CF 840 C. On the Bench *†

张晴川
qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

大意

给一个长度为 N 的序列 $\{a_i\}$，求有多少排列满足排列后相邻元素的乘积不为平方数。

数据范围

- $1 \le N \le 300$
- $1 \le a_i \le 10^9$

题解

首先把每个数的平方因子除掉，按照转化后的数字进行分组。现在只需要满足相同组的元素不被排到一起即可。

考虑 $dp[i][j]$ 表示放完前 i 组有 j 对相邻元素是不合法的。

设前 i 组一共有 $total$ 个数，第 $i+1$ 组有 $size$ 个元素。

1. 枚举第 $i+1$ 组分成了 s 段不相邻的子段，那么 s 的范围是 1 到 $\min(total+1, size)$。
2. 枚举第 $i+1$ 组去消除了 d 对不合法的空隙，d 的范围是 0 到 $\min(j, size)$。

新的序列应该有 $j-d+(size-s)$ 对不合法空隙。现在只需要计算有多少种方法选取。

1. 把 $size$ 个元素分成 s 段：$size!\binom{size-1}{s-1}$
2. 从 j 个不合法空隙中选取 d 个：$\binom{j}{d}$

*https://codeforces.com/problemset/problem/840/C
†更多内容请访问：https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials

3. 从 $total+1-j$ 个合法空隙中选取 $s-d$ 个：$\binom{total+1-j}{s-d}$

所以 $dp[i][j]$ 对 $dp[i+1][j-d+(size-s)]$ 的贡献就是：

$$size!\binom{size-1}{s-1}\binom{j}{d}\binom{total+1-j}{s-d}$$

乍看这个算法是四次方的，但是由于枚举 s 的范围上限是 $size$，所以这一维是均摊 $O(N)$ 的。于是整个算法是三方的，可以通过

复杂度

- 时间：$O(N^3+\sqrt{10^9}N)$
- 空间：$O(N^2)$

代码

https://codeforces.com/contest/840/submission/82693097