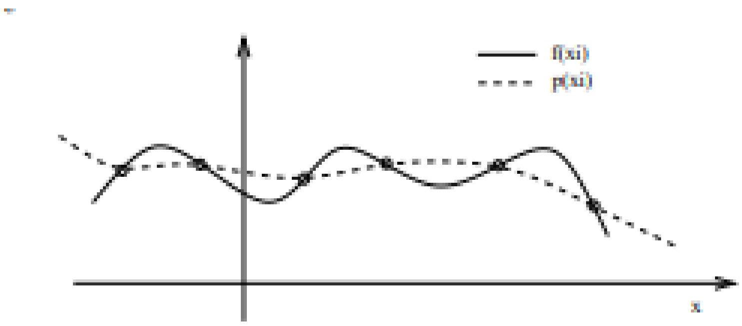
Interpolation

Exemple 1. *On mesure expérimentalement la température d'un objet qui refroidit au cours du temps. On obtient une suite de valeurs à différents temps t_i. On cherche alors à tracer la courbe de refroidissement la plus proche possible des points mesurés, et ainsi à estimer des valeurs de la fonction en des points non mesurés.*

Exemple 2. *On considère une aile d'avion, qu'on soumet à des vents de* $10, 50, 100, 200$ *km/h, et dont on calcule les déformations pour ces valeurs. On veut savoir comment elle résistera à un vent de* 150 *km/h, donc estimé des valeurs en des points non mesurés.*

On se donne un ensemble de points (x_i, f_i) obtenus suite à une mesure expérimentale (fi représente la température, pression, débit, ...) pour connaitre la valeur de la fonction mesurée en d'autres points dans le domaine, on peut alors représenter la fonction f par un polynôme.



Position du problème

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a; b]$ de R et dont la valeur numérique n'est connue qu'en $(n + 1)$ points de $[a, b]$; soit $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ cet ensemble de points tels que $x_i \in [a, b]$; $i \in \{0, ..., n\}$ et $f(x_i)$ la valeur de la fonction f en un point x_i.

Principe L'interpolation est une méthode qui permet d'obtenir une valeur approchée $\phi(x)$ de la fonction $f(x)$ en un point $x \in [a; b]$ et ceci de telle sorte que la condition suivante soit vérifié :

$$\phi(x_i) = f(x_i) = y_i \ \ \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

La fonction ϕ ainsi déterminée est appelée fonction d'interpolation de la fonction f sur le maillage $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$: En principe la fonction d'interpolation est une combinaison linéaire de fonctions simples :

1. Polynômes ;
2. Fonctions circulaires ;
3. Exponentielles ;
4. Fractions rationnelles.

1.1 Interpolation Polynomiale

Soit $P_n(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant :

$$y_i = f(x_i) = P_n(x_i),\ i = 0, 1, ..., n.$$

Problème :

Déterminer $P_n(x)$ de manière à pouvoir estimer les valeurs de $f(x_i) = y_i$ pour $x \in [Min(x_i), Max(x_i]$.

Ceci s'appelle : interpoler la fonction f par le polynôme $P_n(x)$ aux points $\{x_0; x_1, ..., x_n\}$. Le polynôme $P_n(x)$ s'appelle *polynôme d'interpolation*.

Question :

Existe-t-il un polynôme P tel que $P_n(x_i) = y_i, i = 0, ..., n$?

Proposition 1.1.1. *Si les x_i sont tous distincts alors il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n vérifiant $P_n(x_i) = y_i, i = 0, ..., n$.*

Preuve . *On peut écrire le polynôme P_n comme suit : $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_nx^n$. Du fait que $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, ..., n$, les coefficients a_i, $i = 0, ..., n$ vérifient le système :*

$$(S)\begin{cases} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + ... + a_n &= y_0, \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + ... + a_n &= y_1, \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + ... + a_n &= y_n. \end{cases}$$

(S) est un système linéaire de déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

c'est le déterminant de Vandermonde. On a $\triangle \neq 0$, car les x_i, sont tous distincts. Donc, le système (S) admet une et une seule solution $(a_0, a_1, ..., a_n)$, d'où le polynôme d'interpolation existe et il est unique.

Remarque 1.1.1. *La résolution du système plein (S), permettant le calcul des coefficients du polynôme d'interpolation, nécessite un nombre d'opérations en $O(n^3)$. On utilisera plutôt d'autres méthodes, moins coûteuses en nombre d'opérations, dès que n devient grand. L'utilisation des polynômes de Lagrange, présentée ci-dessous, nécessite un nombre d'opérations en $O(n^2)$.*

1.1.1 Interpolation de Lagrange

Résolvons d'abord le problème partiel suivant :

Construire un polynôme $L_i = L_i(x)$ de degré n tel que

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j, \\ 0 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

Le polynôme L_i s'annule en $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$, il s'écrit alors sous la forme :

$$L_i(x) = K_i(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n) \text{ où } K_i = Cste.$$

Donc,

pour $x = x_j$: $L_i(x_j) = 0$, $(j = 0, ..., n, j \neq i)$.

pour $x = x_i$: $L_i(x_i) = 1 \Longrightarrow K_i(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n) = 1,$

d'où

$$K_i = \frac{1}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

Donc

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}$$

On peut écrire aussi :

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Pour chaque $i = 0, ..., n$, $deg(L_i) = n$.

Passant à la résolution du problème général qui consiste à former P_n vérifiant les conditions indiquées plus haut. Ce polynôme est de la forme :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x).$$

Par unicité, le polynôme P_n est le polynôme cherché. Il s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole les points (x_i, y_i), $i = 0, ..., n$.

Détermination pratique des polynomes de Lagrange : La détermination des $(n + 1)$ polynomes $L_i(x)$ peut etre conduite de la façon suivante :

On dresse le tableau carré,

$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	$x_0 - x_3$	$x_0 - x_4$	$\dots$	$x_0 - x_n$
$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	$x_1 - x_3$	$x_1 - x_4$	$\dots$	$x_1 - x_n$
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_2 - x_4$	$\dots$	$x_2 - x_n$
.	.	.	$\ddots$	.	.	.
.	.	.	.	$\ddots$	.	.
.	.	.	.	.	$\ddots$	.
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$	$x_n - x_3$	$x_n - x_4$	$\dots$	$x - x_n$

On voit que pour $i = 0, 1, ..., n$:

$$L_i(x) = \frac{\text{Le produit des termes diagonaux du tableau}}{\text{Le produit des termes de la (i+1) ème ligne su tableau}}$$

Exemple 3. *Déterminer le polynôme d'interpolation* P_3 *de la fonction* f *dont on connait les valeurs suivantes :*

x_i	*0*	*1*	*3*	*4*
$f(x_i)$	*1*	*3*	*0*	*5*

Sous la forme de Lagrange, ce polynôme s'écrit :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_i(x) = L_0(x) + 3L_1(x) + 5L_3(x)$$

Où

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{-1}{12}(x-1)(x-3)(x-4),\\
L_1(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{6}x(x-3)(x-4),\\
L_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)
\end{aligned}$$

Donc

$$P_3(x) = \frac{-1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) + \frac{1}{6}x(x-3)(x-4) + \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)$$

Remarque 1.1.2. *À noter que :*

- *La formule de Lagrange est intéressante du point de vue numérique, car elle ne dépend que des abscisses* $x_i, i = 0, 1, ..., n$. *Les polynômes* $L_i, i = 0, 1, ..., n$ *sont calculés une fois pour toute et servent ensuite pour tous les polynômes.*
- *La méthode d'interpolation de Lagrange présente deux inconvénients majeurs :*
  - *i) L'erreur d'approximation peut ne pas diminuer si on augmente le nombre de points d'interpolation.*
  - *ii) La méthode n'est pas récurrente.*

Il est intéressant de mettre P_n sous une forme récurrente qui permet de compléter les valeurs déja obtenues sans refaire tous les calculs. On arrive donc au polynôme d'interpolation de Newton.

1.1.2 Interpolation de Newton

Définition 1.1.1. *Soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $(n+1)$ points (abscisses) distincts de l'interval $[a, b]$ et f une fonction réelle définie sur $[a, b]$ connue uniquement en x_i donnés. On définit les différences divisées d'ordres successifs $0, 1, 2, ..., n$ par :*

$$
(I)\begin{cases}
\textit{Ordre 0}: & \delta^0\left[x_i\right] & = f(x_i) \\
\textit{Ordre 1}: & \delta^1\left[x_i, x_{i+1}\right] & = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}, \\
\textit{Ordre 2}: & \delta^2\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\right] & = \dfrac{\delta^1\left[x_{i+1}, x_i\right] - \delta^1\left[x_{i+2}, x_{i+1}\right]}{x_{i+2} - x_i}, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\textit{Ordre k}: & \delta^k\left[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}\right] & = \dfrac{\delta^{k-1}\left[x_{i+1}, ...x_{i+k}\right] - \delta^{k-1}\left[x_i, ..., x_{i+k-1}\right]}{x_{i+k} - x_i},
\end{cases}
$$

La dernière relation est appelée la différence divisée d'ordre k pour $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ de la fonction f en $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}$.

Remarque 1.1.3. *Comme $\delta[a, b] = \dfrac{f(a)f(b)}{a - b} = \delta[b, a]$, la différence divisée de n'importe quel ordre est indépendante de la position des points (abscisses) sur lesquels elle est prise.*

Calcul des différences divisées

x_i	$f(x_i)$	δ^1	δ^2	δ^3	$\dots$	δ^n
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$\delta^1[x_0, x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$\delta^1[x_1, x_2]$	$\delta^2[x_0, x_1, x_2]$			
x_3	$f(x_3)$	$\delta^1[x_2, x_3]$	$\delta^2[x_1, x_2, x_3]$			
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
x_n	$f(x_n)$	$\delta^1[x_{n-1}, x_n]$	$\delta^2[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	.	.	$\delta^n[x_0, x_1, ..., x_n]$

Théorème 1.1.1. *Le polynôme $P_n(x)$ qui prend les valeurs $f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ aux points distinct x_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$ peut s'écrire :*

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = \delta\left[x_0\right] + \delta^1\left[x_0, x_1\right].(x - x_0) + \delta^2\left[x_0, x_1, x_2\right](x - x_0)(x - x_1) + \\
... + \delta^n\left[x_0, ..., x_n\right](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Preuve . *Soit $x \in [a,b]$. D'après la définition des différence divisées on peut écrire :*

$$\delta[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Alors

$$P_n(x) = \delta[x_0] + \delta[x_0, x](x - x_0),$$

puis

$$\delta^2[x_0, x_1, x] = \delta^2[x_1, x_0, x] = \frac{\delta[x_0, x] - \delta[x_0, x_1]}{x - x_1}.$$

D'où

$$P_n(x) = \delta[x_0] + \delta\,[x_0, x_1\,](x - x_0) + \delta\,[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

En continuant ainsi on obtient la formule :

$$P_n(x) = \delta\,[x_0\,] + \delta^1[x_0, x_1].(x - x_0) + \delta^2\,[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) + ... +$$
$$\delta^n\,[x_0, ..., x_n\,](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) + \delta^{n+1}[x_0, ..., x_n\,](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)\ .$$

On a si $P_n(x)$ est un polynome de degré n, sa différence divisée d'ordre $(n+1)$ est identiquement nulle (résultat à admettre) c'à d $\delta^{n+1}\,[x_0, ..., x_n\,] = 0$

L'expression 1.1 s'appelle polynôme d'interpolation de Newton de f aux points (abscisses) $x_i, i = 0, ..., n$.

Remarque 1.1.4. *la forme (2.1) est la forme la plus utilisée pour calculer le polynôme d'interpolation, car il nécessite le moins de calculs pour obtenir numériquement ses coefficients.*

Exemple 4. *Déterminer P_3 le polynôme d'interpolation de la fonction passant par les points* $(0,1), (1,2), (2,9), (3,28)$.
On a 4 points, donc $deg(P_3) \leqslant 3$. Posons $x_i = i$, $i = 0, ..., 4$.

$$P_n(x) = \delta\left[x_0\right] + \delta^1\,[x_0, x_1]\,.(x - x_0) + \delta^2\,[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$\delta^3\,[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Le calcul des différences divisées se fait comme suit :

x_i	$f(x_i) = 1$	δ^1	δ^2	δ^3
x_0	$f(x_0) = 1$			
x_1	$f(x_1) = 2$	$\delta^1[x_0, x_1] = 1$		
x_2	$f(x_2) = 9$	$\delta^1[x_1, x_2] = 7$	$\delta^2[x_0, x_1, x_2] = 3$	
x_3	$f(x_3) = 28$	$\delta^1[x_2, x_3] = 19$	$\delta^2[x_1, x_2, x_3] = 6$	$\delta^3[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1$

On obtient, $P_3(x) = 1 + x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$.

Exemple 5. *Soit* P_n *le polynome d'interpolation de Newton d'une fonction* f *aux points* $x_0, ..., x_n$. *On désire rajouté un point d'interpolation* x_{n+1}. *Doit on refaire tout le tableau des différences divisées ? Qu'on est-il si on avait utilisé la base des polynomes de Lagrange, devrait-on refaire tous les calculs ?*

1.2 Erreur d'interpolation

Dans la pratique, l'interpolation polynomiale sert à remplacer une fonction f qui est soit inconnue, soit trop compliquée, par une fonction plus simple, en l'occurrence un polynôme. On dit que l'on approxime f par le polynôme d'interpolation P_n.
Comme c'est le cas dans de nombreuses méthodes d'analyse numérique, il est fondamental d'étudier l'erreur d'approximation. Naturellement, sauf cas particulier, l'expression de l'erreur ne permet pas son calcul exact ; elle peut cependant être très utile pour en calculer une majoration.

Rappel : Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{'}(c) = 0$.

Avant de donner une estimation de l'erreur, nous allons énoncé les lemmes suivants :

Lemme 1.2.1. *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow R$ *dérivable sur* $[a,b]$ *alors, si* f *possède au moins* $n+2$ *zéros distincts sur* $[a,b]$, $f^{'}$ *possède au moins* $n+1$ *zéros distincts sur* $[a,b]$.

Preuve . *il suffit d'appliquer le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de* f.■

Corollaire 1.2.1. *Soit* $f \in C^{n+1}([a,b])$. *Si* f *possède au moins* $n+2$ *zéros distincts sur* $[a,b]$, *alors* $f^{(n+1)}$ *a au moins un zéro sur* $[a,b]$.

Preuve . *il suffit de faire une récurrence en appliquant le lemme précédent.*■

Théorème 1.2.1. *Soit* $[a,b]$ *un intervalle contenant les abscisses* $x_0, x_1, ..., x_n$ *et soit* $f \in C^n[a,b]$. *On suppose que la* $(n+1)$ *ieme dérivée de* f *existe sur* $[a,b]$. *Alors pour tout* $x \in [a,b]$, *il existe* $\xi \in]a,b[$ *tel que :*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} | \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)| \tag{1.2}$$

Preuve . *si* $x = x_i$, *alors la relation est vérifiée.*
Soit $x \in [a,b]$ *fixé,* x *différent de tous les* x_i. *Posons* $q(x) = (x - x_0)(xx_1)...(x - x_n)$ *et*

$$W(t) = f(t) - P(t) - \tfrac{q(t)}{q(x)}(f(x)P(x))$$

La fonction W *est de classe* C^{n+1} *comme* f *et s'annule pour* $t = x, x_0, x_1, ..., x_n$ *; elle admet donc au moins* $n+2$ *zéros. D'aprés le corollaire précédent, il existe au moins un nombre* $\xi \in [a,b]$ *tel que* $W^{(n+1)}(\xi) = 0$. *On en déduit la relation.*■

Le point ξ étant inconnu, on cherche une majoration et on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.2. *Sous les hypothèses du théorème on a :*

$$\forall x \in [a,b], \ |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} | \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)|.$$

où

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{n+1}(x)|.$$

Remarque 1.2.1. *En fait, les méthodes d'interpolation polynomiale présentées dans ce cours sont assez peu utilisées dans la pratique. D'abord, il est difficile d'interpoler avec des polynômes* *de degré très élevé : on voit alors apparaître un phénomène d'effets de bord dit phénomène de Runge (Runge a montré en 1901 que quand le nombre de points d'interpolation croît indéfiniment), le polynôme d'interpolation ne converge pas toujours vers la fonction interpolée en tous points. Néanmoins, ces méthodes d'interpolation ont un intérêt pour construire des formules de quadrature pour l'intégration numérique et des schémas pour résoudre des équations différentielles.*