

🏠

🔍

📄

ChatGPT

Prompt Enhancer

Explore GPTs

Projects

Saman

Solve Problems Request

Vertex AI Vector Search

Google Conversational Agent

Vertex AI Pipelines Update

سوالات تستی فصول 3 و 4

See All

Today

Gemini-2 vs Gemini-1.5

Setup PWA Next.js

Yesterday

Professional Presentation Template

Refine My Prompt

All

Saman

Solve Problems Request

تمرین سری PDF8

📄

consider the attached pdf file. it contains math problems. solve them

< 3/3 >

🧠

Thought about math problem solving for a couple of seconds

I'm sorry, but I don't have direct access to any attached files. Could you please provide the text of the math problems (or a summary of the relevant portions) here in our conversation? Once I see the actual problems, I'll do my best to help you solve them.

🗨️ 📄 📌 🔄

📄

حل مسائل معادلات زیر در ابر صورت وجود به دست آید.

$$z = \sqrt{1 + i\sqrt{3}}$$
$$z^4 = \frac{1-i}{1+i}$$
$$\sin z = 2iz$$
$$\tan z = 2iz$$

۱. مکان همی نقاط واقع در صفحه مختلط که در تصویر $\frac{1-i}{1+i}$ به دست آید. را به دست آید.

۲. اگر $u(x,y)$ باشد و داشته باشیم $u(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ معادله $u(x,y)$ را به دست آید.

۳. $f(z)$ را به دست آید. $f(z) = z + e^z \cos z$ باشد. $u(x,y) = x + e^x \cos x$ باشد. $f(z)$ را به دست آید.

solve the problems in the attached image.

↓

🧠

Thought about solving math problems for 2m 4s

Below is a step-by-step solution to each of the four problems shown in your image.

حل معادلات زیر در صورت وجود

(الف)

$$z = \sqrt{1 + i\sqrt{3}}.$$

برای یافتن ریشه‌های مختلط $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$ ، ابتدا عدد $1 + i\sqrt{3}$ را در فرم قطبی می‌نویسیم. اندازه (ماژول) و زاویه (ارگومان آن عبارت‌اند از

- $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$
- $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}.$

پس

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right).$$

ریشه‌های دوم (دو مقدار) عبارت‌اند از

$$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{و} \quad z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)\right).$$

در صورت تمایل به، دکارتی، این دو پاسخ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

- $$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$
- $$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(ب)

$$z^4 = \frac{1-i}{1+i}.$$

ابتدا کسر $\frac{1-i}{1+i}$ را ساده می‌کنیم. با ضرب در مزدوج مخرج

$$\frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-2i-1}{1-(-1)} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

پس معادله $z^4 = -i$ را در فرم نمایی می‌نویسیم. چون

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (2\pi + \text{البته با در نظر گرفتن شاخه‌های مختلف})$$

داریم

$$z^4 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \implies z = e^{-i\frac{\pi}{8} + i\frac{2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

به‌عبارت دیگر،

$$z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

(ج)

$$\sin z = 2.$$

در صفحه مختلط، معادله $2\sin z = 1$ بی‌شمار جواب دارد (در اعداد حقیقی جوابی ندارد، اما در مختلط چرا). از فرمول وارون سینوس در مختلط می‌دانیم

$$\arcsin(w) = -i \ln\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right).$$

برای $2w =$ یک مقدار اصلی $\arcsin(2)$ چنین به‌دست می‌آید:

$$\arcsin(2) = \frac{\pi}{2} - i \ln(2 + \sqrt{3}).$$

(علامت $= i\sqrt{3}\sqrt{-3}$ را برحسب شاخه اصلی درنظر گرفتیم)

جواب کلی $2\sin z =$ به‌صورت زیر است:

$$z = (-1)^n \arcsin(2) + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

به‌عبارت دیگر دو شاخهٔ اصلی را می‌توان این‌گونه نوشت:

$$z = \arcsin(2) + 2\pi n \quad \text{یا} \quad z = \pi - \arcsin(2) + 2\pi n,$$

$$\text{و} \arcsin(2) = \frac{\pi}{2} - i \ln(2 + \sqrt{3}).$$



(د)

$$\tan z = i.$$

می‌توان نشان داد این معادله در صفحهٔ مختلط جواب ندارد.

راه سریع دیدن این مطلب آن است که از تعریف

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = i \implies \sin z = i \cos z.$$

با نوشتن $\sin z$ و $\cos z$ به‌صورت توابع نمایی مختلط و ساده‌سازی، نهایتاً به تناقضی می‌رسیم (نظیر این‌که $0e^{iz} =$ شود!). بنابراین

$$\tan z = i \quad \text{هیچ پاسخ مختلط متناهی ندارد.}$$

مکان هندسی نقاطی در صفحهٔ مختلط که $4\left|\frac{z+1}{z-1}\right| =$ را بیابید

این معادله نشان می‌دهد نسبت فاصله از نقطهٔ -1 به فاصله از نقطهٔ 1 برابر $\frac{۴}{۱}$ است:

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 4 \implies |z+1| = 4|z-1|.$$

اگر $z = x + iy$ ، آنگاه

$$|z+1|^2 = (x+1)^2 + y^2 \qquad |z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2.$$



پس

$$(x+1)^2 + y^2 = 16((x-1)^2 + y^2).$$

با بسط و ساده‌سازی سرانجام به معادلهٔ دایره می‌رسیم:

$$(x+1)^2 + y^2 = 16(x-1)^2 + 16y^2 \implies (x-\tfrac{17}{15})^2 + y^2 = (\tfrac{8}{15})^2.$$

در نتیجه مکان هندسی دایره‌ای است به مرکز $(\frac{17}{15}, 0)$

و شعاع $\frac{8}{15}$.

اگر $u(x,y) = x^3 + b\,x^2y + c\,xy^2 + y^3$ هارمونیک باشد و 3) قسمت حقیقی تابعی تحلیلی باشد، مقادیر b و c را بیابید.

$\Delta u = 0$ تابع حقیقی u هارمونیک است یعنی

پس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

مشتقات:

•

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 2b.$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c + 6y.$$

پس

•

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x + 2b + 2c + 6y = 0$$

$$6x + 2b + 2c + 6y = 0$$

پس

$$\Delta u = (6x + 2b\,y) + (2c\,x - 6y) = (6 + 2c)\,x + (2b - 6)\,y = 0 \quad \text{همهٔ } x, y.$$

از این‌جا لازم است ضرایب برابر صفر شوند:

$$6 + 2c = 0 \implies c = -3, \qquad 2b - 6 = 0 \implies b = 3.$$

بنابراین

$$b = 3, \quad c = -3.$$



اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی با قسمت حقیقی 4)

باشد، حاصل $f(1)$ را بیابید $u(x, y) = x + e^x \cos y$

قسمت حقیقی تابع تحلیلی f برابر است با

$$u(x, y) = x + e^x \cos y.$$

استفاده می‌کنیم (Cauchy–Riemann) برای یافتن قسمت موهومی $v(x, y)$ ، از روابط کُریلمون

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

ابتدا مشتق‌ها

$$u_x = 1 + e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y.$$

نسبیس

1.

$v_y = u_x = 1 + e^x \cos y$ ، با انتگرال‌گیری نسبت به y :

$$v(x, y) = \int (1 + e^x \cos y) \, dy = y + e^x \sin y + h(x).$$

2.

از طرف دیگر $v_x = -u_y = e^x \sin y$ ، $h'(x) e^x \sin y + \frac{\partial}{\partial x}[y + v_x] = v_x = -u_y = e^x \sin y$ ، $h'(x) e^x \sin y + e^x \sin y = e^x \sin y$ باید مطابقت داشته باشد با $e^x \sin y$ پس



$$e^x \sin y + h'(x) = e^x \sin y \implies h'(x) = 0 \implies h(x) = \text{(ثابت)}.$$

آن ثابت را می‌توان صفر گرفت، در نتیجه

$$v(x, y) = y + e^x \sin y.$$

پس تابع تحلیلی

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = (x + e^x \cos y) + i (y + e^x \sin y).$$

لکمون برای $z = i01 + z = i01$ (یعنی $x = 1, y = 0$) داریم

$$f(1) = (1 + e^1 \cos 0) + i(0 + e^1 \sin 0) = 1 + e + i \cdot 0 = 1 + e.$$

بنابراین

$$f(1) = 1 + e.$$

پاسخ نهایی کوتاه

1.

- دو ریشهٔ $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$ عبارت‌اند از (الف)

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- چهار ریشهٔ $-iz^4 = 1$ را می‌توان به‌صورت (ب)

$$z = e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$



- معادلهٔ $2\sin z = \ln(2 + \sqrt{3})$ در مختلط بی‌شمار جواب دارد؛ ازجمله (ج)

$$z = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - i \ln(2 + \sqrt{3})\right) + n\pi.$$

- معادلهٔ $i \tan z = \zeta$ در \mathbb{C} جواب (متناهی) ندارد (د).

2. مکان هندسی $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 4$ دایره‌ای است به مرکز

$$\left(\frac{17}{15}, 0\right)$$

و شعاع

$$\frac{8}{15}.$$

3. برای

$$u(x, y) = x^3 + b x^2 y + c x y^2 - y^3$$

هارمونیک، باید

$$b = 3, \quad c = -3.$$

4. اگر

$$\Re f(z) = x + e^x \cos y,$$

آنگاه

$$f(1) = 1 + e.$$

resolve the third and the fourth problems. make it all ltr for equations.



Thought about harmonic functions and analytic functions for a few seconds

Below are detailed solutions to **Problem 3** and **Problem 4**, presented with left-to-right notation for the equations.

Problem 3

If

$$u(x, y) = x^3 + b x^2 y + c x y^2 - y^3$$

is harmonic and is the real part of an analytic function, find the values of b and c .

A function $u(x, y)$ is harmonic if and only if its Laplacian is zero:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1. Compute partial derivatives with respect to x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2bxy + cy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2bxy + cy^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 2by.$$

2. Compute partial derivatives with respect to y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b x^2 + 2cxy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2cx - 6y.$$

3. Sum them to get the Laplacian:

$$\Delta u = (6x + 2by) + (2cx - 6y) = (6 + 2c)x + (2b - 6)y.$$

4. Set the Laplacian to zero for all x, y :

For the above expression to be zero for all real x and y , each coefficient must be zero:

$$6 + 2c = 0 \implies c = -3,$$

$$2b - 6 = 0 \implies b = 3.$$

Hence,

$$b = 3, \quad c = -3.$$

Problem 4

Suppose $f(z)$ is an analytic function whose real part is

$$u(x, y) = x + e^x \cos y.$$

Find $f(1)$.

Write $z = x + i y$. Let

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

where u and v satisfy the Cauchy–Riemann equations:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

1. Compute the partial derivatives of u :

$$u_x = 1 + e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y.$$

2. From the Cauchy–Riemann equations:

$$v_y = u_x = 1 + e^x \cos y.$$

Integrate with respect to y :

$$v(x, y) = \int (1 + e^x \cos y) dy = y + e^x \sin y + h(x),$$

where $h(x)$ is an arbitrary function of x .

3. Use the second Cauchy–Riemann equation to find $h(x)$:

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x} (y + e^x \sin y + h(x)) = e^x \sin y + h'(x).$$

But we also have

$$v_x = -u_y = e^x \sin y.$$

Hence

$$e^x \sin y + h'(x) = e^x \sin y \implies h'(x) = 0 \implies h(x) = \text{constant}.$$

We can take that constant to be 0 for simplicity, so

$$v(x, y) = y + e^x \sin y.$$

Thus,

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = (x + e^x \cos y) + i (y + e^x \sin y).$$

Finally, evaluate f at $z = 1 + i0$, meaning $x = 1$ and $y = 0$:

$$f(1) = (1 + e^1 \cos 0) + i (0 + e^1 \sin 0) = (1 + e) + i \cdot 0 = 1 + e.$$

Hence,

$$f(1) = 1 + e.$$

🗨️ 📄 🔄 🗑️

previous / ways

تحليل تابع آرگومان



View plans

Unlimited access, team features...

Message ChatGPT



ChatGPT can make mistakes. Check important info.

7