GMM实现

GMM实现理论

由于直接用MLE进行GMM求解无法得到解析解，因此我们使用EM算法对GMM模型进行求解。按照EM算法的求解步骤，GMM的求解分为三个步骤：

1. Expectation (期望)

   由每类的后验概率算出期望。

$$p\left(z^{(i)}=j|x^{(i)};\phi,\mu,\Sigma\right)=\frac{p\left(x^{(i)}|z^{(i)}=j;\mu,\Sigma\right)p\left(z^{(i)}=j;\phi\right)}{\sum_{l=1}^{k}p\left(x^{(i)}|z^{(i)}=l;\mu,\Sigma\right)p\left(z^{(i)}=l;\phi\right)} \tag{1}$$

2. Maximization (最大化)

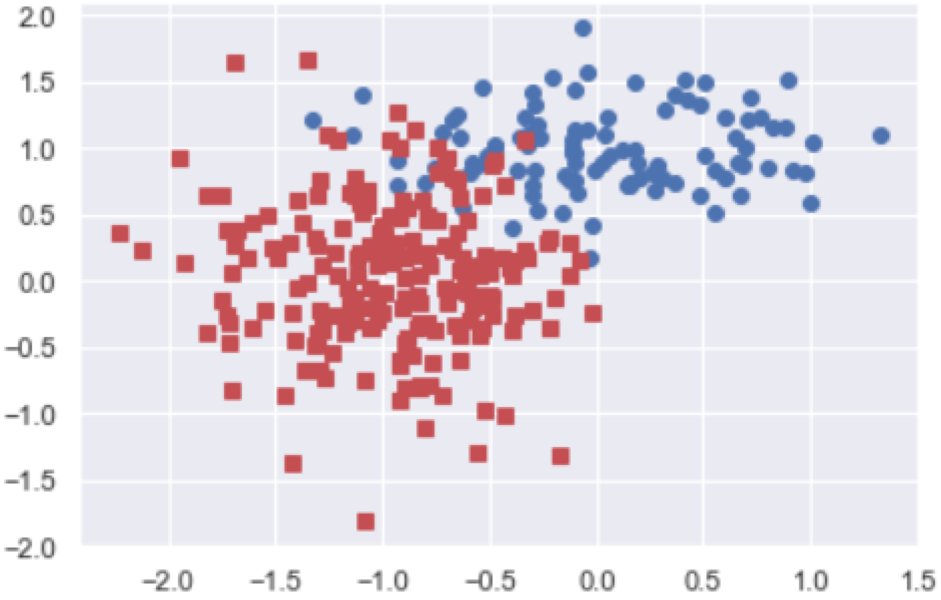
   由EM的计算公式算出平均值，方差和各类响应。

$$\begin{aligned}\phi_j &:= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} w_j^{(i)} \\ \mu_j &:= \frac{\sum_{i=1}^{m} w_j^{(i)} x^{(i)}}{\sum_{i=1}^{m} w_j^{(i)}} \\ \Sigma_j &:= \frac{\sum_{i=1}^{m} w_j^{(i)}\left(x^{(i)}-\mu_j\right)\left(x^{(i)}-\mu_j\right)^T}{\sum_{i=1}^{m} w_j^{(i)}}\end{aligned}$$

3. 迭代以上两部直到收敛

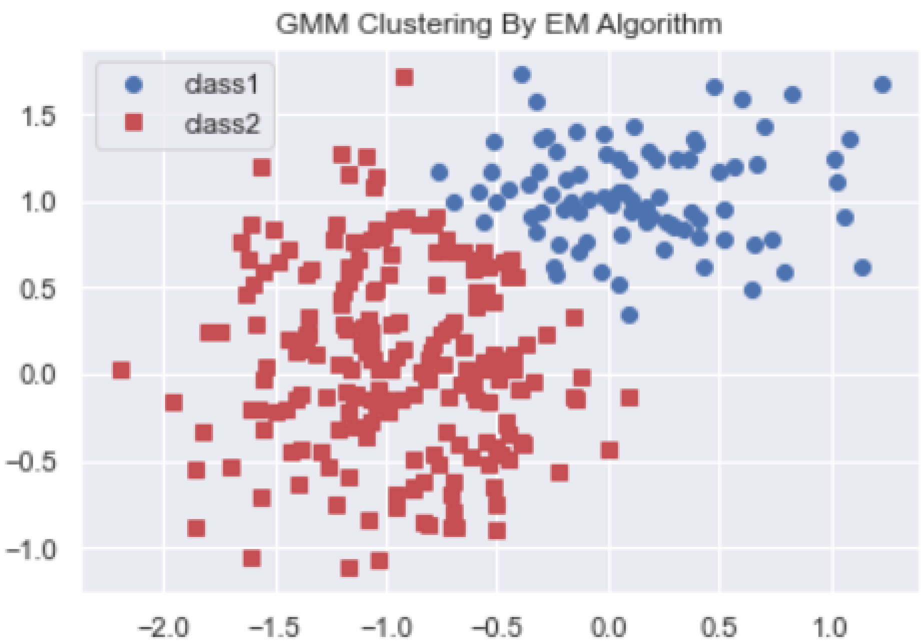
实验数据准备

实验数据由两个高斯分布组成，中心位置分别位于 [0,1] 和 [-1,0]，均方差矩阵分别为[[0.3 0] [0 0.1]] 和 [[0.2 0] [0 0.3]]。其中第一类有100个点，第二个有200个点。



实验结果

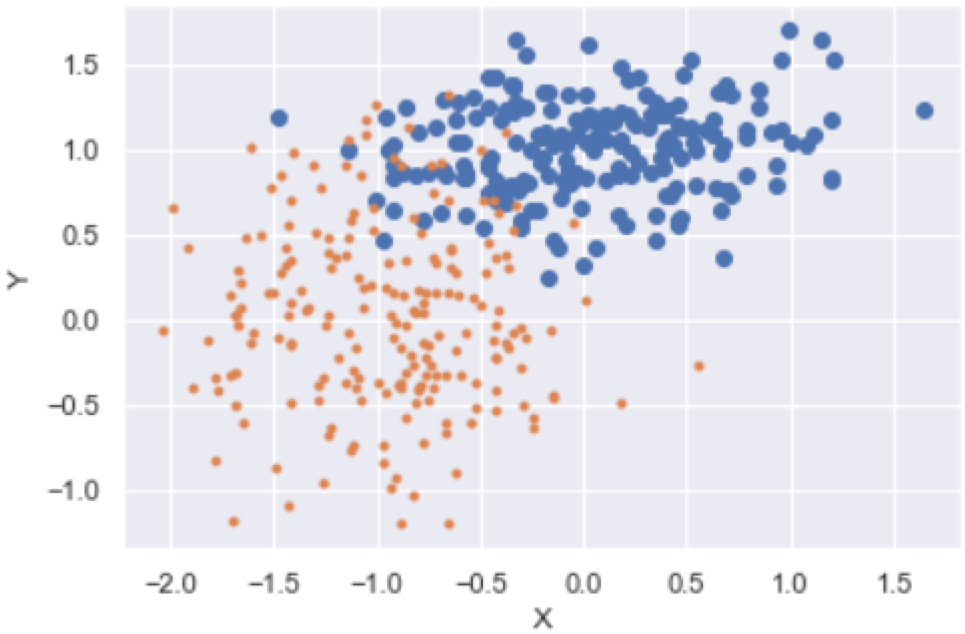
通过300次迭代已大致收敛。分类结果。可以看到除了重叠处的有部分分错，其他分类结果很好。



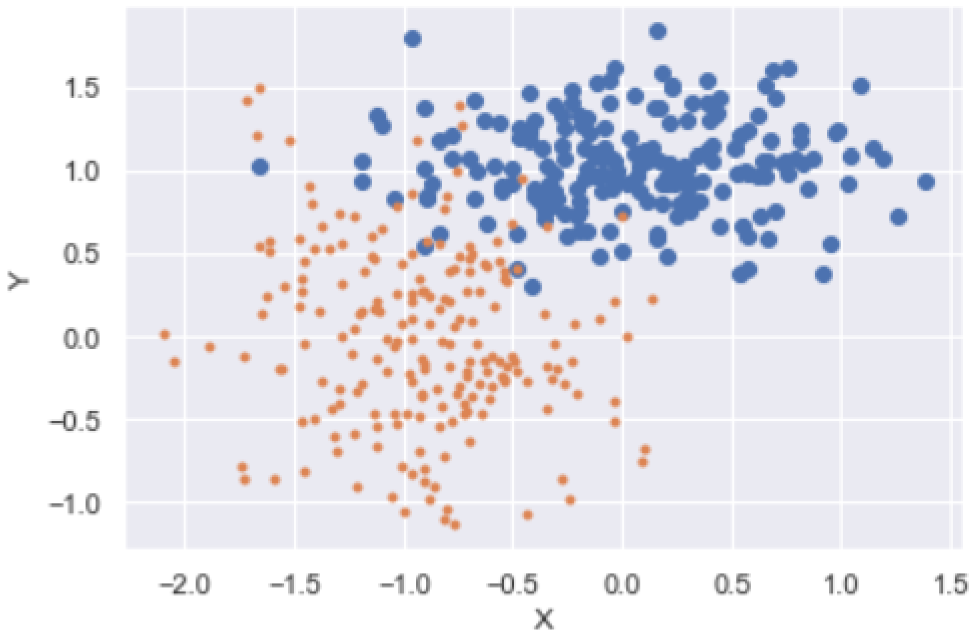
我们再通过观察递归过程中的参数变化可以直观感受到收敛的过程。对0，20，40，60，80次迭代的高斯分布参数绘制散点图。可以看到由一开始初始化非常混乱的状态渐渐分开。

2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
Y
−2.5
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
X

1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
Y
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
X



1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
Y
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
X



调用方法

python source.py