AGC 045 B. 01 Unbalanced [*] [†]

张晴川
qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

大意

给一个包含 $1, 0, ?$ 的字符串 S，将所有 ? 替换成 0 或 1，最小化所有区间的 0 和 1 数量之差的最大值。

数据范围

- $|S| \le 10^6$

题解

首先假设没有 ?，把 0 替换成 -1，那么这个串的权值就等于最大前缀和减最小前缀和（包含权值为 0 的空前缀）。

设 M 为替换后最大的前缀和，$f(M)$ 为最小的前缀和，那么我们想要最小化 $M - f(M)$。不难发现当所有 ? 被替换成 -1 时，M 的值是最小化的。

现在考虑给定 M，如何替换才能最大化 $f(M)$。

首先 M 应当可行：即全替换为 -1 是可以小于等于 M 的。我们使用贪心做法：从前到后考虑，如果已经确定，就直接加上权值，否则看替换为 1 后，是否能保证整个串的最大前缀仍然小于等于 M。如果可以，就换成 1，否则换成 -1，判断方法是看 $\texttt{sum} + 1 + \texttt{suf\_max}[i+1]$ 是否小于等于 M，其中 sum 表示之前的贡献，$\texttt{suf\_max}[i+1]$ 表示 S 从 $i+1$ 开始的后缀全部替换为 -1 时的最大前缀（包含空前缀）。

为什么贪心是可行的呢？假设存在一种方法使得最大值不超过 M 且在第一个可以取 1 的位置 i 没有取 1，而是放到了 $j > i$，那么我们可以把 i 换成 1 而 j 换成 -1，容易证明最大前缀和仍然不超过 M，且最小前缀和不会变劣。

根据上述的算法，考虑 $f(M)$ 和 $f(M+2)$ 的关系，容易发现，$f(M+2)$ 最多比 $f(M)$ 多一个 ? 变成 1。由于把 -1 变 1 的差值是 2，可以得出 $f(M+2) \le f(M) + 2$。所以在所有可行的 M 里面，我们只需要考虑最小的两个即可。

[*] https://atcoder.jp/contests/agc045/tasks/agc045_b
[†] 更多内容请访问：https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials

复杂度

- 时间：$O(|S|)$
- 空间：$O(|S|)$

代码

https://atcoder.jp/contests/agc045/submissions/14109368