Ingenieria Matematica

Formulario

métodos numéricos

PARCIAL 1

Alumna:

Pérez Huerta Samantha

Profesora:

Ricardo Medel Esquivel

3MM1

Instituto Politécnico Nacional

☽ FORMULARIO ☽

⌑ Definición:
Sea f una función definida en un conjunto X de numeros reales. Entonces, f tendrá por límite L en x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, si dado cualquier $\mathcal{E}$ >0, existe otro número δ >0 : $|f(x) - L| < \mathcal{E}$ siempre que $x \in X$ $0 < |x - x_0| < \delta$

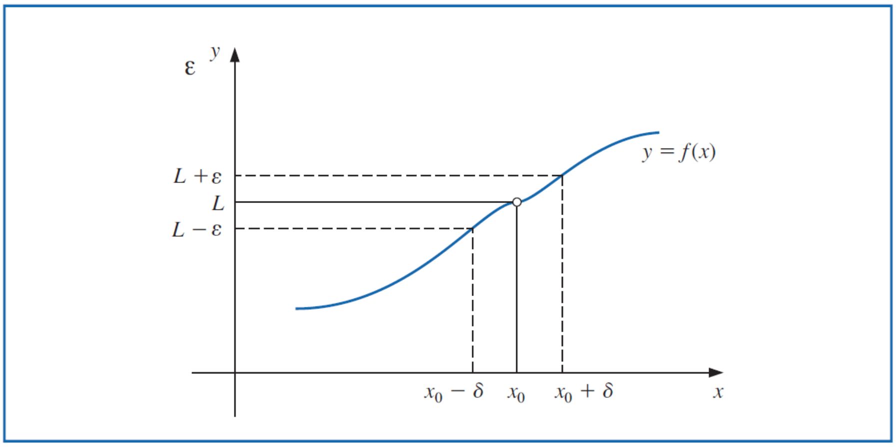

Figure 1: Representación gráfica de ímite

⌑ Definición:
Sea $f : x \longrightarrow \mathbb{R}$ f es continúa en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. f es continúa en x si lo es en cada $x \in X$.

⌑ Definición:
Sea $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. La sucesión converge a un número x (el límite) si $\forall$ $\mathcal{E}$ >0 $\exists$ $N(\mathcal{E})$ tal que n >$N(\mathcal{E})$ implica $|x_n - x| < \mathcal{E}$

◇ Teorema:
Sea $f : x \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \mathcal{E} X$, los siuientes enunciados son equivalentes:
a) f es continúa en x_0
b) Si $\{x\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en x y converge en x_0 $\lim_{n \to \infty} f(x) = f(x_0)$

⌑ Definición:
Si f es una función definida en un intervalo abierto que contiene a x_0, entonces f será diferenciable en x_0 si:

$$f^{'}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe.

◇ Teorema:
Si f es diferenciable en x_0, etoinces f es continúa en x_0

◇ **Teorema de Rolle:**
Supongamos que $f \in ([a, b])$ y que es diferenciable en (a,b). Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces existirá un número c en (a,b) con $f^{'}(c) = 0$

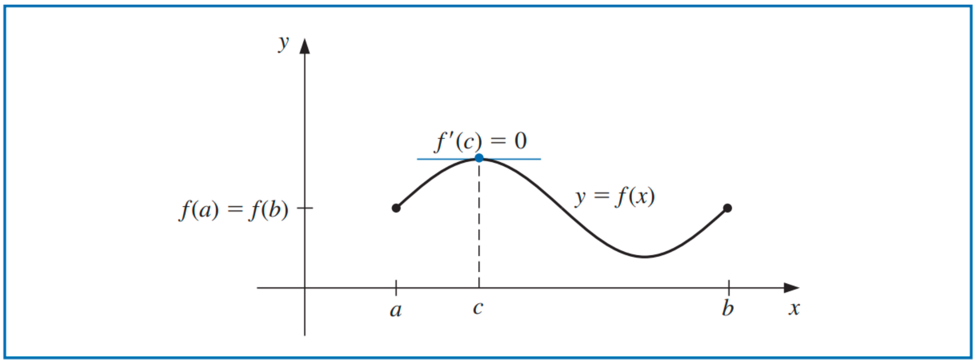

Figure 2: Representación gráfica del Teorema de Rolle

◇ **Teorema del valor medio:**
Si $f \in C([a, b])$ y f es diferenciable en (a,b), entonces existirá un número c en (a,b) tal que:

$$f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(que representa la recta tangente)

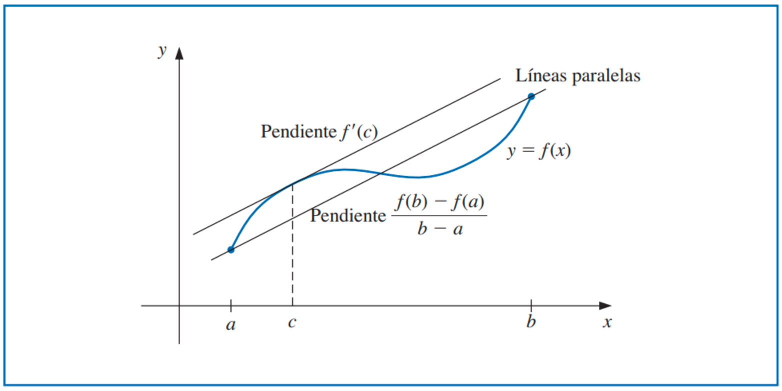

Figure 3: Representación gráfica del Teorema valor medio

◇ **Teorema: del valor extremo:**
Si $f \in C[a, b]$ entonces existirá $c_1, c_2 \in [a, b]$ con $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \forall x \in [a, b]$. Si además f es diferenciable es (a,b), los números c_1 y c_2 estarán ya sea en los extremos de [a,b] o donde $f^{'}$ sea cero

◇ **Teorema de generalizado de Rolle:**
Supongamois que $f \in \mathtt{C}[a, b]$ es n veces diferenciable en (a, b). Si $f(x)$ es cero en $n + 1$ puntos distintos $x_0, ..., x_n$ en $[a, b]$ entonces existirá un número en

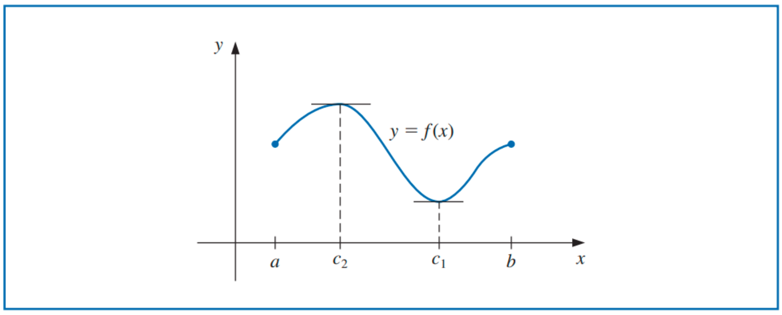

Figure 4: Representación gráfica del Teorema extremo

(a, b) con $f^{(n)}(c) = 0$

◇ **Teorema del valor intermedio:**
Si $f \in \mathbb{C}[a, b]$ y k es un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, existirá un número c en (a, b) para el cual $f(c) = k$.

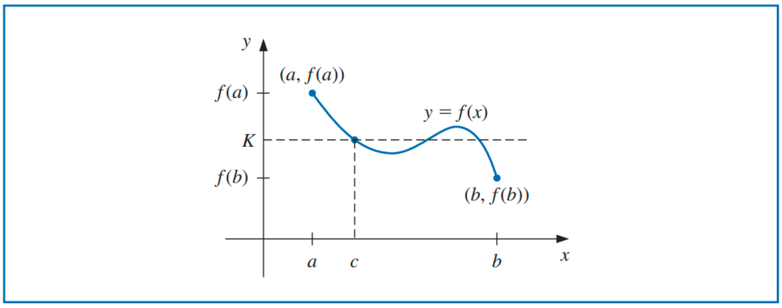

Figure 5: Representación gráfica del Teorema del valor intermedio

◇ **Teorema de Taylor:**
Supongamos que $f \in \mathbb{C}[a, b]$ que $f^{(n+1)}$ existe un $[a, b]$ y que $x_0 \in [a, b]$. $\forall x \in [a, b]$ habrá un número ξ entre x_0 y x : $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ donde:

$$P_n(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+...+\frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{k=a}^{n} f^k(x_0)(x-x_0)^k$$

y

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi(x))(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

.

⌑ **Definición:**
La integral de Rienmann de la función f en el intervalo $[a, b]$ es:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{a=1}^{n} f(x_i)$$

$\diamond$ **Teorema de valor ponderado para integrales:**
Si $f \in C[a,b]$, la integral de g existe en $[a,b]$ y $g(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$, entonces existirá $c \in (a,b)$con:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

Si $g(x) = 1$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$\multimap$ **Senos y cosenos:**

$$|cos(x)| \leq 1$$
$$|sen(x)| \leq |x|$$

$\multimap$ **Tipos de errores:**

- Error absoluto:

$$e_a = |x_T - x_0|$$

-Error relativo:

$$e_r = |\frac{x_T - x_0}{x_T}|$$

- Error porcentual:

$$e_p = |\frac{x_T - x_0}{x_T}| \times 100\%$$

$\multimap$ **Epsilón de la máquina:**
Es el número más grande que satisface la condición:

$$1.0 = 1.0 + \mathcal{E}$$

Pan de Leucipo: Partir a la miad el número hasta llegar a Epsilón

$\multimap$ **Método de búsqueda incremental o tabulación:**
Se basa en el teorema de valor intermedio,comienza en el valor x_0 y un incremento $\triangle\, x$ suficientemente pequeñopra hallar otro valor:

$$x_1 = x_0 + \triangle\, x$$

luego convertimos esta en una función iterativa:

$$x_n = x_{n-1} + \triangle\, x$$

si $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$ haya una ríz en $[x_{n-1}, x_n]$

$\multimap$ **Conceptos y definiciones básicas:**
Sea $\{x_n\}$ una secuencia sucesiva de aproximaciones a la ráiz α de la ecuación$f(x) = 0$. El error $\mathcal{E}_n$ de la n-ésima iteración está definido por :

$$\mathcal{E}_n = \alpha - x_n$$

Definimos:

$$h_n = x_{n+1} - x_n = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n-1}$$

como una aproximación de $\mathcal{E}_n$

El proceso de iteración **converge** si y sólo si en $\mathcal{E}_n \to 0$ cuando $n \to \infty$

$\multimap$ **Orden de convergencia:**
Si un método iterativo convergen y existen dos constantes $p \geq 1$ y $p \geq 0$ tales que:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{\mathcal{E}_n + 1}{(E_n)^p}| = c$$

entoces p es el **orden de convergencia** y c es la **constante de error asintótico**

Por definición :

$$|\mathcal{E}_n| = |\alpha - x_n|$$

y notamos que:

$$|\alpha - \mathcal{E}_n| \leq |b_n - a_n|$$

y

$$|b_n - a_n| = \frac{|b_{n-1} - a_{n-1}|}{2} = \frac{|b_{n-2} - a_{n-2}|}{2^2} = ... = \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$$

por tanto:

$$|\mathcal{E}_n| \leq \frac{|b_0 - a_0|}{2^n}$$

luego

$$|\mathcal{E}_{n+1}| \leq \frac{|b_0 - a_0|}{2^n + 1}$$

así:

$$lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{E}_n + 1|}{\mathcal{E}_n} \approx \frac{1}{2}$$

¤ **Definición:**
El número p es un punto fijo para una función dada si

$$g(p) = p$$

para usar el método de punto fijo se debe plantear la función $g(x)$ que tenga un punto fijo. Esto se puede hacer de varias maneras:

$$g(x) = x - f(x)$$

$\diamond$ **Teorema:**
i) Si $g \in C[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]$ para todas $x \in [a,b]$, entonces g tiene por lo menos un punto fijo en $[a,b]$. ii) Si, además, $g'(x)$ existe en (a,b) y hay una constante positiva $k < 1$ con:

$$|g'(x)| \leq k$$

para todas las $x \in (a,b)$ entonces existe exactamente un punto fijo en $[a,b]$

$\multimap$**Convergencia de método de iteración de punto fijo:**

Buscamos $g(p) = p$ mediante la aproximación $\{x_n\}$

$$x_n = g(x_{n-1}) \leftarrow puntofijo$$

buscamos α tal que $f(x) = 0$