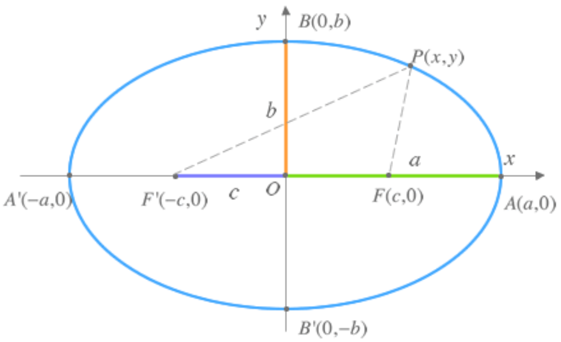
ELIPSE

Una elipse es una curva cerrada, simétrica con respecto a dos ejes que son perpendiculares entre ellos, plana, cuya suma de las distancias a dos puntos fijos o focos, resulta constante.

Elementos de la elipse:

Centro: es el punto medio de los dos focos (***O***).

Focos: son los puntos fijos **F y F'** que generan la elipse.



Eje principal o focal: Es el eje en el que se encuentran los focos.

Eje secundario: Es el eje perpendicular al eje principal, mediatriz del segmento que une los focos.

Vértices: Puntos de intersección de la elipse con un eje. Son los puntos ***A, A'*(**o también llamados **V1** y **V2)** ubicados en el eje principal

Interceptas: Puntos de intersección de la elipse con un eje ubicadas en el eje secundario**, B y B'.**

Distancia focal (***2c***): distancia entre los dos focos. **FF'** =2*c*. ***c*** es la **semidistancia focal**.

Semieje mayor: Segmento entre el centro y los vértices del eje principal **(OA y OA').** Su longitud es **a**. La suma de las dos distancias de cualquier punto de la elipse ***(P)*** a los dos focos es constante y ésta es igual a dos veces el semieje mayor: $\boldsymbol{d(P,F)+d(P,F')=2a}$

Semieje menor: longitud del segmento ***OB*** u ***OB'*** (***b***). Ambos semiejes son los dos ejes de simetría de la elipse. Se cumple que: $\boldsymbol{a^2=b^2+c^2}$

Radios vectores: Cada punto de la elipse ***(P)*** cuenta con dos radios vectores que son los segmentos que unen dicho punto a cada uno de los focos (**F y F').**

Excentricidad de una elipse:

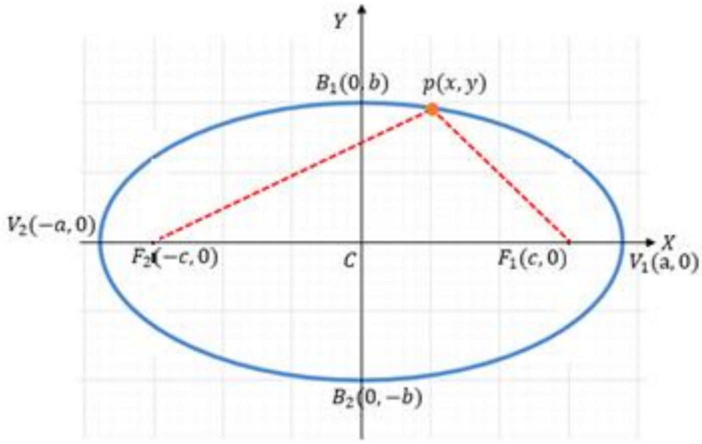
La excentricidad es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse. Y es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor. Su valor se encuentra entre cero y uno. Una elipse será más redondeada cuanto más se aproxime su excentricidad al valor cero.

$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{c}{a}$, con ($0<\boldsymbol{\varepsilon}<1$)

<u>Ecuación reducida de eje horizontal de la elipse:</u> (con centro en el origen)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a^2=b^2+c^2$$



Centro	Ecuación	Focos	Vértice	Interceptas
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	F2(-c,0)	V2(-a,0)	Con el eje normal
(0,0)	Longitud del eje Mayor: 2a	F1(c,0)	V1(a,0)	B2(0,-b)
	Longitud del eje Menor: 2b			B1(0,b)

<u>Por ejemplo:</u>

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1}$$

$a=\sqrt{36}=6$

$b=\sqrt{9}$=3

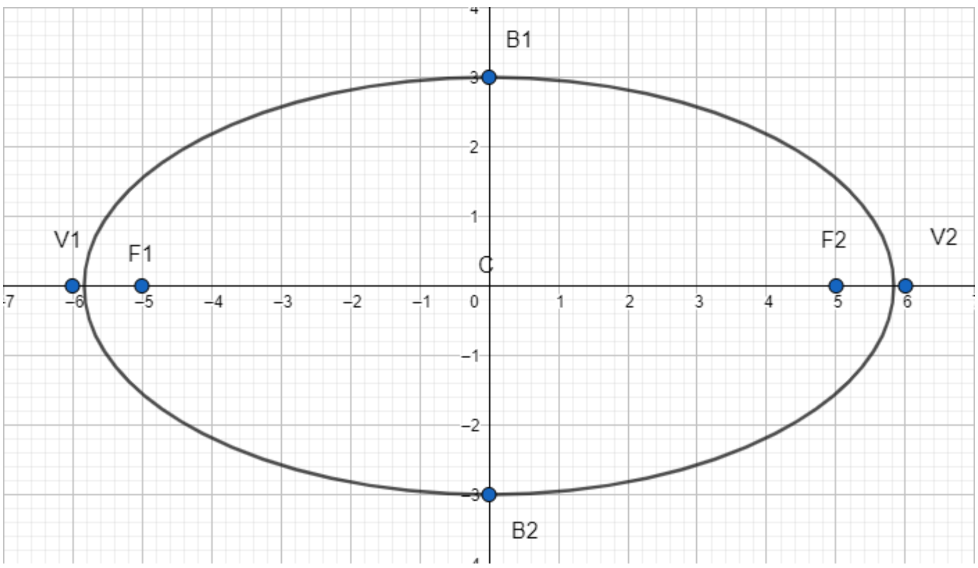
$c=\sqrt{36-9}$=$\sqrt{25}=5$

C (0,0)

Excentricidad=$\frac{c}{a}=\frac{5}{6}=$ 0,8$\widehat{33}$ ...

Eje Mayor =2a=12

Eje Menor =2b=6



$F_1(-5{,}0)$ F2(5,0)

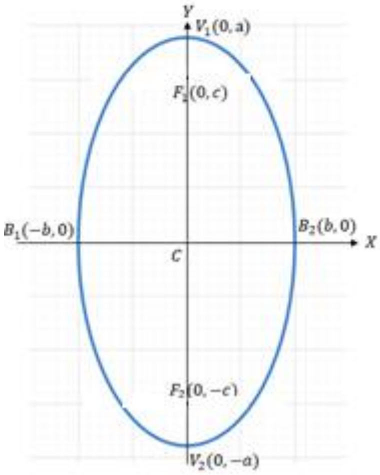
V1(-6,0) V2(6,0)

B1(0,3) B2(0,-3)

<u>Ecuación reducida de eje vertical de la elipse:</u> (con centro en el origen)

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$a^2=b^2+c^2$$



Centro	Ecuación	Focos	Vértice	Interceptas
(0,0)	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	F1(0,-c)	V1(0,-a)	Con el eje normal
	Longitud del eje Mayor: 2b	F2(0,c)	V2(0,a)	B1(-b,0)
	Longitud del eje Menor: 2a			B2(b,0)

<u>Por Ejemplo:</u>

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1}$$

$a=\sqrt{25}=5$

$b=\sqrt{16}=4$

$c=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

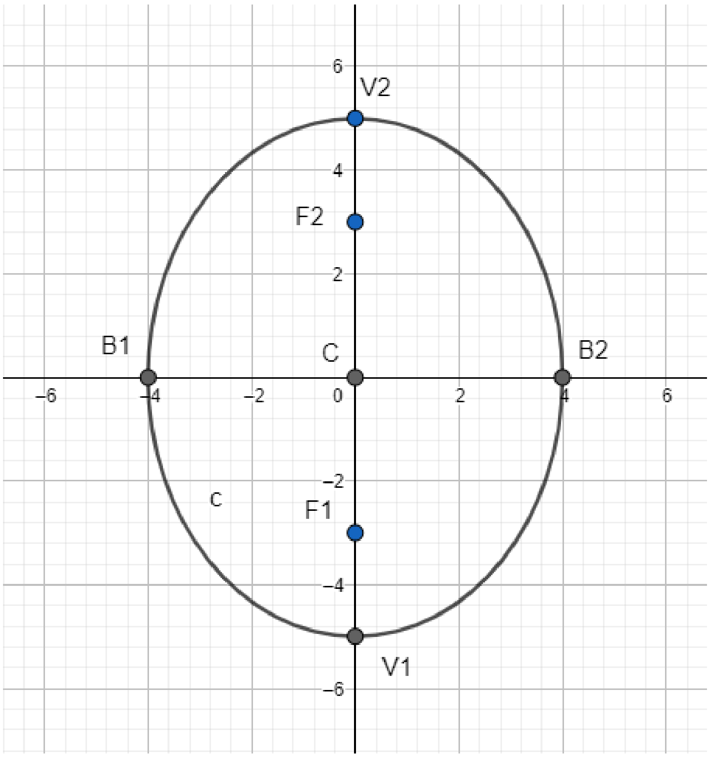
C (0,0)

Eje Mayor= 2*5=10

Eje Mayor= 2*4=8

F1(0,-3)   F2(0,3)

V1(0,-5)   V2(0,5)

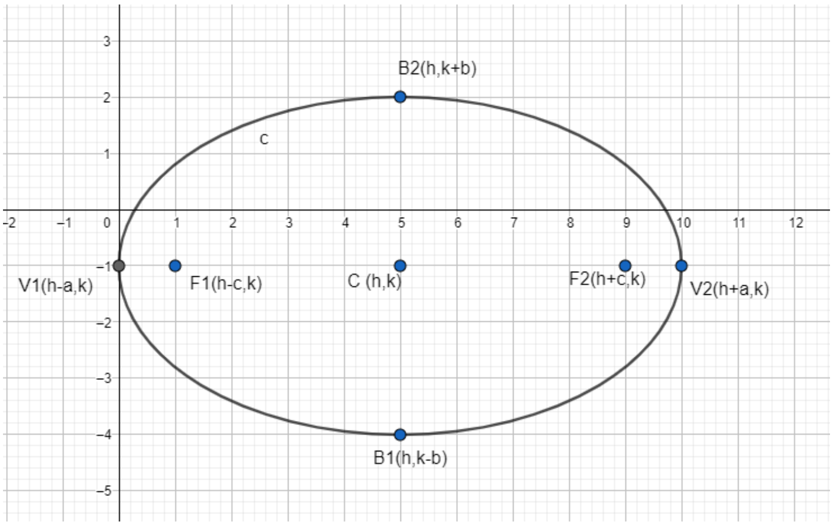


B1(-4,0)   B2(4,0)

Excentricidad=$\frac{3}{5} = 0{,}6$

<u>Ecuación ordinaria de una elipse horizontal:</u> (con centro fuera del origen)

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{b}^2}=\mathbf{1}$$

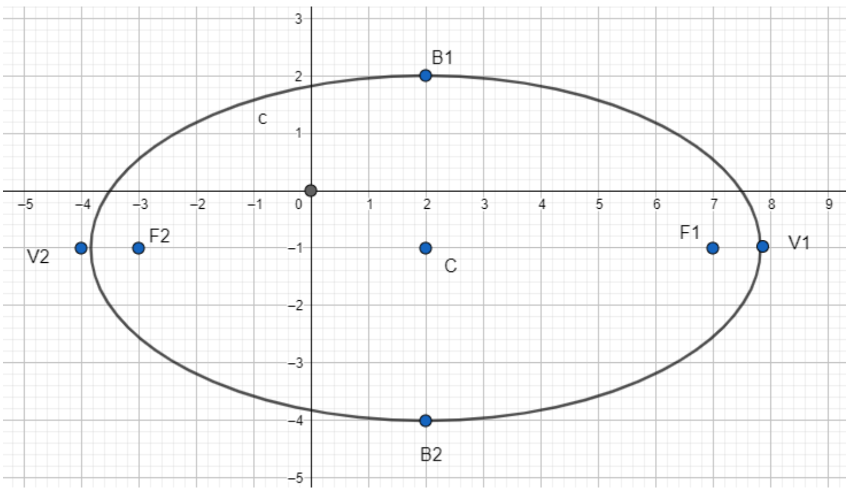


$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2$$

Centro	Ecuación	Focos	Vértice	Interceptas
	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	F1(h-c,k)	V1(h-a,k)	Con el eje normal
(h,k)	Longitud del eje Mayor: 2a	F2(h+c,k)	V2(h+a,k)	B1(h,k-b)
	Longitud del eje Menor: 2b			B2(h,k+b)

<u>Por Ejemplo</u>

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2}{\mathbf{36}}+\frac{(\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^2}{\mathbf{9}}=\mathbf{1}$$



$a=\sqrt{36}=6$

$b=\sqrt{9}$=3

$c=\sqrt{36-9}$=$\sqrt{25}=5$

C (2,-1)

Eje Mayor= 2*6=12

Eje Mayor= 2*3=6

F1(2-5,-1) → F1(-3,-1)   F2(2+5,-1) → F2(7,-1)

V1(2-6,-1) → V1(-4,-1)   V2(2+6,-1) → V2(8,-1)

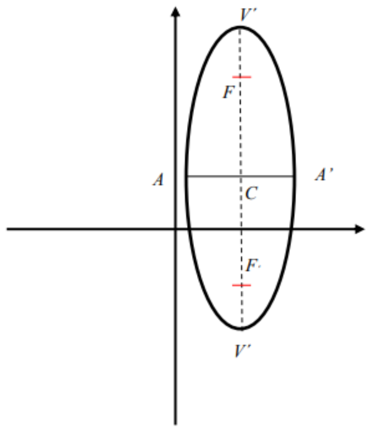
B1(2,-1+3) → B1(2,2)   B2(2,-1-3) → B2(2,-4)

Excentricidad=$\frac{5}{6} = 0{,}8\widehat{33}$

<u>Ecuación ordinaria de una elipse vertical:</u> (con centro fuera del origen)

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{a}^2}=\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2$$



Centro	Ecuación	Focos	Vértice	Interceptas
	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	F1(h,k-c)	V1(h,k-a)	Con el eje normal
(h,k)	Longitud del eje Mayor: 2a	F2(h,k+c)	V2(h,k+a)	B1(h-b,k)
	Longitud del eje Menor: 2b			B2(h+b,k)

<u>Por Ejemplo:</u>

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2}{\mathbf{16}}+\frac{(\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^2}{\mathbf{25}}=\mathbf{1}$$

$a=\sqrt{25}=5 \qquad b=\sqrt{16}=4$

$c=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

C (2,-1)

Eje Mayor= 2*5=10

Eje Mayor= 2*4=8

F1(2,-1-3) → F1(2,-4)

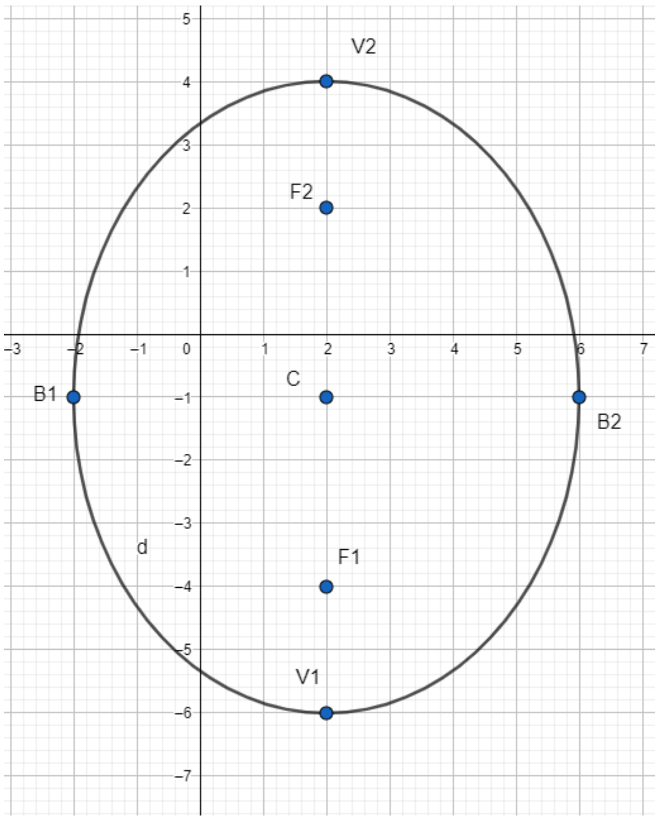
F2(2,-1+3) → F2(2,2)

V1(2,-1-5) → V1(2,-6)

V2(2,-1+5) → V2(2,4)

B1(2-4,-1) → B1(-2,-1)

B2(2+4,-1) → B2(6,-1)

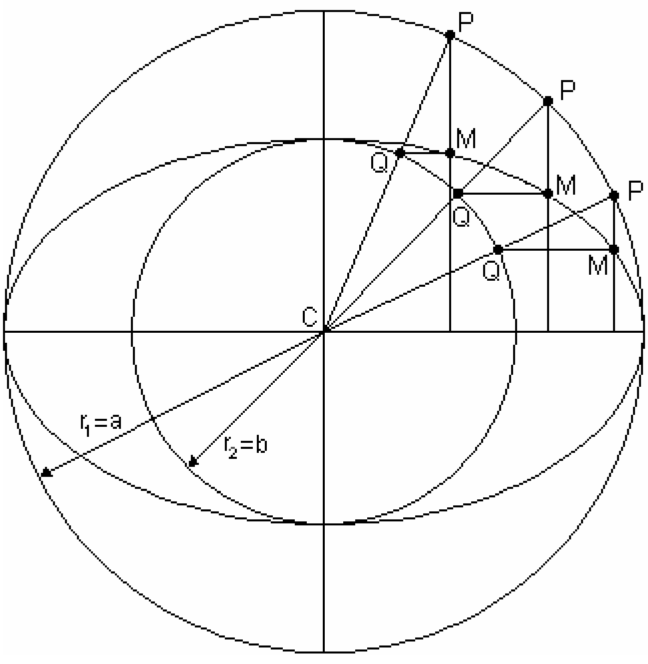


Excentricidad=$\frac{3}{5} = 0{,}6$

Construcción de la elipse con regla y compás:

Una forma de construir una elipse con regla y compás puede lograrse siguiendo el siguiente procedimiento:

a) Se suponen conocidos los semiejes, mayor “a” y menor “b”. Se trazan 2 circunferencias con centro común al de la elipse, de radios r2 =b y r1=a
b) Por el centro de la elipse “C” se trazan varios radios que cortarán a las 2 circunferencias en los puntos P y Q.
c) Por los puntos P se trazan rectas paralelas al eje menor y por los puntos Q rectas paralelas al eje mayor, el punto de cruce” M” de estas rectas paralelas, son puntos de la elipse.
d) Repitiendo el paso anterior tantas veces como se crea conveniente, se tendrán tantos puntos de la elipse que al unirlos con línea continua se obtendrá un bosquejo bastante aceptable de la curva.



Intersección de una recta con una elipse

La resolución se lleva a cabo mediante un sistema de ecuaciones, preferentemente usando método de sustitución.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y+2x-4=0 \end{cases}$$

Despejar y.

$y=-2x+4$

Luego reemplazarlo en la primera ecuación Y obtener los valores de x

$\frac{x^2}{4}+\frac{(-2x+4)^2}{9}=1$

Y resolverla

$$\frac{x^2}{4}+\frac{4x^2-16x+16}{9}=1$$

$$\frac{9x^2+16x^2-64x+64}{36}=1$$

$$\cancel{36}*\frac{25x^2-64x+64}{\cancel{36}}=36*1$$

$$25x^2-64x+64=36$$

$$25x^2-64x+28=0$$

$$\frac{64\pm\sqrt{(-64)^2-4*25*28}}{2*25}=x_{1-2}$$

$$\frac{64\pm\sqrt{4096-2800}}{50}=x_{1-2}$$

$$\frac{64\pm\sqrt{1296}}{50}=x_{1-2}$$

$$\frac{64\pm 36}{50}=x_{1-2}$$

$$x_1=\frac{64+36}{50}=2 \qquad x_2=\frac{64-36}{50}=\frac{28}{50}=\frac{14}{25}$$

Para x_1=2

$y_1 = -2 * 2 + 4$

$y_1 = -4 + 4$

$y_1 = 0$

Para x_2=$\frac{14}{25}$

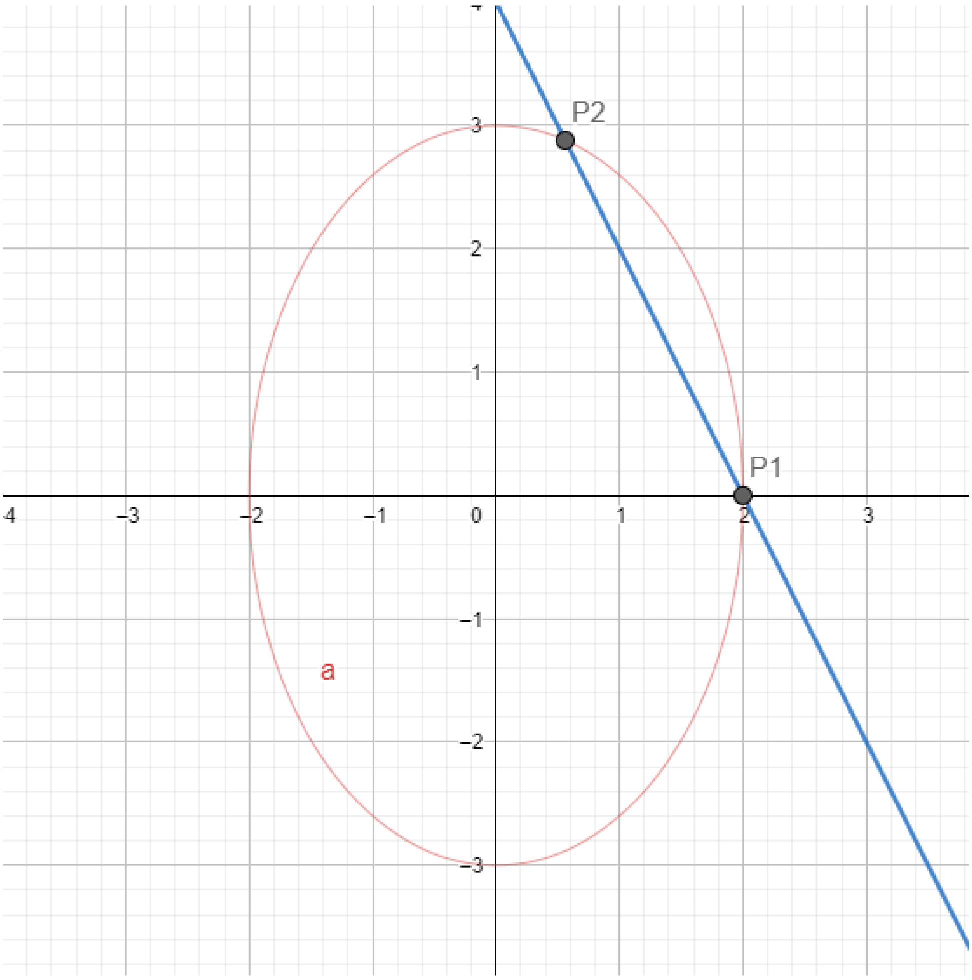
$y_1 = -2 * \frac{14}{25} + 4$

$y_1 = -\frac{28}{15} + 4$

$y_1 = \frac{72}{25}$

Puntos de intersección P_q(2,0) y P_2($\frac{14}{25}$, $\frac{72}{25}$)   (0,56;2,88

Grafico:



Trabajo Práctico: Elipse

1) Realiza los gráficos de las siguientes ecuaciones:
   a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ b) $x^2+\frac{y^2}{36}=1$ c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$
2) Realiza la tabla de datos halla las ecuaciones y grafica las elipses según los datos:
   a) a=6 c=10
   b) C(-2;5) V1(-2;8) B2(-5;-5)
   c) Sigan ustedes xd
3) Halla la intersección entre la elipse $x^2+\frac{y^2}{2}=6$ y la recta y+3x=12. Grafica.
4) Sin realizar gráfico y con las siguientes ecuaciones de elipse determine, coordenadas de: centro, focos, vértices. Longitud de eje mayor y menor. Excentricidad. Distancia focal. Determinar si el eje principal se encuentra en eje de ordenadas o abscisas.

   a) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$

   b) $\frac{x^2}{27,04}+\frac{y^2}{23.04}=1$ c) $\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$

5) Halla la ecuación canónica de la elipse que tiene: F2 (4,0), F1(-4,0), B2(3,0). Grafica.
6) Halla la ecuación canónica de la elipse ubicada en V1(-2,-3), V2(-2,7) F2(-2,5)
7) Obtener la ecuación reducida de la elipse cuyos focos son F2(5,0) y F1(-5,0) y la longitud del eje mayor es 12
8) Una elipse con centro en el origen tiene un vértice en (0,6) y su longitud de eje menor es 10, obtener su ecuación y realizar su gráfica