Chapitre 1 : Coloration des sommets d'un graphe

Cours Graphes & Applications

Unité Pédagogique de Mathématiques,
Ecole Supérieure PRivée d'Ingénierie et de Technologies (ESPRIT)

Année Universitaire : 2024-2025

Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Plan

Objectifs du cours

À l'issue du chapitre 1, l'étudiant sera capable de :

- Identifier des problèmes dont les solutions sont données via une coloration de graphes.
- Modéliser des situations réelles par des graphes.
- Colorier un graphe.
- Application des algorithmes glouton et Welsh & Powell pour la coloration des graphes.
- Savoir encadrer le nombre chromatique pour en déduire dans certains cas la solution optimale : minoration par l'ordre d'un sous graphe complet et majoration par le théorème de brooks et/ou les résultats des algorithmes.

Plan

Se former autrement

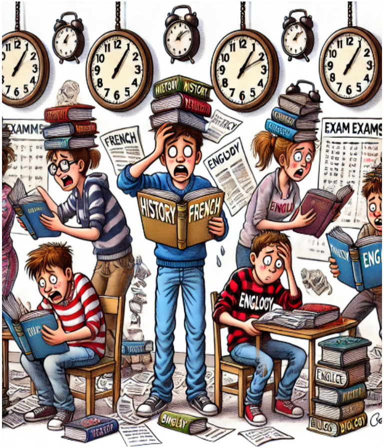
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Activité introductive : Planification des examens

5 étudiants doivent passer des examens :

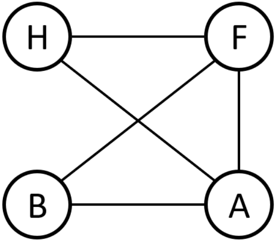
- Étudiant 1 : Histoire et Français
- Étudiant 2 : Français et Anglais
- Étudiant 3 : Histoire et Anglais
- Étudiant 4 : Biologie et Anglais
- Étudiant 5 : Français, Biologie et Anglais

Peut-on planifier des épreuves en même temps ?



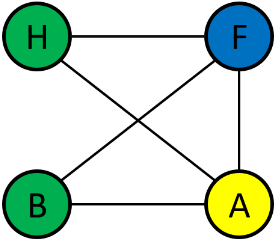
Solution de l'activité introductive

Modélisation : Ce problème peut être modélisé par le graphe suivant, où chaque sommet correspond une matière et une arête est tracée entre deux sommets si un étudiant doit passer l'examen de ces deux matières, indiquant ainsi que ces matières ne peuvent pas être planifiées en même temps.



Solution de l'activité introductive

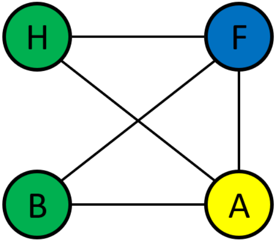
Coloration du graphe : Cette coloration illustre la possibilité de planifier des examens en parallèle. Chaque couleur représente une plage horaire différente. Deux sommets adjacents, qui symbolisent des matières pour lesquelles un même étudiant doit passer un examen, sont incompatibles et doivent donc être assignés à des plages horaires, ou couleurs, distinctes. Cela garantit que ces examens ne se déroulent pas en même temps.



Solution de l'activité introductive

Cette planification est-elle optimale ?

Pour le moment, on ne sait pas trop si cette coloration est optimale ou pas, mais c'est découvrir prochainement !



Plan

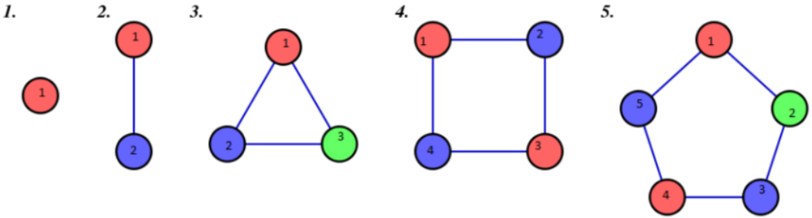
Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Définitions

• Colorier un graphe G c'est colorier les sommets de telle façon que deux sommets adjacents aient toujours des couleurs différentes.

• Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier le graphe.



"Gare aux voisins!"- Kim Jong-un

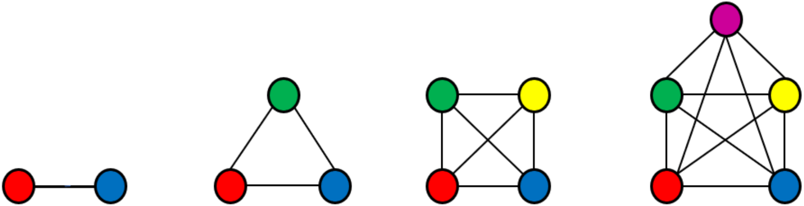
Plan

Propriétés : Coloriage optimal d'un graphe complet

Propriété

Le nombre chromatique d'un graphe complet K_n, $n \geq 1$ est : $\chi(K_n) = n$.

Exemple :



$\chi(K_2) = 2$ $\chi(K_3) = 3$ $\chi(K_4) = 4$ $\chi(K_5) = 5$

Propriétés : Encadrement du nombre chromatique

Considérons le graphe non-orienté $G = (V, E)$ avec $|V| = n$, alors :

Minoration :

- Si G contient un sous graphe complet K_p tel que $p \leq n$, alors $p = \chi(K_p) \leq \chi(G)$.

Majoration :

- $\chi(G) \leq n$.
- Si on arrive colorier le graphe G avec une coloration valide de p couleurs, alors $\chi(G) \leq p$.
- Théorème de Brooks : Si le plus grand degré d'un sommet de G est d, alors $\chi(G) \leq d + 1$.

esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

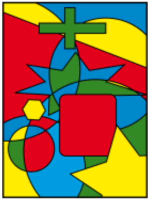
Graphe planaire

Définition : Graphe planaire

C'est un graphe qui peut être représenté sur un plan tel que tout arc (ou arête) ne se croise pas avec un autre.
Exemple : Une carte géographique peut être modélisée par un graphe planaire (Où sommet = région et arête = frontière).

Théorème de coloration (Appel Haken, 1977)

Lorsque le graphe G est planaire, alors $\chi(G) \leq 4$.



Plan

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Algorithme Glouton

Considérons le graphe non-orienté $G = (X, E)$ avec $|X| = n$.

Pseudo-code de l'algorithme Glouton

- liste ordonnée de sommets $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$.
- liste ordonnée de couleurs C.
- Pour i de 1 à n faire
  - $Sommet = x_i$
  - $Couleur$ = la couleur minimale de C non utilisée par les voisins de $Sommet$
  - Affecter à $Sommet$ la couleur $Couleur$.
- fin pour
- Afficher le nombre de couleur utilisées.

Algorithme Glouton

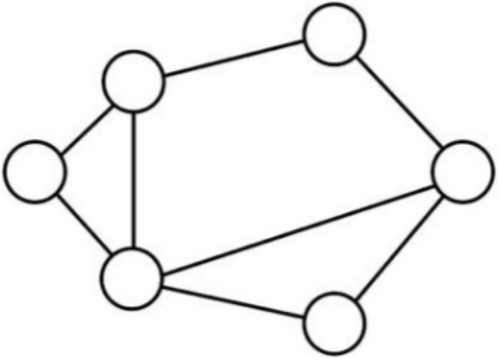
Principe : Avance étape par étape et choisit une solution optimale localement, sans soucis d'optimalité globale.

Procédure : On parcourt le graphe et à chaque noeud on assigne la première couleur possible (en fonction des voisins déj colorés)

Théorème

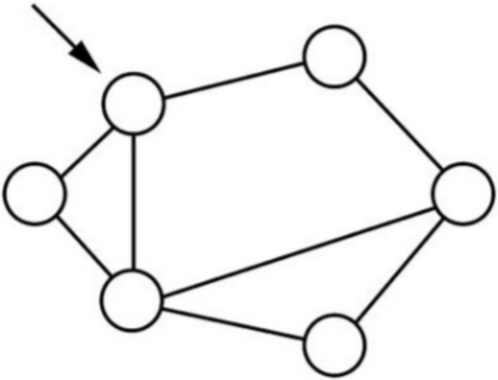
L'algorithme Glouton nécessite n étapes (n : nombre de sommets du graphe). D'après le Théorème de Brooks, il utilise au plus d + 1 couleurs (d : degré du graphe).

Exemple 1 : Algorithme Glouton



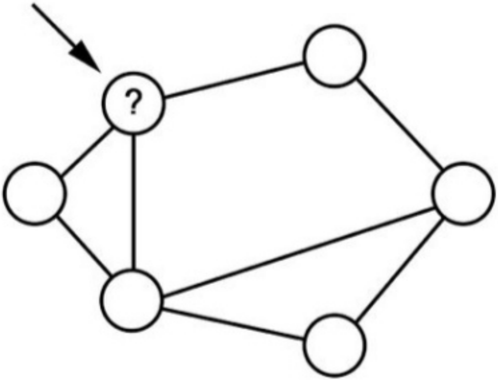
Couleurs utilisées :

Exemple 1 : Algorithme Glouton



Couleurs utilisées :

Exemple 1 : Algorithme Glouton

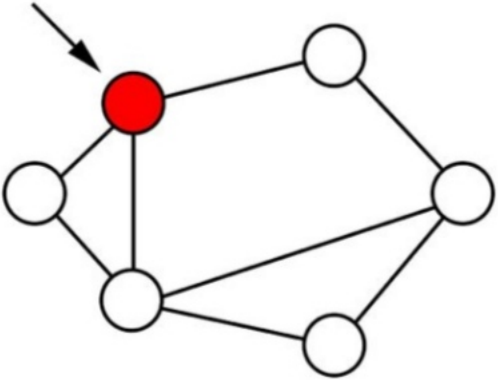


Couleurs utilisées :

Se former autrement

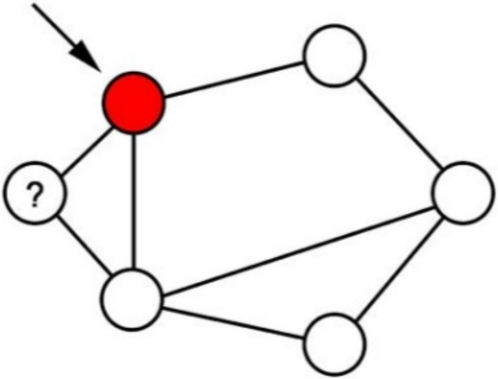
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Exemple 1 : Algorithme Glouton



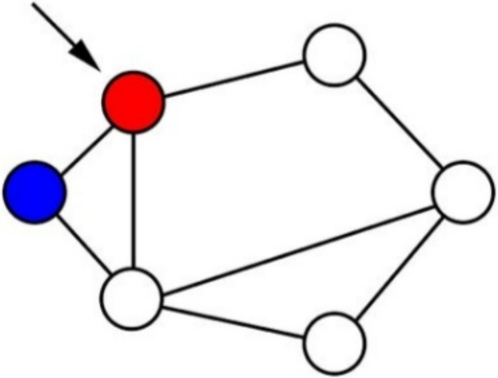
Couleurs utilisées : C_1

Exemple 1 : Algorithme Glouton



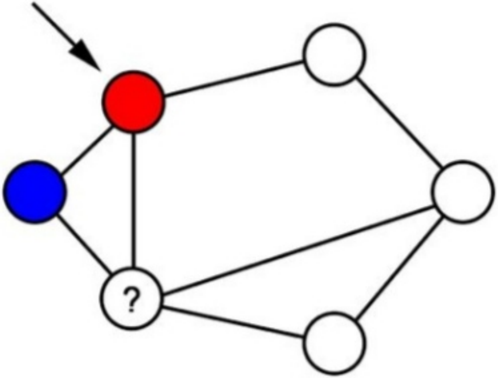
Couleurs utilisées : C_1

Exemple 1 : Algorithme Glouton



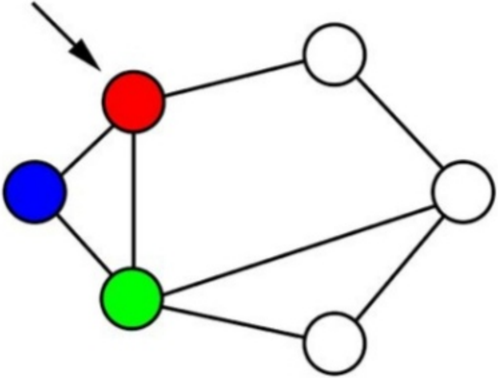
Couleurs utilisées : C_1, C_2

Exemple 1 : Algorithme Glouton



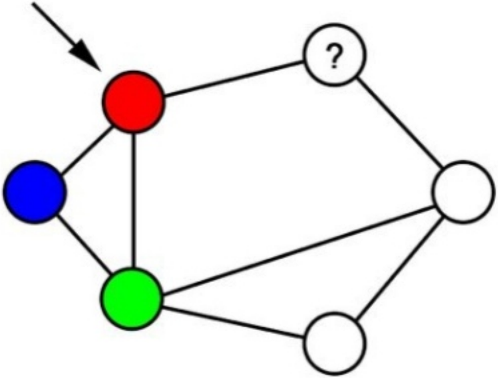
Couleurs utilisées : C_1, C_2

Exemple 1 : Algorithme Glouton



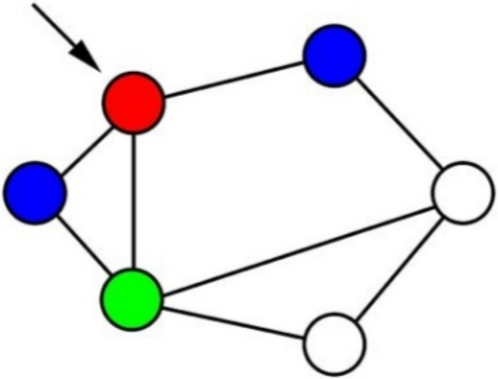
Couleurs utilisées : C_1, C_2, C_3

Exemple 1 : Algorithme Glouton



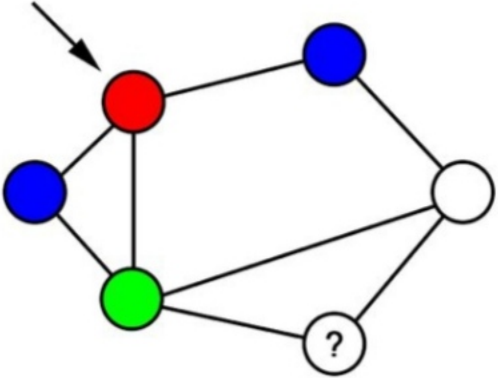
Couleurs utilisées: C_1, C_2, C_3

Exemple 1 : Algorithme Glouton



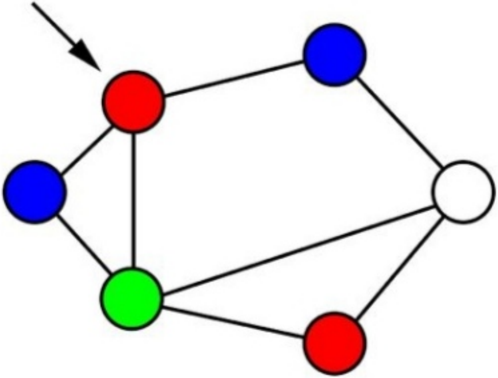
Couleurs utilisées : C_1, C_2, C_3

Exemple 1 : Algorithme Glouton



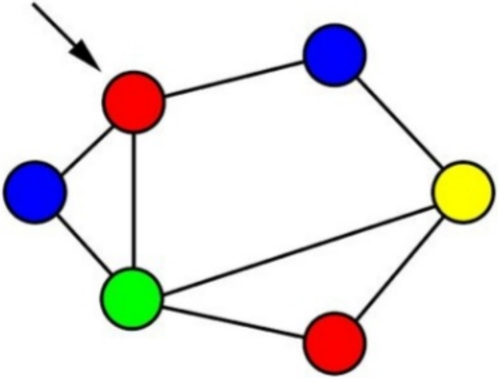
Couleurs utilisées : C_1, C_2, C_3

Exemple 1 : Algorithme Glouton



Couleurs utilisées : C_1, C_2, C_3

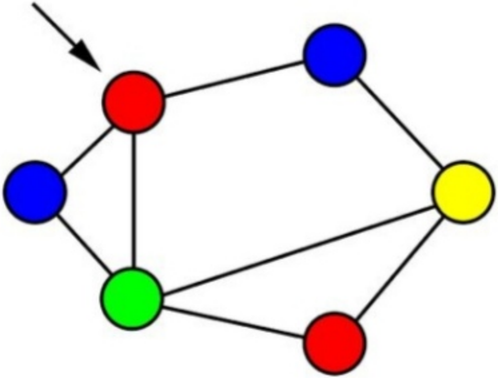
Exemple 1 : Algorithme Glouton



Couleurs utilisées : C_1, C_2, C_3, C_4 $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq 4$.

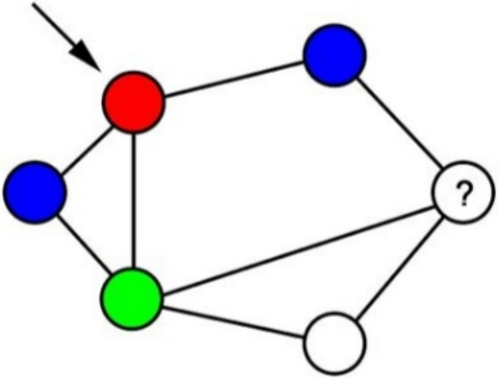
Présence d'un K_3 $\Rightarrow$ $3 \leq \chi(G) \leq 4 \Rightarrow$ On ne peut pas conclure.

Exemple 1 : Algorithme Glouton



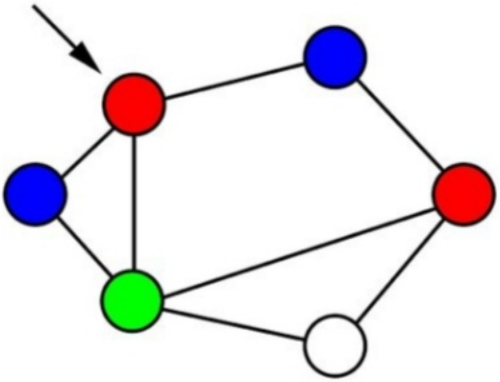
Et pourtant...si par exemple on change l'ordre de visite des deux derniers sommets...

Exemple 1 : Algorithme Glouton



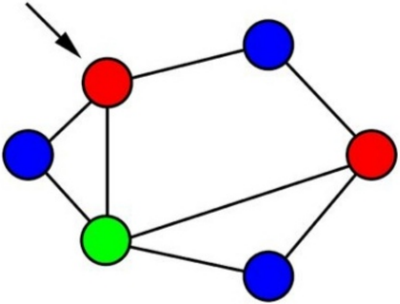
Couleurs utilisées : C_1, C_2, C_3

Exemple 1 : Algorithme Glouton



Couleurs utilisées : C_1, C_2, C_3

Exemple 1 : Algorithme Glouton



Couleurs utilisées : C_1, C_2, C_3 $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq 3$

Présence d'un K_3 $\Rightarrow$ $3 \leq \chi(G) \leq 3 \Rightarrow \chi(G) = 3$

Conclusion : Glouton ne donne pas toujours une coloration optimale.

Plan

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Algorithme de Welsh & Powell

Pseudo-code de l'algorithme de Welsh & Powell

On considère un graphe non-orienté $G = (X, A)$, avec $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ et $n = |X|$.

- L : liste ordonnée des sommets de X ordonnés par ordre décroissant des degrés.
- $couleur \longleftarrow 0$
- Tant que $L \neq \emptyset$ faire
  - $couleur \longleftarrow couleur + 1$
  - $s \longleftarrow L[1]$: le premier sommet de la liste L
  - $couleur(s) \longleftarrow couleur$: colorer s par $couleur$
  - $S_{couleur} = [s]$: ensemble des sommets de couleur $couleur$
  - Pour tout $v \in L$ faire
    - Si v est non-adjacent à $S_{couleur}$ faire
      $couleur(v) = couleur$
      $S_{couleur} = S_{couleur} \cup v$
    - fin Si
  - fin Pour
  - $L = L/S_{couleur}$: retirer les sommets déjà colorés de L
- fin Tant que
- Afficher le nombre de couleur utilisées.

Algorithme de Welsh & Powell

Procédure

Étape 1 : Ordonner les sommets du graphe suivant un ordre décroissant des degrés.
On obtient ainsi une liste v_1, v_2, ... , v_n telle que

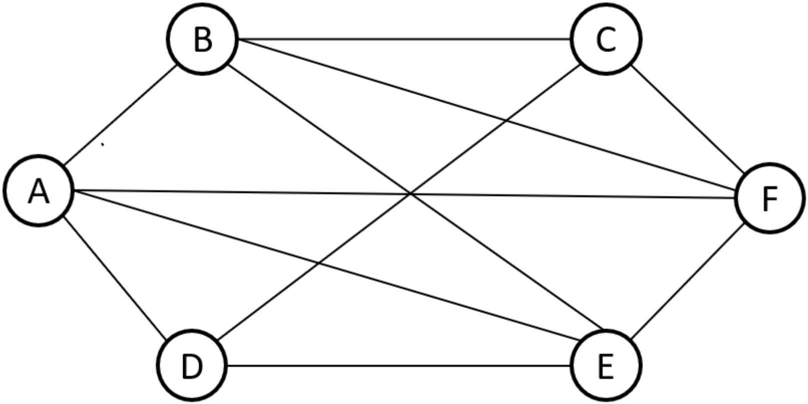
$$\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq ... \geq \deg(v_n)$$

Étape 2 : Affecter une couleur C_1 au sommet v_1 et attribuer la même couleur aux reste des sommets non coloriés et non adjacents d'une façon cumulative et suivant des degrés décroissants.

Étape 3 : S'il reste des sommets non coloriés, attribuer une nouvelle couleur au premier sommet non colorié de la liste résiduelle et répéter la procédure.

Condition d'arrêt : tous les sommets sont coloriés.

Exemple : Algorithme de Welsh & Powell



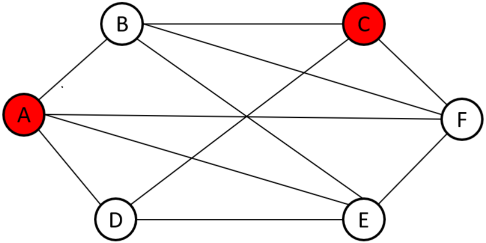
Exemple : Algorithme de Welsh & Powell

Nous calculons les degrés des sommets du graphe. Puis, nous les plaçons dans un ordre décroissant par rapport à leur degré.

Sommets	A	B	E	F	C	D
Degrés	5	4	4	3	3	3

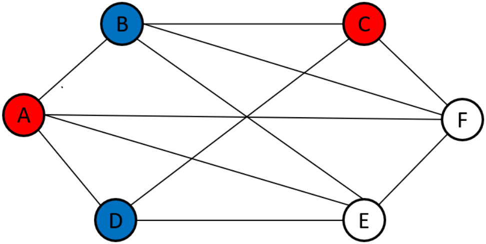
Exemple : Algorithme de Welsh & Powell

Sommets	A	B	E	F	C	D
Degrés	5	4	4	3	3	3
Itération 1	C_1	-	-	-	C_1	-



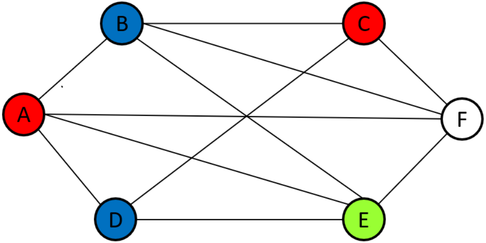
Exemple : Algorithme de Welsh & Powell

Sommets	A	B	E	F	C	D
Degrés	5	4	4	3	3	3
Itération 1	C_1	-	-	-	C_1	-
Itération 2	X	C_2	-	-	X	C_2



Exemple : Algorithme de Welsh & Powell

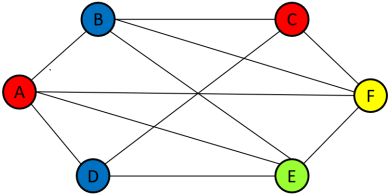
Sommets	A	B	E	F	C	D
Degrés	5	4	4	3	3	3
Itération 1	C_1	-	-	-	C_1	-
Itération 2	X	C_2	-	-	X	C_2
Itération 3	X	X	C_3	-	X	X



esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Exemple : Algorithme de Welsh & Powell

Sommets	A	B	E	F	C	D
Degrés	5	4	4	3	3	3
Itération 1	C_1	-	-	-	C_1	-
Itération 2	X	C_2	-	-	X	C_2
Itération 3	X	X	C_3	-	X	X
Itération 4	X	X	X	C_4	X	X



Nous concluons que 4 couleurs suffisent pour colorier le graphe et donc $\chi(G) \leq 4$.

Plan

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Contre-exemples :

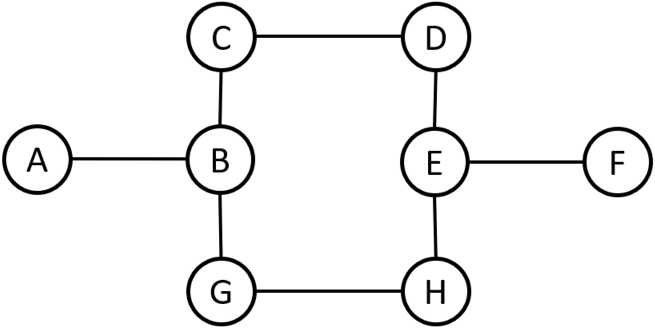
Les algorithmes **Welsh & Powell** et **Glouton** sont des méthodes efficaces pour colorier les graphes, mais **ils ne sont pas garantis d'être optimaux** dans tous les cas.

Pour l'algorithme **Glouton**, l'Exemple 1 montre qu'on peut éventuellement trouver une coloration plus optimale. Examinons de plus près l'algorithme de **Welsh & Powell**...

esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

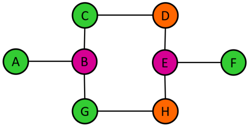
Contre-exemple de Welsh & Powell

Afin de tester l'efficacité de l'algorithme de Welsh & Powell, nous mettons en place un contre exemple.
Soit le graphe :

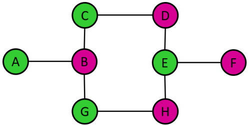


Contre-exemple de Welsh & Powell

Avec l'application de l'algorithme de W-P, on obtient :

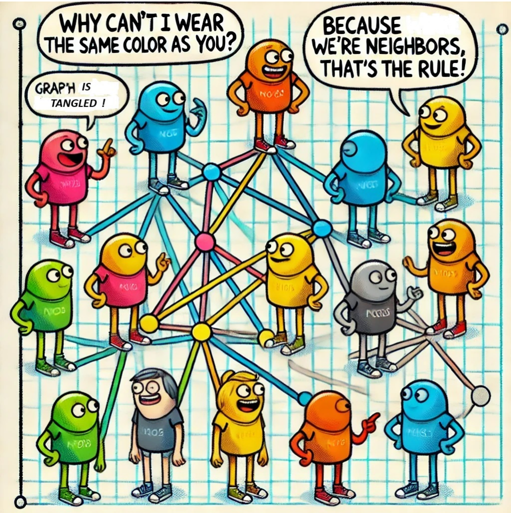


Or, elle n'est pas optimale et seules deux couleurs suffisent :



On conclut que la coloration proposée n'est pas toujours optimale, car dans certains cas, un nombre plus restreint de couleurs peut être utilisé.

"Au moins, on n'a pas à faire des calculs de distance!"



"ou plutôt, pas encore..."

esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES