Intégration

1.1 Intégration Numérique

1.1.1 Position du problème

Le but

En général, il peut être difficile, voir impossible de trouver la valeur exacte d'une intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Sauf dans le cas où on connait explicitement une primitive de la fonction f, ou alors l'expression de f permettant par exemple une intégration par parties ou un changement de variables approprié.

Le principe

L'idée consiste à remplacer f par une approximation f^* et calculer $\int_a^b f^*(x)dx$.
C'à d $\int_a^b f^*(x)dx \simeq \int_a^b f(x)dx$ cette formule s'appelle **formule de quadrature** ou **formule d'intégration numérique**.

Une méthode bien connue consiste par exemple à diviser l'aire sous la courbe en un grand nombre de petits rectangles d'aire $\tilde{f}$ et de les sommer. Le résultat $\tilde{f}$ est alors une approximation de l'intégrale $I(f)$. Cette approximation est d'autant meilleure que la largeur h des rectangles tend vers 0, cette méthode dite des rectangles est un exemple parmi d'autres.

Dans ce chapitre, nous introduisons des formules de quadrature, qui consistent à approcher la valeur de l'intégrale par une somme pondérée finie de valeurs de la fonction f en des points choisis ; en d'autres mots, ces formules fournissent une approximation de l'intégrale par la quantité $f^* = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ avec $n \geq 0$, les coefficients α_i pour $i = 0, ..., n$ étant réels et dépendant de l'entier n et les points x_i pour $i = 0, ..., n$ appartenant à $[a, b]$. Nous limitons notre étude dans ce chapitre aux formules de Newton Cotes, qui sont un cas particulier de formules de quadrature d'interpolation polynomial.

Performances

La performance d'une méthode se juge en comparant
la précision du résultat qui se caractérise par l'estimation de l'erreur qui ne peut être calculée exactement puisqu'en général, on ne connaît pas l'intégrale I que l'on cherche à calculer. Cependant, une majoration peut souvent être estimée.
La rapidité d'exécution nécessaire pour atteindre ce résultat. De manière générale, toutes les méthodes peuvent atteindre de très grandes précisions. Cependant, le temps de calcul augmente avec la précision. Ce temps n'augmente pas de la même manière pour toutes les méthodes. En particulier, le temps de calcul des méthodes de quadrature est proportionnel au nombre de points où la fonction f(x) est évaluée.

Erreur

Si f est de classe C^0 sur $[a, b]$; l'erreur de quadrature

$$E(f) = |\int_a^b f(x) - \int_a^b f^*(x)dx| = |\int_a^b (f(x) - f^*(x))dx| \leqslant \int_a^b |f(x) - f^*(x)|dx. \tag{1.1}$$

1.1.2 Formules de Newton Cotes

Le principe générale des méthodes de Newton-Cotes simples est d'approximer la fonction $f(x)$ à intégrer par un polynôme $P_n(x)$, si cette approximation est bonne alors, l'intégrale de ce polynôme

$$I(P) = \int_a^b P_n(x)dx \tag{1.2}$$

sera une bonne approximation de $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.
Dans ces méthodes, on choisit des polynômes de degré n qui coïncident avec $f(x)$ en $n + 1$ points distincts x_i pour $i \in \{0, ..., n\}$ équirépartis dans l'intervalle $[a, b]$ en n parties $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et on considère les points d'intégration $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, ..., x_i = x_0 + ih (i = \overline{0, n}), x_n = b$.
On a alors pour tout $i \in [0, n]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

Formules de Newton Cotes simples

Des polynômes de degrés différents définissent des méthodes différentes aux performances différentes. Nous allons voir les plus courantes, c'est à dire les méthodes d'ordres les plus bas.

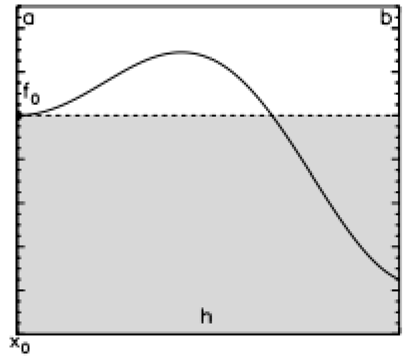
Méthode du rectangle (n = 0)

Cette méthode utilise le polynôme de degré le plus bas, à savoir le polynôme constant : $P_0(x) = f(a) = f_0$ L'intégrale approché se calcule facilement par

$$I(P_0) = \int_a^b P_0(x)dx = (b-a)f(a) = (b-a)f_0 \tag{1.3}$$

$$\boxed{\text{I(f)}= \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f_0}$$

Il s'agit de l'aire du rectangle.
Cette intégrale numérique nécessite une unique évaluation de la fonction f (en $x_0 = a$) et représente donc ce qu'on peut faire de plus rapide.



Erreur Si $f \in C^1[a, b]$, on a d'aprés la formule des erreurs,

$$E(f) \leqslant \int_a^b |f(x) - f^*(x)|dx \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|dx$$

où $M_{n+1} = \underset{x\in[a,b]}{Max} \ (|f^{n+1}(x)|)$ D'où

$$E(f) \leqslant \frac{M_1}{(1)!} \int_a^b |(x - x_0)|dx = \frac{M_1}{(1)!} \int_a^b |(x - a)|dx$$

Pour $h = b - a$ on a

$$\boxed{E(f) \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} M_1 = \frac{(h)^2}{2} M_1}$$

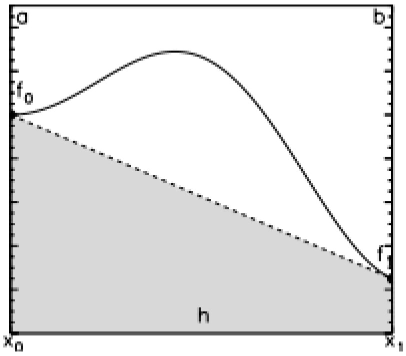
Méthode des trapèzes (n=1)

Pour approximer la fonction f, cette méthode utilise le polynôme d'ordre 1 qui est tout simplement la droite qui passe par $f(a) = f_0$ et $f(b) = f_1$. Un petit calcul nous donne

$$P_1(x) = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - \frac{a+b}{2}). \tag{1.4}$$

L'intégrale approchée $I(P_1) = \int_a^b P_1(x)dx$ se calcule
Mathématiquement et donne $I(P) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$.
Géométriquement pour évaluer géométriquement $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ on considère les points d'intégration $x_0 = a$, $x_1 = b$, on obtient

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))}$$



Erreur Si $f \in C^2\,[a,b]$, on a d'aprés la formule des erreurs,

$$E(f) \leqslant \int_a^b |f(x) - f^*(x)|dx \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|dx$$

Où $M_{n+1} = \underset{x\in[a,b]}{Max}\ (|f^{n+1}(x)|)$
D'où

$$E(f) \leqslant \frac{M_2}{(2)!} \int_a^b |(x - x_0)(x - x_1)|dx = \frac{M_2}{(2)!} \int_a^b |(x - a)(x - b)|dx$$

Pour $h = b - a$ on a

$$\boxed{\text{E(f)} \leqslant \tfrac{(b-a)^3}{12} M_2 = \tfrac{(h)^3}{12} M_2}$$

Méthode de Simpson simple (n = 2)

Pour approximer la fonction f, cette méthode utilise le polynôme de degré 2 (la parabole) qui interpole chaque trois points $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$. On peut prendre le polynôme d'interpolation de Lagrange ou celui de Newton. Considérons le polynôme d'interpolation de Newton qui passe par les points $(x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2)$ où $y_0 = f(x_0) = f_0$, $y_1 = f(x_1) = f_1$, $y_2 = f(x_2) = f_2$:

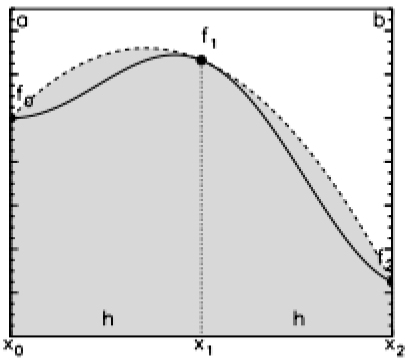
$$P_2(x) = y_0 + \frac{f_1 - f_0}{h}(x - x_0) + \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1). \tag{1.5}$$

L'intégrale approchée $I(P) = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$ se calcule
et donne

$$\boxed{\text{I(P)}= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{(b-a)}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)}$$

.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{(b-a)}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)}$$



Erreur Si $f \in C^3\,[a,b]$ avec $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$, on a d'aprés la formule des erreurs,

$$E(f) \leqslant \frac{M_3}{(3)!} \int_a^b |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|dx = \frac{M_3}{(3)!} \int_a^b |(x - a)(x - \frac{a+b}{2})(x - b)|dx =$$

Pour $h = \frac{b-a}{2}$ on a

$$\boxed{\text{E(f)} \leqslant \tfrac{(h)^5}{90} M_3 = \tfrac{(b-a)^5}{2880} M_3}$$

Méthodes d'ordres plus élevés

Plus généralement, on peut construire des approximations en utilisant des polynômes d'ordre quelconque. Le polynôme d'ordre n passant par $n+1$ points régulièrement espacés entre a et b s'exprime en fonction du polynôme d'interpolation de Lagrange de f, puis en posant

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i)dx \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx = \sum_{i=0}^n f(x_i)\int_a^b A_i^n dx = I(P_n). \end{aligned}$$

Notons que $\int_a^b L_i(x)dx$ sont donnés par les intégrales de polynômes de Lagrange sur l'intervalle $[a,b]$ et ne dépendent explicitement que de n et h et pas de l'intervalle d'intégration $[a,b]$.

Définition 1.1.1. *Si les deux extrémités de l'intervalle sont des points d'interpolation il s'agit de Newton Cotes fermé sinon il s'agit de Newton Cotes ouvert*

Définition 1.1.2. *L'erreur d'intégration est le réel $E(f) = I(f) - I(P)$.*
Une formule de quadrature est dite exacte sur F un sous espace vectoriel de $C^0[a,b]$, si $\forall f \in F$, $E(f) = 0$.

Théorème 1.1.1. *Pour une subdivision régulière en n parties de l'intervalle $[a,b]$, la formule générale de Newton Cotes fermé pour $\int_a^b f(x)dx$ est :*

$$I(f) = (b-a)\sum_{i=0}^n A_i^n f(a+ih) \text{ avec } h = \frac{b-a}{n}$$

où les coefficients sont

$$A_i^n = \frac{(-1)^{n-i}}{k!(n-i)!n}\int_0^n \prod_{i\neq j}(t-j)dt = A_{n-i}^n.$$

Preuve . *Pour $k \in \{0,...,n\}$, soit la subdivision régulière en $n+1$ parties de l'intervalle $[a,b]$ comme suit : $x = a+th$ et $x_i = a+ih$ pour $h = \frac{b-a}{n}$. On a*

$$\begin{aligned} A_i^n &= \int_a^b L_i(x)dx = \int_0^n L_i(a+th)dt \\ &= \int_0^n \prod_{i\neq j}\frac{(a+th)-x_j}{(a+ih)-x_j}dt \\ &= \int_0^n \prod_{i\neq j}\frac{(a+th)-(a+jh)}{(a+ih)-(a+jh)}dt \\ &= \int^{0\ n} \prod_{i\neq j}\frac{h(t-j)}{h(i-j)}dt \\ &= \prod_{j<i}\tfrac{1}{i-j}\prod_{j>i}\tfrac{1}{i-j}\int_0^n \prod_{i\neq j}(t-j)dt \\ &= \frac{(-1)^{n-1-i}}{i!(n-1-i)!}\int_0^{n-1}\prod_{j\neq i}(t-j)dt. \end{aligned}$$

De plus

Pour $A_i^n = A_{n-i}^n$ on fait le changement d'indice $i = n-i$ en remarquant que $n-(n-i) = i$.

Formule d'erreur dans l'intégration approchée
Dans l'intégration approchée, l'erreur est donnée par le résultat suivant :

Théorème 1.1.2. *Soit $f \in C^n([a,b])$. On suppose que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Si les valeurs de f aux points $x_0,...,x_n$ appartenant à $[a,b]$ sont connues, et $\sum_{i=0}^n A_i^n f(x_i)$ est l'approximation d'ordre n de $\int_a^b f(x)dx$ alors,*

$$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^n A_i^n f(x_i)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b |\prod_{i=0}^n (x-x_i)|dx \tag{1.6}$$

Où $M_{n+1} = \underset{x\in[a,b]}{Max}\ (|f^{n+1}(x)|)$

Un telle méthode nécessite $n+1$ évaluations de la fonction f (en x_k, $k \in [0,n]$). Ainsi, plus le degré est élevé, plus la méthode est lente.

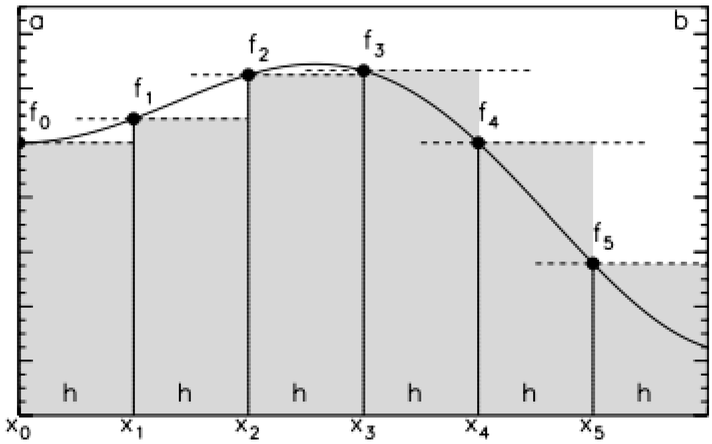


FIGURE 1.1 – Méthode composite des rectangles ($n = 0$) pour $m = 6$ intervalles

Conclusion *Plus les méthodes de Newton-Cotes simples sont basées sur des polynômes de degré élevé, plus elles sont lentes et plus elles sont difficiles à coder, mais plus elles sont précises. Dans la pratique, le domaine total d'intégration $[a, b]$ est beaucoup trop grand et la fonction varie trop sur ce domaine pour que ces méthodes donnent des résultats satisfaisants. On subdivise donc le domaine total $[a, b]$ en un grand nombre de petits intervalles sur chacun desquels on peut appliquer avec succès les méthodes de Newton-Cotes simples. On parle alors de méthode de Newton Cotes composites.*

Formules de Newton Cotes composites

L'idée est donc de découper le domaine total d'intégration $[a, b]$ en m intervalles. On approxime alors l'aire $\tilde{I}_k$ pour $k \in [0, m-1]$ de chaque intervalle par des méthodes de Newton-Cotes simples, et on en déduit une approximation de l'aire totale par une simple somme. Lorsque m est suffisamment grand, la largeur $\dfrac{(b-a)}{m}$ des intervalles devient aussi petite que l'on veut, si bien que ces méthodes peuvent atteindre des précisions aussi grandes que nécessaire, sans pour autant se heurter au problème des polynômes de grand degré. Les méthodes les plus précises seront les plus performantes même si elles sont relativement lentes

Méthode des rectangles (n=m)

La méthode des rectangles composite applique la méthode des rectangles simple ($n = 0$) sur chacun des m intervalles. L'aire de chaque intervalle vaut :

$$I_k(P_0) = (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = (x_{k+1} - x_k) f_k = h f_k. \tag{1.7}$$

l'intégrale totale vaut :

$$I(P_0) = h \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) = h \sum_{k=0}^{m-1} f_k. \tag{1.8}$$

D'où

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) = h \sum_{k=0}^{m-1} f_k}$$

Erreur *Sur chaque intervalle on a* $E(I_k) \leq \frac{(h)^2}{2} M_1$ *avec* $h = \frac{b-a}{m}$, *on a*
$E(I) = \sum_{k=0}^{m-1} E(I_k) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h)^2}{2} M_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(b-a)^2}{2m^2} M_1 = \frac{(b-a)^2}{2m} M_1$

$$\boxed{E(I) \leqslant \frac{(b-a)^2}{2m} M_1}$$

Méthode des trapèzes (n=m)

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *on a :*
$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_i)) = \frac{h}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_i))$
Donc
$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n = b} f(x)dx$

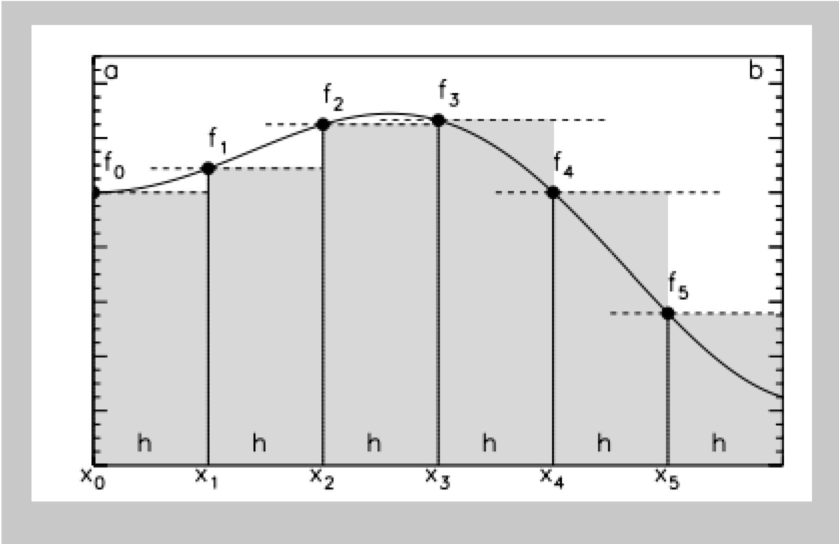


FIGURE 1.2 – Méthode composite des trapèzes ($n = 1$), pour $m = 6$ intervalles

$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$
$\simeq \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) + f(x_i))$
$= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)).$

D'où

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2} \left[f(a) + 2\Sigma_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]}$$

Erreur Sur chaque intervalle on a $E(I_k) \leq \frac{(h)^3}{12} M_2$ avec $h = \frac{b-a}{m}$ on a $E(I) = \sum_{k=0}^{m-1} E(I_k) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h)^3}{12} M_2 = \frac{m(h)^3}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{m^2 12} M_2$ D'où

$$\boxed{\mathrm{E(I)} \leqslant \frac{(b-a)^3}{m^2 12} M_2}$$

Remarque 1.1.1. *Cette méthode est d'autant plus précise que le nombre de points est grand.*

Exemple 1.1.1. *Soit* $f(x) = x^2$*,* $a = 0$*,* $b = 1$*, on prend* $n = 3$ *subdivisions. Donc* $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{3}$*,* $x_0 = a = 0$*,* $x_1 = \frac{1}{3}$ *,* $x_2 = \frac{2}{3}$*,*$x_3 = b = 1$ *avec* $y_0 = f(x_0) = 0$*,* $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{9}$*,* $y_2 = f(x_2) = \frac{4}{9}$ *et* $y_3 = f(x_3) = 1$*.*

$$I(f) = \int_0^1 x^2 dx \simeq I_3(f) = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3) = \frac{19}{54} \simeq 0.351. \tag{1.9}$$

Erreur d'aproximation :
$E(I) = \sum_{k=0}^{3} E(I_k) \leqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{(\frac{1}{3})^3}{12} M_2 = \frac{(1-0)^3}{3^2 12} M_2$ *où* $M_2 = \sup\limits_{[0,1]} |f^2(x)| = 1$

Donc $E(I) = \frac{1}{108}$

Méthode de Simpson simple (n =2m)

On divise l'intervalle borné $[a, b]$ en m parties et qu'on applique la méthode de Simpson, Comme trois points induisent deux subdivisions, le nombre de subdivisions doit être pris pair.
Soit l'intervalle borné $[a, b]$ divisé en $n = 2m$ parties $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et on considère les points d'intégration $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, ..., x_i = x_0 + ih(i = \overline{0, n}), x_n = b$.on a
$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx.$
$\simeq \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6) + ... + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$
$= \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_{2m-1})]$
$= \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2\sum_{(i)pair} y_i + 4\sum_{(i)impair} y_i\right]$

D'où

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2\sum_{(i)pair} y_i + 4\sum_{(i)impair} y_i\right]}$$

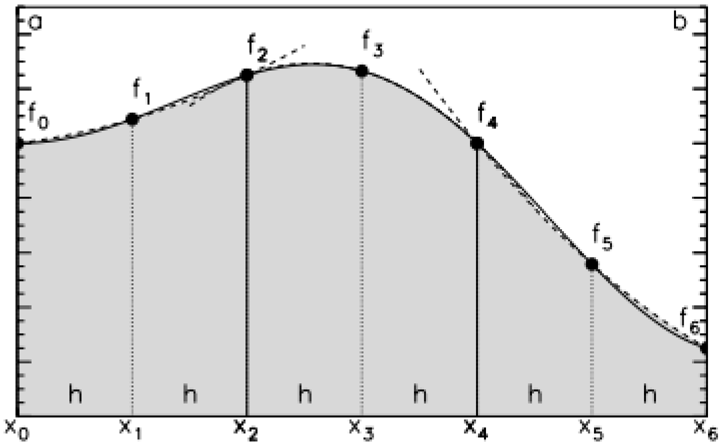


FIGURE 1.3 – Méthode composite de Simpson ($n=2$) pour $m=3$ intervalles

Erreur Sur chaque intervalle on a $E(I_k) \leq \frac{(h)^5}{90} M_3$ avec $h = \frac{b-a}{n}$ on a $E(I) = \sum_{k=0}^{m-1} E(I_k) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h)^5}{90} M_3 = \frac{m(h)^5}{90} M_3 = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_3$. D'où

$$\boxed{\text{E(I)} \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_3}$$

Proposition Si f est de classe $C^4\,[a,b\,]$ alors pour tout entier naturel n non nul on a :

$$E(I) \leq \frac{(b-a)^5}{n^4 180} M_4$$

où $M_4 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.
La preuve de ce résultat utilise le théorème des accroissements finis.