UESTC. GCD *†

张晴川
qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

大意

给定 n, x，求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\gcd(i,j))^x$$

数据范围

- $1 \le n \le 10^{10}$
- $1 \le x \le 5$

题解

杜教筛复习。

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\gcd(i,j))^x &= \sum_{d} d^x \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\gcd(i,j)=d] \\
&= \sum_{d} d^x \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k|i,k|j}\mu(k) \\
&= \sum_{d} d^x \sum_{k} \lfloor\frac{n}{dk}\rfloor^2 \mu(k) \\
&= \sum_{d}\sum_{k} \lfloor\frac{n}{dk}\rfloor^2 d^x \mu(k)
\end{aligned}$$

---

*https://acm.uestc.edu.cn/problem/gcd/description

†更多内容请访问：https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials

考虑枚举 dk，设 $p = dk$，有：

$$\sum_d \sum_k \lfloor \frac{n}{dk} \rfloor^2 d^x \mu(k) = \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 \sum_{d|p} d^x \mu(\frac{p}{d})$$

可以发现后面是个狄利克雷卷积的形式，即 $f = \mu * id^x$。设前缀和函数 $S(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$。

那么答案等于 $\sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor^2 f(p)$。由于 $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ 只有根号个取值，考虑如何快速求前缀和 $S(n)$。

我们使用杜教筛，由于 $f(n) = \mu * id^x(n)$，所以 $(f * I)(n) = id^x(n) = n^x$。

于是根据杜教筛有：

$$S(n) = (\sum_{i=1}^n i^x) - \sum_{i=2}^n S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

前者可以预处理出幂和公式，每次 $O(x)$ 计算，后者递归即可。

复杂度

- 时间：$O(n^{2/3})$
- 空间：$O(n^{2/3})$

代码

https://gist.github.com/SamZhangQingChuan/94ea259b2a1b46151ded9e8075278746