1.3 Méthodes itératives

plus le rayon spectral est proche de 0 plus la methode iterative est rapide

1.3.1 Rappel

Définition 1.3.1. *(Normes vectorielles)*
Une norme vectorielle sur R^n est une application notée $\|.\|$ définis de R^n dans R^+ ;

$$\|.\| : R^n \longrightarrow R^+$$

$$X \to \|X\|$$

et possédant les propriétés suivantes :

1. $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
2. $\|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|, \forall \lambda \in R, \forall X \in R^n$.
3. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|, \forall X, Y \in R^n$.

Définition 1.3.2. *(Normes vectorielles usuelles)*

1. $\|.\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ *appelée norme* L_1.
2. $\|.\|_\infty = Max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ *appelée norme* L_∞.
3. $\|.\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ *appelée norme* L_2 *ou norme euclidienne.*

Définition 1.3.3. *Une norme vectorielle matricielle est une application de $M_n(R)$ l'algèbre des matrices d'ordre n dans R^+, notée $\|.\|$ et possédant les propriétés suivantes :*

1. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|, \forall \lambda \in R, \forall A \in M_n(R)$.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in M^n(R)$.

Définition 1.3.4. *(Norme subordonnée)*
Soit $\|.\|$ une norme vectorielle, A une matrice de dimension $m\times n$ et $X \in R^n$. La norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle $\|.\|$ est définis par

$$\|A\| = max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

On notera par $\|A\|_p$ la norme de A subordonnée à une norme vectorielle $\|.\|_p$.

On peut écrire la norme de A subordonnée à une norme vectorielle $\|.\|_p$ comme suit :

$$\|A\| = max_{X\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|} = max_{X\neq 0}\|(\frac{1}{\|X\|})Ax\| = max_{X\neq 0}\|A(\frac{X}{\|X\|})\|$$

D'où

$$\|A\| = max_{\|X\|=1}\|AX\|$$

Théorème 1.3.1. *(Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle usuelle)*
Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$, les normes sont

1. $\|.\|_1 = Max_{1\leq j\leq n}(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|)$.
2. $\|.\|_\infty = Max_{1\leq i\leq n}(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$.
3. $\|.\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$.

Où $\rho(A)$ représente le rayon spectral d'une matrice A qui est définie par

$$\rho(A) = max\,\{|\lambda|/\lambda \text{ valeur propre de } A\}$$

.

Démonstration. □

1.3.2 Méthode général

Définition 1.3.5. *On appelle méthode itérative de résolution du système linéaire 1.1 une méthode qui construit une suite $(x_{(k)})_{k\in N}$; où l'itéré $x_{(k)}$ est calculé à partir des itérés $x_0, \cdots, x_{k-1}$ censée converger vers x solution de 1.1.*

On dit qu'une méthode itérative est convergente si pour tout choix initial $x_0 \in R^n$, on a :

$$x_k \to x \text{ quand } k \to +\infty$$

Principe

Ecrivons la matrice A sous la forme $A = M - N$ où M est inversible, alors

$$AX = b \Leftrightarrow (M-N)X = b \Leftrightarrow MX = NX + b$$

$$\Updownarrow$$

$$X = M^{-1}NX + M^{-1}b$$

On définit alors la suite récurrente de vecteurs $(X^{(k)})_{k\in N}$ appelée aussi processus itératif de la manière suivante :

$$X^{(k+1)} = \quad M^{-1}NX^{(k)} + \quad M^{-1}b \qquad X^{(0)} \in R^n \tag{1.4}$$

$M^{-1}N$ est appelée matrice d'itération et elle est souvent notée B.
$M^{-1}b$ est appelée vecteur itéré il et il est souvent noté c.
$X^{(0)}$ est appelée vecteur initial.

Question : *La suite **??** converge t-elle vers la solution X^* du système $AX = b$.*

Théorème 1.3.2. *(Convergence de la suite $(X^{(n)})$)*
*Soit A et $M \in M_n(IR)$ des matrices inversibles. Soit $X^{(0)}$ donné et soit $X^{(k)}_{k\in N}$ la suite définie par **??**.*

1. *Condition nécessaire et suffisante de convergence*
   La suite $X^{(k)}_{k\in N}$ converge, quel que soit $X^{(0)}$, vers X^* si et seulement si $\rho(B) < 1$.
2. *Condition suffisante de convergence*
   La suite $X^{(k)}_{k\in N}$ converge, quel que soit $X^{(0)}$, s' il existe une norme subordonnée telle que $\|B\| < 1$.
   De plus l'erreur d'approximation commise lors du calcul de la k^{eme} itération est donnée par :

$$E_{(k)} = \|X^{(k)} - X\|_i \leq \begin{cases} \dfrac{\|.\|_i}{1-\|.\|_i}\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| & \textit{erreur pas à pas} \\ \dfrac{(\|.\|)_i^{(k)}}{1-\|.\|_i}\|X^{(1)} - X^{(0)}\| & \textit{erreur à priori} \end{cases}$$

Démonstration. □

Remarque 1.3.1.

1. *Dans le cas où les normes $\|.\|_i$ pour $i = 1, 2, \infty$ est ≥ 1 on ne peut rien dire sur la convergence du processus et on doit calculer $\rho(B)$ et de voir si ce nombre est < 1 ou > 1.*
2. *Si $\rho(B) = 1$ on dit que le processus ne converge pas quelque soit la condition initiale. Mais il se peut que quand $\rho(B) \geq 1$ qu'il existe un choix convenable de $X^{(0)}$, pour lequel le processus converge (convergence locale) vers la solution exacte du système.*

Exemple 1.3.1. *(Exercice 1 Série 2)*

Soit le système

$$(S) = \begin{cases} 10x_1 & -2x_2 & & = 8 \\ -6x_1 & +11x_2 & -5x_3 & = 0 \\ & -7x_2 & +9x_3 & = 2 \end{cases}$$

1. *Écrire le processus itératif associé à la décomposition $A = A_1 - A_2$ où $A_1 = 10I_3$. Calculer $X^{(2)}$ à partir de $X^{(0)} = 0$ et étudier la convergence du processus.*

Solution

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -6 & 11 & -5 \\ 0 & -7 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On pose $A = A_1 - A_2 \Rightarrow A_2 = A_1 - A = 10I - A$ *d'où*

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -6 & 11 & -5 \\ 0 & -7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Le processus itératif associé à cette décomposition est donné par :
$AX = b \Leftrightarrow (A_1 - A_2)X = b \Leftrightarrow A_1X - A_2X = b \Rightarrow A_1X = A_2X + b$ *(ou* $A_2X = A_1X - b$*) car les deux matrices sont inversibles.*
Prenons par exemple $A_1X = A_2X + b \Leftrightarrow X = (A_1)^{-1}A_2X + (A_1)^{-1}b$.
On lui associe le processus itératif suivant :

$$X^{(k+1)} = (A_1)^{-1}A_2X^{(k)} + (A_1)^{-1}b$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = & \frac{1}{5}x_2^{(k)} & & +\frac{4}{5} \\ x_2^{(k+1)} = & \frac{3}{5}x_1^{(k)} - & \frac{1}{10}x_2^{(k)} & +\frac{1}{2}x_3^{(n)} \\ x_3^{(k+1)} = & \frac{7}{10}x_2^{(k)} + & \frac{1}{10}x_3^{(k)} & +\frac{1}{5} \end{cases}$$

Calcul de X^2 *à partir de* $X^0 = 0$

$$X^{(1)} = (A_1)^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} (\begin{matrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{matrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{29}{50} \\ \frac{11}{50} \end{pmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{29}{50} \\ \frac{11}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{229}{250} \\ \frac{133}{250} \\ \frac{157}{250} \end{pmatrix}$$

Étude de la convergence du processus
On a d'après le théorème 1.3.2 une condition suffisante de convergence donnée par $\|A_1^{-1}A_2\| < 1$ *car* $\rho(A_1^{-1}A_2) \leqslant \|A_1^{-1}A_2\|$, *donc*

Pour $B = A_1^{-1}A_2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

$\|B\|_1 = max(\frac{3}{5}, 1, \frac{6}{10}) = 1$ *on ne peut rien dire.*
$\|B\|_\infty = max(\frac{1}{5}, \frac{12}{10}, \frac{8}{10}) > 1$.
$\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^TB)}$ *(à éviter de la calculer puisque ce n'est qu'une condition suffisante de convergence).*

Passant à la condition nécessaire et suffisante qui consiste à calculer le rayon spectral de B, $\rho(B) = max_i\{|\lambda_i|\}$ *où* λ_i *est une valeur propre* B. *(les* λ_i *représentent les racines de l'équation* $det(B) = 0$).

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de B *est :* $P_B(x) = -X^3 + \frac{12}{25}X - \frac{3}{250}$, *on va localiser les racines dans des intervalles séparées puis trouver leurs maximums.*
On a $P_B(x) = -X^3 + \frac{12}{25}X - \frac{3}{250} \Rightarrow P'(x) = -3X^2 + \frac{12}{25}$.
$P(1) = -0.532$, $P(-1) = 0.508$, $P(\frac{2}{5}) = 0.116$ *et* $P(\frac{-2}{5}) = -0.14$.
D'où On présente le tableau de variation du polynôme P.

x	$-\infty$		-1		$\frac{-2}{5}$		$\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
$P^{'}(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0.508	$\rightarrow$	-0.14	$\nearrow$	0.116	$\searrow$	-0.532	$\rightarrow$	$-\infty$

On remarque que $P(x) = 0$ admet trois racines réelles dans l'intervalle $]-1,1[$ et donc toutes les valeurs propres de la matrice B sont dans $]-1,1[$ d'où $\rho(B) = max(|\lambda_i|) < 1$.
D'où la convergence du processus itératif : $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + c$.

***IMPORTANT** : Si on prend cette fois : $X = A_2^{-1}A_1X + A_2^{-1}b$.*

On trouve $B = A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 30 & \frac{5}{3} & \frac{-25}{3} \\ 5 & 0 & 0 \\ -35 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

Le rayon spectral de la matrice B, $\rho(B) = 39.94$ donc pas de convergence de ce processus.
***Conclusion** : Pour une même décomposition de la matrice en question on peut avoir ou ne pas avoir la convergence de la suite considérée.*

1.3.3 Méthode de Jacobi

C'est une méthode itérative qui correspond à la décomposition

$$A = D - (E + F) \text{ autrement dit } M = D \text{ et } N = E + F$$

Où
D est une matrice diagonale telle que la diagonale de D est égale à la diagonale de A : $D_{ii} = A_{ii}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.
E est une matrice triangulaire inférieur telle que : $-E_{ij} = A_{ij}, \forall i > j$ et $E_{ii} = 0$.
F est une matrice triangulaire supérieur telle que : $-F_{ij} = A_{ij}, \forall i < j$ et $F_{ii} = 0$.
Alors

$$AX = b \Leftrightarrow D - (E + F)X = b \Rightarrow X = D^{-1}(E + F)X + D^{-1}b$$

D'où le processus itératif correspondant est : $X^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)X^{(k)} + D^{-1}b$.

La matrice B se présente sous la forme : $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \frac{-a_{31}}{a_{33}} & \frac{-a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & \frac{-a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

C se présente sous la forme $C = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$

Exemple 1.3.2. *(Exercice 1 série 2)*
2- Écrire les itérations de Jacobi. Calculer $X^{(2)}$ partant de $X^{(0)} = 0$ et étudier la convergence.
***Solution** :*
Le processus de Jacobi est donc $X^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)X^{(k)} + D^{-1}b$ avec

$$B = D^{-1}(E+F) \begin{cases} = \dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \\ \quad 0 & i = j \end{cases} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{6}{11} & 0 & \frac{5}{11} \\ 0 & \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

Et

$$C = D^{-1}b = \begin{array}{c} \dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}} \\ i \neq j \\ 0 \\ i = j \end{array} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$Pour\ X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ on\ a\ X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$Et\ X^{(2)} = BX^{(1)} + C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{6}{11} & 0 & \frac{5}{11} \\ 0 & \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{266}{495} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Pour la convergence on a :

$\|B\|_\infty = max(\frac{1}{5}, \frac{6}{11} + \frac{5}{11}, \frac{7}{9}) = 1$ *on ne peut rien sur la convergence.*

$\|B\|_1 = max(\frac{6}{11}, \frac{1}{5} + \frac{7}{9}, \frac{5}{11}) = \frac{44}{45} < 1$ *ce qui donne la convergence du processus de Jacobi.*

1.3.4 Méthode de Gauss Seidel

C'est une méthode itérative qui correspond à la décomposition

$$A = ((D - E) - F)\ autrement\ dit\ M = (D - E)\ et\ N = F$$

D'où le processus itératif correspondant est : $X^{(k+1)} = (D - E)^{-1}FX^{(k)} + (D - E)^{-1}b$.

Autrement dit

$$(D - E)^{-1}X^{(k+1)} = FX^{(k)} + b$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^{(k+1)} \\ X_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ X_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1^{(k+1)} = & -a_{12}X_2^{(k)} - & a_{13}X_3^{(k)} - & \cdots - & a_{1n}X_k^{(n)} + & b_1 \\ a_{21}X_1^{(k+1)} + & a_{22}X_2^{(k+1)} = & -a_{23}X_3^{(k)} - & \cdots - & a_{2n}X_k^{(n)} + & b_2 \\ a_{31}X_1^{(k+1)} + & a_{32}X_2^{(k+1)} + & a_{33}X_3^{(n)} = & - \cdots & a_{3n}X_k^{(n)} + & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}X_1^{(k+1)} + & a_{n2}X_2^{(k)} + & a_{n3}X_3^{(k)} + & \cdots + & a_{nn}X_n^{(k)} = & b_n \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} X_1^{(k+1)} = & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} & - \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} & +\frac{b_1}{a_{11}} \\ X_2^{(n+1)} = & \dfrac{-a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} & - \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} & +\frac{b_2}{a_{22}} \\ X_3^{(k+1)} = & \dfrac{-a_{31}}{a_{33}}x_1^{(k+1)} & -\dfrac{a_{32}}{a_{33}}x_2^{(k+1)} & - \cdots & -\dfrac{a_{3n}}{a_{33}}x_n^{(k)} & +\frac{b_2}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^{(n+1)} = & \dfrac{-a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)} & - \cdots & -\dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k+1)} & +\frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

Remarque 1.3.2. *Le processus de Gauss Seidel se déduit du processus de Jacobi de la manière suivante :*

1. *Pour le calcul de* $X_1^{(k+1)}$ *c'est la même formule que Jacobi.*
2. *Pour le calcul de* $X_2^{(k+1)}$ *on reprend la formule que Jacobi et on remplace* $X_1^{(k)}$ *par* $X_1^{(k+1)}$ *calculé juste avant.*

3. *Pour le calcul de $X_3^{(k+1)}$ on reprend la formule que Jacobi et on remplace $X_1^{(k)}$ et $X_2^{(k)}$ par $X_1^{(k+1)}$ et $X_2^{(k+1)}$ calculé juste avant.*
   Et ainsi de suite Pour le calcul de $X_n^{(k+1)}$ on reprend la formule que Jacobi et on remplace $X_1^{(k)}$ ... $X_{n-1}^{(k)}$ par $X_1^{(k+1)}$ ... $X_{n-1}^{(k+1)}$ calculé juste avant.

Exemple 1.3.3. *(exercice 1 série 2)*
3- Écrire les itérations de Gauss Seidel. Calculer $X^{(2)}$ et étudier la convergence.
Solution :
Le processus de Gauss Seidel : $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C$ où

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -6 & 11 & -5 \\ 0 & -7 & 9 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}}_{E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F}$$

$$B = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -6 & 11 & 0 \\ 0 & -7 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{3}{55} & \frac{1}{11} & 0 \\ \frac{7}{165} & \frac{7}{99} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{55} & \frac{5}{11} \\ 0 & \frac{14}{165} & \frac{35}{99} \end{pmatrix}$$

Et

$$C = (D-E)^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{3}{55} & \frac{1}{11} & 0 \\ \frac{7}{165} & \frac{7}{99} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{24}{55} \\ \frac{278}{495} \end{pmatrix}.$$

Pour $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *on a* $X^{(1)} = BX^{(0)} + C = (D-E)^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{24}{55} \\ \frac{278}{495} \end{pmatrix}$

$$X^{(2)} = BX^{(1)} + C = (D-E)^{-1}X_{(1)} + (D-E)^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{244}{275} \\ \frac{20126}{27225} \\ \frac{195332}{245025} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88727 \\ 0.73925 \\ 0.79719 \end{pmatrix}$$

Pour la convergence
$\|B\|_\infty = max(\frac{1}{5}, \frac{6}{55} + \frac{5}{11}, \frac{14}{165} + \frac{35}{99}) = \frac{31}{55} = 0.56364 < 1.$
$\|B\|_1 = max(0, \frac{1}{5} + \frac{6}{55} + \frac{14}{165}, \frac{5}{11} + \frac{35}{99}) = \frac{80}{99} = 0.8080 < 1.$

la condition suffisante est vérifié donc le processus converge.

3- Pour la méthode de Gauss Seidel, quel est le nombre d'itération à partir du quel on a $\|X^{(k)} - X\|_\infty \leq 10^{-2}$.
On a

$$\frac{(\|.\|)_\infty^{(k)}}{1 - \|.\|_\infty} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (\|.\|)_\infty^{(k)} < \frac{(1 - \|.\|_\infty).\varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty}$$

$$\Leftrightarrow k(ln(\|.\|)^{(k)}) < ln(\frac{(1 - \|.\|_\infty).\varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty})$$

$$\Leftrightarrow k > \frac{ln(\frac{(1 - \|.\|_\infty).\varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty})}{ln(\|.\|)^{(k)}}$$

On a $k \in N$ car $\|.\|_\infty < 1 \Rightarrow ln(\|.\|_\infty) < 0$.

$$\Leftrightarrow k = E\left[\frac{ln(\frac{(1 - \|.\|_\infty).\varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty})}{ln(\|.\|)^{(k)}}\right] + 1. \text{ Où } E \text{ est la partie entière.}$$

On a $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = \| \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{24}{55} \\ \frac{278}{495} \end{pmatrix} \| = \frac{4}{5}$ et $\|B\|_\infty = \frac{31}{55}$, $\varepsilon = 10^{-2}$

On trouve $k > 9.0893$ *donc* $k = 10$.

D'autres conditions suffisantes de convergence des méthodes de Jacobi et Gauss Seidel

Définition 1.3.6. *On dit qu'une matrice A est diagonale dominante stricte si et seulement si*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Proposition 1.3.1. *Pour que le processus de Jacobi et de Gauss Seidel converge $\forall X^{(0)} \in R^n$ il suffit que la matrice A soit à diagonale dominante stricte.*

Proposition 1.3.2. *Si A est symétrique définie positive, alors le processus itératif de Gauss-Seidel converge $X^{(0)} \in R^n$*

Remarque 1.3.3.
1. *S'il existe $i \in [1, n]$ tel que $a_{ii} = 0$, on procède à une permutation de ligne sur A (et sur b).*
2. *En général, la convergence de l'une de ces méthodes n'implique pas la convergence de l'autre.*
3. *Plus que $\rho(B) << 1$, plus que la convergence du processus itératif vers la solution exacte du système $AX = b$ est plus rapide.*

Exemple 1.3.4. *Soit le système $AX = b$ où* $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le processus itératif de jacobi qui lui est associé est : $X^{(n+1} = BX^{(n)} + c, X^{(0)} \in R^3$

On a $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-5}{8} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$ *et* $c = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

La matrice A est à diagonale dominante stricte (DDS) car on :

$$\begin{cases} |-5| > & |3| + & |1| \\ |8| > & |-2| + & |5| \\ |6| > & |4| + & |-1| \end{cases}$$

Alors le processus de Jacobi converge $\forall X^{(0)} \in R^3$.

Comparaison entre les deux méthodes

La méthode de Gauss Seidel est meilleure par rapport à la méthode de Jacobi car elle prend moins d'espace mémoire dans la machine ; à la première itération on remplace $X_1^{(n)}$ par la nouvelle composante $X_1^{(n+1)}$ et donc à la $i^{\text{ième}}$ itération on remplacera $X_i^{(n)}$ par la nouvelle composante $X_i^{(n+1)}$, ce qui nécessite n place mémoire ; quand la méthode de Jacobi nécessite $2n$ places.