

# AGC 045 C. Range Set <sup>\*†</sup>

张晴川

qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

## 大意

考虑一个长度为  $N$  的全 0 串，每次可以将连续  $A$  个位置设 0 或者连续  $B$  个位置设 1。求有多少串是可以在进行若干次操作后得到的。

## 数据范围

- $1 \leq N \leq 5000$
- $1 \leq A, B \leq N$

## 题解

首先，由于  $A, B \leq N$ ，全 0 和全 1 都是可行的，所以 0 和 1 可以互换，不妨假设  $A \leq B$ 。

首先我们考虑如何判断一个串是否合法（能够得到）。考虑把串切成一系列全 0 和全 1 的极长段。那么我们可以证明合法的充要条件是：**在把所有长度大于等于  $A$  的 0 的极长段替换为 1 后，存在一个长度等于  $B$  的全 1 段。**

⇒ 如果一个串是合法的，即经过一系列操作得到的，不妨假设至少使用了一次置 1（否则是全 0），那么我们把最后一次置 1 操作之后的置 0 操作都取消，就可以得到一个长度等于  $B$  的全 1 段。

⇐ 如果一个串在所有长度大于等于  $A$  的 0 的极长段替换为 1 后，存在一个长度为  $B$  的全 1 段，那么我们可以以这个段为中心，先把段两侧的格子都染成正确颜色。然后把段染成全 1。由于  $A \leq B$ ，我们可以再把段内的 0 染出来，而不会影响段外的格子。

于是可以发现，在把所有长度大于等于  $A$  的 0 的极长段替换为 1 后，一个**不合法串**的 0 的极长段应该长度小于  $A$ ，1 的极长段应该长度小于  $B$ 。

---

<sup>\*</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc045/tasks/agc045\\_c](https://atcoder.jp/contests/agc045/tasks/agc045_c)

<sup>†</sup>更多内容请访问：<https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials>

考虑如何计算不合法串的个数：设  $dp[l][0/1]$  表示长度是  $l$ ，最后一段是全 0/1 段的个数。

如果当前结尾是 0，那么只需要枚举用了  $[1 \dots A)$  个 0 即可。如果当前是 1，那么我们同样枚举长度，但是需要预处理出“给定长度，有多少串满足 0 的极长段都大于等于  $A$ ”，然后转移。注意这里需要头和尾都强制为 1，所以实际的系数是  $f[len - 2]$ 。这里的坑点是，如果是第一段或最后一段并且长度不足  $B$ ，那么段首/断尾不需要强制为 1。

最后用  $2^n$  减去不合法串个数即可。

## 复杂度

- 时间：  $O(N^2)$
- 空间：  $O(N)$

## 代码

<https://gist.github.com/SamZhangQingChuan/ca596e8f60c218aa35a9f8d8a483c680>