CF 960 G. Bandit Blues *†

张晴川
qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

大意

给定 N, A, B。求有多少 $[N]$ 的排列满足：

1. 有 A 个元素大于所有左边的元素
2. 有 B 个元素大于所有右边的元素

数据范围

- $1 \leq N \leq 10^5$
- $0 \leq A, B \leq N$

题解

显然 $\min(A, B) = 0$ 时无解。

我们考虑把排列拆成 N 的左右两部分，因为 N 是最大元，过了 N 就不可能再有贡献，因此这两部分是独立的。两部分可以规约成一个问题，即给定长度 N，求有多少排列满足有 A 个元素大于所有左边的元素。

考虑 1 所在的位置，要么在最左边贡献 1，要么在任意其他元素的后面不做贡献，即公式为 $S(N, A) = S(N-1, A-1) + (N-1)S(N-1, A)$。可以发现这其实就是第一类斯特林数。考虑另一种解释，把排列在有贡献的元素处切分，例如 $[2, 1, 4, 3] \longrightarrow [2, 1][4, 3]$，于是得到了一个权值为 A 的排列有 A 个圆排列的排列的双射。

由于一开始的排列中的 N 占据了一个贡献，所以左边应该有 $A-1$ 个圆排列，而右边有 $B-1$ 个。考虑单个圆排列的生成函数是 $\ln(\frac{1}{1-x})$。那么答案就是：

$$\frac{1}{(A-1)!} \ln(\frac{1}{1-x})^{A-1} \times \frac{1}{(B-1)!} \ln(\frac{1}{1-x})^{B-1}$$

*https://codeforces.com/contest/960/problem/G

†更多内容请访问：https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials

的 $N-1$ 次项系数乘 $(N-1)!$。要乘 $\frac{1}{(A-1)!}$ 的原因是各个圆排列之间无序（或者说按照各圆排列中最大元素排序），而 $N-1$ 次项的原因是最大值 N 占用了一个长度。

由于前后形式相同，只需要多项式求幂计算 $\ln(\frac{1}{1-x})^{A+B-2}$ 即可。

复杂度

- 时间：$O(\text{多项式求幂})$
- 空间：$O(N)$

代码

`https://codeforces.com/contest/960/submission/84826113`