AGC 005 F. Many Easy Problems[*][†]

张晴川
qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

大意

给一棵 N 个点的树。令 S 是一个节点的非空子集，设 $f(S)$ 为最小能包含所有 S 的节点的联通子图的节点数。

对于每个 K，计算所有 $\binom{N}{K}$ 种方式选取 S 的 $f(S)$ 的和。

答案对 NTT 模数取模。

数据范围

- $2 \leq N \leq 200000$

题解

首先我们固定 K，思考如何计算答案。

因为树的任意联通子图都是树，而树满足 边数 = 点数 -1，所以我们把问题转化为每条边在多少种选法中是需要的。

假设 $e = (u, v)$ 联通的两个联通块大小分别为 A_e 和 $N - A_e$，那么补集转化可以得到一共有 $(\binom{N}{K} - \binom{A_e}{K} - \binom{N-A_e}{K})$ 种情况。所以答案等于

$$\sum_{e \in E}(\binom{N}{K} - \binom{A_e}{K} - \binom{N-A_e}{K}) = (N-1)\binom{N}{K} - \sum_{e \in E}(\binom{A_e}{K} + \binom{N-A_e}{K})$$

考虑如何计算最右边这坨东西。

首先预处理出 $C[i]$ 表示有多少等于 i 的 A_e 和 $N - A_e$。

那么可以转化为：

$$S[K] = \sum_{i=0}^{N} C[i]\binom{i}{K} = \sum_{i=0}^{N} C[i]\frac{i!}{(i-K)! \times K!} = \sum_{i=0}^{N}(C[i] \cdot i!)\frac{1}{(i-K)!} \times K!$$

*https://atcoder.jp/contests/agc005/tasks/agc005_f

†更多内容请访问：https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials

所以：

$$K! \cdot S[K] = \sum_{i=0}^{N} (C[i] \cdot i!) \frac{1}{(i-K)!}$$

任意看出右边是个类似卷积的形式，不过得反转一下，设 $D[N-i] = C[i] \cdot i!$，那么：

$$K! \cdot S[K] = \sum_{i=0}^{N} D[N-i] \frac{1}{(i-K)!}$$

因为 $(N-i)+(i-K) = N-K$ 是个定值，现在做一下卷积就可以了。

复杂度

- 时间：$O(N \log(N))$
- 空间：$O(N)$

代码

`https://atcoder.jp/contests/agc005/submissions/14006608`