一个人的数论[*][†]

张晴川
qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

大意

给定 n, d，求：

$$\sum_{i=1}^{n} i^d [\gcd(i,n)=1]$$

n 的质因数分解式为 $\prod_{i=1}^{w} p_i^{a_i}$。

数据范围

- $1 \le d \le 100$
- $1 \le w \le 1000$
- $1 \le p_i, a_i \le 10^9$

题解

推式子：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^d [\gcd(i,n)=1] &= \sum_{i=1}^{n} i^d \sum_{x|n,x|i} \mu(x) && (1)\\ &= \sum_{x|n} \mu(x) x^d \sum_{i \le n/x} i^d && (2)\\ & && (3)\end{aligned}$$

注意到最后是个幂和的形式，这显然是个 $d+1$ 次多项式 S 在 n/x 处的取值。

[*] https://darkbzoj.tk/problem/3601
[†] 更多内容请访问：https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials

设 $S(n) = \sum_{i=0}^{d+1} c_i n^i$，那么我们有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{x|n} \mu(x) x^d S(n/x) &= \sum_{x|n} \mu(x) x^d \sum_{i=0}^{d+1} c_i (n/x)^i && (4)\\
&= \sum_{i=0}^{d+1} c_i \sum_{x|n} \mu(x) x^d (n/x)^i && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

由于 $\mu(x)x^d$ 和 x^i 都是积性函数，所以他们的狄利克雷卷积也是积性函数，于是我们只需要在每个素因子处分别求出答案然后乘起来即可。注意到如果 n 是素数的幂，$\mu(x)$ 最多只有两项有贡献，所以对于每个 i，可以 $O(w \log(d \cdot i))$ 算出答案。

幂和的多项式 $S(n)$ 用拉格朗日插值求出即可。

复杂度

- 时间：$O($拉格朗日插值 $+ d \cdot w \log(d))$
- 空间：$O(d + w)$

代码

https://gist.github.com/SamZhangQingChuan/d794cb0e36631b575d412c83e095a36e