

牛客·青蛙树^{*}

†

张晴川

qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

大意

给一个长度为 N 的数组 $[a_1, a_2, \dots, a_N]$, Q 次询问, 每次求一个子数组 $[a_{l_i}, a_{l_i+1}, \dots, a_{r_i}]$ 能构成多少小根堆, 并满足中序遍历为 $[l_i, l_i + 1, \dots, r_i]$ 。两个堆不同当且仅当根节点编号不同, 或者子树不同。

数据范围

- $1 \leq N, Q \leq 500,000$
- $1 \leq a_i \leq 10^9$

题解

现在考虑对于一个完整的数组, 如何求答案。

首先发现, 所有最小值一定构成一个联通块, 假设有 c 个, 那么这部分的贡献就是卡特兰数 $Catalan[c]$ 。然后我们以每个最小值的位置分割数组, 每个被隔开的段之间的贡献一定是独立的, 所以递归求每个段的答案然后乘起来即可。

根据上述算法, 可以发现每个权值的贡献其实是可以独立计算的, 如果某个权值的两个出现位置中存在一个更小的值, 那就需要切分, 最后答案就等于所有段的长度的卡特兰数的乘积。

现在考虑离线处理询问, 按照右端点排序。

我们使用一个单调栈来维护一系列相同元素段, 对于两个元素 a_i 和 a_j , 如果 $i < j$ 并且 $a_i > a_j$, 那么 a_i 的贡献一定与 a_j 右边是什么无关。我们把在单调栈中 a_i 所在的段拿出来, 贡献放到一棵线段树上, 从右到左第 i 次出现位置的贡献为 $\frac{Catalan[i]}{Catalan[i-1]}$ 。这样子可以保证后缀的乘积恰好匹配出现次数。同时对

^{*}<https://ac.nowcoder.com/acm/contest/6112/F>

[†]更多内容请访问: <https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials>

于单调栈里面的段，我们也要用一棵线段树维护贡献，假设每段的个数分别为 c_1, c_2, \dots ，那么线段树上叶子的值就是 $Catalan[c_1], Catalan[c_2], \dots$ 。

在处理询问 (l, r) 的时候，我们把贡献分成三部分：

1. 已经出栈的元素的贡献，这部分用线段树
2. 单调栈中，所有出现位置都大于等于 l 的段的贡献，这部分仍然用线段树
3. 最后二分出 l 会切割单调栈中的哪一段，假设这一段一共有 c 个出现位置大于等于 l ，那么再乘上 $Catalan[c]$ 。

复杂度

- 时间： $O((N + Q) \log(N + Q))$
- 空间： $O(N + Q)$

代码

<https://gist.github.com/SamZhangQingChuan/7791013ca026965d7c5d9456aad865bb>