

Diplomado en Análisis de Información Geoespacial

Método Kriging de inferencia espacial

Autor:
M. en G. Alberto Porras Velázquez

Introducción

Kriging es un método de inferencia espacial, el cual nos permite estimar los valores de una variable en lugares no muestreados utilizando la información proporcionada por la muestra.

El método está planteado de manera que nos da el mejor estimador lineal no sesgado con una varianza mínima. Hay que ser cuidadosos de no mal interpretar lo anterior, ya que puede haber mejores estimadores que los obtenidos con Kriging pero con características diferentes: con sesgo, por ejemplo.

La aplicación del método Kriging supone que contamos con N valores observados $z(x_1), \dots, z(x_N)$ a nuestra disposición y deseamos estimar una función lineal de la variable $Z(x)$. Por ejemplo, su promedio en una región determinada Z_v . Esta cantidad la podemos denominar mediante la expresión:

$$z_v = \frac{1}{V} \int_V z(x) dx$$

En donde V puede ser desde todo un depósito o un simple punto.

Para estimar Z_v , consideramos un promedio ponderado de los datos:

$$z_v^* = \sum \lambda_i z(x_i) \text{ en donde } \lambda_i \text{ son los pesos asignados}$$

El símbolo “*” se usa para denotar una estimación. El problema reside en obtener los pesos de la mejor forma. Es aquí en donde utilizamos el modelo geoestadístico, considerando la variable regionalizada.

Anteriormente se mencionó que el método Kriging obtiene la mejor estimación no sesgada de una variable, esto se expresa matemáticamente como:

$$E[Z_V^* - Z_V] = 0$$

Es decir, el promedio (valor esperado $E[]$) de la población de diferencias entre los valores estimados y los valores reales de la variable debe ser cero.

Por otro lado, una segunda condición establece que la varianza del estimador debe ser mínima, esto es:

$$Var[Z_V^* - Z_V] \text{ es un mínimo}$$

La media del error de estimación $E[Z_V^* - Z_V]$ se puede expresar de la forma

$$E\left[\sum \lambda_i Z(x_i) - Z_V\right] = \sum \lambda_i m - m = m\left[\sum \lambda_i - 1\right]$$

En donde $Z_V^* = \sum \lambda_i Z(x_i)$ es una combinación lineal de los valores observados $z(x_i)$ y las λ_i corresponden a los pesos asignados a cada observación.

Para que no exista sesgo, el valor esperado del error debe ser 0, así que en la expresión de la media del error de estimación o $m = 0$ o los pesos λ_i deben sumar 1. En el primer caso la media es conocida, hecho que conduce al método Kriging simple (KS). Si m es desconocido y las λ_i suman 1, entonces la solución se obtiene por el método Kriging ordinario (KO).

Como se mencionó anteriormente, se debe cumplir la condición de que la varianza del error $[Z_v^* - Z_v]$ sea mínima. Esta varianza mínima se conoce como varianza de Kriging y se expresa como

$$\sigma_k^2 = \sum \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \bar{\gamma}(V, V) + \mu$$

La derivación de la expresión anterior se da mediante procedimientos de álgebra lineal, introduciendo los multiplicadores de Lagrange (μ). Para conocer a detalle los pasos para obtener la varianza de Kriging se puede consultar el capítulo 7 del libro de Armstrong (1998) o el capítulo 5 del libro de Goovaerts (1997).

Las ecuaciones obtenidas para el caso del Kriging ordinario son:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \gamma(x_i, x_j) + \mu = \bar{\gamma}(x_i, V) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

En donde λ_j será el peso asignado a cada observación j en la combinación lineal del estimador. $\gamma(x_i, x_j)$ es el valor de la función del modelo teórico del variograma obtenido en el análisis estructural, mismo que depende de la distancia de separación entre x_i y x_j . $\gamma(x_i, V)$ es el valor de la función del variograma evaluado para la distancia de separación entre la observación x_i y el punto o volumen a interpolar V . El sistema anterior se puede expresar de manera equivalente en términos matriciales como

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & \gamma_{NN} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_N \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_1, V) \\ \gamma(x_2, V) \\ \dots \\ \gamma(x_N, V) \\ 1 \end{bmatrix}$$

En donde la primera matriz la podemos denominar como A, misma que se multiplica con un vector de pesos λ , dando como resultado una matriz a la que llamamos B, es decir, tenemos un sistema de la forma $A \lambda = B$.

Como se ha visto, el valor interpolado para un punto es una combinación lineal,

$$z_V^* = \sum \lambda_i z(x_i) \text{ en donde } \lambda_i \text{ son los pesos asignados}$$

de manera que hay que despejar los pesos λ del sistema $A \lambda = B$.

$$A^{-1} A \lambda = A^{-1} B$$

Es decir

$$\lambda = A^{-1} B$$

En donde A^{-1} es la matriz inversa de A, es decir,

$$A A^{-1} = I$$

En donde I es la matriz identidad.

En la práctica referida a este tema se ejemplifica la aplicación de este procedimiento.

Método de interpolación por pesos ponderados por el inverso de la distancia (IDW)

Un método no geoestadístico ampliamente utilizado es aquel en donde la interpolación se da a partir de pesos ponderados de acuerdo con la distancia (IDW), este método calcula el promedio ponderado

$$Z^*(s_0) = \frac{\sum_{i=1}^n w(s_i)Z(s_i)}{\sum_{i=1}^n w(s_i)}$$

Para obtener la estimación $Z^*(s_0)$ en la ubicación s_0 , los pesos asignados para las observaciones son calculados de acuerdo con su distancia al lugar de la interpolación

$$w(x_i) = ||s_i - s_0||^{-p}$$

Con $||$ indicando la distancia euclidiana y p una potencia inversa (por default se usa $p = 2$). Al igual que el caso del método Kriging, si s_0 coincide con la ubicación de una observación i , entonces el valor que da la interpolación es igual al observado.

La interpolación por IDW resulta en mapas similares a los obtenidos mediante el método Kriging cuando se utiliza un variograma con efecto pepita pequeño o nulo.

En contraste con el método Kriging, las distancias a la ubicación de la predicción ignoran la configuración espacial de las observaciones. Este hecho puede conducir a efectos no deseados si las ubicaciones de las observaciones están muy agrupadas en una zona.

Otra diferencia es que el método garantiza que los pesos tengan un valor entre 0 y 1, resultando en valores interpolados que no están fuera del rango de los valores observados.

Referencias

- Armstrong, M. (1998). Basic Linear Geostatistics. Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- Bivand R.S., Pebesma, E. & Gómez-Rubio, V. (2013). Applied Spatial Data Analysis with R (2ed). New York, United States of America: Springer.
- Goovaerts, P. (1997). Geostatistics for Natural Resources Evaluation. New York, United States of America: Oxford University Press.