t_n) \in K$. Cela signifie que pour tout voisinage V de t^* (contenant les t_n pour n grand), il existe des $t_n \in V \cap J$ tels que $\gamma(t_n) \in K$. Ceci contredit l'hypothèse (2). Absurde. $\square$

Remarque

Cas d'un domaine "tube" $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$ (où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert). Soit $\gamma(t) = (t, x(t))$ une solution.
Alors $\gamma(t) \underset{t \to t^*}{\longrightarrow} Fr(\Omega)$ est équivalent à :

$$t^* \in \{\inf I, \sup I\} \quad \text{OU} \quad \|x(t)\| \underset{t \to t^*}{\longrightarrow} +\infty$$

Preuve de la remarque :

Nous devons prouver l'équivalence.

Sens 1 : ($\Leftarrow$)
Supposons que $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$ OU $\|x(t)\| \to +\infty$. Nous voulons montrer que $\gamma(t) \to Fr(\Omega)$, c'est-à-dire que $\gamma(t)$ n'a pas de valeur d'adhérence dans $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$.
Supposons par l'absurde qu'il existe une valeur d'adhérence $y^* \in \Omega$. Par définition, $y^* = (t_{adh}, x^*)$ avec $t_{adh} \in I$ et $x^* \in \mathbb{R}^d$. Il existerait alors une suite (t_n) dans J telle que $t_n \to t^*$ et $\gamma(t_n) =$

$(t_n, x(t_n)) \to y^*$.
Ceci implique $t_n \to t_{adh}$ et $x(t_n) \to x^*$. Par unicité de la limite, $t^* = t_{adh}$.
On a donc $t^* \in I$. Cela contredit l'hypothèse $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$ (car I est ouvert).
De plus, $x(t_n) \to x^*$ implique $\|x(t_n)\| \to \|x^*\|$, qui est une valeur finie. Cela contredit l'hypothèse $\|x(t)\| \to +\infty$.
Puisque les deux cas de l'hypothèse mènent à une contradiction, notre supposition (l'existence d'une valeur d'adhérence $y^* \in \Omega$) est fausse. Donc $\gamma(t) \to Fr(\Omega)$.

Sens 2 : (⇒)
Supposons que $\gamma(t) \to Fr(\Omega)$. Nous voulons montrer que $t^* \in \{\inf I, \sup I\}$ OU $\|x(t)\| \to +\infty$.
Supposons par l'absurde que la conclusion est fausse. La négation est : $t^* \notin \{\inf I, \sup I\}$ **ET** $\|x(t)\|$ ne tend pas vers $+\infty$.
$t^* \notin \{\inf I, \sup I\}$ signifie $t^* \in I$ (car I est ouvert).
$\|x(t)\|$ ne tend pas vers $+\infty$ (quand $t \to t^*$) signifie qu'il existe une suite (t_n) dans J telle que $t_n \to t^*$ et la suite $(\|x(t_n)\|)$ est bornée.
Puisque la suite $(x(t_n))$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x(t_{k(n)}))$ qui converge vers un $x^* \in \mathbb{R}^d$.
La suite $(t_{k(n)})$ converge toujours vers $t^* \in I$.
Par conséquent, la sous-suite $\gamma(t_{k(n)}) = (t_{k(n)}, x(t_{k(n)}))$ converge vers $y^* = (t^*, x^*)$.
Puisque $t^* \in I$ et $x^* \in \mathbb{R}^d$, on a $y^* \in I \times \mathbb{R}^d = \Omega$.
Cela signifie que $\gamma(t)$ admet une valeur d'adhérence y^* *dans* Ω. Ceci contredit notre hypothèse de départ ($\gamma(t) \to Fr(\Omega)$). L'hypothèse par l'absurde est donc fausse, et la conclusion est vraie. □

7 Caractérisation des solutions maximales

Théorème 6: Caractérisation des solutions maximales

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{1+d}$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne. Soit (J, x) une solution de $x'(t) = F(t, x(t))$.

Alors (J, x) est une solution maximale **si et seulement si** :

- $(t, x(t)) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} Fr(\Omega)$
  ET
- $(t, x(t)) \underset{t \to \inf J}{\longrightarrow} Fr(\Omega)$

Remarque

On a choisi F de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne pour assurer l'existence et l'unicité (via Cauchy-Lipschitz).
On pourrait simplement supposer F continue et appliquer le théorème de Peano-Arzelà (pour l'existence).

Théorème 7: Critère d'explosion (Domaine "Tube")

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$. Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne. Soit (J, x) une solution maximale de $x'(t) = F(t, x(t))$.

Alors on a :

- $\sup J = \sup I$ OU $\lim_{t \to \sup J} \|x(t)\| = +\infty$.
  ET

- $\inf J = \inf I$ OU $\lim_{t \to \inf J} \|x(t)\| = +\infty$.

(C'est le critère d'explosion en temps fini).

Remarque

Pour $x'(t) = x(t)$, on a $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc $I = \mathbb{R}$. Les solutions sont $x_\lambda(t) = \lambda e^t$. L'intervalle maximal est $J = \mathbb{R}$.
On a $\sup J = \sup I = +\infty$ et $\inf J = \inf I = -\infty$.
On vérifie : $\lim_{t \to \inf J} x_\lambda(t) = 0$ (pas d'explosion).
$\lim_{t \to \sup J} x_\lambda(t) = \pm\infty$ (explosion, si $\lambda \neq 0$).

Remarque

Pour $d = 1$.
$\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = +\infty \implies \lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$
Si x est solution du problème, $x'(t) = f(t, x(t))$
Alors x est continue et donc si $\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$
Alors :

- $\lim_{t \to \sup J} x(t) = +\infty$.
  OU
- $\lim_{t \to \sup J} x(t) = -\infty$.

(Par continuité de x)

Remarque

Pour $d \geq 2$. Soit $x(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \end{pmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
On a $\|x(t)\|^2 = (e^t \cos(t))^2 + (-e^t \sin(t))^2 = e^{2t}(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = e^{2t}$.
Donc $\|x(t)\| = e^t$.
On a bien $\lim_{t \to +\infty} \|x(t)\| = +\infty$.
Cependant, $x(t)$ (le vecteur) n'admet pas de limite en $+\infty$ (il spirale vers l'infini).

Théorème d'existence globale

Corollaire 5: Théorème d'existence globale

Soit $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$. Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne. Soit (J, x) une solution maximale du problème $x'(t) = F(t, x(t))$ avec $t_0 \in J$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Supposons que :

1. $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in [t_0, \sup J[$
   Alors $\sup J = \sup I$.
2. $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in]\inf J, t_0]$
   Alors $\inf J = \inf I$.
3. $\|x(t)\| \leq g(t) \quad \forall t \in J$
   Alors $J = I$ et donc (J, x) est une solution globale.

Preuve :

1°) Supposons par l'absurde que $\sup J < \sup I$.

Alors, par le critère d'explosion (Théorème 7), la solution maximale (J, x) vérifie :

$$\|x(t)\| \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} +\infty$$

Or, $\forall t \in [t_0, \sup J[$, on a $\|x(t)\| \leq g(t)$.
g est continue sur le compact $[t_0, \sup J] \subset I$.
g est donc bornée sur ce compact. Il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, \sup J]$, $g(t) \leq M$.
On en déduit que $\forall t \in [t_0, \sup J[$, $\|x(t)\| \leq M$.

Ceci est absurde car $\|x(t)\| \to +\infty$ quand $t \to \sup J$.
Donc, $\sup J = \sup I$.

2°) (La preuve pour $\inf J$ est identique).

3°) (Le point 3 est une conséquence directe de 1°) et 2°)). $\square$

8 Caractérisation des solutions maximales (Suite)

Preuve du Théorème 6 :

Nous devons prouver une équivalence.

Sens 1 : (⇒)
Supposons que $(t, x(t)) \to Fr(\Omega)$ (lorsque $t \to \sup J$ et $t \to \inf J$). Supposons par l'absurde que (J, x) n'est pas une solution maximale.
Cela implique qu'il existe une solution $(J', \tilde{x})$ de (E) telle que $J \subsetneq J'$ et $\forall t \in J, \tilde{x}(t) = x(t)$.

Supposons par exemple que $\sup J < \sup J'$. Puisque $\tilde{x}$ est solution sur J', $\tilde{x}$ est continue sur J'. Donc $\tilde{x}(t) \underset{t \to \sup J^-}{\longrightarrow} \tilde{x}(\sup J)$ (une valeur finie, car $\sup J \in J'$).
Comme $\tilde{x}(t) = x(t)$ sur J, on a $x(t) \underset{t \to \sup J^-}{\longrightarrow} \tilde{x}(\sup J)$.
Donc $\gamma(t) = (t, x(t)) \underset{t \to \sup J^-}{\longrightarrow} (\sup J, \tilde{x}(\sup J))$.
Le point $(\sup J, \tilde{x}(\sup J))$ est une valeur d'adhérence de $\gamma(t)$. Puisque $(J', \tilde{x})$ est une solution, on a $(\sup J, \tilde{x}(\sup J)) \in \Omega$.

Ceci est ABSURDE, car on a supposé que $\gamma(t) = (t, x(t))$ tendait vers la frontière de Ω (et ne devait donc avoir aucune valeur d'adhérence *dans* Ω).

Sens 2 : (⇐)
Supposons maintenant que (J, x) est une solution maximale de (E). Nous devons montrer que $(t, x(t)) \to Fr(\Omega)$ lorsque $t \to \sup J$ (la preuve est identique pour $\inf J$).

Supposons par l'absurde que $(t, x(t))$ ne tend pas vers $Fr(\Omega)$ lorsque $t \to \sup J$. Par définition (en prenant la négation), cela signifie qu'il existe (au moins) **une** valeur d'adhérence (β, x^*) *dans* Ω, où $\beta = \sup J$. (Note : si $\sup J = +\infty$, on ne peut pas avoir de valeur d'adhérence $(t, x(t)) \to (\beta, x^*) \in \Omega$ car β serait infini). Donc, on a nécessairement $\sup J = \beta < +\infty$.
Il existe une suite $(t_n) \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \to \sup J$ et $x(t_n) \to x^*$, avec $(\sup J, x^*) \in \Omega$.

D'après le théorème de Peano-Arzelà, le problème de Cauchy (C) suivant :

$$(C) \quad \begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(\sup J) = x^* \end{cases}$$

(qui a un sens car $(\sup J, x^*) \in \Omega$), a au moins une solution $\tilde{x}$ définie sur un intervalle ouvert $I_\epsilon =]\sup J - \epsilon, \sup J + \epsilon[$ (avec $\epsilon > 0$ petit).

Posons $X_1(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in J \\ \tilde{x}(t) & \text{si } t \in [\sup J, \sup J + \epsilon[\end{cases}$
Vérifions que $X_1(t)$ est une solution de (E) sur $J_1 =]\inf J, \sup J + \epsilon[$.
Puisque X est dérivable sur J et $\tilde{x}$ est dérivable sur $]\sup J, \sup J + \epsilon[$, il suffit de vérifier la continuité et la dérivabilité en $\sup J$.

Continuité en $\sup J$ **:**
On a $\lim_{t\to\sup J^+} X_1(t) = \lim_{t\to\sup J^+} \tilde{x}(t) = \tilde{x}(\sup J) = x^*$ (car $\tilde{x}$ est solution de (C)).
Le **Lemme 1** (prouvé ci-dessous) nous assure que $x(t) \to x^*$ lorsque $t \to \sup J^-$. Donc $\lim_{t\to\sup J^-} X_1(t) = \lim_{t\to\sup J^-} x(t) = x^*$.
Les limites à gauche et à droite coïncident, X_1 est continue en $\sup J$.

Dérivabilité en $\sup J$ **:**
X_1 est continue sur J_1 et dérivable sur $J_1 \setminus \{\sup J\}$.
Pour $h > 0$ (dérivée à droite) :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{X_1(\sup J + h) - X_1(\sup J)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\tilde{x}(\sup J + h) - x^*}{h}$$
$$= \tilde{x}'(\sup J) = F(\sup J, \tilde{x}(\sup J)) = F(\sup J, x^*)$$

Pour $h < 0$ (dérivée à gauche) :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{X_1(\sup J + h) - X_1(\sup J)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{x(\sup J + h) - x^*}{h}$$

On considère $Y_1(t)$ le prolongement par continuité de x sur $J \cup \{\sup J\}$, avec $Y_1(\sup J) = x^*$. On applique le Théorème des Accroissements Finis à Y_1 sur $[\sup J + h, \sup J]$. Il existe $c_h \in]\sup J + h, \sup J[$ tel que :

$$\frac{Y_1(\sup J) - Y_1(\sup J + h)}{-h} = Y_1'(c_h) = x'(c_h)$$
$$\frac{x^* - x(\sup J + h)}{-h} = \frac{x(\sup J + h) - x^*}{h} = F(c_h, x(c_h))$$

Quand $h \to 0^-$, on a $c_h \to \sup J^-$. Par continuité de F et de x (prouvée par le Lemme 1), on a :

$$\lim_{h\to 0^-} F(c_h, x(c_h)) = F(\sup J, x^*)$$

Les dérivées à gauche et à droite sont égales à $F(\sup J, x^*)$. Donc X_1 est dérivable en $\sup J$ et $X_1'(\sup J) = F(\sup J, X_1(\sup J))$.

Conclusion : (J_1, X_1) (avec $J_1 =]\inf J, \sup J + \epsilon[$) est une solution de (E) avec $X_1(t) = x(t)$ sur J.
Puisque $J \subsetneq J_1$, cela contredit le fait que (J, x) est maximale. L'hypothèse de départ (le fait que $\gamma(t)$ admette une valeur d'adhérence dans Ω) est donc fausse. $\square$

Lemme 1: Lemme 1 (Convergence au bord)

Si F est $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne, $\sup J = \beta < +\infty$, et $(t, x(t))$ admet **une** valeur d'adhérence $(\beta, x^*) \in \Omega$ quand $t \to \sup J$, alors $\lim_{t\to\sup J}(t, x(t)) = (\beta, x^*)$.

Preuve du Lemme 1 :

On sait que $(\beta, x^*) \in \Omega$, qui est un ouvert. Il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\bar{B}((\beta, x^*), \epsilon) \subset \Omega$. Puisque F est continue sur l'ouvert Ω, F est bornée sur le compact $\bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$.
$\exists M > 0$ t.q. $\forall (t, x) \in \bar{B}((\beta, x^*), \epsilon), \quad \|F(t, x)\| < M$.

Par définition de la valeur d'adhérence (β, x^*), $\exists (t_n)$ t.q. $t_n \to \beta$ et $x(t_n) \to x^*$. Choisissons N assez grand tel que les conditions (H) soient vérifiées :

$$(H) \quad \begin{cases} t_N > \beta - \frac{\epsilon}{2M} \\ \|x(t_N) - x^*\| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ |t_N - \beta| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

On applique le Lemme 2 (prouvé ci-dessous). D'après le Lemme 2, on a $\forall t \in [t_N, \beta[$, $\|x(t) - x^*\| < \epsilon$.

Ceci est vrai $\forall \epsilon > 0$ (en choisissant N suffisamment grand pour chaque ϵ). L'intervalle $[t_N, \beta[$ est un voisinage à gauche de β. On a donc montré que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (ici $\delta = \beta - t_N$) tel que $t \in]\beta - \delta, \beta[\implies \|x(t) - x^*\| < \epsilon$.
C'est la définition de $\lim_{t \to \beta^-} x(t) = x^*$.
Puisque $\lim_{t \to \beta^-} t = \beta$, on a bien $\lim_{t \to \sup J} (t, x(t)) = (\beta, x^*)$. $\square$

Lemme 2: Lemme 2

(Avec les conditions (H) de la preuve ci-dessus), on a :

$$\forall t \in [t_N, \beta[, \quad \|x(t) - x^*\| < \epsilon$$

Preuve du Lemme 2 :

Observation : Avec les conditions (H), on a $(t_N, x(t_N)) \in B((\beta, x^*), \epsilon)$ car :

$$\|(t_N, x(t_N)) - (\beta, x^*)\| = \max(|t_N - \beta|, \|x(t_N) - x^*\|) < \epsilon \quad \text{(d'après H.)}$$

Supposons par l'absurde que la proposition n'est pas vraie.

$$\exists t \in [t_N, \beta[\text{ tel que } \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon.$$

Posons $T_\epsilon = \inf\{t \in [t_N, \beta[\quad | \quad \|x(t) - x^*\| \geq \epsilon\}$.
T_ϵ existe car l'ensemble est non vide et minoré par t_N. Par continuité de x, on a $\|x(T_\epsilon) - x^*\| = \epsilon$. (Et $T_\epsilon > t_N$ car $\|x(t_N) - x^*\| \leq \epsilon/2 < \epsilon$).

Par définition de T_ϵ, $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$, on a $\|x(s) - x^*\| \leq \epsilon$. On a aussi $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$, $|s - \beta| \leq |t_N - \beta| < \epsilon$ (car $s < \beta$).
Donc $\forall s \in [t_N, T_\epsilon]$, $(s, x(s)) \in \bar{B}((\beta, x^*), \epsilon)$.
Sur ce compact, la fonction F est bornée : $\|F(s, x(s))\| < M$.

On intègre l'EDO : $x(T_\epsilon) - x(t_N) = \int_{t_N}^{T_\epsilon} F(s, x(s)) ds$.

$$\|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| \leq \int_{t_N}^{T_\epsilon} \|F(s, x(s))\| ds \leq \int_{t_N}^{T_\epsilon} M ds = M(T_\epsilon - t_N)$$

On sait $t_N < T_\epsilon < \beta$, donc $T_\epsilon - t_N < \beta - t_N < \frac{\epsilon}{2M}$ (par (H)).
En substituant, l'inégalité devient **stricte** :

$$\|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| < M \cdot (\frac{\epsilon}{2M}) = \frac{\epsilon}{2}$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$\|x(T_\epsilon) - x^*\| \leq \|x(T_\epsilon) - x(t_N)\| + \|x(t_N) - x^*\|$$

$$\|x(T_\epsilon) - x^*\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(*Note : L'inégalité devient stricte car le premier terme est* $< \frac{\epsilon}{2}$ *et le second est* $\leq \frac{\epsilon}{2}$)

Ceci est une **CONTRADICTION**, car T_ϵ est défini tel que $\|x(T_\epsilon) - x^*\| = \epsilon$. □

9 Cauchy-Lipschitz (Cadre général)

Définition 13: Localement Lipschitzienne

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+d}$ un ouvert et $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$. On dit que F est **localement Lipschitzienne** (par rapport à x) si :
$\forall (t_0, x_0) \in \Omega, \exists V$ un voisinage de (t_0, x_0) dans Ω tel que F est Lipschitzienne sur $V \cap \Omega$.

Proposition 11: Caractérisation (Localement Lipschitzienne)

$F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est localement Lipschitzienne
$\iff$
$\forall K$ compact de Ω, F est Lipschitzienne sur K.
($\forall K$ compact $\subset \Omega, \exists L_K > 0$ t.q. $\forall (t,x),(t,y) \in K, \|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L_K \|x - y\|$)

Preuve :

Soit C un compact de Ω. $\forall x \in C \subset \Omega, \exists r_x > 0$ (rayon) t.q. F est Lipschitzienne sur $B(x, r_x)$. La famille $(B(x, r_x))_{x \in C}$ est un recouvrement ouvert de C.
Par la propriété de Borel-Lebesgue (Heine-Borel), C est compact, donc on peut extraire un sous-recouvrement fini : $C \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_i)$.
(Preuve par l'absurde de l'existence d'un nombre de Lebesgue ρ) : Supposons que (la propriété) n'est pas vraie. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n = \frac{1}{n}$, $\exists y_n \in C$ t.q. $\forall i \in \{1, ..., N\}$, $B(y_n, \frac{1}{n}) \not\subset B(x_i, r_i)$.
(y_n) est une suite de C compact. Il existe une sous-suite $(y_{\phi(n)})$ t.q. $y_{\phi(n)} \to y^* \in C$.
Puisque $y^* \in C$, $\exists i \in \{1, ..., N\}$ t.q. $y^* \in B(x_i, r_i)$. Puisque $B(x_i, r_i)$ est ouvert, pour n assez grand, $B(y_{\phi(n)}, \frac{1}{\phi(n)}) \subset B(x_i, r_i)$. Ceci contredit la construction de la suite (y_n).

(Soit ρ ce nombre de Lebesgue.)
Soient $x, y \in C$.
Cas 1 : $\|x - y\| < \rho$. Alors $\exists i$ t.q. $\{x, y\} \subset B(x_i, r_i)$. F est Lipschitzienne sur ce voisinage avec la constante C_i.

$$\|F(x) - F(y)\| \leq C_i \|x - y\| \leq \left(\max_{i=1..N} C_i \right) \|x - y\|$$

Cas 2 : $\|x - y\| \geq \rho$.

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|F(x)\| + \|F(y)\| \leq 2 \sup_{z \in C} \|F(z)\|$$

(Soit $M = \sup_{z \in C} \|F(z)\|$, qui existe car F est continue sur le compact C).
Puisque $\|x - y\| \geq \rho \implies 1 \leq \frac{\|x-y\|}{\rho}$, on a :

$$\|F(x) - F(y)\| \leq 2M = 2M \cdot 1 \leq 2M \frac{\|x - y\|}{\rho} = \left(\frac{2M}{\rho} \right) \|x - y\|$$

i.e. $\forall x, y \in C$:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \max\left(\max_{i=1..N} C_i, \frac{2\sup_{z\in C}\|F(z)\|}{\rho}\right)\|x-y\|$$

Ce qui prouve que F est Lipschitzienne sur C. □

10 Preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz (Existence locale)

Remarque

Si F est localement Lipschitzienne $\implies$ F est continue.

Si F est $\mathcal{C}^1$ ou Lipschitzienne $\implies$ F est localement Lipschitzienne. (L'inverse n'est pas forcément vrai).

Exemple 7: Fonction non Lipschitzienne

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Regardons le taux d'accroissement en 0 : $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h\ln h}{h} = \ln h \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
f n'est pas dérivable en 0.

De plus, pour $m \in \mathbb{N}$, prenons $x_m = e^{-m}$ et $y_m = 0$. $\frac{|f(x_m)-f(0)|}{|x_m-0|} = |\ln(e^{-m})| = |-m| = m \to +\infty$.
Le rapport n'est pas borné, donc f n'est pas Lipschitzienne au voisinage de 0. Cependant, f est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (car elle est $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert).

Remarque

Hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz : $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$). $(t,x) \mapsto F(t,x)$.

1. F est continue sur Ω.
2. F est localement Lipschitzienne en la seconde variable x.

C'est-à-dire : $\exists V$ voisinage de (t_0, x_0) dans Ω, $\exists k > 0$ tels que :

$$\forall (t,X),(t,Y) \in V, \quad \|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq k\|X-Y\|$$

Remarque

F localement Lipschitzienne en x est équivalent à : Pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists k_K > 0$ tel que $\forall (t,X),(t,Y) \in K$, on a :

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq k_K\|X-Y\|$$

Théorème 8: Cauchy-Lipschitz (Cadre Général)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Supposons que :

- F est continue sur Ω.
- F est localement Lipschitzienne par rapport à x.

Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy :

$$(E) \qquad \begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une **unique solution maximale** (J, x).

Preuve du Théorème (via un Lemme d'existence locale)

Lemme 3: Existence et Unicité Locale

Sous les conditions du Théorème, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un $a > 0$ suffisamment petit tel que le problème (E) a une **unique solution** sur l'intervalle $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Remarque

$[t_0 - a, t_0 + a]$ n'est pas un intervalle ouvert. On définit la dérivée aux bornes par la limite à droite ou à gauche :

$$x'(t_0 - a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{x(t_0 - a + h) - x(t_0 - a)}{h}$$

$$x'(t_0 + a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{x(t_0 + a + h) - x(t_0 + a)}{h}$$

Et pour $t \in]t_0 - a, t_0 + a[$, $x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$.

Preuve du Lemme :

Sans restriction, on va supposer que $t_0 = 0$. Nous allons démontrer l'existence et l'unicité en utilisant les deux lemmes suivants. $\square$

Lemme 4: Équivalence Différentielle / Intégrale

Soit X une fonction continue sur $[-a, a]$. X est solution de (E) sur $[-a, a]$ (c'est-à-dire $\mathcal{C}^1$ et vérifie l'équation)

$\iff$

X satisfait l'équation intégrale suivante pour tout $t \in [-a, a]$:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds$$

Preuve du Lemme 4 :

($\Rightarrow$) Si X est une solution de (E) sur $[-a, a]$. On a $\forall s \in [-a, a]$, $X'(s) = F(s, X(s))$. En intégrant cette équation sur $[0, t]$:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t X'(s) ds = x_0 + \int_0^t F(s, X(s)) ds$$

De plus X est continue sur $[-a, a]$ car dérivable.

($\Leftarrow$) Réciproque. Supposons que X est continue et vérifie l'équation intégrale. $s \mapsto F(s, X(s))$ est continue sur $[-a, a]$ par composition de fonctions continues (car F est continue et X est continue). $\implies g : t \mapsto \int_0^t F(s, X(s))ds$ est dérivable sur $[-a, a]$.
Démontrons cela : Pour tout $t \in [0, a]$, formons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}\frac{g(t+h) - g(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} F(s, X(s))ds - \int_0^t F(s, X(s))ds\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(s, X(s))ds\end{aligned}$$

(avec h suffisamment petit pour que $t + h \in [-a, a]$).
On effectue le changement de variable $s = t + \theta h$ (donc $ds = hd\theta$).

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h)) \cdot hd\theta = \int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h))d\theta$$

Par continuité de F et X, on a :

$$F(t + \theta h, X(t + \theta h)) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} F(t, X(t))$$

De plus, la fonction $s \mapsto F(s, X(s))$ est continue sur le compact $[-a, a]$, donc elle est bornée. $\exists M > 0$ tel que $\|F(s, X(s))\| \leq M$. Donc $\|F(t + \theta h, X(t + \theta h))\| \leq M$.
On peut appliquer le **Théorème de Convergence Dominée** (avec la fonction constante M intégrable sur $[0, 1]$ car $\int_0^1 Md\theta = M < +\infty$).

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_0^1 F(t + \theta h, X(t + \theta h))d\theta &= \int_0^1 \lim_{h\to 0} F(t + \theta h, X(t + \theta h))d\theta \\ &= \int_0^1 F(t, X(t))d\theta = F(t, X(t))\end{aligned}$$

Donc g est dérivable et $g'(t) = F(t, X(t))$. Ainsi, $X(t) = x_0 + g(t)$ est dérivable et $X'(t) = F(t, X(t))$. Enfin, $X(0) = x_0 + 0 = x_0$. Donc X est solution. □

Lemme 5: Existence et Unicité dans E_a

Il existe $a > 0$ suffisamment petit tel que l'équation intégrale :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t F(s, X(s))ds$$

admet une **unique solution** dans l'espace E_a.

Preuve du Lemme 5 :

On veut prouver que le problème admet une unique solution. Soit $r > 0$ tel que la boule fermée $B((0, x_0), r) \subset \Omega$ (possible car Ω est ouvert).

Sur ce compact $\overline{B}((0, x_0), r)$:

1. F est continue, donc F est bornée sur ce compact. $\exists M_r > 0$ tel que $\forall (t, X) \in \overline{B}((0, x_0), r), \|F(t, X)\| \leq M_r$.
2. F est localement Lipschitzienne en x, donc F est Lipschitzienne sur ce compact. $\exists k_r > 0$ tel que $\forall (t, X), (t, Y) \in \overline{B}((0, x_0), r), \|F(t, X) - F(t, Y)\| \leq k_r\|X - Y\|$.

Nous allons travailler dans l'espace fonctionnel E_a défini par :

$$E_a = \{X \in \mathcal{C}^0([-a,a],\mathbb{R}^d) \quad | \quad X(0) = x_0 \text{ et } \|X - x_0\|_\infty \leq r\}$$

avec $a \leq r$.

Justification de la condition (Condition 1) $a \leq r$: On impose la condition $a \leq r$. En effet, pour que $F(t,X(t))$ soit défini, il faut que $(t,X(t)) \in \Omega$. On veut donc s'assurer que $\forall t \in [-a,a], (t,X(t)) \in \overline{B}((0,x_0),r) \subset \Omega$. En munissant $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ de la norme infinie $\|(t,x)\|_\infty = \max(|t|,\|x\|)$, la condition d'appartenance à la boule s'écrit :

$$\|(t,X(t)) - (0,x_0)\|_\infty \leq r \iff \max(|t-0|,\|X(t)-x_0\|) \leq r$$

Ceci équivaut à :

$$|t| \leq r \quad \text{et} \quad \|X(t) - x_0\| \leq r$$

Pour que la première partie ($|t| \leq r$) soit vraie pour tout $t \in [-a,a]$, il faut et il suffit que $a \leq r$. La seconde partie est assurée par la définition même de l'espace E_a.

Preuve que E_a est complet : $\mathcal{C}^0([-a,a])$ muni de la norme infini est un espace de Banach. Montrons que E_a est un fermé de cet espace. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E_a telle que $X_n \to X$ uniformément sur $[-a,a]$.

1. Pour tout n, $X_n(0) = x_0$. Par convergence simple en 0, $X(0) = \lim X_n(0) = x_0$.
2. Pour tout n, $\|X_n - x_0\|_\infty \leq r$. Par passage à la limite dans l'inégalité large, $\|X - x_0\|_\infty \leq r$.

Donc $X \in E_a$. E_a est un fermé d'un espace complet, donc E_a est complet.

Définissons l'application $\Phi : E_a \to E_a$.

$$\Phi(X) : t \mapsto x_0 + \int_0^t F(s,X(s))ds$$

Vérifions que Φ est bien définie : Pour $X \in E_a$, $s \mapsto X(s)$ est continue. F est continue. Donc $s \mapsto F(s,X(s))$ est continue. Donc $\Phi(X)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (primitive d'une continue), donc $\Phi(X) \in \mathcal{C}^0([-a,a])$.

Condition 2 : Stabilité (Φ envoie E_a dans E_a) Soit $X \in E_a$. On a $\|\Phi(X)(0) - x_0\| = 0$. Il faut montrer que $\|\Phi(X)(t) - x_0\| \leq r$ pour tout $t \in [-a,a]$.

$$\|\Phi(X)(t) - x_0\| = \left\|\int_0^t F(s,X(s))ds\right\| \leq \left|\int_0^t \|F(s,X(s))\|ds\right|$$

Comme $X \in E_a$, pour tout $s \in [-a,a]$, $(s,X(s)) \in \overline{B}((0,x_0),r)$. Donc $\|F(s,X(s))\| \leq M_r$.

$$\|\Phi(X)(t) - x_0\| \leq M_r|t| \leq M_r a$$

Pour que $\Phi(X) \in E_a$, il suffit d'imposer :

$$M_r a \leq r$$

Condition 3 : Contraction Soient $Y_1, Y_2 \in E_a$.

$$\|\Phi(Y_1)(t) - \Phi(Y_2)(t)\| = \left\|\int_0^t (F(s,Y_1(s)) - F(s,Y_2(s)))ds\right\|$$

$$\leq \left|\int_0^t \|F(s,Y_1(s)) - F(s,Y_2(s))\|ds\right|$$

Comme $Y_1, Y_2 \in E_a$, les points sont dans le compact où F est Lipschitzienne de constante k_r.

$$\le \left| \int_0^t k_r \|Y_1(s) - Y_2(s)\| ds \right|$$
$$\le k_r |t| \sup_{s\in[-a,a]} \|Y_1(s) - Y_2(s)\|$$
$$\le k_r a \|Y_1 - Y_2\|_\infty$$

En passant au sup sur t :

$$\|\Phi(Y_1) - \Phi(Y_2)\|_\infty \le (k_r a)\|Y_1 - Y_2\|_\infty$$

Pour que Φ soit une contraction stricte, il faut imposer :

$$k_r a < 1$$

Conclusion : Si a satisfait les conditions :

$$\begin{cases} a \le r \\ M_r a \le r \\ k_r a < 1 \end{cases}$$

Alors Φ est une contraction de l'espace complet E_a dans lui-même. D'après le Théorème du Point Fixe de Banach, Φ admet un unique point fixe $z \in E_a$. Donc l'équation intégrale admet une unique solution dans E_a. □

Suite de la preuve du Lemme principal (Unicité globale) :

Le Lemme 5 nous donne une unique solution X_1 appartenant à E_a. Supposons par l'absurde qu'il existe une autre solution X_2 définie sur $[-a, a]$ (qui ne serait pas dans E_a).
Puisque X_2 est solution, X_2 est continue (car dérivable) sur $[-a, a]$. On suppose sans restriction que $T \ge 0$. Soit $T_1 = \inf\{t \in [0, a] : \|X_2(t) - x_0\| > r\}$. Cet ensemble est non vide (sinon $X_2 \in E_a$). Comme $X_2(0) = x_0$, par continuité, l'ensemble est minoré par 0, donc T_1 existe.
On a $\|X_2(T_1) - x_0\| = r$ (par continuité). Et pour tout $t < T_1$, $\|X_2(t) - x_0\| \le r$.
Sur l'intervalle $[0, T_1]$, X_2 vérifie l'équation intégrale :

$$X_2(T_1) - x_0 = \int_0^{T_1} F(s, X_2(s))ds$$
$$\|X_2(T_1) - x_0\| \le \int_0^{T_1} \|F(s, X_2(s))\|ds$$

Comme pour $s \in [0, T_1]$, $(s, X_2(s))$ est dans la boule $B((0, x_0), r)$ (car la norme est $\le r$), on peut majorer par M_r.

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \le \int_0^{T_1} M_r ds = M_r T_1$$

Or $T_1 \le a$. Et on a choisi a tel que $M_r a < r$ (on peut choisir l'inégalité stricte dans la condition 1, $M_r a \le r/2$ par exemple).
Si on prend $M_r a < r$, alors :

$$\|X_2(T_1) - x_0\| \le M_r a < r$$

Ceci contredit le fait que $\|X_2(T_1) - x_0\| = r$.
L'hypothèse d'existence d'un point de sortie est donc fausse. X_2 reste dans E_a sur tout l'intervalle.
Par unicité dans E_a, $X_2 = X_1$. □

Suite de la preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz

Remarque

D'après le lemme précédent, on déduit que pour $a > 0$ suffisamment petit, il existe une unique solution du problème (E) sur $]t_0 - a, t_0 + a[$.

Lemme 6: Unicité globale sur l'intersection

Soit (J_x, x) et (J_y, y) deux solutions du problème (E). Alors $\forall t \in J_x \cap J_y, \quad x(t) = y(t)$.

Preuve du lemme :

On pose $J^* = J_x \cap J_y$. C'est un intervalle ouvert (comme intersection de deux intervalles ouverts). On veut montrer que $F = \{t \in J^* | x(t) = y(t)\}$ est égal à J^*.
J^* est connexe car c'est un intervalle. Nous allons vérifier que F est un ouvert-fermé non vide de J^*.

F est non vide : $t_0 \in J_x$ et $t_0 \in J_y$, donc $t_0 \in J^*$. On a $x(t_0) = y(t_0) = x_0$. Donc $t_0 \in F$.

F est fermé dans J^* : Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F telle que $t_n \to t^*$ dans J^*. $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \in F \implies x(t_n) = y(t_n)$. Par continuité de x et y en $t^* \in J^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x(t_n) = x(t^*) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} y(t_n) = y(t^*)$$

$\implies x(t^*) = y(t^*)$. Donc $t^* \in F$. F est fermé.

F est ouvert : Soit $t_* \in F \subset J^*$ (intervalle ouvert). Considérons le nouveau problème de Cauchy (E') centré en t_* :

$$(E') \quad \begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_*) = x(t_*) = y(t_*) \end{cases}$$

D'après le lemme d'existence locale (Lemme 3), on nous dit qu'il existe $a > 0$ suffisamment petit tel que le problème (E') a une **unique solution** sur l'intervalle $]t_* - a, t_* + a[$.
Or, x et y sont bien solutions de (E') sur cet intervalle (puisqu'ils sont solutions de (E) sur J^* qui contient $]t_* - a, t_* + a[$). Par unicité de la solution sur $]t_* - a, t_* + a[$, on a :

$$\forall t \in]t_* - a, t_* + a[, \quad x(t) = y(t)$$

Donc $]t_* - a, t_* + a[\subset F$. Ceci prouve que F est un voisinage de chacun de ses points, et donc F est un ouvert de J^*.

Conclusion : F est un ouvert-fermé non vide de J^*. Comme J^* est connexe, on a $F = J^*$. □

Construction de la solution maximale

Posons $J_{max} = \bigcup_{(J,Y)} J$, où l'union est prise sur toutes les solutions (J, Y) du problème (E) $\begin{cases} Z'(t) = F(t, Z(t)) \\ Z(t_0) = x_0 \end{cases}$.
J_{max} est une union d'intervalles ouverts contenant tous t_0. L'union n'est pas vide (car on sait qu'il existe au moins une solution locale sur $]t_0 - a, t_0 + a[$). J_{max} est donc un intervalle ouvert (car c'est une union connexe, car tous les ensembles contiennent t_0) et $t_0 \in J_{max}$.

Définissons Y_{max} sur J_{max} : Soit $t \in J_{max}$. Par définition de J_{max}, $\exists (J, Y)$ solution de (E) telle que $t \in J$. On pose $Y_{max}(t) = Y(t)$.
Vérifions que cette définition est bien correcte (ne dépend pas du choix de la solution (J, Y)) : Soit

$t \in J_{max}$. Soient (J_1, Y_1) et (J_2, Y_2) deux solutions de (E) telles que $t \in J_1$ et $t \in J_2$. On a $t \in J_1 \cap J_2$. D'après le lemme d'unicité (Lemme 6), on a $Y_1(t) = Y_2(t)$. La valeur de $Y_{max}(t)$ ne dépend pas du choix de la solution.

Vérifions que (J_{max}, Y_{max}) est solution : Soit $t \in J_{max}$. $\exists (J, Y)$ solution tq $t \in J$. J est ouvert, donc $\exists \epsilon > 0$ tq $]t - \epsilon, t + \epsilon[\subset J \subset J_{max}$. Par définition de Y_{max}, $\forall t' \in]t - \epsilon, t + \epsilon[$, $Y_{max}(t') = Y(t')$.
Donc $Y'_{max}(t) = Y'(t) = F(t, Y(t)) = F(t, Y_{max}(t))$. Donc $\forall t \in J_{max}, Y'_{max}(t) = F(t, Y_{max}(t))$.
Par définition de Y_{max}, on a $Y_{max}(t_0) = Y(t_0) = x_0$ (en prenant une solution (J, Y) qui contient t_0).
Donc (J_{max}, Y_{max}) est solution de (E). Par définition de J_{max} (comme union de tous les domaines), (J_{max}, Y_{max}) est la solution maximale.

II. Équations autonomes

Définition 14: Équation autonome

Une équation autonome prend la forme :

$$x'(t) = G(x(t))$$

où $G : \Omega \to \mathbb{R}^d$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. $x \mapsto G(x)$.

Remarque

Une équation autonome est une équation non-autonome particulière. On pose $\Omega_F = \mathbb{R} \times \Omega$ (ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$) et $F : \Omega_F \to \mathbb{R}^d$

$$(t, x) \mapsto G(x)$$

Remarque

On peut transformer une équation non-autonome $x'(t) = F(t, x(t))$ en une équation autonome (en augmentant la dimension). Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$). Posons $Y(t) = (t, x(t)) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Alors $Y'(t) = (1, x'(t))$.

$$Y'(t) = (1, F(t, x(t)))$$

On pose $G : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$

$$Y \mapsto G(Y) = (1, F(Y))$$

L'équation $x'(t) = F(t, x(t))$ est équivalente à l'équation autonome $Y'(t) = G(Y(t))$.

Proposition 12: Équivalence Non-Autonome / Autonome

(J, x) est solution maximale du problème $\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (avec $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$) $\iff$ (J, Y) avec $Y(t) = (t, x(t))$ est solution maximale de l'équation autonome $Y'(t) = G(Y(t))$ avec $G : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$ et $Y(t_0) = (t_0, x(t_0)) \in \Omega$.

Remarque

Tout résultat sur un système autonome peut se traduire sur un système non-autonome. L'idée de passer d'un système non-autonome à un système autonome n'est pas très pertinente car on augmente la dimension.

Proposition 13: Invariance par translation (Syst. autonomes)

Soit (E) $x'(t) = G(x(t))$ avec $G : \Omega \to \mathbb{R}^d$ localement Lipschitzienne sur Ω (ouvert de $\mathbb{R}^d$). Soient (J_x, x) et (J_y, y) deux solutions maximales de (E). Soit $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $t_0 \in J_x$ et $t_0 + s \in J_y$ et :

$$x(t_0) = x_0 = y(t_0 + s)$$

Alors $J_x = \{t \in \mathbb{R} | t + s \in J_y\}$ et $\forall t \in J_x, x(t) = y(t + s)$.

Preuve :

Posons $z(t) = y(t + s)$. On a $z'(t) = y'(t + s) = G(y(t + s)) = G(z(t))$.

L'intervalle de définition de z est $J_z = \{t | t+s \in J_y\}$. On a $z(t_0) = y(t_0+s) = x(t_0)$.
Donc (J_z, z) est solution du problème de Cauchy (CC) :

$$(CC) \quad \begin{cases} w'(t) = G(w(t)) \\ w(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Montrons que (J_z, z) est une solution maximale. Si elle ne l'est pas, $\exists(\tilde{J}_z, \tilde{z})$ solution de (CC) tq $J_z \subsetneq \tilde{J}_z$ et $\tilde{z}|_{J_z} = z$. Posons $\tilde{y}(t) = \tilde{z}(t-s)$. Le domaine de $\tilde{y}$ est $\tilde{J}_y = \{t \in \mathbb{R} | t-s \in \tilde{J}_z\}$. On a $\tilde{J}_y \supset \{t \in \mathbb{R} | t-s \in J_z\} = J_y$, et l'inclusion est stricte. De plus, $\forall t \in J_y$, $\tilde{y}(t) = \tilde{z}(t-s) = z(t-s) = y(t)$. $(\tilde{J}_y, \tilde{y})$ étend (J_y, y), ce qui là est absurde car (J_y, y) est maximale.
Donc (J_z, z) est une solution maximale de (CC).
(J_x, x) est aussi une solution maximale de (CC). Par unicité de la solution maximale (Théorème de Cauchy-Lipschitz, car G est loc. Lipschitz), on a :

$$J_x = J_z \quad \text{et} \quad \forall t \in J_x, x(t) = z(t)$$

Ce qui donne : $J_x = \{t | t+s \in J_y\}$ et $x(t) = y(t+s)$. □

Remarque

Si le système est non-autonome : $z(t) = y(t+s) \implies z'(t) = y'(t+s) = F(t+s, y(t+s)) = F(t+s, z(t))$. Il n'y a pas de raison que $F(t+s, z(t)) = F(t, z(t))$.

Remarque

Dans le cadre d'un système autonome, la condition initiale peut être fixée en $t_0 = 0$ sans perte de généralité. Si (J_2, x_2) est solution de (E) avec $x_2(0) = x_0$, alors (J_1, x_1) avec $J_1 = \{t_0 + t | t \in J_2\}$ et $x_1(t) = x_2(t - t_0)$ est solution de (E) avec $x_1(t_0) = x_0$.

Définition 15: Trajectoire

La **trajectoire** d'une solution (J, x) d'une équation autonome est l'ensemble :

$$T_x = \{x(t) | t \in J\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

Proposition 14: Propriétés des Trajectoires

Supposons G localement Lipschitzienne. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$.
a) Si deux solutions maximales du problème $x'(t) = G(x(t))$ prennent la valeur x_0 (à des temps t_0 et t_1), alors elles ont la même trajectoire.
b) Les trajectoires associées à deux solutions maximales sont soit les mêmes, soit disjointes.

Preuve :

a) Soient (J_1, x_1) et (J_2, x_2) deux solutions maximales tq $\exists t_0 \in J_1, t_0 + s \in J_2$ (pour un s) avec $x_1(t_0) = x_2(t_0 + s) = x_0$. D'après la proposition d'invariance par translation, on a : $J_2 = \{t + s | t \in J_1\}$ et $x_1(t) = x_2(t+s) \quad \forall t \in J_1$.
$T_{x_1} = \{x_1(t) | t \in J_1\}$ $T_{x_2} = \{x_2(t') | t' \in J_2\}$
En posant $t' = t + s$: $T_{x_1} = \{x_2(t+s) | t \in J_1\} = \{x_2(t') | t' \in J_2\} = T_{x_2}$.

b) Soient T_{x_1} et T_{x_2} deux trajectoires.

- Cas 1 : $T_{x_1} \cap T_{x_2} \neq \emptyset$. Alors $\exists x_0 \in T_{x_1} \cap T_{x_2}$. D'après a), $T_{x_1} = T_{x_2}$.
- Cas 2 : $T_{x_1} \cap T_{x_2} = \emptyset$. Les trajectoires sont disjointes.

□

III. Équilibres et Stabilité des Équations Autonomes

1 Notion d'équilibre

Considérons le problème (E) :
$$X'(t) = F(t, X(t))$$
avec $F : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne en x, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Dans la suite, nous nous intéressons particulièrement au cas autonome $X'(t) = G(X(t))$ où $G : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

Définition 16: Solution stationnaire

X est une solution stationnaire de (E) sur $J = \mathbb{R}$ si :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = C \in \mathbb{R}^d$$
où C est une constante.

Définition 17: Point d'équilibre

$X^* \in \Omega$ est un point d'équilibre si $G(X^*) = 0$.

Remarque

Si G est localement lipschitzienne, alors le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} X'(t) = G(X(t)) \\ X(t_0) = X^* \end{cases}$$
admet une unique solution maximale définie sur $J = \mathbb{R}$, qui est la fonction constante $X(t) = X^*$. En effet, $X'(t) = 0$ et $G(X(t)) = G(X^*) = 0$, donc l'équation est vérifiée. L'unicité est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Proposition 15: Comportement asymptotique et équilibre

Soit (J, X) une solution maximale du problème autonome $X'(t) = G(X(t))$ avec G localement lipschitzienne.
Soit $X^* \in \Omega$. Si :
$$\lim_{t \to \sup J} X(t) = X^*$$
Alors :

1. $\sup J = +\infty$.
2. $G(X^*) = 0$ (c'est-à-dire que X^* est un point d'équilibre).

Preuve :

1. Montrons que $\sup J = +\infty$**.**
Supposons que $\lim_{t \to \sup J} X(t) = X^*$.
On a $J \subset \mathbb{R}$. Comme la limite existe et vaut $X^* \in \Omega$, X est bornée sur $[t_0, \sup J[$. En effet, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour t assez proche de $\sup J$ (sur $[\sup J - \varepsilon, \sup J[$), on a $||X(t) - X^*|| < 1$, donc $||X(t)|| < 1 + ||X^*||$.
De plus, X est continue sur tout segment inclus dans J donc aussi bornée sur $[t_0, \sup J - \varepsilon]$. Ainsi, la fonction X est bornée sur J.

D'après le **critère d'explosion**, pour une solution maximale, nous avons l'alternative suivante :

$$\text{Soit } \sup J = +\infty, \quad \text{soit } \lim_{t \to \sup J} \|X(t)\| = +\infty \text{ (ou } X(t) \text{ s'approche du bord de } \Omega).$$

Or, nous venons de montrer que $X(t)$ est bornée (et converge vers $X^* \in \Omega$, donc reste dans un compact de Ω). La deuxième option est donc impossible. On a forcément $\sup J = +\infty$.
2. Montrons que $G(X^*) = 0$.
Supposons par l'absurde que $G(X^*) \neq 0$.
Pour tout $t \in J$, on a $X'(t) = G(X(t))$. Puisque $X(t) \to X^*$ quand $t \to +\infty$ et que G est continue, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} X'(t) = \lim_{t \to +\infty} G(X(t)) = G(X^*) \neq 0$$

Cela signifie qu'il existe une composante $i \in \{1, \dots, d\}$ telle que $G_i(X^*) \neq 0$. Supposons par exemple $G_i(X^*) > 0$.
On peut écrire :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} X'(s)ds \implies X_i(t) = X_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} G_i(X(s))ds$$

Puisque $G_i(X(s)) \to G_i(X^*) > 0$, par définition de la limite, il existe $T > t_0$ tel que pour tout $s \geq T$, $G_i(X(s)) > \frac{G_i(X^*)}{2}$.
Alors pour $t \geq T$:

$$X_i(t) = X_i(T) + \int_{T}^{t} G_i(X(s))ds \geq X_i(T) + (t - T)\frac{G_i(X^*)}{2}$$

Quand $t \to +\infty$, le terme de droite tend vers $+\infty$. Donc $X_i(t) \to +\infty$.
Or, par hypothèse, $X(t) \to X^*$, donc $X_i(t) \to X_i^* \in \mathbb{R}$. C'est une contradiction.
On en déduit que $G(X^*) = 0$. □

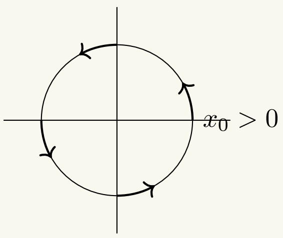
Remarque

La réciproque est fausse. Si $\sup J = +\infty$, la limite $\lim_{t \to +\infty} X(t)$ n'existe pas forcément.

Exemple 8: Oscillateur harmonique

Considérons le système défini sur $J = \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \qquad \text{avec } F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



La solution est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$X^* = \binom{0}{0}$ est un équilibre.

Ici, $\sup J = +\infty$. Pourtant, $\lim_{t \to +\infty} X(t)$ n'existe pas (le point tourne indéfiniment sur le cercle unité). L'origine $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre, mais la solution ne converge pas vers lui.

2 Stabilité des équilibres

Définition 18: Équilibre attractif et répulsif

Soit X^* un point d'équilibre de $X' = G(X)$.

- **Attractif :** L'équilibre X^* est dit attractif s'il existe un voisinage ouvert V de X^* tel que pour toute solution maximale (J, X) avec $X(t_0) \in V$, on a :

$$\sup J = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} X(t) = X^*$$

- **Répulsif :** L'équilibre X^* est dit répulsif s'il existe un voisinage ouvert V de X^* tel que pour toute solution maximale (J, X) avec $X(t_0) \in V \setminus \{X^*\}$, la solution finit par sortir de V. C'est-à-dire :

$$\exists T \in J \ \ \forall t \in [T, +\infty[, \quad X(t) \notin V$$

3 Équations autonomes en dimension 1

Nous considérons ici le cas $d = 1$. L'équation s'écrit :

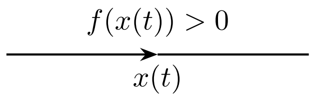
$$x'(t) = f(x(t))$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne.

Ligne de phase

On définit la notion de **ligne de phase** en représentant l'axe des réels et le sens de parcours des solutions :

- Si $f(x) > 0$, la dérivée $x'(t)$ est positive, donc $x(t)$ croît (flèche vers la droite $\rightarrow$).



- Si $f(x) < 0$, la dérivée $x'(t)$ est négative, donc $x(t)$ décroît (flèche vers la gauche $\leftarrow$).
- Si $f(x) = 0$, c'est un point d'équilibre.

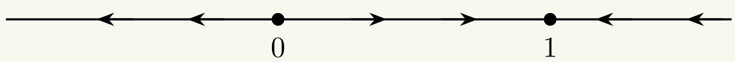
Exemple 9: L'équation logistique

Soit l'équation $x' = rx(1 - x)$ avec $r > 0$. Ici $f(x) = rx(1 - x)$.

- Équilibres : $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$.
- Signe de f :
  - Sur $] - \infty, 0[$, $f(x) < 0$ (décroissant).
  - Sur $]0, 1[$, $f(x) > 0$ (croissant).
  - Sur $]1, +\infty[$, $f(x) < 0$ (décroissant).

Ainsi :

- 1 est un point d'équilibre **attractif**. Il existe un voisinage $V =]0, +\infty[$ tel que toute solution partant dans V tend vers 1.
- 0 est un point d'équilibre **répulsif**.



Proposition 16: Dynamique en dimension 1

Considérons une équation autonome :

$$x'(t) = g(x(t))$$

avec g localement lipschitzienne.
Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Soit (J, x) une solution maximale vérifiant $x(t_0) = x_0$.
Soit x_+ le plus petit équilibre de g tel que $x_0 \leq x_+$ (S'il n'existe pas, on note $x_+ = +\infty$). Soit x_- le plus grand équilibre de g tel que $x_- \leq x_0$ (S'il n'existe pas, on note $x_- = -\infty$).

1. Si $g(x_0) = 0$, alors $J = \mathbb{R}$ et $x(t) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
2. Si $g(x_0) > 0$, alors x est une fonction **strictement croissante** vérifiant :
$$\lim_{t \to \inf J} x(t) = x_- \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \sup J} x(t) = x_+$$
3. Si $g(x_0) < 0$, alors x est une fonction **strictement décroissante** vérifiant :
$$\lim_{t \to \sup J} x(t) = x_- \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \inf J} x(t) = x_+$$
4. Si $\lim_{t \to \sup J} x(t) = x^*$ avec $x^* \in \mathbb{R}$, alors $\sup J = +\infty$.
Si $\lim_{t \to \inf J} x(t) = x^*$ avec $x^* \in \mathbb{R}$, alors $\inf J = -\infty$.

Remarque

Soit il n'existe pas d'équilibre x^* tel que $x^* > x_0$, dans ce cas, $x^+ = +\infty$. Sinon, on pose :

$$x^+ = \inf \underbrace{\{y \in [x_0, +\infty[| \ g(y) = 0\}}_{E}$$

$E \neq \emptyset$ (car $\exists x^* > x_0$ tel que $g(x^*) = 0$) $\implies \inf E$ existe. E est minoré par x_0.
Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E telle que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^+$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : g(x_n) = 0 \implies g(x^+) = 0 \quad \text{par continuité de } g \text{ en } x^+.$$

Donc $x^+ \in E$.

Preuve :

Cas trivial : Si $g(x_0) = 0$, alors x_0 est un équilibre. Par unicité de la solution (Cauchy-Lipschitz), $x(t) = x_0$ pour tout t.
Cas $g(x_0) > 0$:
1. Signe de g sur l'intervalle : D'après la définition de x_- et x_+, il n'y a pas d'équilibre dans l'intervalle $]x_-, x_+[$. La fonction g ne s'annule pas sur cet intervalle. Comme g est continue et $g(x_0) > 0$, par le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI), on a :

$$\forall y \in]x_-, x_+[, \quad g(y) > 0$$

2. Confinement de la solution :
Si x_+ ou x_- ne sont pas finis, alors c'est trivial ($-\infty < x(t) < +\infty, \forall t \in J$)
Montrons que pour tout $t \in J$, $x(t) \in]x_-, x_+[$. Supposons par l'absurde qu'il existe t_1 tel que $x(t_1) \geq x_+$ (dans le cas $x_+ < +\infty$). Puisque x est continue, par le TVI, il existe un temps τ entre t_0 et t_1 tel que $x(\tau) = x_+$. Or, nous avons montré que $g(x_+) = 0$. Donc la fonction constante $y(t) = x_+$ est une solution. Par unicité de Cauchy-Lipschitz, les trajectoires ne peuvent pas se croiser. Donc $x(t)$ ne peut jamais atteindre x_+. De même, $x(t)$ ne peut jamais atteindre x_-.

Ainsi $\forall t \in J, x(t) \in]x_-, x_+[$. Comme $x(t) \in]x_-, x_+[$, on a $x'(t) = g(x(t)) > 0$. Donc la solution x est **strictement croissante**.
3. Étude des limites (Cas par Cas) : Comme x est croissante, elle admet une limite en $\sup J$.

- **Cas $x_+ < +\infty$:** La solution est bornée par x_+. D'après le **critère d'explosion**, on a nécessairement $\sup J = +\infty$. Soit $L = \lim_{t \to +\infty} x(t)$. D'après la proposition précédente, L est un équilibre ($g(L) = 0$). Comme x est croissante partant de x_0, on a $x_0 < L \leq x_+$. Or il n'y a aucun équilibre entre x_0 et x_+. Donc nécessairement $L = x_+$.
- **Cas $x_+ = +\infty$:**
  - Si $\sup J < +\infty$, par le critère d'explosion, $x(t)$ doit sortir de tout compact, donc $\lim x(t) = +\infty$.
  - Si $\sup J = +\infty$. Supposons que la limite soit finie $L < \infty$. Alors L serait un équilibre (car asymptote). Mais $L > x_0$, donc $L \in E_+$, ce qui contredit $x_+ = +\infty$ (ensemble vide). Donc $\lim x(t) = +\infty$.

Le raisonnement est analogue pour $t \to \inf J$ et pour le cas $g(x_0) < 0$. $\square$

IV. Solutions explicites en dimension 1

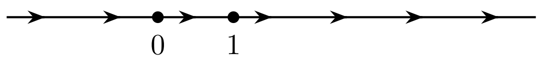
1 Exemple

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Heuristique :

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1 \quad \forall t \in J \text{ avec } (J, x) \text{ une solution maximale}$$

$f(x) = x^2$, f est $\mathcal{C}^1$.



D'après ce que l'on a vu, on sait que la solution (J, x) est strictement croissante et satisfait :

$$\lim_{t \to \sup J} x(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \inf J} x(t) = 0$$

donc $\inf J = -\infty$.

$J =]-\infty, \sup J[$. $\forall t \in J,\ x(t) > 0$.

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1 \quad \forall t \in J \quad (\forall t \in J,\ x(t) \neq 0)$$

On intègre entre 0 et t et on obtient :

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x(0)} = t \implies -\frac{1}{x(t)} + 1 = t \implies -\frac{1}{x(t)} = t - 1 \implies \frac{1}{x(t)} = 1 - t \implies x(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$\sup J = 1.$$

De manière plus générale, on peut considérer des équations de la forme $x'(t) = R(t)g(x(t))$.
$x'(t) = x^2(t)$ est donnée dans ce cadre avec $R(t) = 1$ et $g(X) = X^2$.

Afin d'être dans le cadre de Cauchy-Lipschitz, on suppose :

- $R : I \to \mathbb{R}$ continue (I ouvert de $\mathbb{R}$)
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne.

$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\Omega = I \times \mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$

$$(t, x) \to R(t)g(x)$$

f est continue car produit de fonctions continues. f est localement lipschitzienne en x :

$\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0$ t.q f lipschitzienne sur $V = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ($[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset I$)
$\forall (t, x), (t, y) \in V$

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &\leq |R(t)||g(x) - g(y)| \\ &\leq R(t) \cdot C_\varepsilon |x - y| \\ &\leq C_\varepsilon \cdot \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} |R(t)||x - y| \end{aligned}$$

Solution maximale de :

$$\begin{cases} y'(t) = R(t)g(y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Heuristique : $\forall t \in J$, $\frac{x'(t)}{x(t)} = R(t)$ pourvu que $g(y(t)) \neq 0$.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{t_0}^{t} R(s) ds$$

G est une primitive de $\frac{1}{g}$ (pourvu que l'on soit dans une zone où g ne s'annule pas). R continue donc admet une primitive H.

$$\begin{aligned} G(x(t)) - G(x(t_0)) &= H(t) - H(t_0) \\ &= G(x(t_0)) + H(t) - H(t_0) \end{aligned}$$

Si G inversible sur un ouvert dans lequel $x(t)$ prend ses valeurs, on aura :

$$x(t) = G^{-1}(G(x_0) + (H(t) - H(t_0))) \quad \forall t \in J$$

Proposition 17

Considérons le problème de Cauchy (1) :

$$\begin{cases} x'(t) = R(t)g(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$R : I \to \mathbb{R}$ continue. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement Lipschitz. Soit (J, x) la solution maximale de (1).

1. Si $g(x_0) = 0$ alors $x(t) = x_0 \quad \forall t \in J \quad J = I$.
2. Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\forall t \in J \quad g(x(t)) \neq 0$ et $\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{t_0}^{t} R(s) ds$.

Preuve :

1) Si $g(x_0) = 0$, $y : \substack{I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto x_0}$ est solution du pb car :

$$\begin{aligned} y'(t) = 0 &= g(y(t))R(t) \\ &= g(x_0)R(t) \\ &= 0 \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

En appliquant le thm de Cauchy-Lipschitz avec $f(t, x) = R(t)g(x)$ qui est continue sur $I \times \mathbb{R}$ et localement Lipschitz en x. On a par unicité $x(t) = x_0$ $\forall t \in J$ avec $J = I$.
2) Supposons par l'absurde $\exists t_1 \in J$, $g(x(t_1)) = 0$. Soit (J, x) sol max du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = R(t)g(y(t)) \\ y(t_1) = x(t_1) \end{cases}$$

En utilisant le thm de Cauchy-Lipschitz on a par unicité de la solut° maximale $x(t) = x(t_1)$ avec $J = I$. ABSURDE car $x(t_0) = x_0 \neq x(t_1)$ car $g(x_0) \neq 0$ et $g(x(t_1)) = 0$.
$\forall t \in J, \ g(x(t)) \neq 0$

$$\begin{cases} g \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ donc} \\ x : J \to \mathbb{R} \text{ continue} \end{cases}$$

La fonction $t \mapsto g(x(t))$ est continue $J \to \mathbb{R}$ avec $\forall t \in J, \ g(x(t)) \neq 0$. Donc par le TVI, $\forall t \in J$, la fonction $t \mapsto g(x(t))$ est de signe constant.
On a $x'(t) = R(t)g(x(t))$. Donc $\forall t \in J, \ \frac{x'(t)}{g(x(t))} = R(t)$.
On intègre entre t_0 et t :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{g(x(s))} \, ds = \int_{t_0}^{t} R(s) \, ds$$

Posons le changement de variable :

$$\begin{cases} u = x(s) \\ du = x'(s)\,ds \end{cases} \implies \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} R(s)\,ds$$

□

Remarque

On observe que $\forall s \in J,\ x'(s) = g(x(s))R(s)$. Supposons sans restriction que $g(x(s)) > 0\ \forall s \in J$. Soit $V = J \cap R^{-1}(\mathbb{R}^*)$. V est un ouvert car intersection d'ouverts. En effet, R est continue et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert.

Pour rendre les choses rigoureuses, on a $V = \bigcup_{i\in A} C_i$ avec C_i des intervalles ouverts qui sont les composantes connexes de V. On en déduit :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{g(x(s))}\,ds = \sum_{i\in A} \int_{C_i\cap[t_0,t]} \frac{x'(s)}{g(x(s))}\,ds$$

Le changement de variable $u = x(s)$ est rigoureux car sur C_i, on a $R(t) > 0$ (ou $R(t) < 0$) pour tout $t \in C_i$. Donc $x'(t) = g(x(t))R(t)$ garde un signe constant (strictement positif ou strictement négatif) $\forall t \in C_i$.
Conclusion : x est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de C_i sur $x(C_i)$ par le théorème d'inversion locale (cadre global).

Remarque

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{g(u)}\,du = \int_{t_0}^{t} R(s)\,ds$$

Pour $t \in J$, on sait que sur l'intervalle $J_t = [\min(x_0, x(t)), \max(x_0, x(t))]$:

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall u \in J_t,\ g(u) > \alpha > 0 \text{ ou } g(u) < -\alpha < 0.$$

Car g est continue sur le compact J_t et ne s'annule pas ($\forall u \in J_t,\ g(u) \neq 0$).
Par le TVI, on sait que $g(u) > 0$ ou $g(u) < 0$ pour tout $u \in J_t$ (et par extension sur l'image connexe).
(1) $\forall u \in J_t \quad g(u) \geq \inf_{\alpha\in J_t} g(\alpha) = g(\beta_{t_1}) = \alpha_t \quad (\alpha_t \in \mathbb{R}_+^*)$
Puisque $u \to \frac{1}{u}$ est continue sur J_t, cette fonction admet une primitive que l'on note :

$$\varphi(x(t)) - \varphi(x_0) = \int_{t_0}^{t} R(s)ds$$

Puisque sur $J_t \quad \varphi'(u) = \frac{1}{g(u)}$

- cas 1 : $g(u) > 0\ \forall u \in J_t$ alors φ str. $\nearrow$ et donc inversible.
- cas 2 : $g(u) < 0\ \forall t \in J_t$ et la même chose.

φ inversible sur J_t et $x(t) = \varphi^{-1}\left(\varphi(x_0) + \int_{t_0}^{t} R(s)ds\right)$

Remarque

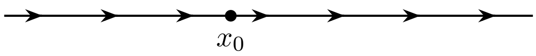
Si on regarde :

$$\begin{cases} x'(t) = K(x(t))^{\alpha} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$K > 0$ alors si $\alpha > 1$ la solution maximale de (E) est définie sur :

- $]-\infty, T[$ si $x_0 > 0$ avec $T < +\infty \quad (\to \lim_{t\to T} x(t) = +\infty)$
- $]T, +\infty[$ si $x_0 < 0$ avec $T < +\infty \quad (\to \lim_{t\to T} x(y) = -\infty)$

(1) $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ avec $f(x) = |x|^\alpha$ (**Attention :** c'est bien $\mathcal{C}^1$). On est bien dans le cas de Cauchy-Lipschitz.



$f(x) = |x|^\alpha$

$x^+ = +\infty$
$x^- = 0$

$x_0 > 0$ on a vu que $\forall t \in J$ $x(t) > 0$. x est strictement croissante sur J avec $\lim_{t \to \inf J} x(t) = 0$ et $\lim_{t \to \sup J} x(t) = +\infty$.
$x'(t) = |x|^\alpha(t) \quad \forall t \in J = x^\alpha(t)$ car $\forall t \in J$ $x(t) > 0$

$$\frac{x'(t)}{x^\alpha(t)} = 1 \quad \forall t \in J$$

On intègre entre t_0 et t on a :

$$\frac{x^{1-\alpha}(t)}{1-\alpha} - \frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t - t_0$$

$$x^{1-\alpha}(t) - x_0^{1-\alpha} = (1-\alpha)(t-t_0) \iff \frac{1}{x^{\alpha-1}(t)} = \frac{1}{x_0^{\alpha-1}} + (1-\alpha)(t-t_0)$$

$$\iff x(t) = \left(\frac{1}{\frac{1}{x_0^{\alpha-1}} + (1-\alpha)(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$J =]-\infty, T[$ avec $\frac{1}{x_0^{\alpha-1}} + (1-\alpha)(T-t_0) = 0$

$$\iff T = t_0 + \frac{1}{(\alpha-1)x_0^{\alpha-1}} < +\infty$$

On observe $\lim_{t \to T} x(t) = +\infty$.

2 Équations différentielles linéaires en dimension 1

- $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$

$a, b : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle ouvert) et a, b continue.
$x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et localement lipschitz en x.

$$(t, x) \longrightarrow a(t)x + b(t)$$

Soit A une primitive de a sur I (A existe car a est continue).

Proposition 18: (H) : $x'(t) = a(t)x(t)$

1. Les solutions maximales de H s'écrivent sous la forme $x(t) = \lambda e^{A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Le problème $(C) = \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ a une unique solution maximale $x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$ $\forall t \in I$.

Preuve :

On est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz, soit (X, J) une solution maximale.

$$y(t) = x(t)e^{-A(t)}$$

$$y'(t) = x'(t)e^{-A(t)} - x(t)a(t)e^{-A(t)}$$

$$= \exp(-A(t))(x'(t) - a(t)x(t))$$

$\forall t \in J \; y'(t) = 0$. J est connexe, y dérivable i.e $\exists \lambda \in \mathbb{R} \; y(t) = \lambda$ i.e $x(t) = \lambda e^{A(t)}$. Puisque cette solution est maximale on doit avoir $J = I$ car la fct° $t \to \lambda e^{A(t)}$ est bien définie sur I.
2. D'après 1 on a $x(t) = \lambda e^{A(t)} \; \forall t \in J$. Choississons $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds \; \forall t \in I \; x(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$.

$$x(t_0) = \lambda = x_0$$
$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \forall t \in I$$

□

Proposition 19: (NH) : $a(t)x(t) + b(t)$

1. Les solutions maximales de (NH) sont définies sur I et données par la formule de Duhamel :
$$\forall t \in J \quad x(t) = \lambda e^{A(t)} + \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_s^t a(u)du} \, ds \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
2. Le problème (NH) avec données initiale $x(t_0) = x_0$ a une unique solution globale avec $\lambda = x_0$, $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$.
3. Soit x_p une solution de (NH) alors les solution de (NH) s'écrivent $x(t) = x_p(t) + \lambda e^{A(t)}$. On dit que (NH) est somme d'une solution particulière de (NH) et d'une solution de (H).
$$S_{NH} = \{\text{ensemble des solutions de (NH)}\}$$
$$S_H = \{\text{ensemble des solutions de (H)}\}$$
On a $S_{NH} = x_p(\cdot) + S_H$.
4. Les solutions de (NH) forment un espace affine de dimension 1 dont l'espace vectoriel associé correspond aux solutions de (H).

Preuve :

Preuve des points 1 et 2 : Soit (X, J) une solution maximale de (E) avec $t_0 \in J$.
(Méthode de la variation de la constante) On pose : $x(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ où A est une primitive de a sur I. λ est $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^1$. On dérive :

$$x'(t) = \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)a(t)e^{A(t)}$$

Or $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. Donc :

$$\lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)\lambda(t)e^{A(t)} + b(t)$$
$$\implies \lambda'(t)e^{A(t)} = b(t)$$
$$\implies \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

On intègre entre t_0 et t :

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} \, ds$$

On remplace dans l'expression de $x(t)$:

$$x(t) = \left(\lambda(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} \, ds\right) e^{A(t)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda(t_0)e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(t)}e^{-A(s)}\,ds \\ &= \lambda(t_0)e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(t)-A(s)}\,ds \end{aligned}$$

En posant $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$, en utilisant la formule de Chasles, on a $A(t) - A(s) = \int_s^t a(u)du$.
D'où la formule :

$$x(t) = \lambda e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)\,ds$$

En particulier, puisque la formule ⊛ est valide pour tout $t \in I$ (car les fonctions a et b sont continues sur I tout entier), on en déduit que $J = I$ et donc la solution est globale.
Considérons le problème de Cauchy (C) :

$$(C) \quad \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{avec } t_0 \in I$$

D'après le Thm de Cauchy-Lipschitz, (C) a une unique solution maximale qui est globale (cf. 1°).
On a pour tout $t \in I$:

$$x(t) = \lambda\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)du\right) + \int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds$$

Avec la condition initiale, on trouve $x(t_0) = \lambda = x_0$.
On peut décomposer cette solution en deux parties :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \underbrace{x_0\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)}_{\substack{\text{Solution du problème} \\ \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} b(s)\exp\left(\int_s^t a(u)du\right)ds}_{\substack{\text{Solution du problème} \\ \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}}}$$

Preuve du point 3 (Structure de l'espace) : Soit x_p une solution globale du problème (NH) : $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$. Soit x une solution quelconque globale de (NH). Posons $y(t) = x(t) - x_p(t)$ pour tout $t \in I$. Dérivons y :

$$\begin{aligned} y'(t) &= x'(t) - x_p'(t) \\ &= (a(t)x(t) + b(t)) - (a(t)x_p(t) + b(t)) \\ &= a(t)(x(t) - x_p(t)) = a(t)y(t) \end{aligned}$$

Donc $\tilde{y}$ est solution de l'équation homogène (H) : $\tilde{y}'(t) = a(t)\tilde{y}(t)$.
On a donc $S_{NH} = x_p(\cdot) + S_H$ avec :

$$S_H = \{f : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto x(t) \mid (I, x(\cdot)) \text{ solution de (H)}\}$$

$$S_H = \left\{t \mapsto \lambda\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

On observe que $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in S_H \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in I, x(t) = \lambda\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$.

$$(\lambda_1 x)(t) = \lambda_1 x(t) = \lambda_1\lambda\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

Comme $\lambda_1\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 x \in S_H$.
De même, soient $x_1, x_2 \in S_H$, alors $\exists \lambda_1, \lambda_2$ tels que :

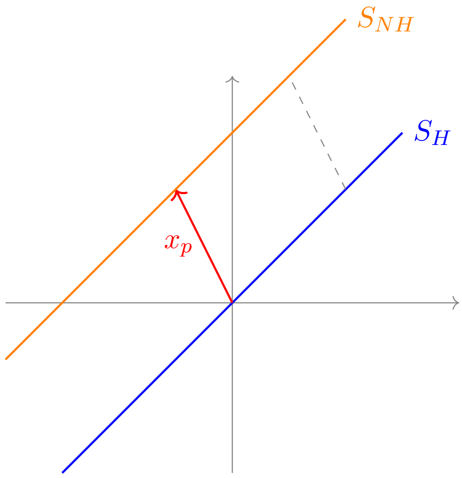
$$x_1(t) = \lambda_1\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

$$x_2(t) = \lambda_2 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \quad \forall t \in I$$
$$x_1(t) + x_2(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)\left(e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}\right)$$
$$\implies x_1 + x_2 \in S_H$$

S_H est un espace vectoriel :

$$S_H = \mathrm{vect}\left\{ {}_{t \mapsto \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)}^{I \to \mathbb{R}} \right\}$$
$$\dim S_H = 1$$

S_H est une droite vectorielle puisque $S_{NH} = x_p + S_H$.



S_{NH} est un espace affine de dimension 1. □

Remarque

Pour calculer les solutions explicites de (NH) :

1. On essaie de trouver une solution particulière $x_p(t)$ (souvent évidente ou de même forme que $b(t)$) et on écrit ensuite la solution générale sous la forme $t \mapsto x_p(t) + \lambda e^{A(t)}$.
2. Si on n'arrive pas à trouver une solution particulière intuitivement, on utilise la **formule de Duhamel** (variation de la constante).

3 Principe de superposition

Proposition 20: Critère de superposition

Soient a, b_1, b_2 des fonctions continues sur I.

- Soit x_1 une solution de $x'(t) = a(t)x(t) + b_1(t)$.
- Soit x_2 une solution de $x'(t) = a(t)x(t) + b_2(t)$.

Alors $x = x_1 + x_2$ est solution du problème :

$$y'(t) = a(t)y(t) + (b_1(t) + b_2(t))$$

Preuve :

Calcul direct :

$$x'(t) = (x_1 + x_2)'(t) = x_1'(t) + x_2'(t)$$
$$= (a(t)x_1(t) + b_1(t)) + (a(t)x_2(t) + b_2(t))$$

$$
\begin{aligned}
&= a(t)(x_1(t) + x_2(t)) + b_1(t) + b_2(t) \\
&= a(t)x(t) + (b_1(t) + b_2(t))
\end{aligned}
$$

□

Exemple 10: Application du principe de superposition

Exercice : Résoudre l'équation :

$$x'(t) = -x(t) + t + e^t$$

On identifie les seconds membres $b_1(t) = t$ et $b_2(t) = e^t$.
On décompose le problème en cherchant des solutions particulières pour :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + t & \text{Forme candidate : } \alpha t + \beta \\ x_2'(t) = -x_2(t) + e^t & \text{Forme candidate : } \alpha e^t \end{cases}$$

V. Principe de Comparaison

1 Sous-solutions et Sur-solutions

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x'(t) = f(t, x(t)) \tag{2}$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est continue sur Ω et localement lipschitzienne en x. On suppose $\Omega = I \times \mathbb{R}$ avec I un intervalle ouvert.

Définition 19: Sous-solutions et Sur-solutions

On définit la notion de sous-solution et sur-solution de (E).
Soit $J \subset I$ un intervalle ouvert.

- On dit que (J, x) est une **sur-solution** de (E) si :

$$\forall t \in J, \quad x'(t) \geq f(t, x(t))$$

- On dit que (J, y) est une **sous-solution** de (E) si :

$$\forall t \in J, \quad y'(t) \leq f(t, y(t))$$

2 Heuristique

On veut résoudre le problème $(C) : x'(t) = f(t, x(t))$. Soit g une fonction de $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (t, x) \in I \times \mathbb{R},\ f(t, x) \leq g(t, x)$.

Si (J, x) est solution maximale de (E) avec $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in J$), alors $\forall t \in J$:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \leq g(t, x(t))$$

Ainsi, (J, x) est une sous-solution du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si g est continue et localement lipschitzienne en x, on va montrer que pour (x_1, J_1) une solution maximale de (C_1) (le problème associé à g), on a :

$$\forall t \in [t_0, \sup J[\cap[t_0, \sup J_1[: \quad x(t) \leq x_1(t)$$

Si $\sup J < +\infty$, alors $\sup J \geq \sup J_1$ ou $x(t) \to -\infty$ quand $t \to \sup J$ (d'après le critère d'explosion).

3 Principe de comparaison

Lorsque l'on définit la notion de sous et sur-solutions, il est entendu que x et y sont dérivables.

Remarque

Si u est une sous-solution de (E) sur J et v est une sur-solution de (E) sur J, alors on a :

$$\forall t \in J, \quad u'(t) \leq f(t, u(t))$$

$$\forall t \in J, \quad v'(t) \geq f(t, v(t))$$

Attention : Cela n'implique pas que $u'(t) \leq v'(t)$.

Exemple 11: Contre-exemple sur les dérivées

Considérons :

$$u(t) = e^t, \quad x(t) = 0, \quad v(t) = -e^{-t}$$

Equation (E) : $x'(t) = 2x(t)$.
u est une sous-solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

$$u'(t) = e^t \leq 2e^t = 2u(t) \quad \text{(Vrai)}$$

v est une sur-solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$?

$$v'(t) = e^{-t} \geq 2(-e^{-t}) = 2v(t) \quad \text{(Vrai pour } t \geq 0\text{)}$$

Cependant, regardons l'ordre des dérivées : $u'(t) = e^t$ et $v'(t) = e^{-t}$. On n'a pas nécessairement d'ordre simple entre elles (dépend du signe de t et de l'équation).
Ici, on a bien u sous-solution, v sur-solution, et x solution de (E). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = e^t \leq 2e^t = 2u(t)$ et $v'(t) = e^{-t} \geq -2e^{-t} = 2v(t)$.

3.1 Cas Linéaire

Proposition 21: Principe de comparaison (Cas linéaire)

Soient a et b des fonctions continues sur I. Soit u une sous-solution et v une sur-solution de :

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

Alors :

$$\text{Si } u(t_0) \leq v(t_0), \quad \text{alors } u(t) \leq v(t) \quad \forall t \geq t_0 \text{ (dans l'intervalle de définition)}$$

Remarque

Si u est définie sur $t \in]T_0, \tilde{T}_0[$ et v est définie sur $t \in]T_1, \tilde{T}_1[$. On considère $t \in [t_0, +\infty[\cap]T_0, \tilde{T}_0[\cap]T_1, \tilde{T}_1[$.

Preuve :

Considérons $w(t) = v(t) - u(t)$ pour t dans l'intersection des domaines. w est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$w'(t) = v'(t) - u'(t)$$

Or $v'(t) \geq a(t)v(t) + b(t)$ (sur-solution) et $u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t)$ (sous-solution). Donc :

$$w'(t) \geq (a(t)v(t) + b(t)) - (a(t)u(t) + b(t))$$

$$w'(t) \geq a(t)(v(t) - u(t)) = a(t)w(t)$$

On a donc l'inégalité différentielle $w'(t) - a(t)w(t) \geq 0$.
Soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$. Posons $z(t) = e^{-A(t)}w(t)$. Dérivons $z(t)$:

$$z'(t) = -a(t)e^{-A(t)}w(t) + e^{-A(t)}w'(t)$$

$$z'(t) = e^{-A(t)}(w'(t) - a(t)w(t))$$

Comme $e^{-A(t)} > 0$ et $w'(t) - a(t)w(t) \geq 0$, on a :

$$z'(t) \geq 0 \quad \forall t \in]T_0, \tilde{T}_0[\cap]T_1, \tilde{T}_1[$$

Donc z est croissante sur cet intervalle (Théorème des accroissements finis).
On a supposé $u(t_0) \leq v(t_0)$, donc $w(t_0) = v(t_0) - u(t_0) \geq 0$. Ainsi $z(t_0) = w(t_0)e^{-A(t_0)} \geq 0$.
Comme z est croissante, pour tout $t \geq t_0$, $z(t) \geq z(t_0) \geq 0$. Or $z(t) = e^{-A(t)}w(t)$ et $e^{-A(t)} > 0$, donc $w(t) \geq 0$. C'est-à-dire $v(t) \geq u(t)$ pour tout $t \geq t_0$. $\square$

Remarque

Si $u'(t) \leq a(t)u(t)$ pour tout $t \geq t_0$, alors u est une sous-solution du problème homogène (H) : $y'(t) = a(t)y(t)$. Soit v la solution du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(0) = u(0) \end{cases}$$

u est sous-solution de (H), v est solution (donc sur-solution) de (H). En appliquant le résultat précédent en $t_0 = 0$ (car $v(0) = u(0)$), on peut écrire :

$$\forall t \geq 0, \quad u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t a(s)ds} = v(t)$$

C'est l'**Inégalité de Gronwall**.

3.2 Cas Non-Linéaire

Proposition 22: Principe de comparaison (Cas général)

Soit $f \in \mathcal{C}^1$ (ou $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et localement lipschitzienne en x). Soit u une sous-solution et v une sur-solution du problème :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Si $u(t_0) \leq v(t_0)$, alors :

$$\forall t \geq t_0, \quad u(t) \leq v(t)$$

Preuve :

Posons $w(t) = v(t) - u(t)$. On a $w'(t) = v'(t) - u'(t)$. D'après les définitions :

$$\forall t, \quad v'(t) \geq f(t, v(t))$$

$$\forall t, \quad u'(t) \leq f(t, u(t))$$

Donc :

$$w'(t) \geq f(t, v(t)) - f(t, u(t))$$

On veut factoriser cette différence.

$$f(t, v(t)) - f(t, u(t)) = a(t)(v(t) - u(t))$$

où l'on définit la fonction $a(t)$ par :

$$a(t) = \begin{cases} \frac{f(t,v(t)) - f(t,u(t))}{v(t) - u(t)} & \text{si } v(t) \neq u(t) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t)) & \text{si } v(t) = u(t) \end{cases}$$

Si $u(t) \neq v(t)$:

$$f(t, v(t)) - f(t, u(t)) = a(t)(v(t) - u(t))$$

Si $u(t) = v(t)$:

$$f(t, v(t)) - f(t, u(t)) = 0$$

Supposons que a est continue. Alors on peut appliquer la proposition précédente (cas linéaire). Pour tout $t \geq t_0$, on compare $w(t)$ avec la solution w_1 du problème :

$$\begin{cases} z'(t) = a(t)z(t) \\ z(t_0) = w(t_0) \end{cases}$$

w est une sur-solution de $z' = a(t)z$ (car $w' \geq aw$) et w_1 est une solution (donc sous-solution). Or $w(t_0) = v(t_0) - u(t_0) \geq 0$. Et la solution explicite est $w_1(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Comme $w(t_0) \geq 0$ et l'exponentielle est positive, $w_1(t) \geq 0$.
Le principe de comparaison linéaire implique $w(t) \geq w_1(t) \geq 0$. Donc $v(t) \geq u(t)$ pour tout $t \geq t_0$.
Montrons que a est une fonction continue.

- Si $u(t^*) \neq v(t^*)$, alors a est continue en t^* car, dans un voisinage de t^*, a est le quotient de fonctions continues et $v(t) - u(t) \neq 0$. On a utilisé le fait que f, u, v sont continues.
- Que se passe-t-il si $u(t^*) = v(t^*)$? Montrons que a est continue en t^*.
  Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} t^*$.

  $$a(t_n) = \frac{f(t_n, v(t_n)) - f(t_n, u(t_n))}{v(t_n) - u(t_n)} \quad \text{si } v(t_n) \neq u(t_n).$$

  On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $g : x \longmapsto f(t_n, x)$. Sa dérivée est $g'(x) = \partial_x f(t_n, x)$.
  On obtient :
  $$f(t_n, v(t_n)) - f(t_n, u(t_n)) = \partial_x f(t_n, c_n)(v(t_n) - u(t_n))$$
  où $c_n \in]\min(u(t_n), v(t_n)), \max(u(t_n), v(t_n))[$. Soit $O =]\min(u(t_n), v(t_n)), \max(u(t_n), v(t_n))[$, $c_n \in O$
  Ainsi, on a :
  $$a(t_n) = \partial_x f(t_n, c_n).$$
  De plus, si $u(t_n) = v(t_n)$, alors par définition $a(t_n) = \partial_x f(t_n, u(t_n))$.
  Puisque $\partial_x f$ est continue et que :

  $$\left.\begin{array}{ll} t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} t^* & \\ v(t_n) \to v(t^*) & \text{car } \forall n \in \mathbb{N}^*, c_n \in O \\ u(t_n) \to u(t^*) & \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{avec } u(t_n) \to u(t^*) \\ \text{et } v(t_n) \to v(t^*) \\ \text{par continuité de } u \text{ et } v \text{ en } t^*. \end{array}$$

  On en déduit que $c_n \to v(t^*)$ (ou $u(t^*)$ car ils sont égaux).
  Par conséquent, $a(t_n) \to \partial_x f(t^*, v(t^*)) = a(t^*)$.

La fonction a est donc continue, ce qui valide l'étape précédente de la preuve. □

Remarque

On a simplement utilisé le fait que f est continue et que la seconde dérivée $\partial_x f$ existe et est continue. On a besoin de moins que $f \in \mathcal{C}^1$.

Proposition 23

Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante en la seconde variable $(t, x) \longmapsto f(t, x)$.
Soit $u : J \to \mathbb{R}$ (J intervalle ouvert avec $J \subset I$, I intervalle ouvert) continue telle que :

$$\forall t \geqslant t_0, \quad u(t) \leqslant k + \int_{t_0}^t f(s, u(s))\,\mathrm{d}s$$

Alors $\forall t \geqslant t_0, u(t) \leqslant v(t)$ avec v solution du problème (C) :

$$(C)\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(t_0) = k \end{cases}$$

Preuve :

Posons $U(t) = k + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,\mathrm{d}s$. On a alors :

$$(1)\begin{cases} U'(t) = f(t, u(t)) \\ U(t_0) = k \end{cases} \tag{3}$$

On sait que $u(t) \leqslant U(t)$ pour tout $t \geqslant t_0$. Par croissance de f sur la seconde variable, on a :

$$(2)\ f(t, u(t)) \leqslant f(t, U(t)) \tag{4}$$

Ainsi, $(1) + (2)$ impliquent :

$$\begin{cases} U'(t) \leqslant f(t, U(t)) \\ U(t_0) = k \end{cases}$$

D'autre part, v est solution de (C), donc aussi une sur-solution (une solution exacte est à la fois sous et sur-solution), avec $v(t_0) = k \geqslant k = U(t_0)$.
En appliquant le résultat précédent (on peut car $f \in \mathcal{C}^1$), on a :

$$\forall t \geqslant t_0, \quad U(t) \leqslant v(t) \implies \forall t \geqslant t_0, \quad u(t) \leqslant v(t)$$

car $u(t) \leqslant U(t)$ (par définition de l'inégalité intégrale initiale). $\square$

Remarque

Cette proposition demande plus d'hypothèses sur la fonction f car on suppose en plus que f est croissante en la seconde variable.
Par contre, on ne demande aucune hypothèse de régularité sur u si ce n'est que u est continue.

Proposition 24: Principe de comparaison sous forme intégrale (Cas linéaire)

Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues, a positive.
Soit $u : J \to \mathbb{R}$ telle qu'on a $\forall t \geqslant t_0$:

$$u(t) \leqslant k + \int_{t_0}^{t} (a(s)u(s) + b(s))\,\mathrm{d}s$$

Alors $\forall t \geqslant t_0, u(t) \leqslant v(t)$ avec v solution du problème :

$$\begin{cases} v'(t) = a(t)v(t) + b(t) \\ v(t_0) = k \end{cases}$$

Remarque

Ici on considère $f(t, x) = a(t)x + b(t)$ qui n'est pas $\mathcal{C}^1$, on ne peut pas facilement appliquer la proposition précédente.

Preuve :

Même raisonnement.
Posons $U(t) = k + \int_{t_0}^{t} (a(s)u(s) + b(s))\,\mathrm{d}s$.
En dérivant, on obtient :

$$U'(t) = a(t)u(t) + b(t).$$

Or, on sait que $\forall t \geqslant t_0, U(t) \geqslant u(t)$. Puisque $a(t) \geqslant 0$, cela implique :

$$a(t)U(t) \geqslant a(t)u(t).$$

Par conséquent, en remplaçant dans l'expression de la dérivée :

$$U'(t) \leqslant a(t)U(t) + b(t).$$

U est donc une sous-solution de (E) :

$$(E) \quad z'(t) = a(t)z(t) + b(t).$$

L'équation (E) admet une unique solution globale (cas linéaire) car on est bien dans le cadre de Cauchy-Lipschitz (f est continue et localement lipschitzienne en x).
En appliquant la proposition (cas linéaire) du principe de comparaison, on a :

- U est une sous-solution.
- v est solution, donc sur-solution.
- $U(t_0) = k \leqslant k = v(t_0)$.

On en déduit que $\forall t \geqslant t_0, U(t) \leqslant v(t)$.
Et finalement, comme $u(t) \leqslant U(t)$, on a bien :

$$\forall t \geqslant t_0, \quad u(t) \leqslant v(t).$$

□

4 Application du problème de l'existence globale

Corollaire 6

a. Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues avec $a(t) \geqslant 0, \forall t \in I$.
Soit $X : J \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Si $\forall t \geqslant t_0, \|X'(t)\| \leqslant a(t)\|X(t)\| + b(t)$, alors $\|X(t)\| \leqslant v(t)$ où v est solution de :

$$\begin{cases} v'(t) = a(t)v(t) + b(t) \\ v(t_0) = \|X(t_0)\| \end{cases}$$

b. Soit $F : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue et localement Lipschitz en x, définie par $(t, x) \mapsto F(t, x)$.
Si :

$$\forall (t, x) \in J \times \mathbb{R}^d, \quad \|F(t, x)\| \leqslant a(t)\|x\| + b(t)$$

alors les solutions satisfaisant $X'(t) = F(t, X(t))$ sont globales.

Preuve :

a. On a l'expression intégrale suivante :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} X'(s)\,\mathrm{d}s$$

Et pour $t \geqslant t_0$, par l'inégalité triangulaire :

$$\|X(t)\| \leqslant \|X(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|X'(s)\|\,\mathrm{d}s$$

En utilisant l'hypothèse sur la dérivée, on obtient :

$$\forall t \geqslant t_0, \quad \|X(t)\| \leqslant \underbrace{\|X(t_0)\|}_{k} + \int_{t_0}^{t} (a(s)\|X(s)\| + b(s))\,\mathrm{d}s$$

Comme $a(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in I$, on peut appliquer le principe de comparaison sous forme intégrale dans le cas linéaire. On en déduit que :

$$\forall t \geqslant t_0, \quad \|X(t)\| \leqslant v(t)$$

b. Soit (J, X) solution maximale du problème $Y'(t) = F(t, Y(t))$. On a :

$$X'(t) = F(t, X(t))$$

$$\|X'(t)\| = \|F(t, X(t))\| \leqslant a(t)\|X(t)\| + b(t)$$

D'après le point **a)**, on en déduit que :

$$\forall t \geqslant t_0, \quad \|X(t)\| \leqslant v(t) \quad \text{avec } v \text{ solution de } \begin{cases} v'(t) = a(t)v(t) + b(t) \\ v(t_0) = \|X(t_0)\| \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que $\sup J < \sup I$.
Alors, d'après le critère d'explosion, $\|X(t)\| \xrightarrow[t \to \sup J]{} +\infty$.
Ce qui est absurde car $\forall t \geqslant t_0, \|X(t)\| \leqslant v(t)$, donc $\|X(\cdot)\|$ ne peut pas exploser en $\sup J$ (car v est définie et continue sur I, donc bornée sur le segment $[t_0, \sup J]$).
Même raisonnement pour montrer que $\inf J = \inf I$. $\square$

Exercice

Penser à inverser le sens du temps.

Applications

Nous distinguons ici les cas selon la puissance α intervenant dans la majoration de la fonction F.

- **Croissance linéaire** ($\alpha = 1$) **:**
  $\|F(t,x)\| \leqslant a(t)\|x\| + b(t)$.
- **Croissance sous-linéaire** ($0 < \alpha < 1$) **:**
  $\|F(t,x)\| \leqslant a(t)\|x\|^\alpha + b(t)$ ou $\|F(t,x)\| \leqslant s + \|x\|$.
- **Croissance sur-linéaire** ($\alpha > 1$) **:**
  $\|F(t,x)\| \leqslant a(t)\|x\|^\alpha + b(t)$.

Corollaire 7: Corollaire (Explosion en temps fini)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement Lipschitz.
Soit x la solution maximale de $x'(t) = f(x(t))$ telle que $x(t) \xrightarrow[t \to \sup J]{} +\infty$.
Si $\exists \alpha > 1$ et $\bar{x} > 0$ tels que $f(x) \geqslant x^\alpha$ pour tout $x \geqslant \bar{x}$, alors $\sup J < +\infty$.

Preuve :

La solution maximale que l'on considère satisfait $x(t) \xrightarrow[t \to \sup J]{} +\infty$. Cela implique qu'il existe $\bar{t} \in J$ tel que :

$$\forall t \geqslant \bar{t}, \quad \begin{cases} x(t) \geqslant \bar{x} \geqslant 0 \\ x'(t) = f(x(t)) \geqslant |x(t)|^\alpha \end{cases}$$

Puisque x est solution sur $[\bar{t}, \sup J[$ du problème $y'(t) = (y(t))^\alpha$ (notons que $\rho(x) = |x|^\alpha$ est $\mathcal{C}^1$ car $\alpha > 1$).
D'après le principe de comparaison, on en déduit que $\forall t \geqslant \bar{t}$, $x(t) \geqslant v(t)$ sur l'intervalle $t \in [\bar{t}, \sup J[\cap [\bar{t}, \sup \tilde{J}[$, avec v solution de :

$$\begin{cases} v'(t) = (v(t))^\alpha \\ v(\bar{t}) = \bar{x} \end{cases}$$

En effet, on peut appliquer le théorème car v est bien solution (donc sous-solution) et on a : $x(\bar{t}) \geqslant \bar{x} = v(\bar{t})$.
On sait, puisque $\alpha > 1$ et $v(\bar{t}) = \bar{x} > 0$, que la solution maximale v est définie sur un intervalle $]-\infty, \sup \tilde{J}[$ avec $\sup \tilde{J} < +\infty$ (phénomène d'explosion en temps fini pour les équations sur-linéaires).
Puisque $\forall t \in [\bar{t}, \sup J[\cap [\bar{t}, \sup \tilde{J}[$, on a $x(t) \geqslant v(t)$. Par continuité (et par le fait que v explose vers $+\infty$ en $\sup \tilde{J}$), on en déduit que :

$$\sup J \leqslant \sup \tilde{J} < +\infty.$$

□

Exemple 12: Explosion en temps fini (cas polynômial)

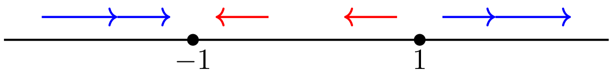
Soit $x_0 > 1$ et (J, x) la solution maximale du problème :

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - 1 \\ x(0) = x_0 \quad (x_0 > 1) \end{cases}$$

Ici $f(x) = x^2 - 1$. Alors $\sup J < +\infty$.

Preuve :

Étudions la ligne de phase. Le signe de $x^2 - 1$ est positif à l'extérieur des racines $\{-1, 1\}$ et négatif à l'intérieur.



Note : Le schéma ci-dessus représente le signe de la dérivée. Flèche vers la droite = fonction croissante, flèche vers la gauche = fonction décroissante.
Pour $x_0 > 1$, l'étude de la ligne de phase nous indique que :

$$\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to \sup J]{} +\infty \\ x(t) \xrightarrow[t \to \inf J]{} 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \inf J = -\infty.$$

Regardons le comportement en $+\infty$:

$$f(x) = x^2 - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2.$$

Il existe $\bar{x} > 0$ tel que $\forall x \geqslant \bar{x}$, $f(x) \geqslant x^{4/3}$ (on choisit cet exposant car $1 < \frac{4}{3} < 2$).
On peut appliquer le résultat précédent (Corollaire sur l'explosion en temps fini avec $\alpha > 1$) et donc $\sup J < +\infty$. $\square$

Exemple 13: Explosion en temps inverse (Logistique inversée)

Soit $x_0 > 1$ et (J, x) la solution maximale du problème :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

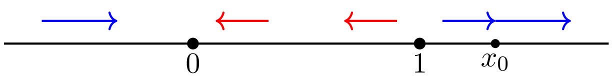
Alors $\inf J > -\infty$.

Preuve :

Soit (J, x) avec $J =]a, b[$ et $0 \in J$. Posons $v(t) = x(-t)$. Alors :

$$\begin{aligned} v'(t) &= -x'(-t) \\ &= -[x(-t)(1 - x(-t))] \\ &= -v(t)(1 - v(t)) \\ &= v(t)(v(t) - 1) \end{aligned}$$

Donc $v'(t) = f(v(t))$ où $f(x) = x(x-1)$.
Étudions la ligne de phase pour v. Les racines sont 0 et 1. Le signe de $x(x-1)$ est positif si $x > 1$ ou $x < 0$, négatif si $0 < x < 1$.



L'étude de la ligne de phase nous dit que $v(t) \xrightarrow[t \to \sup \tilde{J}]{} +\infty$ car $v(0) = x_0 > 1$.

On a le comportement asymptotique :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2.$$

Donc $\exists \bar{x} > 0$ tel que $\forall x \geqslant \bar{x}$, $f(x) \geqslant x^{3/2}$ (avec $\alpha = 3/2 > 1$).
En appliquant le résultat précédent, on en déduit que $\sup \tilde{J} = -a < +\infty$. Ceci implique que $a > -\infty$, et donc $\inf J > -\infty$. $\square$

Exemple 14: Stabilité asymptotique avec perturbation

Soit (J, x) la solution maximale du problème :

$$x'(t) = -x(t) + \varepsilon(t)$$

avec $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
Alors $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Preuve :

On a $J = \mathbb{R}$ car x est solution maximale d'un problème linéaire (existence globale).
Puisque $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, par définition de la limite :

$$\forall \eta > 0, \exists \bar{t} > 0, \forall t \geqslant \bar{t}, \quad -\eta \leqslant \varepsilon(t) \leqslant \eta.$$

On injecte cet encadrement dans l'équation différentielle :

$$\forall t \geqslant \bar{t}, \quad -x(t) - \eta \leqslant x'(t) \leqslant -x(t) + \eta.$$

Pour $t \geqslant \bar{t}$, on compare x aux solutions des équations différentielles bornantes :

- x est une **sous-solution** du problème $z'(t) = -z(t) + \eta$ (car $x'(t) \leqslant -x(t) + \eta$).
- x est une **sur-solution** du problème $z'(t) = -z(t) - \eta$ (car $x'(t) \geqslant -x(t) - \eta$).

Considérons les systèmes suivants pour $t \geqslant \bar{t}$:

$$\begin{cases} z_1'(t) = -z_1(t) + \eta \\ z_1(\bar{t}) = x(\bar{t}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z_2'(t) = -z_2(t) - \eta \\ z_2(\bar{t}) = x(\bar{t}) \end{cases}$$

On en déduit par le principe de comparaison que :

$$\forall t \geqslant \bar{t}, \quad z_2(t) \leqslant x(t) \leqslant z_1(t).$$

En étudiant la ligne de phase associée à z_1, c'est-à-dire $z_1'(t) = f(z_1(t))$ avec $f(u) = -u + \eta$ ... $\square$