CC. CUTTREE[*][†]

张晴川
qzha536@aucklanduni.ac.nz

December 13, 2020

大意

给一个 N 个点的树。令 R_i 表示均匀随机去除 i 条边后，各联通块大小的平方和的期望模 10^9+7 的结果。

求 $R_0, R_1, \ldots, R_{N-1}$。

数据范围

- $1 \leq N \leq 10^5$

题解

我们考虑如何求单个 R_i。

首先，联通块大小的平方和等于有多少节点的有序对是联通的。所以问题转化为，在去除 i 条边后，有多少有序对仍然保持联通。由于两个点联通当且仅当连接其的简单路径上没有边被切掉，于是每个有序对的贡献只和距离有关。

假设点对的距离为 $l \leq n-1-i$，一共有 $\texttt{cnt}[l]$ 对，那么对 R_i 的贡献为：

$$\texttt{cnt}[l]\frac{\binom{n-1-l}{i}}{\binom{n-1}{i}} = \texttt{cnt}[l]\frac{(n-1-l)!(n-1-i)!}{(n-1-l-i)!(n-1)!}$$

由于 $(n-1-i)!$ 以及 $(n-1)!$ 和 l 无关，我们在最后乘上这两个值即可，现在考虑 $\texttt{cnt}[l]\frac{(n-1-l)!}{(n-1-l-i)!}$ 这个值。注意到上下系数之差 $(n-1-l)-(n-1-l-i) \equiv i$，所以无论 l 是什么，只要上下的系数之差是 i 都是对 i 的贡献。我们考虑反转系数，这样子就变成了上下系数**之和**为一个与 i 一一对应的定值，做 FFT 即可。

现在如何计算 $\texttt{cnt}[l]$ 。考虑点分治，每棵子树用一个多项式表示：$\sum_{son} x^{dep[son]}$。假设各棵子树的多项式分别为：$A, B, C, \ldots$，特别地，设根节点自己代表的多项

[*] https://www.codechef.com/problems/CUTTREE

[†] 更多内容请访问：https://github.com/SamZhangQingChuan/Editorials

式为 1，那么经过根节点的贡献为 $(A+B+C+\ldots)^2-(A^2+B^2+C^2+\ldots)$。减去的部分为每棵子树内部的贡献，根节点自己不需被减去。

注：本题中需要使用任意模数 FFT。

复杂度

- 时间：$O(N\log^2(N))$
- 空间：$O(N)$

代码

`https://www.codechef.com/viewsolution/34548462`