1. ALGEBRA LOGICII

1.1. Variabile și funcții ale algebrei logicii

Pentru descrierea proceselor de lucru ale dispozitivelor electronice numerice, construite din diode, tranzistori, rezistori, condensatori, etc se folosesc variabile şi funcţii numerice (logice). Dispozitivele electronice pot să se afle în una din următoarele 2 stări:

a. în regim de lucru (conectate la sursa de energie electrică);
b. în regim de repaos (deconectate de la sursa de energie electrică).

Dispozitivele electronice numerice funcționează prin aplicarea la intrarea/intrările lor semnal electric dreptunghiular. Prezenţa sau lipsa semnalelor electrice la intrările dispozitivelor electronice, considerate în algebra logicii drept „variabile logice” pot fi notate prin:

a. **DA** sau **NU**;
b. **1** sau **0**;
c. orice literă din alfabetul latin fără indice:
   - este semnal (starea directă) – prin $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \dots, \boldsymbol{z}\}$;
   - semnalul electric lipsește (starea inversată) – prin $\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{c}}, \dots, \overline{\boldsymbol{z}}\}$;
d. orice literă din alfabetul latin cu indice:
   - este semnal (starea directă) – prin $\{\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{a}_{n-3}, \dots, \boldsymbol{a}_0\}$;
   - semnalul electric lipsește (starea inversată) – prin $\{\overline{\boldsymbol{a}}_{n-1}, \overline{\boldsymbol{a}}_{n-2}, \overline{\boldsymbol{a}}_{n-3}, \dots, \overline{\boldsymbol{a}}_0\}$.

Definiție. Numim variabilă numerică (logică) o mărime care poate avea numai două valori (două stări).

Pentru descrierea procesului de lucru al dispozitivelor numerice se folosesc funcții numerice (logice). Funcțiile logice pot prezentate în modul următor:

a. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \dots, \boldsymbol{z})$;
b. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{a}_{n-3}, \dots, \boldsymbol{a}_0)$

Definiție. Numim funcție numerică (logică) o mărime care ca și variabilele sale poate avea numai două valori (două stări).

Pentru construirea dispozitivelor electronice numerice de orice coplexitate pot fi folosite microcircuite principiul de lucru al cărora sînt descrise numai de trei funcții logice elementare: **NU, ŞI, SAU**.

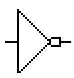
Definiție. Funcţia NU este o funcţie logică cu o variabilă (cu un singur argument) și este egală cu valoarea inversată a variabilei (argumentului).

Funcţia NU se mai numeşte negare, iar dispozitivul care execută această operaţie se numeşte invertor. În formă algebrică funcţia NU poate fi prezentată în modul următor

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \overline{\boldsymbol{a}}.$$

Simbolul convențional și exemplu de funcționare al elementului NU (invertorului) sunt prezentate în figura 1.1.

a)  - standard internațional;

b)  - standard american.

În fig. 1.1 sunt următoarele notări: +Vcc – sursa de tensiune/semnal; [A] – comutator.

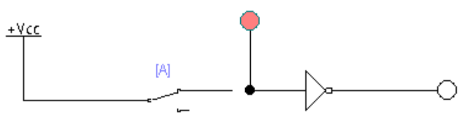


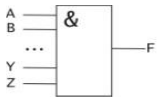
Fig. 1.1. Simbolul convențional al elementului NU (invertorului) și exemplu de funcționare.

Definiție. Funcţia ŞI este o funcţie logică cu două şi mai multe variabile şi este egală cu 1 numai atunci cînd toate variabilele ei sînt egale cu 1.

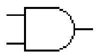
Această funcţie se mai numeşte produs logic sau conjuncţie. În formă algebrică funcția ŞI poate fi prezentată în modul următor

$$\boldsymbol{F(a,b,c,\dots,z) = a \times b \times c \times \dots \times z = a \wedge b \wedge c \wedge \dots \wedge z.}$$

Simbolul convențional al elementului ŞI și exemplu de funcționare sunt prezentate în figura 1.2.

a) 

- standard internațional;

b)  - standard american.

În fig. 1.2 sunt următoarele notări: $+V_{cc}$ – sursa de tensiune/semnal; [A], [B] – comutatoare.

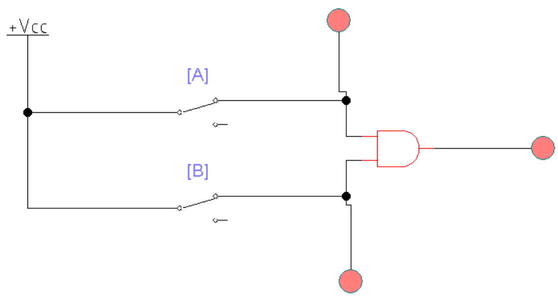


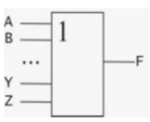
Fig. 1.2. Simbolul convențional și exemplu de funcționare al elementului ŞI.

Definiție. Funcţia SAU este o funcţie logică cu două şi mai multe variabile şi este egală cu 1 atunci, cînd măcar o variabilă a ei este egală cu 1.

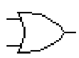
Funcţia SAU se mai numeşte sumă logică sau disjuncţie. În formă algebrică funcția SAU poate fi prezentată în modul următor

$$\boldsymbol{F(a,b,c,\dots,z) = a + b + c + \cdots + z = a \vee b \vee c \vee \dots \vee z.}$$

Simbolul convențional și exemplu de funcționare al elementului SAU sunt prezentate în figura 1.3.

a) 

- standard internațional;

b)  - standard american.

În fig. 1.3 sunt următoarele notări: +Vcc – sursa de tensiune/semnal; [A], [B] – comutatoare.

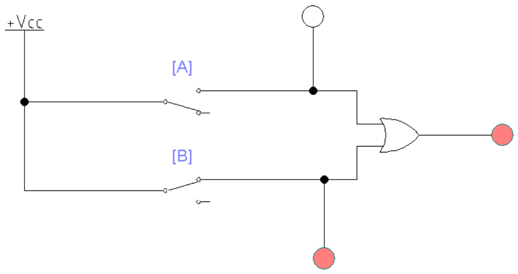


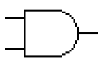
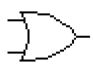
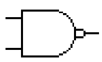
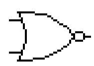
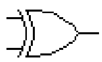
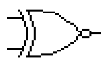
Fig. 1.3. Simbolul convenţional şi exemplu de funcţionare al elementului SAU.

Stările funcţiilor logice pot fi prezentate şi prin tabele numite tabele de adevăr sau tabele de stări.

Definiţie. Numim tabel de adevăr un tabel în care sunt prezentate toate combinaţiile posibile ale variabilelor şi valorile funcţiei (funcţiilor).

În tabelul 1.1 sunt prezentate stările funcţiilor cu două variabile.

Tabelul 1.1. Stările funcţiilor cu două variabile

Variabile		Funcţii logice					
		ŞI	SAU	ŞI-NU	SAU-NU	SAU-EX	Echivalenţa
a	b						
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Numărul de funcţii cu 2 variabile este $\boldsymbol{N = 2^{2^2}}$, cu 3 variabile este $\boldsymbol{N = 2^{2^3}}$, cu $\boldsymbol{m}$ variabile este $\boldsymbol{N = 2^{2^m}}$.

1.2. Axiomele şi teoremele principale ale algebrei logicii

Axiomele principale pentru funcţiile **NU, ŞI, SAU** sînt următoarele:

a) pentru funcţia **NU**: $\boldsymbol{a = \bar{\bar{a}}}$.

b) pentru funcţia **ŞI**: $\boldsymbol{a \times 0 = 0}$ sau $\boldsymbol{a \wedge 0 = 0}$;
$\boldsymbol{a \times 1 = a}$ sau $\boldsymbol{a \wedge 1 = a}$;
$\boldsymbol{a \times \bar{a} = 0}$ sau $\boldsymbol{a \wedge \bar{a} = 0}$;
$\boldsymbol{a \times a = a}$ sau $\boldsymbol{a \wedge a = a}$;
$\boldsymbol{a \times a \times \ldots \times a = a}$ sau $\boldsymbol{a \wedge a \wedge \ldots \wedge a = a}$.

c) pentru funcţia **SAU**: $\boldsymbol{a + 0 = a}$ sau $\boldsymbol{a \vee 0 = a}$;
$\boldsymbol{a + 1 = 1}$ sau $\boldsymbol{a \vee 1 = 1}$;
$\boldsymbol{a + \bar{a} = 1}$ sau $\boldsymbol{a \vee \bar{a} = 1}$;
$\boldsymbol{a + a = a}$ sau $\boldsymbol{a \vee a = a}$;
$\boldsymbol{a + a + \cdots + a = a}$ sau $\boldsymbol{a \vee a \vee \ldots \vee a = a}$.

Teoremele logice principale utilizate pentru transformarea funcţiilor logice şi descrierea procelor de lucru ale dispozitivelor electrice numerice sînt: teorema comutativă; teorema asociativă; teorema distributivî; teorema asimilării; teorema de Morgan.

Teorema comutativă. Schimbarea poziţiei variabilor într-o relaţie logică nu aduce la schimbarea rezultatului funcţiei.

Exemple:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\ \ sau\ \boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{a}\ ;$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\ sau\ \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}\,.$$

În fig. 1.4 sunt prezentate două scheme electrice echivalente, construite din elementul logic SAU, care demonstrează posibilitatea aplicării teoremei comutative pentru scheme electrice logice.

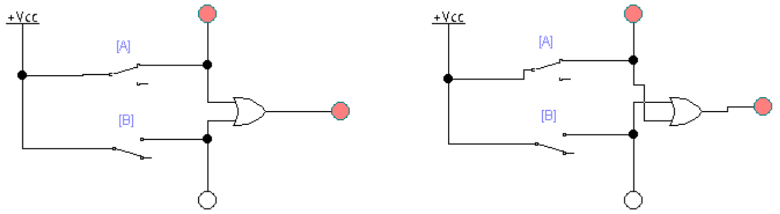


Fig. 1.4. Scheme echivalente pentru demonstrarea teoremei comutative.

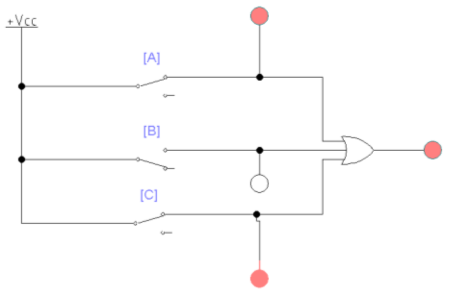
Teorema asociativă. Asocierea variabilelor într-o relație logică nu aduce la schimbarea funcției.

Exemple:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\ sau\ \boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\vee(\boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{c});$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\ sau\ \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}\,.$$

În fig. 1.5 sunt prezentate două scheme electrice echivalentecare care demonstrează posibilitatea aplicării teoremei asociative pentru scheme electrice logice.



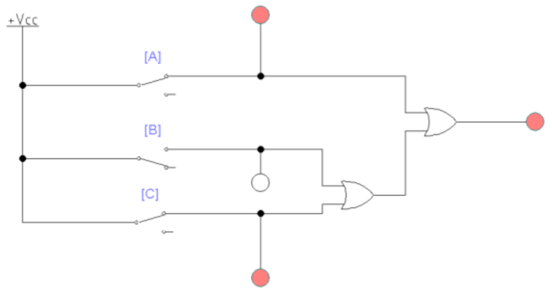


Fig. 1.5. Scheme echivalente pentru demonstrarea teoremei asociative.

Teorema distributivă. Rezultatul operației nu se va schimba dacă variabilele comune sunt scoase în afara parantezelor.

Exemplu:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\ sau\ \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{c});$$

Această teoremă permite micșorarea numărului de microcircuite într-un dispozitiv numeric. În fig. 1.6 sunt prezentate două scheme electrice echivalentecare care demonstrează posibilitatea aplicării teoremei distributive pentru scheme electrice logice.

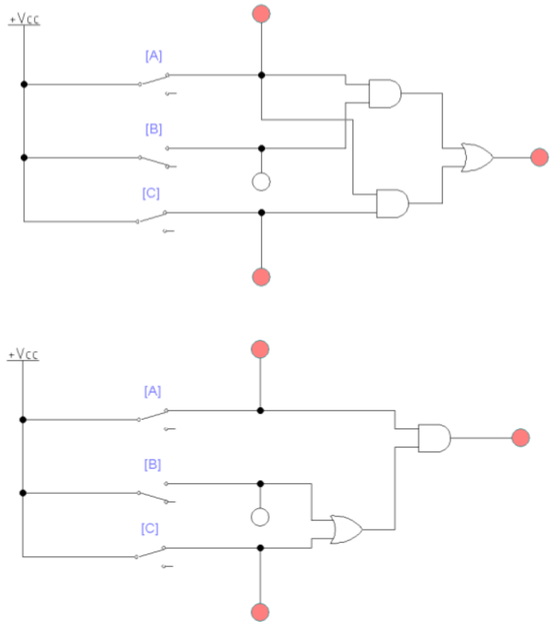


Fig. 1.6. Scheme echivalente pentru demonstrarea teoremei distributive.

Teorema asimilării permite micșorarea numărului de variabile.
Exemplu:

$$\boldsymbol{a + a \times c = a \times (1 + c) = a.}$$

În fig. 1.7 sunt prezentate două scheme electrice echivalentecare care demonstrează posibilitatea aplicării teoremei asimilării pentru scheme electrice logice.

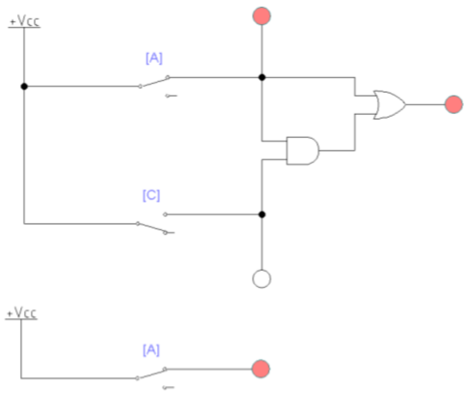


Fig. 1.7. Scheme echivalente pentru demonstrarea teoremei asimilării.

Această teoremă permite micșorarea numărului de microcircuite într-un dispozitiv numeric.

Teorema de Morgan.

a) Suma inversată a variabilelor este egală cu produsul variabilelor inversate

$$\boldsymbol{\overline{a + b + \cdots + z} = \bar{a} \times \bar{b} \times \ldots \times \bar{z};}$$

b) Produsul inversat al variabilelor este egal cu suma variabilelor inversate.

$$\boldsymbol{\overline{a \times b \times \ldots \times z} = \bar{a} + \bar{b} + \cdots \bar{z};}$$

Demonstrarea teoremei esta prezentată cu ajutorul tabelului de adevăr (vezi tabelul 1.2).

Tabelul 1.2. Demonstrarea teoremei de Morgan.

Nr. d/o	a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\overline{a+b}$	$\bar{a}\times\bar{b}$	$\overline{a\times b}$	$\bar{a}+\bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1
2	1	0	0	1	0	0	1	1
3	1	1	0	0	0	0	0	0

Din tabelul 1.2 obținem: $\overline{a+b} = \bar{a}\times\bar{b}$ și $\overline{a\times b} = \bar{a}+\bar{b}.$

În fig. 1.8 sunt prezentate două scheme electrice echivalentecare care demonstrează posibilitatea aplicării teoremei de Morgan pentru scheme electrice logice.

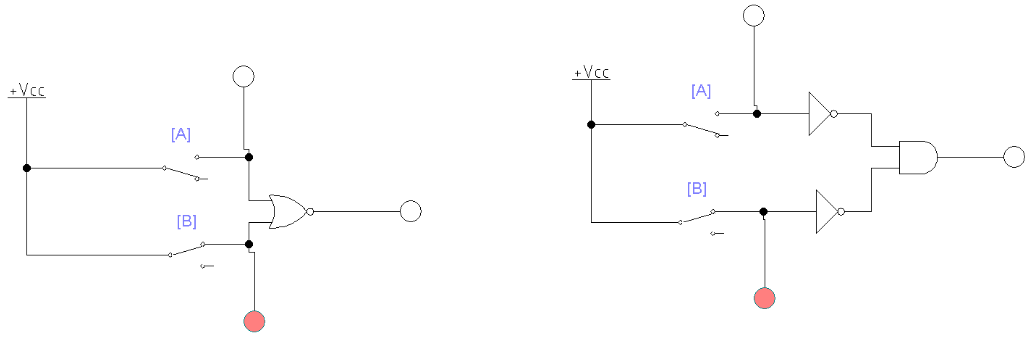


Fig. 1.8. Scheme echivalente pentru demonstrarea teoremei de Morgan.

Lucru independent nr. 1. De simplificat funcțiile și de construit schemele electrice pînă la simplificarea funcției și după simplificarea ei:

a) $a + ab + a\bar{b} =$
b) $a\bar{b} + b =$
c) $(a+\bar{b})b =$