Résolutions des équations non-linéaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier des méthodes numériques qui permettent de calculer les racines des équations non-linéaires. Plus précisément, on se donne une fonction réelle f d'une variable réelle et l'on cherche x qui vérifie

$$f(x) = 0. \tag{1.1}$$

x est appelé racine ou zéro de f.

Pourquoi avons nous besoin de méthodes d'analyse numérique pour résoudre ce type de poblème ?

Prenons le cas d'un polynôme dont on veut calculer les racines. s'il s'agit d'un polynôme du second degré, tout le monde connait les formules qui donnent les deux racines. Lorsque le polynôme est de degré 3 ou 4, le problème est déja difficile. A partir du degré 5 il a été démontré par N.H Abel (1802-1829) qu'il n'existe pas de formule algébrique qui donne des racines dans le cas général. De plus les méthodes analytiques limitées aux formes polynômiales sont inutilisables pour les équations (1.1) avec f fonction transcendante (i.e f n'est pas réductible à un polynôme).

Il est donc nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour résoudre ces équations. Alors nous nous posons deux questions

1. La méthode utilisée converge-t-elle vers la solution recherchée x^* ?
2. Dans le cas échéant avec quelle rapidité ?

La fonction f peut avoir plusieurs racines (comme dans le cas des polynômes). Procéder à la localisation d'une racine de l'équation (1.1), consiste à trouver un intervalle (de préférence fini) qui contient cette racine.

1.2 Localisation des racines

1.2.1 Principe

Nous cherchons à trouver si des racines réelles de l'équation (1.1) existent.

Division synthétique

Connaissant m racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de $f(x) = 0$, on calcule la $(m+1)$ ième racine en évaluant une racine de la fonction $f_m(x) = \dfrac{f(x)}{\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)}$

Séparation des racines

Une racine α de l'équation (1.1) est dite séparée (ou isolée) dans un intervalle, s'il est connu que cet intervalle contient uniquement cette racine. On cherche pour la $(m+1)$ ième racine un intervalle $[a,b]$ et tel que :

$$\begin{cases} f(a)\,f(b) < 0 \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \notin [a,b] \end{cases}$$

On dit que l'on a séparé la $(m+1)$ ième racine de f.

Connaissance à priori

On connait à priori la position approximative de la racine recherchée par des considérations physiques.

1.2.2 Méthodes algébriques de séparation

Ces méthodes sont basées sur les théorèmes généraux d'analyse.

Théorème 1.2.1. *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a)\,f(b) < 0$. Alors il existe au moins une racine de l'équation (1.1) *dans l'intervalle* $[a,b]$.

Remarque 1.2.1. *Ce théorème reste valable si a ou b sont infini. On considérera les limites* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

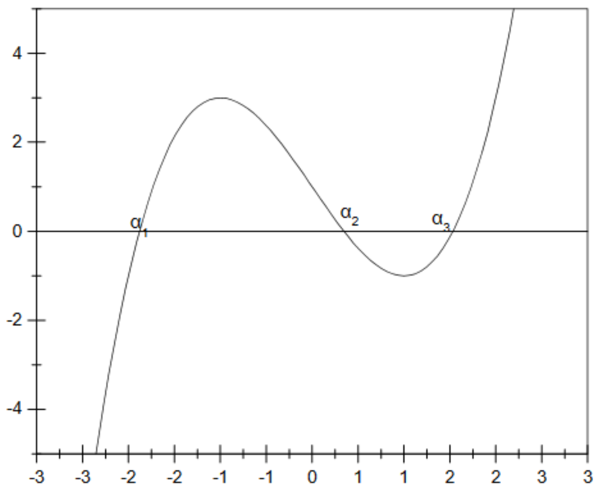
Remarque 1.2.2. *Sous les hypothèses du théorème 1.2.1, si de plus* f *est dérivable sur* $]a, b[$ *et* f' *garde un signe constant, alors la racine est unique.*

Théorème 1.2.2. *Corollaire du théorème de Rolle*

Soit f *une fonction définie et continue sur* $[a, b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *dérivable sur* $]a, b[$. *Entre deux racines succéssives* x_1 *et* x_2 *de la dérivée* f', *il existe une seule racine de l'équation* (**??**) *dans l'intervalle* $[x_1, x_2]$ *si* $f(x_1) f(x_2) < 0$.

1.2.3 Méthodes graphiques

Les racines de l'équation (**??**) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des x. On peut donc déterminer graphiquement les intervalles $[a_i, b_i]$ contenant la racine $\alpha_i, 1 \leq i \leq m$, (En supposant que f admet m racines).



Si l'équation (**??**) peut être mise sous la forme $g(x) = \psi(x)$, dans ce cas la racine α_i représente l'abscisse d'intersection des courbes des fonctions $y = g(x)$ et $y = \psi(x)$

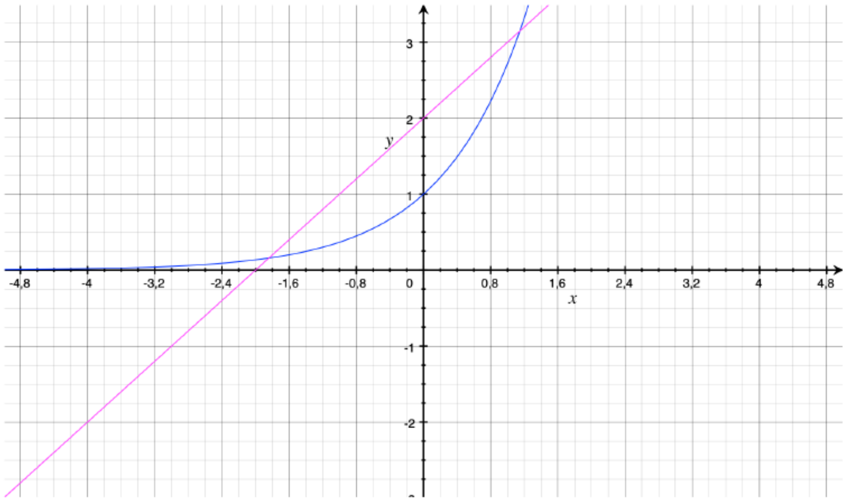
Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - x - 2$.

1. Localiser les racines de l'équation $f(x) = 0$.
2. Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine séparée α dans l'intervalle $[1, 2]$.

Solution

1. Localiser les racines de l'équation $f(x) = 0$. D'après le graphe 1, $f(x) = 0$ admet deux racines $x_1 \in [1, 1.5]$ et $x_2 \in [-2, -1.5]$.



2. Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine séparée α dans l'intervalle $[1, 2]$ .f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ plus précisément $\mathcal{C}^1([1, 2])$ et $f^{'}(x) = e^x - 1 > 0$ pour tout $x \in [1, 2]$, alors est strictement monotone sur $[1, 2]$. De plus $f(1) f(2) = (e - 3)\left(e^2 - 4\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists \alpha! \in [1, 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

1.3 Méthode des approximations succéssives

1.3.1 Principe

Une autre façon équivalente de présenter le même problème est de considérer une fonction réelle φ d'une variable rélle et on cherchera x tel que

$$\varphi(x) = x \tag{1.2}$$

un tel x s'appellera un point fixe de φ. Donc la recherche de la solution de l'équation (1.1) est ramenée à la recherche d'un point fixe de la fonction φ.

De même que f peut admettre plusieurs racines, la fonction φ peut admettre plusieurs points fixes. Considérons l'équation $x^3 + x - 2 = 0$ et posons $f(x) = x^3 + x - 2$.

Il existe plusieurs façons de choisir des fonctions φ tel que (1.1) $\iff$ (1.2). En effet,

1. $f(x) = 0 \iff x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - x^3$. On prend $\varphi(x) = 2 - x^3$.
2. $f(x) = 0 \iff x^3 + x - 2 = 0 \iff x = x^3 + 2x - 2$. On prend $\varphi(x) = x^3 + 2x - 2$.
3. $f(x) = 0 \iff x^3 + x - 2 = 0 \iff x\left(x^2 + 1\right) = 2 \iff x = \dfrac{2}{(x^2 + 1)}$. On prend $\varphi(x) = \dfrac{2}{(x^2 + 1)}$
4. $f(x) = 0 \iff x^3 + x - 2 = 0 \iff x^3 = 2 - x \iff x = \sqrt[3]{2 - x}$. On prend $\varphi(x) = \sqrt[3]{2 - x}$
5. On peut choisir $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. $\varphi(x) = x \iff x - \lambda f(x) = x \iff f(x) = 0$.

Définition 1.3.1. *(Méthode du point fixe)*
Supposons que $x^* \in R$ soit un point fixe de f. La méthode de point fixe consiste en la construction d'une suite $(x_k)_{k \in N}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 & \textit{donné} \\ x_{k+1} = \varphi(x_k) & \forall k \in N \end{cases} \tag{1.3}$$

Une telle suite n'est pas forcement convergente. Par contre, si elle converge, c'est-à-dire si la suite x_k a une limite que nous notons x ; et si f est continue, alors cette limite est nécessairement un point fixe de f puisque

$$x^* = \lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = \varphi(\lim_{k \to \infty} x_k) = \varphi(x^*)$$

L'utilisation des méthodes itératives pose de nombreux problèmes théoriques et pratiques.

- Il faut d'abord construire une telle méthode, puis étudier la convergence de la suite $(x_n)_n$.
- Etudier la vitesse de convergence.
- Puisqu'il est impossible en pratique de faire une infinité d'itérations. Il faut s'arrêter à un certain indice N, cela pose le problème de trouver un test d'arrêt, ainsi que celui de la précision obtenue $|x_N - \alpha|$. α étant la racine de l'équation .

La suite $(x_n)_n$ ainsi fabriquée ne converge pas toujours. Il arrive qu'elle converge pour certaines valeurs de x_0 et par pour d'autres. Pour pouvoir assurer la convergence de $(x_n)_n$, il faut imposer des conditions sur la fonction φ. Ces conditions sont plus au moins fortes selon que les résultats obtenus sont plus au moins forts.

1.3.2 Convergence du procédé itératif

Définition 1.3.2. *Soit φ une fonction réelle définie sur $[a,b]$. On dit que φ est stable sur $[a,b]$ si : $\forall x \in [a,b]\,,\ \varphi(x) \in [a,b]$ Autrement dit : $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$.*

Théorème 1.3.1. *Soit φ une fonction définie, continue et stable sur $[a,b]$. Alors φ admet au moins un point fixe dans $[a,b]$.*

Preuve . *Posons $f(x) = x - \varphi(x)$. La fonction f est continue sur $[a,b]$.*

- *Si $\varphi(a) = a$ ou $\varphi(b) = b$, on a point fixe pour φ sur $[a,b]$.*
- *Si $\varphi(a) \neq a$ ou $\varphi(b) \neq b$, alors comme $a \leq \varphi(x) \leq b$, on a $f(a) = a - \varphi(a) \leq 0$ et $f(b) = b - \varphi(b) \geq 0$.*

*Donc $f(a)f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que l'équation (**??**) admet au moins une racine dans $[a,b]$ et par conséquent φ admet au moins un point fixe dans $[a,b]$.*

Définition 1.3.3. *Soit φ une fonction réelle définie sur $[a,b]$. On dit que φ est contractante sur $[a,b]$ si*

$$\exists k \in [0,1]\,, \forall x,y \in [a,b] : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k\,|x-y|$$

k s'appelle la constante de contraction.

Théorème 1.3.2. *Théorème du point fixe*

Soit φ une fonction réelle définie, stable et contractante sur $[a,b]$. Alors :

1. *φ admet un unique point fixe sur $[a,b]$,*
2. *La suite $\begin{cases} x_{n+1} = \varphi(x_n)\ n = 1,2,\ldots \\ x_0 \in [a,b] \end{cases}$ converge vers l'unique solution α de 1.2 .*
3. *$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0|$ où k est constante de contraction.*

Remarque 1.3.1. *Il n'est pas toujours aisé de montrer que φ est contractante. Par contre les résultats du théorème 1.3.2 sont forts :*
- existence et unicité du point fixe,
- convergence de la suite 1.3 et
- majoration de l'erreur.

Théorème 1.3.3. *Soit φ une fonction réelle définie et dérivable sur $[a,b]$.*
Si $\exists\ k \in [0,1]$ tel que $\forall\ x \in [a,b]$ $\left|\varphi'(x)\right| \leq k$. Alors φ est contractante sur $[a,b]$ de constante de contraction k.

Preuve . *φ une fonction réelle définie et dérivable sur $[a,b]$ $\quad \forall\ x,y \in [a,b]$.*

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists \xi \in]x,y[: \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x-y) \tag{1.4}$$

par suite

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\varphi'(\xi)\right| |x-y| \leq k\,|x-y|$$

où $k \in [0,1]$

On conclut que φ est contractante sur $[a,b]$.

Remarque 1.3.2. *Il suffit que la fonction réelle φ définie et stable sur $[a,b]$ vérifie les conditions du théorème 5 pour que les trois résultats du théorème du point fixe soient réalisés.*

Remarque 1.3.3. *On peut remplacer $\exists k \in [0,1]\, telque \forall x \in [a,b]$ $\left|\varphi'(x)\right| \leq kdanslethéorème5par \exists k \in [0,1]\, telque \forall x \in [a,b]$ $\left|\varphi'(x)\right| \leq k \Leftrightarrow \underset{x\in[a,b]}{sup} \left|\varphi'(x)\right| \leq k$.*

Exercice 2

On reprend l'énoncé de l'exercice 1.

1. *Montrer que $\forall x \in [1,2]$, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $x = \varphi_1(x)$ où $\varphi_1(x) = e^x - 2$.*
2. *Montrer que $\forall x \in [1,2]$, l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $x = \varphi_2(x)$ où $\varphi_2(x) = ln(x+2)$.*
3. *Les hypothèses du théorème point fixe sont -elles vérifiées par φ_1 dans l'intervalle $[1,2]$? Justifier.*
4. *Montrer que φ_2 et l'intervalle $[1,2]$ vérifient les hypothèses du théorème du point fixe.*
5. *On considère le processus*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_2(x_n)\ n = 1,2,\ldots \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

.

Calculer x_1 et x_2. Quelle est l'erreur commise lorsqu'on approche la racine α par x_2 ?

Solution

$f(x) = e^x - x - 2. \forall x \in [1,2]$,

1. *Montrer que* $\forall x \in [1,2]$, *l'équation* $f(x) = 0 \iff x = \varphi_1(x)$ *où* $\varphi_1(x) = e^x - 2$.
$f(x) = 0 \, \forall x \in [1,2] \iff e^x - x - 2 = 0 \, \forall x \in [1,2] \iff \underbrace{e^x - 2}_{\varphi_1(x)} = x \, \forall x \in [1,2]$

2. *Montrer que* $\forall x \in [1,2]$, *l'équation* $f(x) = 0$ *est équivalente à* $x = \varphi_2(x)$ *où* $\varphi_2(x) = ln(x+2)$.
$\forall x \in [1,2]\,;\; f(x) = 0 \iff e^x - x - 2 = 0 \iff e^x = x + 2 \iff x = \underbrace{ln(x+2)}_{\varphi_2(x)}$

3. $\forall x \in [1,2]$, *l'équation* $f(x) = 0$ *est équivalente à* $x = \varphi_1(x)$ *où* $\varphi_1(x) = e^x - 2$. *Les hypothèses du théorème du point fixe sont -elles vérifiées par* φ_1 *dans l'intervalle* $[1,2]$ *?*
Nous avons :
$$1 \le x \le 2 \Leftrightarrow e^1 \le e^x \le e^2 \Leftrightarrow e^1 - 2 \le e^x - 2 \le e^2 - 2 \Leftrightarrow 0.718 \le \varphi_1(x) \le 5.389$$
. Alors $\varphi_1([1,2]) \nsubseteq [1,2]$ *.* $\varphi_1(x)$ *n'est pas stable sur* $[1,2]$. φ_1 *ne vérifie pas les hypothèses du théorème point fixe.*

4. *l'équation* $f(x) = 0$ *est équivalente à* $x = \varphi_2(x)$ *où* $\varphi_2(x) = ln(x+2)$. *Montrer que* φ_2 *et l'intervalle* $[1,2]$ *vérifient les hypothèses du théorème du point fixe.Nous avons :*
$$1 \le x \le 2 \Leftrightarrow 3 \le x + 2 \le 4 \Leftrightarrow ln(3) = 1.098 \le \varphi_2(x) \le ln(4) = 1.386$$
. Alors $\varphi_2([1,2]) \subseteq [1,2]$ *.* $\varphi_2(x)$ *est stable sur*$[1,2]$.

De plus $\varphi_2'(x) = \frac{1}{x+2}$ *et* $\varphi_2''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ $\forall x \in [1,2]$.*D'où* $\varphi_2'(x)$ *est décroissante sur* $[1,2]$. *Donc* $\varphi_2'(2) \le \varphi_2'(x) \le \varphi_2'(1) \Leftrightarrow 0.25 \le \varphi_2'(x) \le 0.334 \, \forall x \in [1,2]$.*ainsi* $\sup_{x\in[1,2]} \left|\varphi_2'(x)\right| \le k = 0.334 < 1$. φ_2 *est contractante sur* $[1,2]$.

5. *On considère le processus*
$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_2(x_n) \;\; n = 1, 2, \ldots \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$
. Calculer x_1 *et* x_2. *Quelle est l'erreur commise lorsqu'on approche la racine* α *par* x_2.

n	x_n	$\varphi_2(x_n)$
0	$\frac{3}{2}$	$ln\left(\frac{7}{2}\right)$
1	$ln\left(\frac{7}{2}\right) = 1.2528$	$ln(3.25)$
2	$ln(3.25) = 1.17$	

On a
$|x_n - \alpha| \le \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$ *où* k *est constante de contraction.*
Pour $k = 0.334$ *on obtient* $|x_n - \alpha| \le \frac{0.334^n}{1-0.334} \left|1.2528 - \frac{3}{2}\right| = 0.04$

1.3.3 Représentation géométrique du processus itératif

Pour mieux comprendre comment se déroulent les itérations dans (1.3), *nous allons maintenant en donner une interprétation graphique.*

Rechercher x *tel que* $x = \varphi(x)$ *revient à chercher l'intersection de la droite d'équation* $y = x$ *avec la courbe de la fonction* $y = \varphi(x)$.

On part de x_0 *et on calcule* $x_1 = \varphi(x_0)$, x_0 *étant sur l'axe des abscisses alors que* x_1 *se trouve sur l'axe des ordonnées.*
Pour pouvoir continuer à visualiser les itérations il faut ramener x_1 *sur celui des abscisses, ce qui est possible grâce à la première bissectrice* $y = x$ *.*
On recommence ensuite les mêmes opérations à partir de x_1 *et ainsi de suite.*

Le procédé itératif génère une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *soit :*

1. *Qui converge vers α quand n tend vers l'infini, nous distinguons deux cas :*
   — *Si* $-1 < \varphi^{'}(x) < 0$ *on a une convergence en spirale, représentés par la Fig 1.1.*
   — *Si* $0 < \varphi^{'}(x) < 1$ *on a une convergence en escalier, représentés par la Fig 1.2.*
2. *Qui diverge, x_n qui s'éloigne de plus en plus de la solution α quand n augmente.*
   — *Si* $\varphi^{'}(x) < -1$ *, on a une divergence en spirale., représentés par la Fig 1.3.*
   — *Si* $\varphi^{'}(x) > 1$ *, on a une divergence en escalier, représentés par la Fig 1.4.*

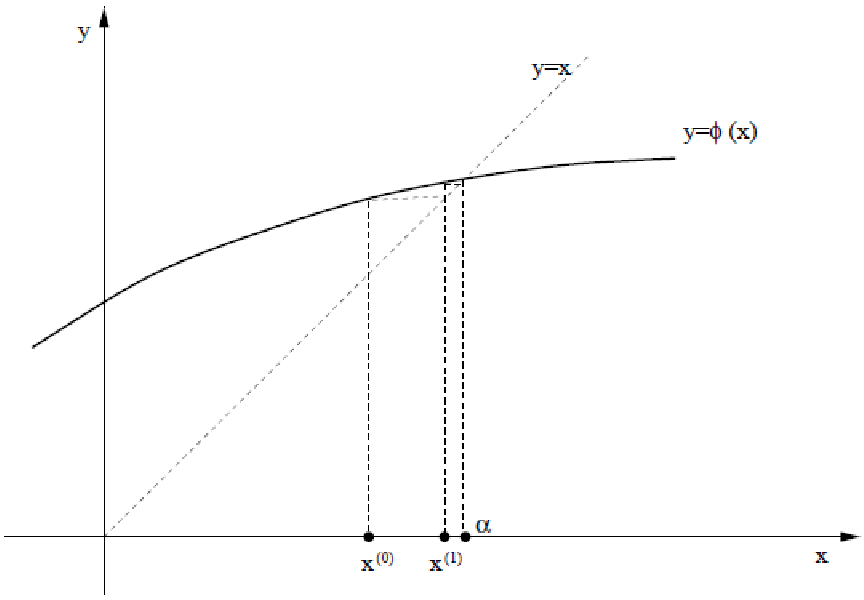


FIGURE 1.1 – Cas convergent avec $0 < \varphi^{'}(x) < 1$

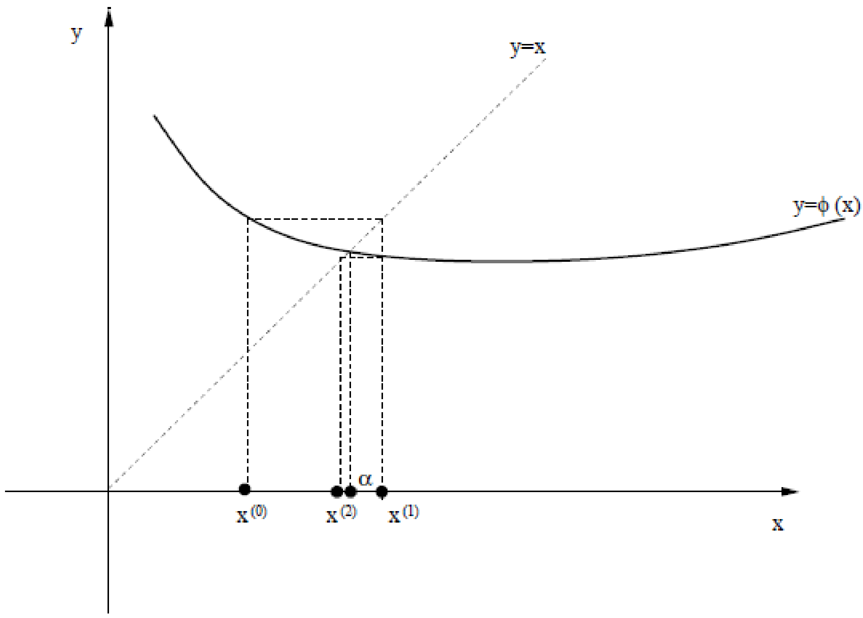


FIGURE 1.2 – Cas convergent $-1 < \varphi^{'}(x) < 0$

1.3.4 Arrêt des opérations

On a vu que théoriquement la solution de la suite (1.3) *n'est atteinte qu'après une infinité d'itérations (si le processus converge). En pratique, on arrête les opérations après l'un des test suivants :*

1. *Si* $f(x_n)$ *est quasiment nulle (i.e* $|f(x_n)| < \varepsilon_1$*).*

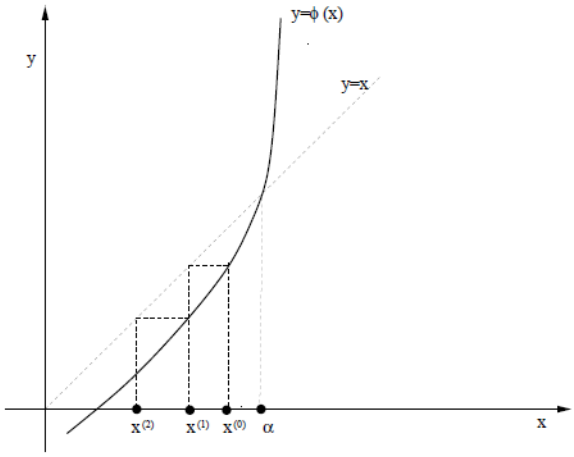


FIGURE 1.3 – Cas divergent $1 < \varphi^{'}(x)$

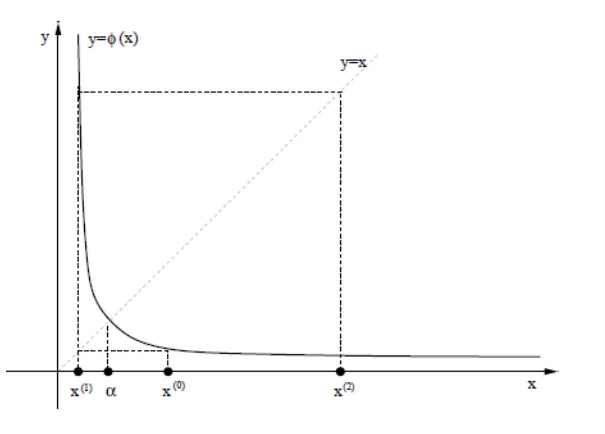


FIGURE 1.4 – Cas divergent $\varphi'(x) < -1$

2. *Si l'amélioration de x_n d'une itération à la suivante ne justifie pas l'effort de calcul supplémentaire. soit si :*
$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < \varepsilon_2 \quad ou \quad |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon_3$$
3. *Si la convergence n'est pas obtenue avant un nombre d'itérations, soit si $n > n_{max}$. Dans ce cas, si le seuil de précision ne peut pas être atteint en un nombre raisonnable d'itérations n_{max} fixé à l'avance, le processus est considéré comme non convergent pour la valeur estimée initiale x_0.*

1.3.5 Méthode de Newton-Raphson

Dans cette catégorie de méthodes, φ a la forme particulière $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Il est clair que, sous certaines conditions sur g, un point fixe α de φ est une racine de f.

Principe

Le procédé le plus utilisé pour la résolution de l'équation (1.1) est celui de Newton Raphson. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ (continue, deux fois dérivable et ses dérivées sont continues) sur $[a, b]$. La méthode consiste à introduire une suite (x_n) d'approximation successives de (1.1). Le développement de Taylor de f au voisinage de x_n s'écrit

$$f(x) = f(x_n) + f^{'}(x_n)(x - x_n) + f^{''}(x_n)\frac{(x - x_n)^2}{2!} + \cdots$$

Ainsi

$$f(\alpha) = f(x_n) + f^{'}(x_n)(\alpha - x_n) + f^{''}(x_n)\frac{(\alpha - x_n)^2}{2!} + \cdots \tag{1.5}$$

Si x_n est un estimé proche de la solution α, alors on peut négliger le carré de l'erreur $\epsilon_n = \alpha - x_n$ mais aussi tout les termes de degrés supérieurs dans (1.5) . On obtient

$$f(\alpha) \simeq f(x_n) + f^{'}(x_n)(\alpha - x_n)$$

comme $f(\alpha) = 0$, alors

$$(\alpha - x_n) = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \epsilon_n$$

On peut considérer qu'un meilleur estimé de α sera $x_{n+1} = x_n + \epsilon_n$.On obtient ainsi l'algorithme de Newton-Raphson

$$\begin{cases} x_0 \ fix\acute{e} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

(1.6)

Convergence de la méthode de Newton-Raphson

Théorème 1.3.4. *Soit la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. Supposons que*

1. $f(a) f(b) < 0$
2. $f^{'}(x) \neq 0$

Alors

1. *f admet une racine unique dans $[a, b]$,*
2. *La suite (x_n) définie par (1.5) converge vers $\alpha \in [a, b]$, pour tout $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) f^{''}(x_0) > 0$.*

   De plus, $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - \alpha| \leq C |x_1 - x_2|^2$ où $C = \frac{\max\limits_{[a,b]} \left|f''(x)\right|}{2\min\limits_{[a,b]} \left|f'(x)\right|}$.

Donc, on choisira x_0 de telle sorte que $f(x_0) f^{''}(x_0) > 0$.

Représentation géométrique du processus

On part d'un point x_0, on calcule le terme suivant x_1 de la manière suivante : on trace la tangente à C_f (la courbe de f) en x_0. Cette tangente coupe l'axe d'abscisse en x_1 Figure1.5. On réitère le procédé en calculant x_2 en remplaçant x_0 par x_1, puis x_3 en remplaçant x_1 par x_2 et ainsi de suite ....

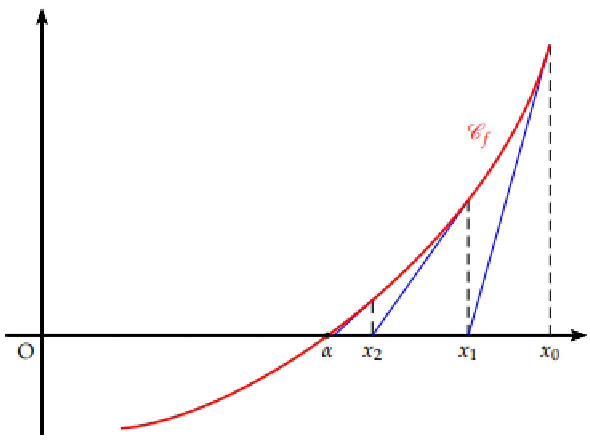


FIGURE 1.5 – Illustration méthode de Newton-Raphson

Exercice 3

On veut déterminer une valeur approchée pour $\sqrt{10}$. **Solution**

On procède par la méthode de Newton pour calculer $\sqrt{10}$ *. Pour cela on utilise la fonction* $f(x) = x^2 - 10$ *et on résout par cette méthode numérique la racine positive de* f*. La suite associée est donnée par*

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \end{cases}$$

qu'on peut réecrire sous la forme

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{cases}$$

qu'on appelle la suite de Héron. On a f *est de classe* C^{∞} *(donc de classe* C^2*)* $f(3) = -1$ *et* $f(4) = 6$ *donc* $f(3)f(4) < 0$ $f^{'}(x) = 2x \neq 0$*, alors* $\exists! \alpha \in [3, 4]$ *tel que* $f(\alpha) = 0$ *La méthode de Newton raphson est applicaple dans* $[3, 4]$*.*

Le choix de x_0 *:*
On a $f^{''} > 0$ *sur* $[3, 4]$*, et* $f > 0$ *sur* $[\alpha, 4]$ *alors on choisit* $x_0 \in [\alpha, 4]$ *tel que* $f(x_0) f^{''}(x_0) > 0$*. On prend* $x_0 = 4$*.*
Le déroulement de la suite de Héron à la main donne :

$$x_0 = 4$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{10}{x_0}\right) = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{10}{x_1}\right) = \frac{329}{104} = 3.1634...$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{10}{x_2}\right) = \frac{216401}{68432} = 3.16227788...$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{10}{x_3}\right) = 3.162277660168387....$$

$\vdots$

$$x_{11} = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{10}{x_3}\right) = 3.162277660168379....$$

On remarque une statbilité dans les valeurs approchées de $\sqrt{10}$ *à partir de* $n = 4$*.*