

最长公共上升子序列^{*†}

张晴川

qzha536@aucklanduni.ac.nz

January 10, 2021

大意

给定两个序列 $a_{1\dots n}$ 、 $b_{1\dots m}$ ，求 a 和 b 的最长公共（严格）上升子序列。

数据范围

- $1 \leq n, m \leq 500$
- $0 \leq a_i, b_i \leq 10^9$

题解

设 $dp[i][j]$ 表示 $a[1\dots i]$ 、 $b[1\dots j]$ 以 $a[i]$ 、 $b[j]$ 结尾的最长公共上升子序列长度。注意，如果 $a[i] \neq b[j]$ ，那么 $dp[i][j] = 0$ 。

暴力计算这个 dp 数组的复杂度是 $O((nm)^2)$ 的，因为对于每一对 (i, j) ，我们需要枚举所有满足 $(i' \leq i, j' \leq j)$ 的 (i', j') 作为（有可能的）前驱。

考虑从小到大枚举 i ，假设计算 $dp[i][j]$ 时，我们已经求得所有满足 $(1 \leq i' < i, 1 \leq j \leq m)$ 的 $dp[i'][j']$ 的值。

令 $mx[j']$ 表示此时已经计算完的 $dp[i'][j']$ 中的最大值。固定 i ，考虑从小到大枚举 j ，如果 $a[i] == b[j]$ ，那么我们只要求得所有满足 $b[j'] < b[j]$ 的 j' 的最大的 $mx[j']$ 的值。 $dp[i][j] = \max_{1 \leq j' < j, b[j'] < b[j]} (mx[j']) + 1$ 。

因为我们只需要在 $a[i] = b[j]$ 的时候计算 $dp[i][j]$ ，所以 $b[j'] < b[j]$ 等价于 $b[j'] < a[i]$ 。于是我们可以维护一个前缀最大值的变量，并在当且仅当 $b[j'] < a[i]$ 的情况下更新它。

由于此题还需要输出具体子序列，还需要记录一下 $mx[j']$ 具体指向 a 中哪个元素和 dp 数组的转移来源，具体可以参考代码。

^{*}<https://codeforces.com/contest/10/problem/D>

[†]更多内容请访问：<https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials>

复杂度

- 时间: $O(nm)$
- 空间: $O(nm)$

代码

<https://codeforces.com/contest/10/submission/101174969>