

# AGC 009 D. Uninity<sup>\*†</sup>

张晴川

qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

## 大意

给一棵  $N$  个点的无根树，对每个节点赋一个非负的标号。需要满足的是，对于任意两个标号相同的节点，连接这两点的简单路径上必须有一个节点的标号更大。求最小化的最大标号。

(可以理解成求一种点分治的方案，使得递归层数最小化)

## 数据范围

- $2 \leq N \leq 10^5$

## 题解

首先考虑把树看成有根树。我们定义一个标号  $v$  对于某个节点  $i$  可见当在以  $i$  为根的子树中存在某个点的标号为  $v$  且在它与  $i$  之间的路径上不存在更大的标号。

现在我们可以把无向树上的条件转化为有根树上的等价条件：

1. 如果某个标号  $v$  对  $i$  的某两棵子树（的根节点）可见，那么  $i$  的标号必须大于  $v$ 。
2. 如果某个标号  $v$  对  $i$  的某一棵子树（的根节点）可见，那么  $i$  的标号必须不等于  $v$ 。

首先根据点分治的原理，答案最多是  $\log_2(n)$  左右。

设  $dp[i]$  表示对  $i$  可见的值的集合，并且满足从大到小比较的字典序最小化（例如： $\{4\} > \{3, 2, 1, 0\}$ ）。由于最大值不会太大，可以用一个二进制数描述。假设以 1 为根，那么  $dp[1]$  的最大元素就是答案。

---

<sup>\*</sup>[https://atcoder.jp/contests/agc009/tasks/agc009\\_d](https://atcoder.jp/contests/agc009/tasks/agc009_d)

<sup>†</sup>更多内容请访问：<https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials>

由上面两个约束条件，假设  $i$  有若干儿子  $\{s_1, s_2, \dots\}$ ，如果某个标号一共出现了一次，那么  $i$  不能再使用那个标号，如果出现不少于两次，那么  $i$  的标号必须大于它。

可以证明，若要使得  $dp[i]$  的字典序最小化，那么各个子树的最优方案一定是使得  $dp[s]$  字典序最小的方案。具体证明可以考虑把某个标号  $v$  换为  $\{v-1, v-2, \dots, 0\}$ ，可以发现结果一定不会更劣。

通过 DFS 先计算出每棵子树的值，然后把  $i$  的标号设为最小的可行标号即可，注意需要把所有比  $i$  的标号小的标号归零。

## 复杂度

- 时间：  $O(N \log(N))$
- 空间：  $O(N)$

## 代码

<https://atcoder.jp/contests/agc009/submissions/13978176>