Nous a...

$$\mathrm{Tr}((X+tV)^{-1}) \overset{\downarrow}{=} \mathrm{Tr}\left(\sqrt{X}^{-1}\left(I + t\sqrt{X}^{-1}V\sqrt{X}^{-1}\right)^{-1}\sqrt{X}^{-1}\right)$$

$$\underset{\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)}{=} \mathrm{Tr}\left(X^{-1}\left(I + t\sqrt{X}^{-1}V\sqrt{X}^{-1}\right)^{-1}\right)$$

$\sqrt{X}^{-1}V\sqrt{X}^{-1}$ est une matrice symétrique. Par le théorème spectral, cette matrice est orthogonalement diagonalisable. Il existe donc O matrice orthogonale et $\lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $\sqrt{X}^{-1}V\sqrt{X}^{-1} = O^T\lambda O$.

Ainsi :

$$\mathrm{Tr}((X+tV)^{-1}) = \mathrm{Tr}\left(X^{-1}(I + tO^T\lambda O)^{-1}\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(X^{-1}O(I+t\lambda)^{-1}O^T\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(O^TX^{-1}O(I+t\lambda)^{-1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [O^TX^{-1}O]_{ii} \frac{1}{1+t\lambda_i}$$

On $[O^TX^{-1}O]_{ii} = o_i^TX^{-1}o_i \geq 0$ car $X^{-1} \in S^m_{++}$. De plus $X+tV \in S^m_{++}$ et

$$X+tV \in S^m_{++} \Rightarrow I + t\sqrt{X}^{-1}V\sqrt{X}^{-1} \in S^m_{++} \Rightarrow 1+t\lambda_i > 0 \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$$

$\forall y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\sqrt{X}^{-1}y \neq 0$ donc

$0 < (\sqrt{X}^{-1}y)^T(X+tV)(\sqrt{X}^{-1}y) = y^T(I + t\sqrt{X}^{-1}V\sqrt{X}^{-1})y$

matrice dans S^m_{++} donc ses valeurs propres sont strictement positives.

$t \mapsto 1+t\lambda_i$ est concave et strictement positive sur $\{t \mid X+tV \in S^m_{++}\}$ donc $t \mapsto \frac{1}{1+t\lambda_i}$ est convexe sur ce même ensemble. Une somme positive de fonctions convexes est convexe. Ainsi $t \mapsto \mathrm{Tr}((X+tV)^{-1})$ est convexe sur $\{t \mid X+tV \in S^m_{++}\}$.

$X \in S^m_{++} \mapsto \mathrm{Tr}(X^{-1})$ est convexe.

2 – D'après les slides, $f(X,y) = y^TX^{-1}y = \sup_{z \in \mathbb{R}^n}(2y^Tz - z^TXz)$

C'est un suprémum de fonctions affines en X et y donc convexe.

3 – X est symétrique, donc ses valeurs singulières sont les valeurs absolues de ses valeurs propres. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de X. X est orthogonalement diagonalisable, il existe O orthogonale telle que $O^TXO = \underbrace{\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{\lambda}$. Soit $D = \mathrm{Diag}(\mathrm{sign}(\lambda_1), \dots, \mathrm{sign}(\lambda_n))$

telle que $O^T X O = \underbrace{\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{\lambda}$. Soit ...

où $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$. $\quad |\lambda| := \mathrm{Diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) = \lambda D = O^T X O D$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(X) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \mathrm{Tr}(|\lambda|) = \mathrm{Tr}(O^T X O D) = \mathrm{Tr}(O D O^T X)$$

O est orthogonale, et D aussi : $D^T D = \mathrm{Diag}(\mathrm{sign}(\lambda_1)^2, \dots, \mathrm{sign}(\lambda_n)^2) = I$.

$Q \mapsto O D Q O^T$ est une permutation des matrices orthogonales

(de permutation réciproque $Q \mapsto D O^T Q O$). Ainsi :

$$\begin{aligned} \sup_{Q \text{ ortho}} \mathrm{Tr}(QX) &= \sup_{Q \text{ ortho}} \mathrm{Tr}(O D Q O^T X) \\ &= \sup_{Q \text{ ortho}} \mathrm{Tr}(Q O^T X O D) \\ &= \sup_{Q \text{ ortho}} \mathrm{Tr}(Q |\lambda|) \end{aligned}$$

Et $\mathrm{Tr}(Q|\lambda|) = \sum_{i=1}^{n} q_{ii} |\lambda_i|$ or $q_{ii} \leq \sqrt{q_{ii}^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (q_{ij})^2} = 1$

car Q est orthogonale donc $\begin{pmatrix} q_{i1} \\ \vdots \\ q_{in} \end{pmatrix}$ est de norme 1.

Ainsi $\mathrm{Tr}(Q|\lambda|) \leq f(X)$. Soit $\sup_{Q \text{ ortho}} \mathrm{Tr}(QX) \leq f(X)$,

cette borne étant atteinte pour $Q = O D O^T$.

$$\boxed{X \in S^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(X) = \sup_{Q \text{ ortho}} \mathrm{Tr}(QX)}$$

Est convexe comme suprémum de fonctions affines.