Assignment 1 实验报告

Assignment 1 实验报告
- Part 1 生成三个高斯分布数据
- Part2 生成模型进行分类
  - Generative model
  - Discriminative Model
  - Generative model 和 Discriminative Model的区别
- Part3 调整数据分布后的实验结果
  - 高维数据和低维数据
  - 数据之间的重叠程度
- 代码运行方式

Part 1 生成三个高斯分布数据

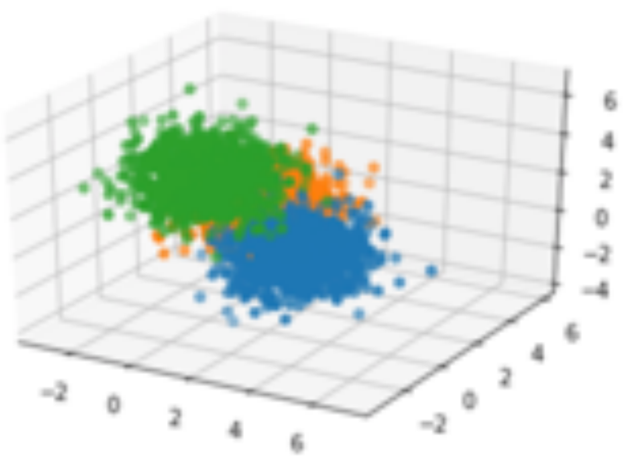
通过GenarateData函数生成三个三维高斯分布

$$N(\mu_1,\Sigma_1),N(\mu_2,\Sigma_2),N(\mu_3,\Sigma_3)$$

$$\mu_1=(0,0,3),\mu_2=(0,3,0),\mu_3=(3,0,0),\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

每个高斯分布取样100个点，随机sample70%数据用于训练，30%数据用于测试

生成的数据分布如下：



Part2 生成模型进行分类

Generative model

在训练集上通过train函数求得：

$$P\text{为先验概率，}P = (0.34857143, 0.33142857, 0.32)$$
$$\hat{\mu}_1 = (3.019, -0.007, -0.024), \hat{\mu}_2 = (-0.008, 2.968, 0.064), \hat{\mu}_3 = (-0.009, 0.0171, 2.974),$$
$$\hat{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0.927 & -0.009 & -0.12 \\ -0.009 & 0.990 & 0.105 \\ -0.012 & 0.105 & 0.994 \end{bmatrix}, \hat{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0.998 & -0.011 & -0.106 \\ -0.011 & 1.118 & -0.046 \\ -0.011 & -0.046 & 0.961 \end{bmatrix}, \hat{\Sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1.016 & 0.032 & -0.005 \\ 0.032 & 0.943 & -0.011 \\ -0.05 & -0.01 & 0.968 \end{bmatrix}$$

在测试集上通过argmax求得节点类别

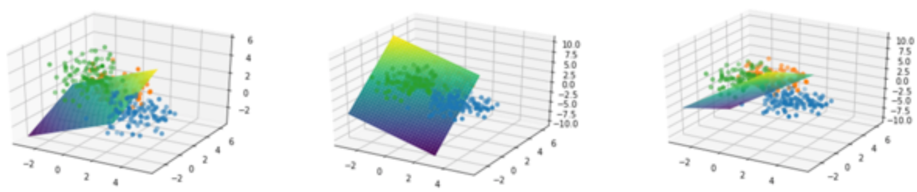
$$label(x) = \arg\max(P(x|\mu_i, \Sigma_i))$$

最终得到Acc=0.931

Discriminative Model

$$P(y|x) = P(x|y)\frac{P(y)}{P(x)}$$
$$\hat{y} = \arg\max_y P(y|x) = \arg\max_y P(y)P(x|y)$$
$$P(t|p, \mu, \Sigma) = \prod_{n=1}^{N} P_c N(x_n|\mu_c, \Sigma_c), c = class(x_n)$$
$$\text{设}N_1, N_2, N_3\text{为}class1, class2, class3\text{的样本数量，}$$
$$\text{则由极大似然估计可知}\mu_i = \frac{1}{N_i}\sum_{t_n \in C_i} x_n, \Sigma_i = \frac{1}{N_i}\sum_{t_n \in C_i}(x_n - \mu_i)(x_n - \mu_i)^T.$$
$$P(c_k|x) = \frac{p(x|c_k)P(c_k)}{\sum_j P(x|c_j)P(c_j)} = \frac{\exp(a_k)}{\sum_j \exp(a_j)}, a_k = \log P(x|c_k)P(c_k)$$
$$\text{可以使用}softmax\text{回归的方式求解，使用交叉熵作为损失函数}$$
$$\hat{y}^{(n)} = softmax(w^T x^{(n)})\text{为样本}x^{(n)}\text{在每个类别下的后验概率。}$$
$$L(w) = -\frac{1}{N}\sum_n \sum_c y_v^{(n)} \log \hat{y}_c^{(n)}$$
$$= -\frac{1}{N}\sum_n (y^{(n)})^T \log \hat{y}^{(n)}.$$
$$\text{使用梯度下降，设置}LearningRate = 0.01\Delta w = LearningRaate \times \frac{\partial L}{\partial w}$$
$$w = w + \Delta w$$
$$\text{最终}w = \begin{bmatrix} 1.21892269 & -0.6235152 & -0.65033862 & -0.02508469 \\ -0.59180617 & 1.26088011 & -0.58163856 & 0.05631258 \\ -0.62711652 & -0.6373649 & 1.23197718 & -0.03122789 \end{bmatrix}$$
$$\text{可以看出较好地分辨三个类别。}$$

通过w可以得到每一个class的投影平面，通过plot函数进行可视化，可以看出投影平面之间的区别



在测试集上通过test函数进行分类，label(x)=arg max (softmax(Wt*x))

最终得到Acc=0.929

Generative model 和 Discriminative Model的区别

在这个实验中，由于数据纬度并不高，并且数据之间的交叉并不明显.

生成模型准确率为93.1%，判别模型为92.9%，二者相差不大，只有少数outlier会分布在的其他数据中，造成预测错误。

生成模型对数据的分布进行预测，是通过计算每一个class的分布后，使用先验概率乘似然的方法得到后验概率进行分类。同时也可以生成数据。

判别式模型直接学习分类需要的线性函数。

生成式模型优点：
生成式模型有解析解，可以直接计算出最优的参数分布。

生成式模型缺点：
生成模型预设了数据的分布类型，进行生成式模型的构建时需要先验知识，了解其分布，所以如果数据的真实分布情况不是高斯分布，或者不是简单的分布时，生成模型的能力就会受限。
生成式模型需要的参数数量远大于判别式求解。

判别式模型优点：
参数数量少，易于通过梯度下降或其他迭代方法求解

判别式模型缺点：
难以设置learning rate等超参数，需要调参以达到模型的最好效果

具体的生成式模型和判别式模型的区别在part3的实验中进行分析

Part3 调整数据分布后的实验结果

高维数据和低维数据

- 猜想1：高维数据需要更多的训练样本才能得到比较好的结果
    - 实验1：构造三个50维高斯分布，μ1=(3,0,0,0,...,0,0,0,0,0),μ2=(0,3,0,0,0,...,0,0,0,0),μ3=(0,0,3,0,0,0,...,0,0,0),Σ1 = Σ2 = Σ3 =np.eye(50)，每个高斯分布取样100个点，随机sample70%数据用于训练，30%数据用于测试

      结果：生成式模型结果Acc=0.544,判别式模型Acc=0.977

      分析：

      1.这个数据集的前三维分布和part1中的数据集的分布完全一样，但是生成式得到的结果相差很多，说明在这个实验中**数据的噪声**对生成式的影响远大于对判别式模型的影响。

      2.对生成式的训练集进行预测，发现Acc=1，远高于在测试集上的结果，说明**生成模型过拟合了训练数据**，导致在测试集中的结果变差。分析认为根本原因是因为**生成式的模型参数多**，而判别式需要的模型参数相对较少，在训练样本数量相对于需要的参数数量比较小的时候，更多的参数更容易造成**过拟合**。
    - 实验2：在实验1的基础上增加取样点的个数，每个高斯分布取样1000个点

    结果：生成式模型结果Acc=0.954,判别式模型Acc=0.972

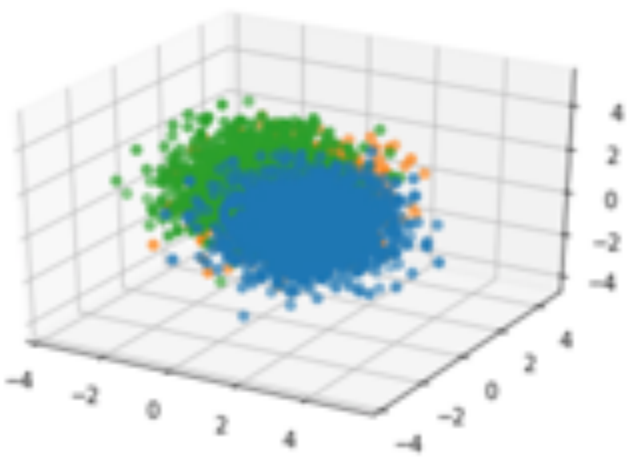
    分析：在训练集足够大时，生成式模型的效果也有了提升

  - 结论：猜想正确

- 猜想2：高维数据训练生成式模型需要时间高于判别式训练模型需要的时间
  - 实验：构造三个50维高斯分布，每个高斯分布取样1000个点，随机sample70%数据用于训练，30%数据用于测试
  - 结果：生成式模型训练时间=0.088s，判别式模型训练时间=0.226s
  - 分析：生成式模型复杂度为 3*N*D(求μ)+3*N*D*D(求Σ) 判别式模型训练时间=N((D+1)*3*3*(D+1)(求softmax结果)+D*3(进行梯度下降))，所以虽然生成式需要的参数数量多，但是在这种模型下，**判别式的计算复杂度更大**。但是两者之间的比例似乎过大，可能是因为numpy内置函数对矩阵乘法的优化或者一些外部干扰原因，因为计算量并不足够大。
  - 结论：猜想错误

数据之间的重叠程度

- 猜想：高斯分布之间重叠度越高分类结果越差
  - 实验：构造三个3维高斯分布，μ1=(1.5,0,0),μ2=(0,1.5,0),μ3=(0,0,1.5),Σ1 = Σ2 = Σ3 =np.eye(3)，每个高斯分布取样100/1000/2000个点，随机sample70%数据用于训练，30%数据用于测试
  - 结果：生成式模型结果Acc=0.755/0.772/0.767,判别式模型Acc=0.711/0.767/0.765
  - 分析：取样100个点时数据效果低于取样1000个点，因为训练数据不足，模型没能完全学习到数据的性质，取样1000个点和取样2000个点比，模型效果不好是因为数据之间的重叠和part1中数据相比较大，有较多的不同类别的点互相重合，将其可视化后如下图



  - 结论：猜想正确

代码运行方式

```
python source.py
```