

Résolution des systèmes linéaire

1.1 Introduction

1.1.1 Position du problème

Soit le système linéaire d'ordre à n equations, ($n \in \mathbb{N}^*$) et n inconnues,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.1)$$

Le système 1.1 peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$AX = b \quad (1.2)$$

où $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, désigne une matrice carrée d'ordre n de nombres réels, $b = (b_i), 1 \leq i \leq n$, un vecteur colonne réel et $X = (x_i), 1 \leq i \leq n$, est le vecteur des inconnues du système.

Comment peut on résoudre ce système ?

1.1.2 Méthode de Cramer

Théoriquement si la matrice A est inversible alors on peut mettre ?? sous la forme

$$X = A^{-1}b$$

La méthode de Cramer se traduit comme suit :

Si $\det A \neq 0$ alors le système 1.2 admet une unique solution donnée par :

,

$$x_i = \frac{\det A_j}{\det A}$$

Où la matrice A_j est obtenue en remplaçant la j^{ieme} colonne de A par b .

Dans la pratique, l'application de cette méthode est difficile car elle nécessite un nombre d'opération (un cout) assez conséquent qui est de l'ordre de $(n+1)!$.

Pour palier à ce problème, le développement de méthodes moins couteuses est nécessaire, le choix de la méthode de résolution dépendra de la taille du système ainsi que de la structure de la matrice. Nous allons étudier deux méthodes :

Méthode directe : En construisant un système équivalent au système 1.2, ces méthodes permettent de trouver la solution X du système 1.2 en un nombre fini d'étapes mais plus facile résoudre. mis à part les erreurs d'arrondis, ces méthodes conduisent à la solution exacte. Cependant, elles ne sont applicables que lorsque $n < 50$ environ.

Méthode indirecte : Consistent à fournir la solution en un nombre infini d'opérations, par approximations successives i.e. en construisant une suite de vecteurs $X^{(n)}$ convergeant vers la solution X et ceux sans modifier le système initial. Ces méthodes s'appliquent pour résoudre des systèmes de grandes tailles.

1.2 Méthodes directes

1.2.1 Rappel :

Soit le système linéaire d'ordre à n equations, ($n \in \mathbb{N}^*$) et n inconnues,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n & (L_n) \end{cases} \quad (1.3)$$

Où L_i représente la i^{eme} ligne du système 1.3

Définition 1.2.1. On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations linéaires, les opérations suivantes :

1. Multiplication par un scalaire $k \in R^* : (L_i) \longleftrightarrow k(L_i)$.
2. Permutation de deux lignes : $(L_i) \longleftrightarrow (L_j)$.
3. Addition à une ligne, d'un multiple d'une autre ligne : $(L_i) \longleftrightarrow (L_i) + k(L_j) k \in R^*$.

Proposition 1.2.1. Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système d'équations linéaires transforme ce dernier en un système équivalent ayant le même ensemble de solutions.

Exemple 1.2.1. Soit le système suivant sur lequel nous allons effectuer quelques opérations élémentaires.

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 & (L_1) \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 & (L_2) \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 31 & (L_3) \end{cases}$$

Nous voulons éliminer x_1 dans (L_2) et (L_3)

$$(S_2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 & (L_1) \\ x_2 + 4x_3 = 37 & (L_2) \longleftrightarrow (L_2) - 3(L_1) \\ +5x_2 + 18x_3 = 169 & (L_3) \longleftrightarrow (L_3) - 4(L_1) \end{cases}$$

Nous voulons éliminer x_2 dans (L_3)

$$(S_3) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 & (L_1) \\ x_2 + 4x_3 = 37 & (L_2) \longleftrightarrow (L_2) - 3(L_1) \\ +2x_3 = 16 & (L_3) \longleftrightarrow (L_3) - 5(L_2) \end{cases}$$

Les systèmes (S_1) et (S_3) ont le même ensemble de solutions.

1.2.2 Systèmes particuliers

Soit un système linéaire dont la matrice A est inversible, nous allons citer quelques systèmes particuliers pour les quelles la résolution est très simple et non couteuses

Définition 1.2.2. (Système diagonal)

Un système diagonal s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & = b_1 \\ & a_{22}x_2 & & = b_2 \\ & \vdots & & \\ & & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A est une matrice diagonale qui vérifie $a_{ii} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$ (car A est inversible).

On a $\det(A) = a_{11}.a_{22}.\cdots.a_{nn} \neq 0$ alors il existe une unique solution du système 1.2 donnée par :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

. Le nombre d'opération nécessaire pour résoudre un système diagonal est de n car on fait n division.

Définition 1.2.3. (Système Triangulaire supérieur)

Un système triangulaire supérieur s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & +a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A est une matrice triangulaire supérieure qui vérifie $a_{ij} \neq 0$ pour $i > j$ et $1 \leq i, j \leq n$ (car A est inversible).

On a $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn} \neq 0$ alors il existe une unique solution du système 1.2.

On peut résoudre le système 1.2 par la remontée c'est-à-dire on trouve d'abord x_n puis x_{n-1}, \dots , puis x_1 ; d'où les relations :

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j) \quad i = \{n-1, \dots, 1\} \end{cases}$$

Le nombre d'opération nécessaire pour résoudre ce système :

1. n division.

2. $\frac{n(n-1)}{2}$ addition ou multiplication car

$$\sum_{i=1}^n (n-i) = n \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n i = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

Au total on a $n + 2 \cdot \frac{n^2 - n}{2} = n^2$ opérations.

Définition 1.2.4. (Triangulaire inférieure)

Un système triangulaire inférieur s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & & & & = b_1 \\ a_{11}x_1 + & a_{22}x_2 + & & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \cdots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A est une matrice triangulaire inférieure qui vérifie $a_{ij} \neq 0$ pour $i < j$ et $1 \leq i, j \leq n$.

On a $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn} \neq 0$ alors il existe une unique solution du système 1.2.

On peut résoudre le système 1.2 par la descente c'est-à-dire on trouve d'abord x_1 puis x_2, \dots , puis x_n ; de la même façon que pour un système triangulaire supérieur d'où le nombre d'opération reste le même.

1.2.3 Méthode de Gauss

Nous avons jusqu'à présent considéré que des systèmes linéaires de n équations à n inconnues, mais la méthode de Gauss peut être utilisée pour la résolution de tout système à m équations et n inconnues, avec $m \neq n$.

Dans sa forme générale, la méthode d'élimination de Gauss permet de transformer un système linéaire dont la matrice est carrée (inversible ou non) ou même rectangulaire en un système équivalent.

Comme les systèmes triangulaires sont faciles et économiques à résoudre, l'objectif est de transformer tout système linéaire en système triangulaire équivalent. Cette technique est la plus utilisée; en particulier son algorithme est d'exploitation aisée sur micro-ordinateur.

La méthode de Gauss a pour but de transformer le système $Ax = b$ par un système équivalent (qui a la même solution) de la forme $Ux = b'$; où U est une matrice triangulaire supérieure (on dit que la matrice du système est sous forme échelonnée) et b' est un second membre convenablement modifié.

Exemple 1.2.2. Résoudre le système

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 & (L_1) \\ -x_1 + x_2 - x_3 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{1}{2} & (L_2) \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 & (L_3) \\ -x_1 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{5}{3} & (L_4) \end{cases}$$

La version matricielle de ce système est

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

L'idée est de se ramener à une matrice triangulaire supérieur, donc on effectue des opérations élémentaire sur les lignes. On commence par éliminer x_1 des trois dernières lignes ensuite x_2 des deux dernières lignes et enfin x_3 de la dernière ligne.

Etape 1 : On élimine x_1 de des trois dernières lignes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 4 & 4 & 3 & 1 & | & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{5}{3} \end{pmatrix}}_{\substack{A^{(1)} \quad |b^{(1)} \\ (S)=(S^1)}} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{matrix}$$

En effectue sur $A^{(1)}$ les opérations élémentaires suivante :

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} &= (L_2^{(1)}) - \left(\frac{-1}{2}\right)(L_1^{(1)}) \\ L_3^{(2)} &= (L_3^{(1)}) - \left(\frac{-4}{2}\right)(L_1^{(1)}) \\ L_4^{(2)} &= (L_4^{(1)}) - \left(\frac{-1}{2}\right)(L_1^{(1)}) \end{aligned}$$

On obtient :

$$A^{(2)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : On élimine x_2 des deux dernières lignes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}}_{\substack{A^{(2)} \quad |b^{(2)} \\ (S^2)}} \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \\ L_4^{(2)} \end{matrix}$$

En effectue sur $A^{(1)}$ les opérations élémentaires suivante :

$$\begin{aligned} L_1^{(3)} &= L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} &= L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} &= (L_3^{(2)}) - \left(\frac{-4}{3}\right)(L_2^{(2)}) \\ L_4^{(3)} &= (L_4^{(2)}) - \left(\frac{-2}{3}\right)(L_2^{(2)}) \end{aligned}$$

On obtient :

$$A^{(3)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & | & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{-1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Etape 3 : On élimine x_3 de la dernière ligne.

$$A^{(3)} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{-1}{3} & \frac{7}{3} \end{array} \right)}_{\substack{A^{(3)} \quad |b^{(3)} \\ (S^3)}} \begin{matrix} L_1^{(3)} \\ L_2^{(3)} \\ L_3^{(3)} \\ L_4^{(3)} \end{matrix}$$

En effectue sur $A^{(3)}$ les opérations élémentaires suivante :

$$\begin{aligned} L_1^{(4)} &= L_1^{(3)} \\ L_2^{(4)} &= L_2^{(3)} \\ L_3^{(4)} &= L_3^{(3)} \\ L_4^{(4)} &= (L_4^{(3)}) - (-2)(L_3^{(3)}) \end{aligned}$$

On obtient :

$$A^{(4)} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)}_{\substack{A^{(4)} \quad |b^{(4)} \\ (S^4)}}$$

D'après la proposition 1.2.1 on a $(S^1) \Leftrightarrow (S^2) \Leftrightarrow (S^3) \Leftrightarrow (S^4)$. Ce qui donne en écriture matricielle

$$A^{(1)}X = b^{(1)} \Leftrightarrow A^{(2)}X = b^{(2)} \Leftrightarrow A^{(3)}X = b^{(3)} \Leftrightarrow A^{(4)}X = b^{(4)}$$

La matrice $A^{(4)}$ est triangulaire supérieur qu'on notera U D'où

$$AX = b \Leftrightarrow UX = b^{(4)}$$

D'où

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Gauss

Considérons le système 1.1 définie précédemment avec sa matrice associée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et posons :
On pose $A = A^{(1)}$ et $b^{(1)} = b$

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right) \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \vdots \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

Etape 1 : Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^{(2)} \longleftrightarrow L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \alpha_{i1} L_1^{(1)} \quad \text{où } \alpha_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad 2 \leq i \leq n \end{array} \right.$$

On obtient donc

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right) \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ \vdots \\ L_n^{(2)} \end{matrix}$$

Remarque 1.2.1. Si on pose

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\beta_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\beta_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On aura $A^{(2)} = E^{(1)}A^{(1)}$.

Etape k : Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_i^{(k+1)} \longleftrightarrow L_i^{(k)} & 1 \leq i \leq k \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \beta_{ik} L_k^{(k+1)} & \text{où } \beta_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

On obtient donc

$$A^{(k+1)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(k+1)} & a_{12}^{(k+1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k+1)} & b_1^{(k+1)} \\ 0 & a_{22}^{(k+1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(k+1)} & b_2^{(k+1)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{kk}^{(k+1)} & \cdots & a_{kn}^{(k+1)} & b_k^{(k+1)} \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & b_n^{(k+1)} \end{array} \right) \begin{matrix} L_1^{(k+1)} \\ L_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n^{(k+1)} \end{matrix}$$

Remarque 1.2.2. Si on pose

$$E^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{k+1k} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{k+2k} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\beta_{nk} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On aura $A^{(k+1)} = E^{(k)}A^{(k)}$.

En réitérant $(n-1)$ fois l'opération on obtient : $AX = b \Leftrightarrow A^{(n)}X = b^{(n)}$.

Avec

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} A^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2.3. 1. Les $a_{kk}^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$ sont appelés "pivots de la méthode de Gauss".

2. Les matrices E^k sont appelés "matrices de transformation".

3. Si à la $k^{\text{ième}}$ étape $a_{kk}^{(k)} = 0$, alors il existe p , $k+1 \leq p \leq n$ tel que $a_{pk}^{(k)} \neq 0$, car

$$\det(A) = a_{11}^{(k-1)} \times a_{22}^{(k-1)} \times \cdots \times a_{k-1, k-1}^{(k-1)} \times \begin{vmatrix} a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

4. La méthode de Gauss sans permutation de lignes s'appelle "Gauss ordinaire".

Coût de la méthode de Gauss ordinaire

Pour chaque étape k , $1 \leq k \leq n-1$ on a $(n-k+1)(n-k)$ additions (soustractions), $(nk+1)(nk)$ multiplications et (nk) divisions, donc

$$\text{Coût total}(N) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1)(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} (nk) = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$ alors $N \simeq \frac{2}{3}n^3$ (car, n^2 est négligeable devant n^3).

À titre de comparaison, pour $n = 10$ par exemple le calcul de la solution du système, on obtient un compte d'environ 700 opérations pour la méthode de Gauss contre près de 479000000 opérations pour la règle de Cramer.

Exemple 1.2.3. Résoudre le système $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On pose $A = A^{(1)}$ et $b = b^{(1)}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 3 & -9 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)}_{\substack{A^{(1)} \quad |b^{(1)} \\ (S)=(S^1)}} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{matrix}$$

En effectue sur $A^{(1)}$ les opérations élémentaires suivante :

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} &= (L_2^{(1)}) - \left(\frac{-4}{2}\right)(L_1^{(1)}) \\ L_3^{(2)} &= (L_3^{(1)}) - \left(\frac{4}{2}\right)(L_1^{(1)}) \end{aligned}$$

On obtient :

$$A^{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{0} & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

On a $A^{(2)} = E^{(1)}A^{(1)}$ où $E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque que le pivot est nul donc une permutation est nécessaire d'où la transformation élémentaire $L_2^{(2)} \longleftrightarrow L_3^{(2)}$ dans la matrice $A^{(2)}$ qui va donner la matrice

$$(A^{(2)})' \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{array} \right)$$

On a $(A^{(2)})' = P^{(2)}A^{(2)}$ où $P^{(2)}$ est la matrice de permutation $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La résolution de $(A^{(2)})'$ donne la solution

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} \\ \frac{16}{3} \\ \frac{3}{3} \\ \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2.4. la méthode de Gauss, dans sa forme sans permutation, ne peut s'appliquer que si tous les pivots $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, sont non nuls. De plus, le fait que la matrice soit inversible n'empêche aucunement l'apparition de pivot nul durant l'élimination, comme le montre l'exemple 1.2.3. Donc des conditions plus restrictives que l'inversibilité de la matrice sont nécessaires pour assurer la bonne exécution de cette méthode.

1.2.4 Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan est une variante de la méthode de Gauss. Elle consiste à diagonaliser la matrice A en ayant des 1 sur la diagonale en utilisant toujours que des transformations élémentaires. C'est à dire transformer A en matrice unité.

Considérons toujours le système 1.1. On transforme la matrice A en matrice unité. On pose $A = A^{(1)}$ et $b^{(1)} = b$

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right) \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ \vdots \\ L_n^{(1)} \end{matrix}$$

Etape 1 : Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \beta_{i1} L_1^{(1)} \quad \text{où } \beta_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

On obtient donc

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right) \begin{matrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ \vdots \\ L_n^{(2)} \end{matrix}$$

Remarque 1.2.5. Si on pose

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}^{(1)}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\beta_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\beta_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On aura $A^{(2)} = E^{(1)} A^{(1)}$.

Etape k : Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ (sinon on fait une permutation de lignes) on fait les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \beta_{ik} L_k^{(k)} \quad \text{où } \beta_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad 1 \leq i \leq n \\ \text{avec } i \neq k \end{cases}$$

On obtient donc

$$A^{(k+1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1k}^{(k+1)} & \cdots & a_{1n}^{(k+1)} & b_1^{(k+1)} \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(k+1)} & b_2^{(k+1)} \\ \vdots & 0 & \cdots & 1 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k+1)} & \cdots & a_{kn}^{(k+1)} & b_k^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & b_n^{(k+1)} \end{array} \right) \begin{matrix} L_1^{(k+1)} \\ L_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n^{(k+1)} \end{matrix}$$

Remarque 1.2.6. Si on pose

$$E^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta_{1k} & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & -\beta_{k-1k} & & 0 \\ & & \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} & & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{k+1k} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{k+2k} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\beta_{nk} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On aura $A^{(k+1)} = E^{(k)} A^{(k)}$.

En réitérant $(n-1)$ fois l'opération on obtient : $AX = b \Leftrightarrow I.X = b^{(n)}$.

$$\text{Avec } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrice unitaire et}$$

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2.7. 1. La méthode de Gauss-Jordan nécessite n^3 opérations élémentaires. Donc moins rapide que celle de Gauss.

2. Néanmoins, elle permet le calcul de la matrice inverse et évite la "remontée" qu'on rencontre dans la méthode de Gauss.

Exemple 1.2.4. Résoudre le système $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $A = A^{(1)}$ et $b = b^{(1)}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right)}_{\substack{A^{(1)} \quad |b^{(1)} \\ (S)=(S^1)}} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{matrix}$$

On a $a_{11} = 2 \neq 0$, On effectue sur $A^{(1)}$ les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= \frac{1}{2}L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} &= (L_2^{(1)}) - \left(\frac{4}{2}\right)(L_1^{(1)}) \\ L_3^{(2)} &= (L_3^{(1)}) - \left(\frac{-2}{2}\right)(L_1^{(1)}) \end{aligned}$$

On obtient :

$$A^{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right)$$

On a $A^{(2)} = E^{(1)}A^{(1)}$ où $E^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $a_{22} = -2 \neq 0$, On effectue sur $A^{(2)}$ les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} L_2^{(3)} &= -\frac{1}{2}L_2^{(2)} \\ L_1^{(3)} &= (L_1^{(2)}) - \left(\frac{-3}{4}\right)(L_2^{(2)}) \\ L_3^{(3)} &= (L_3^{(2)}) - \left(\frac{-6}{2}\right)(L_2^{(2)}) \end{aligned}$$

On obtient :

$$A^{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-11}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array} \right)$$

On a $A^{(3)} = E^{(2)}A^{(2)}$ où $E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

On a $a_{33} = -5 \neq 0$, On effectue sur $A^{(3)}$ les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} L_3^{(4)} &= -\frac{1}{5}L_3^{(3)} \\ L_1^{(4)} &= (L_1^{(3)}) - \left(\frac{1}{4}\right)(L_3^{(3)}) \\ L_2^{(4)} &= (L_2^{(3)}) - \left(\frac{-1}{10}\right)(L_3^{(3)}) \end{aligned}$$

On obtient :

$$A^{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

D'où

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.2.5 Stratégie du choix du pivot

Exemple 1.2.5. Sachant que la solution exacte du système $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0.0003 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 2.0001 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, on propose de résoudre ce système par la méthode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} &= (L_2^{(1)}) - \left(\frac{1}{0.0003}\right)(L_1^{(1)}) \end{aligned}$$

On obtient

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 0 & -9999 & -6666 \end{array} \right)$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6666}{9999} = \frac{2222}{3333} \\ \frac{1}{0.0003} (2.0001 - 3x_2) \end{pmatrix}$$

Pour différents valeurs approchées de x_2 , on trouve différentes valeurs de x_1 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.6667 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.66667 \\ 0.3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.667 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque 1.2.8. 1. En gardant la valeur de x_2 stable, celle de x_1 fluctue considérablement et s'éloigne de la solution exacte $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

En effet cette perte de précision est dû au pivot a_{11} qui est très petit.

Stratégie du pivot partiel

La méthode consiste à choisir à la $k^{\text{ième}}$ étape comme ligne pivot, une ligne d'indice $p \geq k$ telle que :

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

où

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{pk}^{(k)} & \cdots & a_{pn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

et à permuter la ligne k et la ligne p . Cette méthode permet de limiter la propagation des erreurs d'arrondis.

Exemple 1.2.6. Reprenons l'exemple 1.2.5, et résolvons $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0.0003 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 2.0001 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Permutons les lignes L_1 et L_2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0.0003 & 3 & 2.0001 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} &= (L_2^{(1)}) - \left(\frac{0.0003}{1}\right)(L_1^{(1)}) \end{aligned}$$

On obtient

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2.9997 & 1.9999 \end{array} \right)$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6667 \\ 0.3333 \end{pmatrix}$$

qui est la solution de ce système.

Stratégie du pivot total

Cette méthode est plus efficace que la méthode du pivot partiel, pour limiter la propagation des erreurs d'arrondis car le choix du pivot est plus vaste.

A la $k^{\text{ième}}$ étape on choisira le pivot $a_{pl}^{(k)}$ qui vérifie :

$$|a_{pl}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n, k \leq j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|$$

où

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{1k}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kl}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{pk}^{(k)} & \cdots & a_{pl}^{(k)} & \cdots & a_{pn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nl}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Il s'agira ensuite de permuter les lignes k et p , et les colonnes l et k de manière à ce que l'élément $a_{pl}^{(k)}$ devienne le pivot de la $k^{\text{ième}}$ étape.

1.2.6 Décomposition LU

Nous allons maintenant montrer que la méthode de Gauss sans permutation est équivalente à la décomposition de la matrice A sous la forme d'un produit de deux matrices, $A = LU$, avec L une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure avec $U = A^{(n)}$.

La résolution du système devient :

$$AX = b \Leftrightarrow L \underbrace{UX}_Y = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$$

Donc la résolution du système $AX = b$ revient à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Exemple 1.2.7. Reprenons l'exemple 1.2.2, on a d'après la méthode de Gauss

$$A^{(2)} = A^{(1)} E^{(1)} \text{ où } E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet

$$E^{(1)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$E^{(1)} A^{(1)} = A^{(2)} \Leftrightarrow A^{(1)} = (E^{(1)})^{-1} A^{(2)}$$

On calcul $(E^{(1)})^{-1}$ et on trouve $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 1.2.9. : $E^{(1)}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité dont les termes en dessous de la 1^{ère} diagonale sont les opposés des multiplicateurs de l'étape 1 de la méthode de Gauss.

$(E^{(1)})^{-1}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité dont les termes en dessous de la 1^{ère} diagonale sont les multiplicateurs de l'étape 1 de la méthode de Gauss.

De la même manière à l'étape 2 on vérifie que :

$$A^{(3)} = A^{(2)} E^{(2)} \text{ où } E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $E^{(2)} A^{(2)} = A^{(3)} \Leftrightarrow A^{(2)} = (E^{(2)})^{-1} A^{(3)}$ où $(E^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A l'étape 3 on a :

$$A^{(3)} = A^{(2)} E^{(2)} \text{ où } E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $E^{(3)} A^{(3)} = A^{(4)} \Leftrightarrow A^{(3)} = (E^{(3)})^{-1} A^{(4)}$ où $(E^{(3)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Notons $L^{(1)} = (E^{(1)})^{-1}$, $L^{(2)} = (E^{(2)})^{-1}$ et $L^{(3)} = (E^{(3)})^{-1}$
D'où $A^{(1)} = L^{(1)} A^{(2)}$, $A^{(2)} = L^{(2)} A^{(3)}$ et $A^{(3)} = L^{(3)} A^{(4)}$

Par conséquent

$$A^{(1)} = L^{(1)} \underbrace{L^{(2)} A^{(3)}}_{A^{(2)}} = L^{(1)} L^{(2)} \underbrace{L^{(3)} A^{(4)}}_{A^{(3)}} = \underbrace{L^{(1)} L^{(2)} L^{(3)}}_L A^{(4)}$$

$$\boxed{A} = LU$$

Où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{2}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité où tous les termes de la diagonale sont les multiplicateurs des différentes étapes de la méthode de Gauss.
Et

$$U = A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Détermination des matrices L et U

En utilisant la méthode de Gauss ordinaire (sans permutation) et en analysant le problème de la même manière qu'il a été présenté dans l'exemple 1.2.4 on écrit à la $k^{\text{ième}}$ étape :

$$A^{(k+1)} = E^{(k)} A^{(k)}$$

Où

$$E^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & -\beta_{k+1k} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_{nk} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons que la matrice $E^{(k)}$ est la matrice de transformation à la $k^{\text{ième}}$ étape et les $\beta_{i,k}$ pour tout $i > k + 1$ sont les multiplicateurs à la $k^{\text{ième}}$ étape.
Il s'ensuit que

$$A^{(k)} = [E^{(k)}]^{-1} A^{(k+1)}$$

Où

$$[E^{(k)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \beta_{k+1k} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{nk} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

En notons $[E^{(k)}]^{-1} = L^{(k)}$ on écrit :

$$A^{(k)} = L^{(k)} A^{(k+1)}, \forall 1 \leq k \leq n-1$$

D'où

$$A^{(k)} = \underbrace{L^{(1)} L^{(2)} \dots L^{(n-1)}}_L A^{(n)} = L A^{(n)}$$

Avec la matrice des multiplicateurs à chaque étape

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_{21} & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Cout de la méthode LU

Pour le calcul de U : $\text{coût}(\times) = \text{coût}(+) = \sum_{m=1}^n (m-1)(n-m+1) = O(\frac{1}{6}n^3)$.

Pour le calcul de L : $\text{coût}(\times) = \text{coût}(+) = \sum_{m=1}^n (m-1)(n-m) = O(\frac{1}{6}n^3)$.
et cout de la division

$$\sum_{m=1}^n (n-m) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Au total on le coût = $O(\frac{1}{6}n^3)$ = coût de Gauss.

Théorème 1.2.1. (Existence et unicité)

Soit A une matrice telle que les sous matrices principales $A_{[k]} = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq k$ de A soient inversibles pour tous $1 \leq i, j \leq k$, alors il existe une matrice $L = (l_{ij})$, pour $1 \leq i, j \leq n$ triangulaire inférieure telle que $l_{ii} = 1$, $i = 1, n$ et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$. De plus cette décomposition est unique.

Preuve . Existence : Montrons que tous les pivots d'élimination de Gauss sont non nuls, c'est à dire $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$ (car l'existence de cette décomposition revient à l'existence des matrices de transformation de la méthode de gauss ordinaire). On le démontre par récurrence.

Le premier pivot $a_{11}^{(1)}$ est forcément non nul car par hypothèse $A_{[1]}$ est inversible donc $a^{(1)11} = \det A_{[1]} \neq 0$.

Supposons que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq r-1$ et montrons que $a_{rr}^{(r)} \neq 0$.

On a $\det(A_{[r]}) = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{rr}^{(r)}$. Or d'une part, par hypothèse $\det(A_{[r]}) \neq 0$ est différent de zéro et d'autre part, par hypothèse de récurrence $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq r-1$. Donc $a_{rr}^{(r)} \neq 0$ est aussi différent de zéro.

Unicité : Soit $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$, d'où $U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = D$

$U_1 U_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure et $L_1^{-1} L_2$ est une matrice triangulaire inférieure et D a des 1 sur la diagonale, alors $D = I_n$ ce qui implique que $U_1 = U_2$ et $L_1 = L_2$. \square

Utilité de la détermination LU

1. La factorisation LU est particulièrement avantageuse lorsque l'on doit résoudre plusieurs systèmes linéaires ayant tous A pour matrice, mais des seconds membres différents. En effet, il suffit de conserver les matrices L et U obtenues à l'issue de la factorisation pour ramener ensuite la résolution de chaque système linéaire $Ax = b$ à celle de deux systèmes triangulaires, $Ly = b$, puis $Ux = y$.
2. Calcul de déterminant Grâce à la factorisation LU, on peut calculer le déterminant d'une matrice carrée avec $O(\frac{1}{6}n^3)$ en effet
 $\det L = 1$ car L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité; et
 $\det U = \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k)}$ car u est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée des pivots $a_{11}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n)}$. Donc $\det(A) = \det(L) \det(U) = \det(U) = \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k)}$.
3. Calcul de l'inverse d'une matrice, soit A une matrice carrée inversible d'ordre n . On a

$$AA^{-1} = I_n \Leftrightarrow L \underbrace{UA^{-1}}_y = I_n \Leftrightarrow Ly = I_n \text{ et } UA^{-1} = y$$

Cas général de la décomposition LU

Exemple 1.2.8. Reprenons l'exemple 1.2.3, on a d'après la méthode de Gauss

$$\text{On } A^{(2)} = E^{(1)} A^{(1)} \text{ où } E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A l'étape 2 le pivot $a_{22}^{(2)}$ est nul donc une permutation a été effectuée d'où

$$(A^{(2)})' = P^{(2)} A^{(2)} \text{ où } P^{(2)} \text{ est la matrice de permutation } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent on a

$$(A^{(2)})' = P^{(2)} A^{(2)} = P^{(2)} E^{(1)} A^{(1)}$$

D'où

$$U = (A^{(2)})' = P^{(2)} E^{(1)} \underbrace{A^{(1)}}_A$$

$$\begin{aligned} & \Updownarrow \\ A &= (P^{(2)} E^{(1)})^{-1} U = L^{(1)} (P^{(2)})^{-1} U = L^{(1)} P^{(2)} U \end{aligned}$$

Remarquons que $P^{(i)} (P^{(i)})^{-1} = I_n$ alors A peut s'écrire comme suit :

$$A = (P^{(2)})^{-1} P^{(2)} L^{(1)} P^{(2)} U$$

Posons $\widehat{L}^1 = P^{(2)} L^{(1)} P^{(2)}$ on a

$$\widehat{L}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\widehat{L}^{(1)}$ est la matrice $L^{(1)}$ où on a échangé la 2^{ème} et la 3^{ème} ligne et la 2^{ème} et la 3^{ème} colonne. Donc c'est la matrice $L^{(1)}$ dans laquelle on a échangé les 2^{ème} et la 3^{ème} multiplicateurs.

On obtient :

$$A = (P^{(2)})^{-1} \widehat{L}^{(1)} U$$

$$\Updownarrow$$

$$P^{(2)} A = \widehat{L}^{(1)} U$$

Où $L = \widehat{L}^{(1)}$ matrice triangulaire inférieur avec des 1 sur la diagonale et $P^{(2)}$ matrice de permutation de la 2^{ème} et la 3^{ème} ligne.

Théorème 1.2.2. Soit A une matrice carré inversible alors il existe une matrice de permutation P et deux matrices L étant triangulaire inférieur à diagonal unité et U une matrice triangulaire supérieur telle que

$$PA = LU$$

.

Démonstration. Soit A une matrice carré inversible, la résolution de $AX = b$ par la méthode de gauss avec permutation donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A^{(1)})' = P^{(1)} A^{(1)} \\ A^{(2)} = E^{(1)} (A^{(1)})' \\ \vdots \\ (A^{(k)})' = P^{(k)} A^{(k)} \\ A^{(k+1)} = E^{(k)} (A^{(k)})' \\ \vdots \\ A^{(n)} = E^{(n-1)} (A^{(n-1)})' \end{array} \right.$$

D'où

$$A^{(n)} = E^{(n-1)} P^{(n-1)} E^{(n-2)} P^{(n-2)} \dots E^{(1)} P^{(1)}$$

On obtient

$$A = \left[E^{(n-1)} P^{(n-1)} E^{(n-2)} P^{(n-2)} \dots E^{(1)} P^{(1)} \right]^{-1} U$$

$$\Updownarrow$$

$$A = P^{(1)} L^{(1)} P^{(2)} L^{(2)} P^{(3)} \dots P^{(n-1)} L^{(n-1)-1} U$$

Car on a $L^{(i)} = (E^{(i)})^{-1}$ et $P^{(i)} = (P^{(i)})^{-1}$.

Soit $(L^{(i)})'$ la matrice $L^{(i)}$ des i ^{ème} multiplicateurs permutés (comme expliqué dans l'exemple ci dessus) on a

$$(L^{(i)})' = P^{(n-1)} P^{(n-2)} \dots P^{(i+1)} L^{(i)} P^{(i+1)} \dots P^{(n-1)}$$

D'où

$$A = P^{(1)} \dots P^{(n-1)} (L^{(1)})' \dots (L^{(n-1)})' U$$

On pose $P = P^{(n-1)} \dots P^{(1)}$ tel que $P^{(1)} \dots P^{(n-1)} = [P^{(n-1)} \dots P^{(1)}]^{-1}$ et $L = (L^{(1)})' \dots (L^{(n-1)})'$

D'où

$$A = P^{-1} LU$$

$$\Updownarrow$$

$$PA = LU$$

.

□

Remarque 1.2.10. Notons que dans ce cas

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

1.2.7 Méthode de Cholesky

La méthode de Cholesky est une alternative à l'élimination de Gauss qui s'applique aux matrices symétriques et définies positives avec un nombre d'opérations égal presque à la moitié du nombre d'opérations utilisées dans la méthode de Gauss.

Rappel

Définition 1.2.5. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice d'ordre n , on appelle matrice transposée de la matrice A , la matrice notée $A^T = (b_{ij})_{1 \leq j, i \leq n}$ tel que :

$$(b_{ij})_{1 \leq j, i \leq n} = (a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$$

avec Autrement dit les colonnes de A^T sont les lignes de A et les lignes de A^T sont les colonnes de A .

Définition 1.2.6. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est symétrique si et seulement si $A^T = A$ Autrement dit

$$a_{ji} = a_{ij} \text{ pour } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

.

Exemple 1.2.9. La matrice A est une matrice symétrique par rapport à la diagonale principale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.7. Soit A une matrice symétrique, on dit que A est définie positive si et seulement si

$$X^T A X \geq 0 \text{ pour tout } X \in R^n \text{ et } X^T A X = 0 \Rightarrow X = 0$$

.

Exemple 1.2.10. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $X \in R^2$ un vecteur quelconque de R^2 .

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AX = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}$$

Et

$$X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2$$

Donc

$$X^T A X = (x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

D'où

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0$$

Proposition 1.2.2. Si A est symétrique définie positive (SDP) alors $\det(A) > 0$.

Proposition 1.2.3. Si A est symétrique définie positive (SDP) alors toutes les sous matrices $A_{[k]}$ principales de A sont SDP.

Démonstration. Si $A_{[k]}$ est une sous matrice principale de A et si

$$X \in R^k$$

est un vecteur quelconque alors $X^T A_{[k]} X = \widehat{X^T A_{[k]} X}$

$$\text{Où } \widehat{X} = \begin{bmatrix} X_k \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pour } \widehat{X} \in R^n.$$

Donc $X^T A_{[k]} X \geq 0$ car $\widehat{X^T A_{[k]} X} \geq 0$ et

$$X^T A_{[k]} X = 0 \Leftrightarrow \widehat{X^T A_{[k]} X} \geq 0 \Leftrightarrow \widehat{X} = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

□

Proposition 1.2.4. Si A est symétrique définie positive (SDP) alors tous ses mineurs principaux sont positifs.

Décomposition d'une matrice symétrique (LDL^T)

Lorsqu'une matrice A est symétrique, alors la factorisation $A = LU$, lorsque celle-ci est possible, peut prendre une forme particulière tenant compte de cette symétrie :

Théorème 1.2.3. Si A est symétrique avec toutes ses sous-matrices principales régulières, alors elle admet une unique factorisation sous la forme $A = LDL^T$, où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et D une matrice diagonale régulière.

Démonstration. D'après l'hypothèse, A vérifie les conditions pour avoir une unique factorisation LU , avec L triangulaire inférieure à diagonale unité. Par ailleurs si on note D la matrice diagonale dont la diagonale est égale à celle de U on peut écrire $A = LDV$, avec $V = D^{-1}U$ qui est une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité (car les éléments diagonaux de U sont non nuls).

Comme A est symétrique, on a

$$\begin{aligned} A &= LU = (LU)^T = U^T L^T = A^T \\ \Rightarrow U &= L^{-1} U^T L^T \Rightarrow U(L^T)^{-1} = L^{-1} U^T = D \end{aligned}$$

D est la matrice diagonale dont les éléments sont ceux de U , car $U(L^T)^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure et $L^{-1}U^T$ est une matrice triangulaire inférieure.

Par conséquent $V = D^{-1}U = (U(L^T)^{-1})^{-1}U = L^T U^{-1}U = L^T$. L'unicité de la décomposition $A = LDL^T$ découle de l'unicité de la décomposition $A = LU$. \square

Décomposition de Cholesky (RR^T)

Théorème 1.2.4. Soit A une matrice d'ordre n alors

$A = RR^T$ où R est une matrice triangulaire supérieure à élément diagonaux strictement positifs si et seulement si A est SDP, de plus cette décomposition est unique. [and inversible](#)

Démonstration. 1. Montrons que A SDP alors $A = RR^T$.

Soit la matrice A une matrice symétrique définie positive alors d'après la proposition 1.2.4 tous ses mineurs principaux sont positifs et d'après le théorème 1.2.3 elle admet une unique décomposition $A = LDL^T$ avec ses mineurs principaux $d_{ii} > 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

$$\text{Posons } \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

Alors $D = (\sqrt{D})^2$ et $A = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^T)$, or $\sqrt{D}L^T = (\sqrt{D})^T L^T = (L\sqrt{D})^T$

Donc $A = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T$, Posons $R = L\sqrt{D}$, R est une matrice triangulaire inférieure avec des éléments diagonaux $r_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$ pour $1 \leq i \leq n$ strictement positifs.

2. Montrons que $A = RR^T$ alors A SDP Soit $X \in R^n$ un vecteur quelconque on a $X^T A X = X^T R R^T X = (R^T X)^T (R^T X) = \|R^T X\|_2^2$ où $\|\cdot\|_2^2$ désigne la norme euclidienne sur les matrices. Donc $X^T A X = \|R^T X\|_2^2 \geq 0$.

$$X^T A X = 0 \Leftrightarrow \|R^T X\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow R^T X = 0.$$

Comme R^T est triangulaire inférieure avec ses éléments diagonaux strictement positifs donc elle est inversible d'où

$$RX = 0 \Rightarrow R^{-1}RX = 0 \Rightarrow X = 0$$

3. Montrons l'unicité.

Supposons qu'il existe une autre décomposition de $A = BB^T$ avec R est une matrice triangulaire supérieure à élément diagonaux strictement positifs alors

$$A = RR^T = BB^T$$

Donc

$$B^{-1}RR^T = B^T \Leftrightarrow B^{-1}R = B^T(R^T)^{-1} = (R^{-1}B)^T$$

Donc la matrice $D = B^{-1}R$ est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure en même temps d'où $C = B^{-1}R$ est diagonale.

Donc

$$D = (R^{-1}B)^T = [(B^{-1}R)^{-1}]^T = (D^{-1})^T = (D^T)^{-1} = D^{-1}$$

Par conséquent

$$D^2 = I_n \Rightarrow D = I_n \Rightarrow B^{-1}R = I_n \Rightarrow R = B$$

□

Algorithme de Cholesky

On donne maintenant l'algorithme de Cholesky qui étant donnée une matrice carrée réelle A symétrique et définie positive calcule une matrice L telle que $A = RR^T$.

Entrée : $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(R)$ symétrique et définie positive.

Sortie : $R = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(R)$ tel que $A = RR^T$.

1. $r_{11} = \sqrt{a_{11}}$.
2. Pour $i = 2$ à n , faire :
$$r_{i1} = \frac{a_{i1}}{r_{11}}$$
3. Pour $j = 2$ à n , faire :
$$r_{ij} = 0;$$
$$r_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk}^2};$$

Pour $i = j + 1$ à n , faire :

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{jj}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{ik} r_{jk} \right].$$
4. Retourner $R = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}(R)$.

Exemple 1.2.11. Déterminer la décomposition de Cholesky de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}$$

Solution

Montrer qu'une matrice est SDP revient à montrer que ou que toutes les valeurs propres de A sont positives (ceci s'avère généralement difficile). Une autre méthode plus simple est d'utiliser l'algorithme de Gauss pour la preuve : Si l'algorithme de Gauss est effectué sans aucune permutation pour triangulariser la matrice symétrique A et que la matrice triangulaire résultante est à diagonale strictement positive alors A admet une décomposition donc est SDP.

A est symétrique, supposons que A est une SDP

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41} \\ 0 & r_{22} & r_{32} & r_{42} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{43} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} r_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1 \\ r_{21} = \frac{a_{21}}{r_{11}} = 2 \\ r_{31} = \frac{a_{31}}{r_{11}} = 3 \\ r_{41} = \frac{a_{41}}{r_{11}} = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{21}^2} = \sqrt{5 - 2^2} = 1 \\ r_{32} = \frac{1}{r_{22}} [a_{32} - r_{31}r_{21}] = \frac{1}{1} [1 - 3 \cdot 2] = -5 \\ r_{42} = \frac{1}{r_{22}} [a_{42} - r_{41}r_{21}] = \frac{1}{1} [10 - 4 \cdot 2] = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} r_{33} = \sqrt{a_{33} - r_{31}^2 - r_{32}^2} = \sqrt{35 - 3^2 - (-5)^2} = 1 \\ r_{43} = \frac{1}{r_{33}} [a_{43} - r_{41}r_{31} - r_{42}r_{32}] = \frac{1}{1} [5 - 4 \cdot 3 - 2(-5)] = 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} r_{44} = \sqrt{a_{44} - r_{41}^2 - r_{42}^2 - r_{43}^2} = \sqrt{45 - 4^2 - 2^2 - 3^2} = 4 \end{cases}$$

Cout de la méthode :

n extractions de racines carrées,
 $\frac{n(n-1)}{2}$ (cout des divisions).

$\frac{n(n^2-1)}{3}$) (le cout de (\times) et cout (division)).

On résout deux systèmes triangulaire d'où

Coût total = $O(\frac{1}{3}n^3) \approx$ la moitié de celui de la méthode de Gauss.

Remarque 1.2.11. 1. Pour une matrice définie positive on a : $r_{jj}^2 = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk}^2 > 0$, donc si à une étape de calcul on trouve $r_{jj}^2 < 0$, la matrice A n'est pas définie positive.

2. Les méthodes de Gauss et de Cholesky sont généralement utilisés pour des matrices avec peu de zéro (matrice pleines) avec $n \leq 50$.

Conclusion 1.2.1. Les méthodes directes sont très efficaces : elles donnent la solution exacte (aux erreurs d'arrondi près) du système linéaire considéré. Elles ont l'inconvénient de nécessiter une assez grande place mémoire car elles nécessitent le stockage de toute la matrice en mémoire vive. Si la matrice est pleine, c.à.d. si la plupart des coefficients de la matrice sont non nuls et qu'elle est trop grosse pour la mémoire vive de l'ordinateur dont on dispose, il ne reste plus qu'à gérer habilement l'échange de données entre mémoire disque et mémoire vive pour pouvoir résoudre le système.

Lorsqu'on a affaire à de très gros systèmes issus par exemple de l'ingénierie (calcul des structures, mécanique des fluides, ...), où n peut être de l'ordre de plusieurs milliers, on cherche à utiliser des méthodes nécessitant le moins de mémoire possible.