KAN 拟合能力简报

初等函数

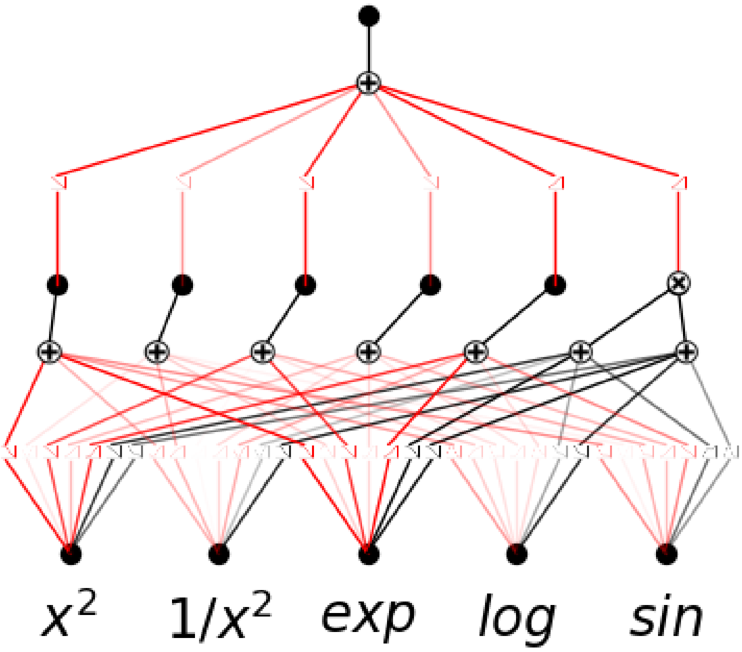
直接导入/声明：六大基本初等函数都可以固定，无需训练，精准度高
单独拟合：在 default dtype = float32 时拟合效果远优于 float64，六大基本初等函数基本可以做到拟合出公式。
加减乘除：在三层范围内（两层中间节点，三层公式）基本可以做到拟合，其中加减收敛最稳定，乘除需要更多训练才可以行程预期结构。

潜在问题

KAN 的优化函数只有 LBFGS 和 Adam 两种，其中前者在一些时候无法跳出局部最优解从而达到全局最优解，后者则是使高度跳跃，虽然能跳出局部最优但无法有效固定函数和进一步拟合参数。
局部最优解一般由两种原因导致。一是停留于实际函数的泰勒级数的一阶项，二是拟合函数在数据的定义域内精准但在定义域外不再具有推广性。
对于第一种情况，解决方案为在固定符号函数时使用第二甚至第三选择，有时可以选中真实函数而非泰勒展开。对于第二种情况，可以通过扩大数据采样范围来尝试解决，但不保证一定能成功。
最后，模型的复杂程度的提升对收敛难度有正向的影响，但影响大小和具体的待拟合函数的复杂程度相关。

通用拟合器

在 NKN 模型的构想中，KAN 作为单层网络提供非线性函数。
初步尝试：是在一层中预先设定六大基本初等函数，再加入适量的加法和乘法节点。
问题：可能需要使用到多个相同的初等函数
解决方案：加入更多未训练的 SiLU 函数节点，在训练中进一步拟合
问题 2：反三角函数和 log 函数存在定义域问题
解决方案：移除反三角函数和 log 函数，确定数据均为正值时加入 log 函数
问题 3：单层无法解决函数复合问题
解决方案：扩展 NKN 为 NKKN 甚至 NKKKN 结构，每层的节点数量以对数形式递减**或许**可以缓解由于网络过于复杂导致的不收敛问题



单层拟合器结构如图所示

第二层都被固定为 y=x，因此不起到非线性拟合的作用。令(L, i, j)代表 L 层从 i 节点到 L+1 层 j 节点的函数，编号从 0 开始，所有(0, 0, j)的函数均被固定为 x^2，所有(0, 1, j)的函数均被固定为 1/x^2，以此类推。因此所有输入变量接口均是对称的，即任何接口都满足任一初等函数的调用。

多层通用拟合器的结构为单层拟合器的堆叠。