

1.5. Minimizarea funcțiilor logice

Elaborarea dispozitivelor numerice în baza funcțiilor prezentate în formatele FCND și FCNC în majoritatea cazurilor nu este justificată deoarece se obțin scheme electrice cu surplus de elemente logice. Pentru a micșora numărul de elemente logice în schema electrică se execută procedura de minimizare/simplificare a funcției logice. Minimizarea funcției logice este o procedură obligatorie a procesului de proiectare al dispozitivelor numerice. Dispozitivele numerice construite în baza funcțiilor logice minimizate spre deosebire de dispozitivele numerice construite în baza funcțiilor logice inițiale neminimizate au următoarele avantaje:

- a) conțin mai puține elemente logice;
- b) consumă mai puțină energie electrică;
- c) viteza de lucru a dispozitivului este mai mare;
- d) masa, gabaritele dispozitivului sunt mai mici;
- e) prețul dispozitivului devine mai mic.

Definiție. Minimizarea funcției logice reprezintă o procedură de simplificare cu scopul de a obține forma cea mai simplă a funcției logice.

În prezent sunt cunoscute mai multe metode de minimizare ale funcțiilor logice:

- a) metoda algebrică;
- b) metoda tabelelor Veitch-Karnaugh;
- c) metoda cuburilor;
- d) metoda Quin-McCluskey;
- e) metoda coeficienților nedeterminați și altele.

Pentru majoritatea metodelor de minimizare ale funcțiilor logice sunt elaborate programe specializate.

În continuare v-or fi prezentate metoda algebrică și metoda tabelelor Veitch-Karnaugh de minimizare ale funcțiilor logice.

Metoda algebrică de minimizare a funcțiilor logice utilizează axiomele și teoremele algebrei logicii și poate fi folosită pentru minimizarea funcțiilor logice cu un număr de variabile relativ mic.

Exemplu. De minimizat funcția logică, utilizând metoda algebrică

$$F(a,b,c) = \bar{a} \times b \times \bar{c} + \bar{a} \times b \times c + a \times \bar{b} \times c + a \times \bar{b} \times \bar{c} = \bar{a} \times b \times (\bar{c} + c) + a \times \bar{b} \times (c + \bar{c}) = \bar{a} \times b + a \times \bar{b} = \bar{a}b + a\bar{b}.$$

În fig. 1.18 sunt prezentate schemele electrice în baza funcției logice pînă și după minimizare.

Fig. 1.18. Schemele electrice construite în baza funcției logice pînă și după minimizare.

Metoda tabelelor Veitch-Karnaugh utilizează pentru minimizarea funcțiilor logice tebele de mintermeni. Numărul de celule în tablele de mintermeni depinde de numărul de variabile (ordinul) funcției logice supuse minimizării și este determinat conform formulei $N_{cel} = 2^m$, unde m reprezintă numărul de variabile. Mintermenii prezenți în formula pentru funcția logică sunt introduși în tabelul de mintermeni ca 1.

1. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu o singură variabilă, $F(a) = \bar{a}$, are 2 celule (vezi fig. 1.19).

a	0	1
	1	

Fig. 1.19. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu o singură variabilă.

2. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 2 variabile, $F(a, b) = \bar{a}b + a\bar{b}$, are 4 celule (vezi fig. 1.20).

$b \backslash a$	0	1
0		1
1	1	

Fig. 1.20. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 2 variabile.

3. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 3 variabile, $F(a, b, c) = \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c}$, are 8 celule (vezi fig. 1.21). Tabelul de mintermeni poate fi prezentat în poziție orizontală sau în poziție verticală.

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0				1
1		1		

Fig. 1.21. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 3 variabile.

1. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 4 variabile are 16 celule. Drept exemplu se propune pentru minimizare următoarea funcție logică

$$F(a, b, c, d) = \Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14). \quad (3)$$

Conform formulei (3) schema electrică conține 3 elemente NU, 13 elemente ȘI și un element SAU.

Introducem mintermenii în tabel (vezi fig. 1.22).

$cd \backslash ab$	00	01	11	10	
00	1	1	1	1	1 1 0 0
01	1		1	1	1 0 0 1
11	1	1			
10	1	1	1	1	1 0 1 0
					0 0 1 0
					0 0 0 0

Fig. 1.22. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 4 variabile.

Proprietățile tabelului de mintermeni depind de scrierea corectă a consecutivității valorilor variabilelor poziționate orizontal și vertical: a) orizontal – ab (00, 01, 11, 10); vertical – cd (00, 01, 11, 10). Dacă consecutivitățile valorilor variabilelor poziționate orizontal sau/și vertical sunt scrise altfel, atunci așa tabel nu poate fi utilizat pentru minimizarea funcțiilor logice.

Conform tabelului de mintermeni pentru o funcție logică cu 4 variabile pot fi evidențiate următoarele proprietăți (proprietățile prezentate mai jos sunt valabile pentru tabelele de mintermeni/funcții logice cu orice număr de variabile):

1. mintermenii vecini, poziționați orizontal sau vertical, se deosebesc cu o singură stare;
2. mintermenii, poziționați în același rând sau aceeași coloană la frontiera tabelului, se deosebesc cu o singură stare;
3. mintermenii care se deosebesc numai cu o singură stare, indiferent unde sunt poziționați în tabel, se mai numesc „vecini” și pot forma grupe de mintermeni;
4. mintermenii, poziționați pe diagonală, se deosebesc cu 2 și mai multe stări și nu sunt vecini.

Procesul de minimizare a funcției logice include următoarele etape:

1. Pregătirea tabelului de mintermeni (în fig. 1.23 este prezentat tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 4 variabile).

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Fig. 1.23. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 4 variabile.

2. Introducerea mintermenilor în tabel (în tabelul din fig. 1.24 sunt introduși mintermenii funcției (3)).

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1		1	1
11	1	1		
10	1	1	1	1

Fig. 1.24. Tabelul de mintermeni completat cu unități.

3. Formarea grupurilor de mintermeni (vezi fig. 1.25). În procesul formării grupurilor de mintermeni trebuie de ținut cont de următoarele reguli:
- numărul de celule în grup poate avea numai următoarele valori $N_{cel} = 2^l$, unde $l = 0, 1, 2, 3, \dots$;
 - în grup pot fi incluse numai celulele cu unități;
 - în grup trebuie inclus un număr maximal posibil de celule;
 - grupurile formate se pot suprapune (celulele unui grup pot fi parte componentă ale altor grupuri);
 - de respectat condiția de simetrie a configurației grupului format în raport cu linia de centru a tabelului sau numărul de celule în grup de pe ambele părți a liniei de centru al tabelului trebuie să fie același.
4. Notarea grupurilor. Pentru notarea grupurilor pot fi utilizate oricare litere cu indice. În fig. 1.25 grupurile sunt notate prin k_0, k_1, k_2 și k_3 .

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1		1	1
11	1	1		
10	1	1	1	1

Fig. 1.25. Tabel cu grupuri din mintermeni egali cu 1.

5. Scrierea pentru fiecare grup de mintermeni a unui produs din variabilele care nu-și schimbă starea. Conform grupurilor formate în fig. 1.25 pentru k_0, k_1, k_2 și k_3 obținem:

$$k_0 = \bar{a}\bar{b}; \quad k_1 = \bar{a}c; \quad k_2 = a\bar{c}; \quad k_3 = \bar{d}.$$

6. Scrierea formulei pentru funcția logică minimizată.

$$F(a, b, c, d) = k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}c + a\bar{c} + \bar{d}. \quad (4)$$

Conform formulei (4) schema electrică conține 3 elemente NU, 3 elemente ȘI și un element SAU.

Formula (4) a fost obținută prin gruparea mintermenilor egali cu 1. Funcția logică poate fi minimizată și prin gruparea mintermenilor egali cu 0 (vezi fig. 1.26). În acest caz pentru fiecare grup este necesar de scris o sumă din variabilele care nu-și schimbă starea, iar variabilele se scriu în starea inversată în comparație cu starea care au avut-o în tabel.

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Fig. 1.26. Tabel cu grupuri din mintermeni egali cu 0.

Conform grupurilor formate în fig. 1.26 pentru l_0 și l_1 obținem:

$$l_0 = a + \bar{b} + c + \bar{d}; \quad l_1 = \bar{a} + \bar{c} + \bar{d};$$

Formula pentru funcția logică minimizată se scrie ca produsul mărimilor l_0 și l_1 :

$$F(a, b, c, d) = l_0 \times l_1 = (a + \bar{b} + c + \bar{d}) \times (\bar{a} + \bar{c} + \bar{d}). \quad (5)$$

Conform formulei (5) schema electrică conține 3 elemente NU, 1 element ȘI și 2 elemente SAU.

În fig. 1.27(a,b,c) sunt prezentate schemele electrice, construite conform funcțiilor (3), (4) și (5). Tabelele de adevăr, obținute cu ajutorul Convertorului Logic, demonstrează că schemele sunt echivalente.

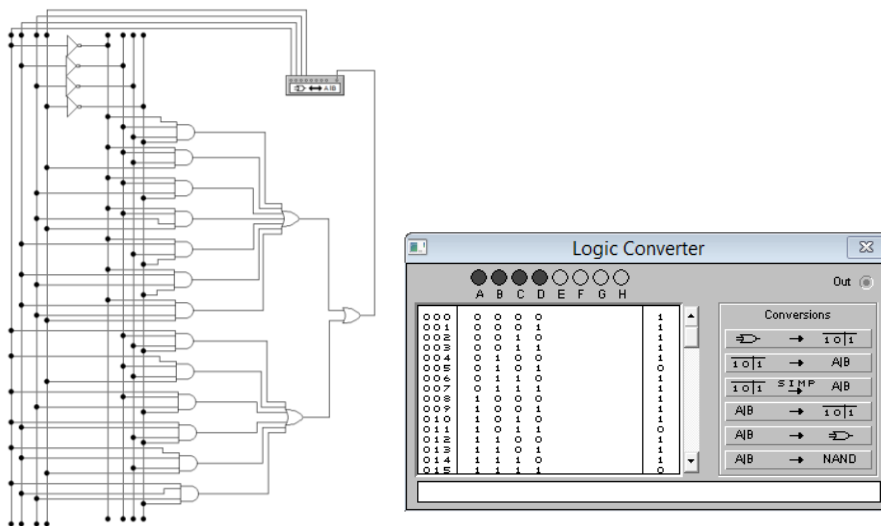


Fig. 1.27(a). Schema electrică, construită conform funcției (3) neminimizate.

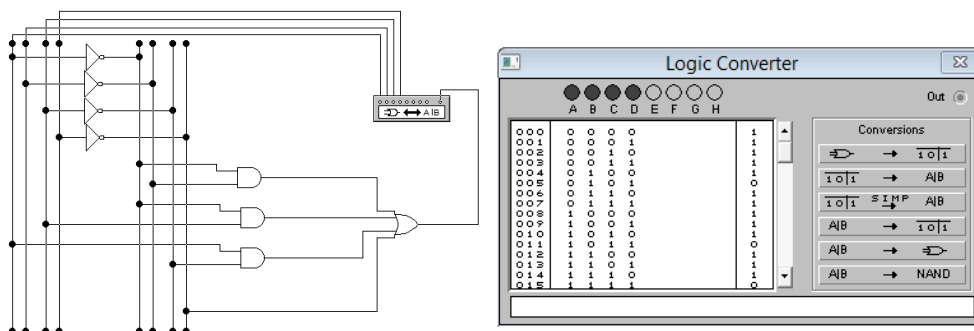


Fig. 1.27(b). Schema electrică, construită conform funcției (4).

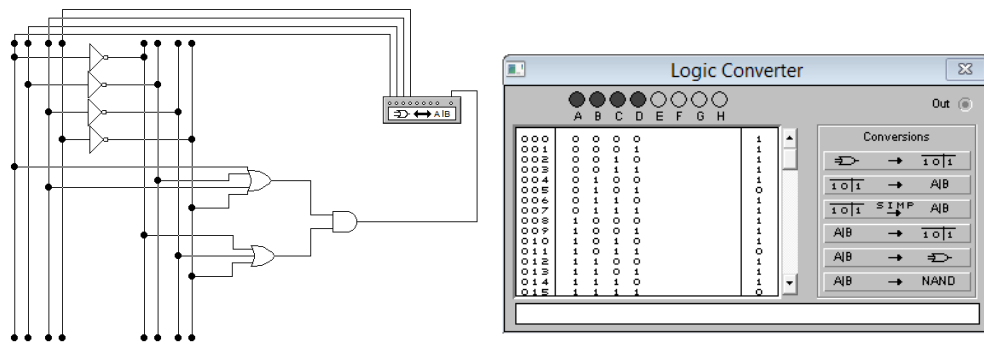


Fig. 1.27(c). Schema electrică, construită conform funcției (5).

În continuare vor fi prezentate tabelele de mintermeni pentru funcții logice cu 5 și 6 variabile.

5. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 5 variabile are 32 de celule și poate fi prezentat în 2 variante:

- 2 tabele separate câte 16 celule fiecare (vezi fig. 1.28(a));
- un singur tabel cu 32 de celule (vezi fig. 1.28(b)).

Drept exemplu, în tabelele din 1.28(a,b) sunt introduși mintermenii funcției logice

$$F(a, b, c, d, e) = \bar{a}bcd\bar{e} + a\bar{b}cde.$$

	\bar{a}				a				
$de \backslash bc$	00	01	11	10	00	01	11	10	bc/de
00									00
01									01
11					1				11
10			1						10

Fig. 1.28(a). Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 5 variabile (2 tabele separate).

În cazul utilizării configurației din două tabele separate minimizarea funcției logice cu 5 variabile se face pentru fiecare tabel aparte.

$de \backslash abc$	000	001	011	010	110	111	101	100	abc/de
00									00
01									01
11								1	11
10			1						10

Fig. 1.28(b). Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 5 variabile (un tabel unic).

6. Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 6 variabile are 64 de celule și poate fi prezentat în 2 variante:

- 4 tabele separate câte 16 celule fiecare (vezi fig. 1.29(a));
- un singur tabel cu 64 de celule (vezi fig. 1.29(b)).

Drept exemplu, în tabelele din fig. 1.29(a,b) sunt introduși mintermenii funcției logice

$$F(a, b, c, d, e, f) = \bar{a}bcd\bar{e}f + a\bar{b}cdef.$$

	\bar{a}				a				
$ef \backslash cd$	00	01	11	10	00	01	11	10	cd/ef

\bar{b}	00									00			
	01									01			
	11									11			
	10						1			10			
b	00									00			
	01			1						01			
	11									11			
	10									10			
ef/cd		00	01	11	10			00	01	11	10	cd/ef	

Fig. 1.29(a). Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 6 variabile (4 tabele separate).

În cazul utilizării configurației din patru tabele separate minimizarea funcției logice cu 6 variabile se face pentru fiecare tabel aparte.

$def\backslash abc$	000	001	011	010	110	111	101	100	abc/def
000									000
001									001
011									011
010									010
110								1	110
111									111
101			1						101
100									100
$def\backslash abc$	000	001	011	010	110	111	101	100	abc/def

Fig. 1.29(b). Tabelul de mintermeni pentru o funcție logică cu 6 variabile (un tabel unic).

Lucru independent nr. 4.

1. De minimizat următoarea funcție logică prin metoda Veitch-Karnaugh

$$F(a, b, c, d, e, f) =$$

$$= \Sigma(0,1,2,6,7,8,9,10,12,19,20,21,22,23,24,25,27,34,35,36,37,38,42,43,44,45,51,52,53,54,55,56)$$

- prin gruparea mintermenilor egali cu 1;
- prin gruparea mintermenilor egali cu 0;
- construiți schemele electrice pentru varianta (a) și varianta (b) (utilizați Convertorul logic pentru a obține tabelele de adevăr și demonstra că schemele sunt echivalente);
- comparați numărul de elemente NU, ȘI, SAU pentru cazul funcției neminimizate, cazul (a) și cazul (b).