Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Томский политехнический Университет»



Инженерная школа ядерных технологий

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

**Лабораторная работа №2**

по дисциплине:

**Статистическое моделирование и прогнозирование**

Вариант 17

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Выполнил:** |  | | | | |
| Студент группы | 0В01 |  | Саматов Д.С. |
|  |  |  |
| **Проверил:** | Крицкий О.Л. | | | | |
| преподаватель |  |  |  |  |  | |
|  |  |  |  |  |  | |

г. Томск 2023 г.

**Задание №1**

В соответствии с вариантом задания построить модель ***AR*(*p*) с оптимальным значением лага**, для чего

1. Вычислить выборочные автокорреляции до порядка *n*=10 включительно;
2. проверить исторические данные на случайность, вычислив статистику Льюнга– Бокса;
3. Оценить коэффициенты модели *AR*(*p*) с помощью формул Юла – Уокера;
4. Подобрать оптимальный параметр *p*, проверяя при различных лагах критерий единичного корня Дики-Фулера;
5. Подобрать параметр *p* с помощью информационного критерия Акаике. Сравнить его с найденным в п.4 лагом *p*;
6. Построить алгоритмом *AR*(*p*) прогноз на 25 день торгов.

**Задание №2**

В соответствии с вариантом задания построить модель ***ARMA*(*p*,*q*) с оптимальным значением лага *p***, для чего

1. Вычислить дополнительно заданию №1 выборочные автоковариации до порядка *n*=10 включительно (они нужны для оценки параметров модели ***ARMA*(*p*,1)**). Построить по найденным ранее автокорреляциям коррелограмму и оценить по ней значение лага *p* модели *ARMA*(*p*,1), если это возможно;
2. Центрировав исходные данные и перейдя к вспомогательному ряду , оценить коэффициенты модели *ARMA*(*p*,1), задействовав при решении системы нелинейных уравнений метод Ньютона;
3. Проверяя значимость статистики Бокса-Пирса, найти максимальное значение *m* равных нулю первых автокорреляций ошибок центрированной модели *ARMA*(*p*,1). Будет ли такой *ARMA*(*p*,1)–процесс стационарным?
4. Подобрать параметр *p* с помощью информационного критерия Акаике. Сравнить его с найденным в п.1 лагом *p*;
5. Возвращаясь к исходным данным , построить методом *ARMA*(*p*,1**)** прогноз на 25 день торгов;
6. С помощью программного пакета Statistica проверить качество сделанного прогноза на 25 день торгов, построив *ARMA*(*p*,1) для исходных данных и перейдя по необходимости к дифференцированному с первым порядком ряду (если построение напрямую невозможно).

**Задание №3**

В соответствии с вариантом задания построить модель ***GARCH*(1,1)**, для чего:

1. Перейти к **относительным приращениям** исходных данных;
2. Вычислить выборочное математическое ожидание и смещенную оценку дисперсии для последних *k* = 5, 10, 15 значений временного ряда. Правда ли, что выборочное среднее очень близко к нулю?
3. Вычислить отдельно две последовательности автокорреляций до порядка 5 включительно для рядов и при лаге *k* = 15;
4. Проверить значимость статистики Льюнга–Бокса для вычисленных ранее двух последовательностей автокорреляций. Показать, что для ряда статистика Льюнга-Бокса может быть значима;
5. Возвращаясь к исходным данным, построить методом ***GARCH*(1,1)** прогноз на 25 день торгов, если это возможно;
6. C помощью программного пакета Matlab проверить качество сделанного прогноза на 25 день торгов, построив ***GARCH*(1,1)** для исходных данных (использовать model = garch('garchlags',1,'archlags',1); [estM1,H,logL] = estimate(model,a), где a – ряд ценовых приращений; функцию forecast).

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| День | Номер варианта | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 43.88 | 18.58 | 49.76 | 8.50 | 59.90 | 63.11 | 45.27 | 8.64 | 7.01 | 41.59 |
| 2 | 44.15 | 18.75 | 50.06 | 8.55 | 59.95 | 63.54 | 45.34 | 8.66 | 7.02 | 41.76 |
| 3 | 44.47 | 18.83 | 50.37 | 8.54 | 60.16 | 63.52 | 45.51 | 8.69 | 6.99 | 41.89 |
| 4 | 44.61 | 18.61 | 50.49 | 8.52 | 59.50 | 63.28 | 45.55 | 8.62 | 7.00 | 41.75 |
| 5 | 44.52 | 18.62 | 50.59 | 8.49 | 59.37 | 63.12 | 45.17 | 8.61 | 6.97 | 41.58 |
| 6 | 44.51 | 18.50 | 50.44 | 8.50 | 59.61 | 63.23 | 45.35 | 8.64 | 6.99 | 41.70 |
| 7 | 44.78 | 18.32 | 50.84 | 8.52 | 59.40 | 63.29 | 45.43 | 8.64 | 7.00 | 41.77 |
| 8 | 44.73 | 18.43 | 50.82 | 8.51 | 59.18 | 63.23 | 45.32 | 8.66 | 6.99 | 41.68 |
| 9 | 44.73 | 18.37 | 50.39 | 8.50 | 59.35 | 63.18 | 44.72 | 8.63 | 7.01 | 41.56 |
| 10 | 45.06 | 18.67 | 50.92 | 8.56 | 59.67 | 63.73 | 44.83 | 8.68 | 7.06 | 41.83 |
| 11 | 44.95 | 18.78 | 50.96 | 8.59 | 59.50 | 63.94 | 44.78 | 8.68 | 7.09 | 41.90 |
| 12 | 44.78 | 18.72 | 50.74 | 8.56 | 59.22 | 63.62 | 44.62 | 8.63 | 7.09 | 41.73 |
| 13 | 44.54 | 18.66 | 50.75 | 8.54 | 59.15 | 63.43 | 44.98 | 8.60 | 7.09 | 41.65 |
| 14 | 45.10 | 18.81 | 51.39 | 8.61 | 59.64 | 64.02 | 45.60 | 8.67 | 7.17 | 42.07 |
| 15 | 45.42 | 18.98 | 51.40 | 8.66 | 60.32 | 64.34 | 46.01 | 8.77 | 7.24 | 42.24 |
| 16 | 45.38 | 19.15 | 51.06 | 8.65 | 60.16 | 64.43 | 45.72 | 8.74 | 7.22 | 42.16 |
| 17 | 45.39 | 19.21 | 51.65 | 8.66 | 60.09 | 64.29 | 45.84 | 8.73 | 7.24 | 42.36 |
| 18 | 45.71 | 19.14 | 52.23 | 8.75 | 60.31 | 65.03 | 46.14 | 8.76 | 7.31 | 42.68 |
| 19 | 45.94 | 19.17 | 52.31 | 8.71 | 59.99 | 64.73 | 46.16 | 8.72 | 7.32 | 42.54 |
| 20 | 45.38 | 18.99 | 51.70 | 8.58 | 59.31 | 63.82 | 45.52 | 8.63 | 7.19 | 41.96 |
| 21 | 44.97 | 18.83 | 51.61 | 8.48 | 58.71 | 63.16 | 45.05 | 8.55 | 7.13 | 41.65 |
| 22 | 45.13 | 19.00 | 51.62 | 8.49 | 59.19 | 63.24 | 44.91 | 8.60 | 7.11 | 41.76 |
| 23 | 45.41 | 19.07 | 51.88 | 8.53 | 59.51 | 63.45 | 45.17 | 8.65 | 7.14 | 41.95 |
| 24 | 45.03 | 18.93 | 51.51 | 8.49 | 59.02 | 63.03 | 44.91 | 8.59 | 7.09 | 41.68 |
| валют | Австр. долл | Бр. реал | Вон, Корея | Дат. крона | доллар | евро | Кан. доллар | юань | Норв. крона | Син. Д. |

Таблица 1

(продолжение)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| День | Номер варианта | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 |
| 1 | 16.26 | 73.00 | 58.90 | 51.11 |
| 2 | 15.93 | 72.64 | 59.19 | 51.76 |
| 3 | 15.60 | 73.17 | 59.21 | 51.93 |
| 4 | 15.40 | 73.04 | 58.99 | 52.14 |
| 5 | 15.63 | 72.34 | 58.88 | 51.79 |
| 6 | 15.87 | 71.67 | 58.91 | 52.29 |
| 7 | 15.73 | 72.03 | 59.04 | 52.48 |
| 8 | 15.65 | 73.00 | 59.05 | 52.30 |
| 9 | 15.63 | 73.05 | 58.97 | 51.71 |
| 10 | 15.63 | 73.61 | 59.33 | 51.98 |
| 11 | 15.77 | 73.99 | 59.50 | 52.40 |
| 12 | 15.76 | 73.91 | 59.29 | 52.27 |
| 13 | 15.56 | 74.06 | 59.13 | 52.08 |
| 14 | 15.61 | 75.50 | 59.77 | 52.45 |
| 15 | 15.53 | 75.64 | 60.22 | 52.40 |
| 16 | 15.58 | 75.47 | 60.22 | 52.36 |
| 17 | 15.88 | 75.15 | 60.44 | 52.87 |
| 18 | 15.92 | 75.82 | 60.92 | 53.19 |
| 19 | 16.09 | 76.10 | 60.56 | 53.18 |
| 20 | 15.81 | 74.34 | 59.68 | 52.40 |
| 21 | 15.96 | 73.13 | 59.02 | 52.11 |
| 22 | 15.97 | 73.23 | 59.23 | 52.77 |
| 23 | 15.85 | 74.40 | 59.56 | 53.03 |
| 24 | 15.89 | 74.11 | 59.28 | 52.53 |
| валют | лира | фунт | швейц фр. | 100 йен |

**Теоретическое содержание**

*Авторегрессионная модель AR(p)*

Рассмотрим математическую модель, которая позволяет обработать эмпирические данные (например, котировки акций и т.п.) и оценить их будущее значение. Предлагаемая авторегрессионная модель позволяет получить оценку временного ряда о его предыдущих состояниях[1].

Рассмотрим авторегрессионную модель *AR(p)* порядка *p*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где *a*0, *a*1, ..., *ap*, – некоторые коэффициенты, – нормальное распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсией единица.

В общем случае оценку коэффициентов модели *AR(p)* ленче всего проводить с помощью рекуррентных формул Юла-Уокера [2, c. 438]:

где – выборочные автокорреляции процесса - неизвестные коэффициенты модели *AR(p)*, *j=1, 2, …, p*. При этом кулевой коэффициент выражается из формулы для математического ожидания [1]:

*Статистическая проверка нестационарности модели AR(p)*

Для проверки статистической гипотезы о нестационарности ряда значений модели (1) используется критерий Дики-Фулера (Dickey-Fuller test, ADF). Нулевая гипотеза *H0* состоит в том, что ряд нестационарен и = 1 при альтернативной гипотезе, что ряд стационарен и :

При построении статистического критерия дополнительно предполагается, что шумы (1) некоррелированы и в силу нормальности независимы: без выполнения этого условия критерий работать не будет. Для проверки некоррелированности шумов нужно использовать критерий Дарбина-Уотсона (DW-test) [1].

Критическая статистика: , где – диагональный элемент обратной матрицы модели (1), *Х –* центрированные столбцы данных правой части в (1).

Критические точки статистики приведены в табл.2.

Таблица 2

Критические точки *t*кр распределения Дики-Фулера

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень доверия, α | Размер выборки, *n* | | | |
| n=25 | n=50 | n=100 |  |
| *AR*(*p*) без константы | | | | |
| 0,01 | -2,66 | -2,62 | -2,60 | -2,58 |
| 0,025 | -2,26 | -2,25 | -2,24 | -2,23 |
| 0,05 | -1,95 | -1,95 | -1,95 | -1,95 |
| *AR*(*p*) с дополнительным  линейным трендом (μ0+ μ1*t*) | | | | |
| 0,01 | -4,38 | -4,15 | -4,04 | -3,96 |
| 0,025 | -3,95 | -3,80 | -3,69 | -3,66 |
| 0,05 | -3,60 | -3,50 | -3,45 | -3,41 |

Нулевая гипотеза *H*0 принимается, если *t*кр<γ. В противном случае принимается альтернативная гипотеза (при γ< *t*кр).

**Замечание**: очень часто до проверки *H*0 порядок авторегрессии *p* неизвестен. Для его нахождения прибегают к одной из следующих процедур:

* 1. Выбрать относительно большое значение *p* и, проверяя значимость гипотезы *H*0, последовательно уменьшать *p* на единицу. Остановиться при первой статистически неподтвержденной *H*0 (т.е. при переходе модели от нестационарной к стационарной).
  2. При различных значениях *p* использовать информационный критерий Акаике.

,

где – погрешности модели (остатки), выбирая ту модель, у которой AIC меньше.

* 1. При каждом выбранном *p* проверять некоррелированность шумов, для чего использовать критерий Дарбина-Уотсона. Если гипотеза *H0* статистически значима, нужно увеличить *p* и повторить процедуру [1].

*Aвторегрессионная модель со скользящим средним ARMA(p,q)*

Обобщим модель (1), добавив к ней нормально распределенные ошибки наблюдений , с нулевым средним и дисперсиями , которые вносят так называемую скользящую среднюю ошибку, и убрав константу [1]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

По аналогии с *AR(p)* – процессом, *ARMA(p,q)* будет стационарным, если первые m его автокорреляций остатков модели равны нулю. Для проверки гипотезы используют статистику Бокса – Пирса [1]:

где n – число данных, p, q – параметры модели, – выборочные автокорреляции между эмпирическими и теоретическими значениями модели:

Для этой статистики нулевая гипотеза о равенстве нулю первых m автокорреляций остатков подтверждается, если при заданном уровне значимости .

Наряду со статистикой Бокса-Пирса можно использовать и упоминавшуюся ранее статистику Льюнга-Бокса. Для *ARMA(p,q)* – процесса она имеет вид:

Нулевая гипотеза о равенстве нулю первых m автокорреляций ошибок подтверждается (а значит, *ARMA(p,q)* – процесс будет стационарным), если при заданном уровне значимости .

**Замечание**: если статистические гипотезы отклоняются, нужно дополнительно проверить, не связано ли это с неправильно выбранными параметрами *p* и *q* модели [1].

*Оценивание коэффициентов модели ARMA(p,q)*

Заметим, что один и тот же временной ряд может быть описан моделью *ARMA(p,q)* с различными значениями параметров *p*, *q*. Поэтому при практических вычислениях требуется выбрать порядки модели, оценить ее параметры, провести статистическое оценивание правильности модели в целом [1].

Если , то математическое ожидание нужно вводить в модель в качестве параметра, потому что если процесс стационарен, то из (2)

и эту конструкцию можно использовать в авторегрессионной модели.

В целом, вместо этого удобнее рассмотреть вспомогательный временной ряд с нулевым математическим ожиданием, который будет удовлетворять (2), а затем перейти к исходному ряду с помощью преобразования: . В качестве так же можно использовать центрированные значения :.

Перейдем к центрированным значениям исходного временного ряда . Далее, нам нужно оценить первые *p* параметров (шумовые слагаемые пока не разделяем на составляющие, считая их одним шумом). Как и при вычислении автоковариаций, будем умножать (2) последовательно на и вычислять математические ожидания от обоих частей равенства [1]. Имеем:

…

Для нахождения решения системы относительно неизвестных вместо теоретических значений автоковариации будем использовать их выборочные аналоги:

Найдя оценки , перейдем к процессу *,* для которого рассчитаем первые q выборочные автокорреляции. Их используем для вычисления оценок параметров . Действительно, в соответствие (2) фактически

– процесс скользящего среднего. Его автокорреляции можно сравнить с выборочными аналогами [1]:

где – выборочные автокорреляции. Эта система нелинейная относительно неизвестных .

**Замечание**: Очень часто на практике влияние нормально распределенных шумов на *ARMA(p,q)* – процесс ограничено случаем *q*=1 [1].

*Определение порядка модели ARMA(p,q)*

Для определения порядков модели *p* и *q* необходимо вычислить достаточное количество выборочных автокорреляций и построить коррелограмму. Первым признаком стационарности общего *ARMA(p,q)*–процесса является быстрое убывание с ростом *k*. Для выявления порядка авторегрессии *p* (если *q*=0) можно дополнительно использовать и значения выборочных частных автокорреляций, так как известно [2], что теоретические частные автокорреляции равны нулю, начиная с лага *p*. Выбирая поэтому в качестве *p* порядок последней достаточно большой по модулю выборочной частной автокорреляции, мы с большой точностью находим требуемую величину лага.

Аналогично, для определения порядка *q* (если *p*=0) для скользящего среднего можно использовать выборочные автокорреляции, потому что его теоретические автокорреляции становятся равными нулю, начиная с лага *q*.

В случае общего *ARMA(p,q)* – процесса, когда оба коэффициента не равны нулю, такой подход не приносит успеха. В этом случае можно отслеживать только скорость убывания с ростом *k*. Кроме того, хороший результат дает информационный критерий Акаике [1]:

,

где – погрешности модели (остатки), – исторические значения временного ряда.

Перебор значений *p* и *q* останавливается для той модели, у которой *AIC* меньше.

Вместе с использованием численных процедур оправдана дополнительная проверка статистических гипотез относительно некоррелированности и гомоскедастичности (стационарности) погрешностей , рассмотренных ранее [1].

*Обобщенная авторегрессионная модель условной неоднородности GARCH(p,q)*

Метод *GARCH(p,q)* позволяет прогнозировать волатильность, проводить анализ коррелированных и высокочастотных данных. Данный метод основан на предположении авторегрессионной зависимости вида [1]:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3) |

где – коэффициенты модели, подлежащие оценке, , – относительные приращения значений временного ряда или логарифмические приращения – волатильность, .

При построении метода является существенным предположение о виде распределения . В зависимости от него различают: *GARCH(p,q)* с нормальным распределением , экспоненциальный *GARCH* (или *EGARCH*) с *t*–распределением Стьюдента, *APARCH* c асимметричным *t*–распределением Стьюдента и др. (например, *NARCH*, *MARCH*, *HARCH* и т.п.).

Для простоты изложения рассмотрим (3) c *p*=1 и *q*=1. Тогда модель будет иметь вид [1]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

где – коэффициенты модели, подлежащие оценке – долговременное среднее отклонение в структуре данных, , – относительные приращения значений временного ряда – волатильность, .

Предположим, произвольность распределения дневных приращений , – цена некоторого актива а *n*-ый день торгов. Так как , то (4) можно представить в виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Записывая (5) в будущий момент времени (*n*+*k*), получаем, что:

Оценим дневную волатильность по последним *k* наблюдениям:

где – выборочное среднее, *k* – лаг (задержка) временного ряда.

Так как , то по определению дневной волатильности следует, что . Учитывая это, имеем [1]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Равенство (6) определяет условие устойчивости *GARCH(1,1)*. Действительно, если , то последнее слагаемое вносит все меньший вклад в математическое ожидание и с ростом лага k стремится к V:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Если же *α+β ≥ 1*, то и случайный процесс будет в среднем стремительно возрастать, что свидетельствует о его неустойчивости.

Исходя из (7) можно сделать вывод, что *V* характеризует уровень возврата временного ряда к прежнему состоянию с коэффициентом возврата γ.

Перейдем к определению параметров модели (3). Наиболее общим способом их оценки является нахождение максимума функции правдоподобия [1]:

или логарифмической функции правдоподобия

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

где – функции плотности распределения наблюдений, *m –* число наблюдений. Например, если предположить, что имеет место нормальное распределение приращений с математическим ожиданием *a* и дисперсией , то

В случае относительных приращений цен акций математическое ожидание . Легко показать, что задача определения максимума выражения (8) совпадает с нахождением максимума функции (это метод квазимаксимального правдоподобия, если закон распределения неизвестен или отличен от нормального)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Поиск максимума (9) осуществляется в соответствие с выполнением необходимого условия экстремума функции трех переменных:

где (нужно посчитать все частные производные по параметрам от (9) и получить реккурентные соотношения) [1].

*Случайность данных*

Используем несколько выборочных автокорреляций , для доказательства гипотезы о случайности значений исходного временного ряда . Рассмотрим Q-статистику Льюнга-Бокса в предположении о нормальности распределения значений :

Было показано, что статистический критерий работает даже в условиях отсутствия нормального закона распределения для исходного временного ряда (выполнена ЦПТ, т.е. дисперсия D( ) < ∞). Нулевая гипотеза состоит в том, что ряд является винеровским процессом, т.е. процессом с независимыми приращениями и нулевым средним. Если значение статистики Q(r) больше критического (табличного) значения функции распределения при заданном уровне значимости и числе степеней свободы, то признается наличие ненулевых автокорреляций до порядка m включительно [1].

*Некоторые статистические критерии, используемые при анализе временных рядов*

Выборочной автоковариацией *k*-го порядка временного ряда называется число:

Выборочной автокорреляцией *k*-го порядка временного ряда называется число:

Известно, что выборочные автокорреляции имеют нормальное асимптотическое распределение [1].

*Стационарность временного ряда*

Автокорреляции удобны и для проверки временного ряда на стационарность. В целом можно заметить, что для выявления стационарности нужно вычислять автокорреляции до некоторого порядка и заметить, что коррелограмма быстро убывает после нескольких первых значений (первое значение может быть любым). Если же автокорреляция первого порядка близка к единице, а коррелограмма медленно убывает по экспоненте, то это свидетельствует о нестационарности [1].

*Статистическая значимость временного ряда*

Пусть для временного ряда вычислены автокорреляции до k-го порядка включительно. Проверим статистическую гипотезу о величине первой автокорреляции ρ1, вычисляя статистику Дарбина-Уотсона (DW-test):

где – погрешность модели (разность между наблюдаемым и модельным значением).

Значения статистики γ лежат в интервале [0, 4]. Распределение статистики известно и имеет два критических значения: dl и du, их значения приведены в таблицах. Выдвигаем нулевую гипотезу H0: ρ1=0, где ρ1 - первая автокорреляция (остальные автокорреляции статистически не проверяются). Нулевая гипотеза о нулевой автокорреляции подтверждается, если du < γ < 4-du. H0 отклоняется в пользу альтернативы о наличии положительной автокорреляции, если γ < dl. H0 отклоняется в пользу альтернативы о наличии отрицательной автокорреляции, если 4-dl<γ. Зона неопределенности критерия, когда нельзя ни принять основную гипотезу, ни принять альтернативную, состоит из двух интервалов, описываемых неравенствами: dl < γ < du и 4-du < γ < 4-dl [1].

**Практическая часть**

Первоначально построим распределение исходных данных, рис 1.

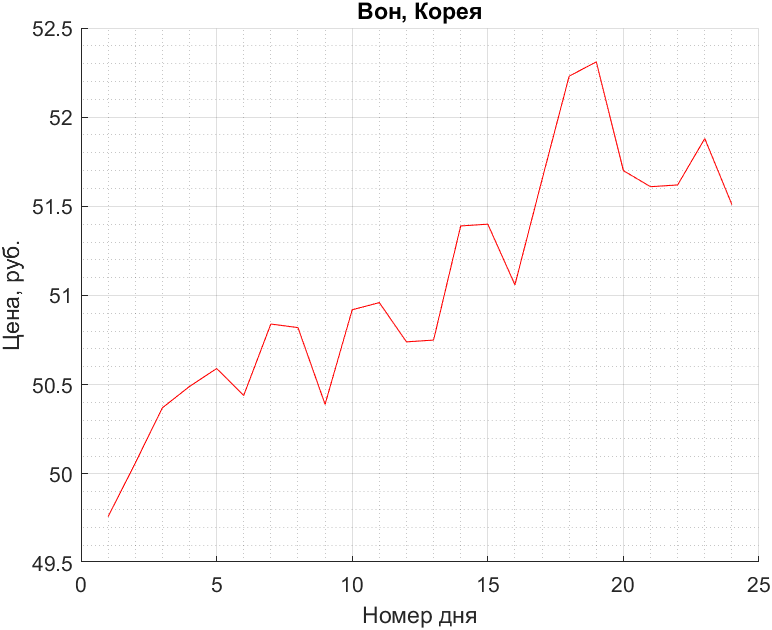


Рисунок 1 – Распределение исходных данных.

1. *Построение AR(p) модели с оптимальным значением лага*

Вычислим автокорреляции до порядка *n*=10 включительно. Результаты вычисления представлены в табл. 3.

Таблица 3

Значение автокорреляций до порядка *n*=10

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Порядок | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Значение | 1 | 0.776 | 0.5779 | 0.539 | 0.493 | 0.341 | 0.162 | 0.113 | 0.052 | -0.076 | -0.132 |

Проверим исторические данные на случайность, вычислив статистику Льюнга– Бокса. Значение статистики Люнга-Бокса составила – , а значение квантиля распределения хи-квадрат на уровне значимости 0.05 – . Следовательно, гипотезу о случайности исходных данных отвергаем.

Первоначально построим модель *AR(p)* для *p*=1. Произведем оценку параметров, выбранной модели при помощи формул Юла-Уокера. В результате получим следующие значения параметров модели:

Подберем оптимальный параметр *p*, проверяя при различных лагах критерий единичного корня Дики-Фулера. Проверим данный критерий при *p*=1. Получим, что значение критерия единичного корня Дики-Фулера составляет , а критическую точку распределения Дики-Фулера определим по табл. 2, . В итоге, получаем, что при *p*=1 отклоняем нулевую гипотезу о нестационарности данных.

Подберем параметр *p* с помощью информационного критерия Акаике. Результаты расчета данного критерия при различных *p* представлены в табл. 3.

Таблица 4

Значение информационного критерия Акаике

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| AIC | 4.199 | 4.252 | 4.612 | 4.682 | 4.691 | 4.767 | 4.879 | 4.966 | 5.021 | 5.133 |

Исходя из полученных данных в табл. 4, выберем значение *p*=1. Проверим для данного *p* некоррелированность шумов, для чего используем критерий Дарбина-Уотсона. При данном *p* значение , а значение статистики Дарбина-Уотсона равно . Таким образом, , следовательно, гипотеза *H0* отклоняется в пользу альтернативы о наличии положительной автокорреляции. Увеличивая значение *p* до 10 с шагом 1*,* гипотеза *H0* будет отклоняется в пользу альтернативы о наличии положительной автокорреляции*.* В табл. 5 представлены другие значения статистики Дарбина-Уотсона, при различных значениях *р*.

Таблица 5

Результаты проверки критерия Дарбина-Уотсона.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| p |  |  |  | Результат |
| 1 | 1.27 | 1.45 | 1.001 | Гипотеза откл. |
| 2 | 1.19 | 1.55 | 1.169 | Зона неопр. |
| 3 | 1.10 | 1.66 | 1.134 | Зона неопр. |
| 4 | 1.01 | 1.78 | 1.186 | Зона неопр. |
| 5 | 0.93 | 1.90 | 1.255 | Зона неопр. |
| 6 | 0.84 | 2.04 | 1.193 | Зона неопр. |
| 7 | 0.75 | 2.18 | 1.252 | Зона неопр. |
| 8 | 0.67 | 2.32 | 1.406 | Зона неопр. |
| 9 | 0.58 | 2.47 | 1.351 | Зона неопр. |
| 10 | 0.51 | 2.61 | 1.347 | Зона неопр. |

Таким образом, при данных значении параметра *p*=1:10 нельзя построить модель *AR(p),* так как при каждом выбранном *p* шумы коррелируют.

1. *Построение ARMA(p,1) модели с оптимальным значением лага*

Первоначально вычислим дополнительно заданию №1 выборочные автоковариации до порядка *n*=10 включительно, которые необходимы для оценки параметров модели *ARMA(p,1)*. По найденным автокорреляциям построим коррелограмму и оценим по ней значение лага *p* модели *ARMA*(*p*,1). Результат вычисления представлен в табл. 6.

Таблица 6

Значение автокорреляций до порядка *n*=10

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Порядок | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Значение | 1 | 0.776 | 0.5779 | 0.539 | 0.493 | 0.341 | 0.162 | 0.113 | 0.052 | -0.076 | -0.132 |

Выберем *p*=2 и оценим коэффициенты модели *ARMA*(*p*,1), центрировав исходные данные и перейдя к вспомогательному ряду . Результат оценки коэффициентов модели представлен ниже:

Проверим значимость статистики Бокса-Пирса при данном *р* и найдем максимальное значение *m* равных нулю первых автокорреляций ошибок центрированной модели *ARMA*(*p*,1). Таким образом, при *р*=2, начиная с *m=*3 (минимально возможного), гипотеза о равенстве нулю первых автокорреляций отклоняется, следовательно, ряд не стационарен.

В итоге, модель *ARMA*(*p*,1) при *р*=2 построить нельзя.

Далее подберем параметр *p* с помощью информационного критерия Акаике. Результаты расчета данного критерия при различных *p* представлен в табл. 7.

Таблица 7

Значение информационного критерия Акаике

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| AIC | -1.524 | -1.385 | -1.374 | -1.255 | -1.189 | -1.121 | -1.024 | -0.968 | -0.879 |

Исходя из полученных результатов, представленных в табл. 7, наилучшее значение *p*=1. Коэффициенты модели имеют следующий вид:

Проверим значимость статистики Бокса-Пирса при данном *р* и найдем максимальное значение *m* равных нулю первых автокорреляций ошибок центрированной модели *ARMA*(*p*,1). Таким образом, при *р*=1, максимальное значение *m=*3. В итоге, нулевая гипотеза о равенстве нулю первых *m*=3 автокорреляций ошибок подтверждается, а значит, модель *ARMA(1,1)* можно построить.

Кроме того, проверим для данного *p* некоррелированность шумов, для чего используем критерий Дарбина-Уотсона. При данном *p* значение , а значение статистики Дарбина-Уотсона равно . Таким образом, , следовательно, гипотеза *H0* отклоняется в пользу альтернативы о наличии положительной автокорреляции. Увеличивая значение *p* до 10 с шагом 1*,* гипотеза *H0* будет отклоняется в пользу альтернативы о наличии положительной автокорреляции*.* В табл. 8 представлены другие значения статистики Дарбина-Уотсона, при различных значениях *р*.

Таблица 8

Результаты проверки критерия Дарбина-Уотсона.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| p |  |  |  | Результат |
| 1 | 1.27 | 1.45 |  | Гипотеза откл. |
| 2 | 1.19 | 1.55 |  | Гипотеза откл. |
| 3 | 1.10 | 1.66 |  | Гипотеза откл. |
| 4 | 1.01 | 1.78 |  | Гипотеза откл. |
| 5 | 0.93 | 1.90 |  | Гипотеза откл. |
| 6 | 0.84 | 2.04 |  | Гипотеза откл. |
| 7 | 0.75 | 2.18 |  | Гипотеза откл. |
| 8 | 0.67 | 2.32 |  | Гипотеза откл. |
| 9 | 0.58 | 2.47 |  | Гипотеза откл. |

Таким образом, при данных значении параметра *p*=1:9 нельзя построить модель *ARMA(p,1),* так как при каждом выбранном *p* шумы коррелируют.

Если все же можно было бы сделать по модели *ARMA(1,1)* прогноз на 25 день торгов то, необходимо тогда вернуться к исходным данным . Также стоит отметить, что нужно тогда оценить значение у , которое вносит так называемую скользящую среднюю ошибку, в модели (2). Оценка производится по следующей формуле:

где – процесс скользящего среднего, – оценка коэффициента модели.

Кроме этого, с помощью программного пакета Statistica попробуем построить модель *ARMA(1,1)* и сделать прогноз на 25 день торгов. В результате, модель не получается построить по исходным данным, результат работы программы представлен на рис. 2.

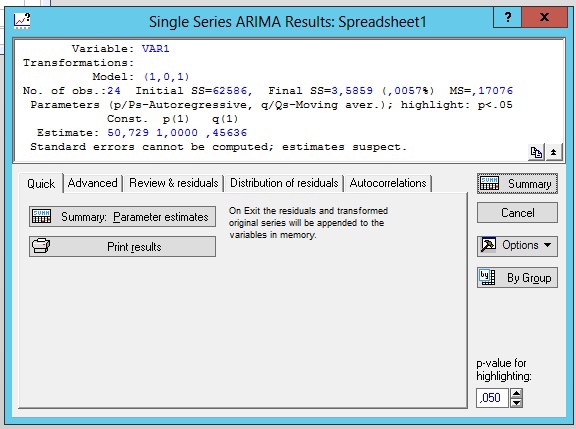


Рисунок 2 – Результат построения модели *ARMA(1,1)* при помощи Statistica по исходным данным.

Если попробовать построить модель *ARMA(1,1)* по дифференцированному с первым порядком ряду, то получится следующий результат, рис. 3.

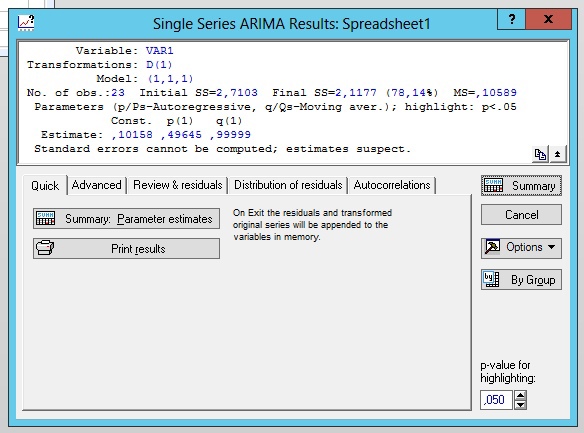


Рисунок 3– Результат построения модели *ARMA(1,1)* при помощи Statistica по дифференцированному с первым порядком ряду.

Из рис. 3 видно, что модель *ARMA(1,1)* построить по дифференцированному с первым порядком ряду не получается.

1. *Построение GARCH(1,1) модели с оптимальным значением лага*

Перейдем к относительным приращениям исходных данных по следующей формуле: .

Теперь вычислим выборочное математическое ожидание и смещенную оценку дисперсии для последних *k* = 5, 10, 15 значений временного ряда. Результаты вычислений представлены в табл. 9.

Таблица 9

Значения выборочного мат. ожидания и смещенной дисперсии

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *k* | *E(x)* | *D(x)* |
| 5 | -0.0031 |  |
| 10 |  |  |
| 15 | 0.0015 |  |

Анализируя полученные данные в табл. 9, можно сказать, что выборочные средние очень близки к нулю.

Отдельно вычислим две последовательности автокорреляций до порядка 5 включительно для рядов и при лаге *k* = 15.

В табл. 10 представлен результат вычисления автокорреляций до порядка 5 включительно для ряда .

Таблица 10

Автокорреляций до порядка 5 включительно для ряда

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Порядок | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Значение | 1 | -0.159 | -0.063 | 0.124 | 0.137 | -0.348 |

Вычислим значения при лаге *k* = 15. Полученные значения представлены в табл. 11.

Таблица 11

Значения при лаге *k* = 15

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Значение |  |  |  |  |  |  |  |  |

Таким образом, построив ряд при лаге *k* = 15, вычислим его автокорреляции до 5 порядка включительно. Результат вычисления представлен в табл. 12.

Таблица 12

Автокорреляций до порядка 5 включительно для ряда

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Порядок | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Значение | 1 | 0.060 | 0.061 | 0.143 | -0.286 | -0.239 |

Следующим шагом проверим значимость статистики Льюнга–Бокса для вычисленных ранее двух последовательностей автокорреляций. Для ряда значение статистики Люнга-Бокса составило – , а значение квантиля распределения хи-квадрат на уровне значимости 0.05 – . Следовательно, гипотезу о случайности исходных данных принимаем. Для ряда значение статистики Люнга-Бокса составило – , а значение квантиля распределения хи-квадрат на уровне значимости 0.05 – . Следовательно, гипотезу о случайности исходных данных принимаем. Следовательно, ряды и являются стационарными.

Вернемся к исходным данным и построим методом *GARCH(1,1)*прогноз на 25 день торгов. Результат прогноза: . При этом значения коэффициентов, следующие (они были вычислены при помощи встроенного метода в пакете Matlab):

Параметр V модели (4) в данном случае будет равен: .

При этом выполняется условие .

Кроме этого с помощью программного пакета Matlab проверим качество сделанного прогноза на 25 день торгов, построив *GARCH(1,1)*для исходных данных. Для этого использовался следующий программный код:

*model = garch('garchlags', 1, 'archlags', 1);*

*[estM1, H, logL, info] = estimate(model, transpose(data), 'Display', {'params'});*

*frcst = forecast(estM1, 1, transpose(data));*

Результат работы программного кода представлен на рис. 4.

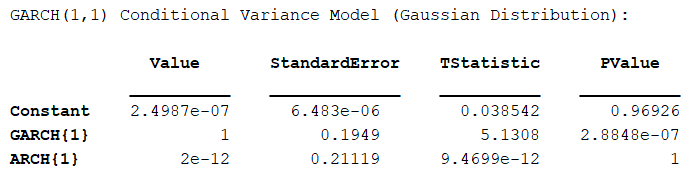


Рисунок 4 – Результаты построения модели *GARCH(1,1)*для относительных приращений данных.

Прогнозы в данном случае будут совпадать, так как коэффициенты модели используются одни и те же. Графически результат прогноза изображен на рис. 5.



Рисунок 5 – Предсказанное значение модели *GARCH(1,1).*

**Вывод**

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены три математических модели, позволяющие обработать эмпирические данные (например, котировки акций и т.п.) и оценить их будущее значение, такие как *AR(p)*, *ARMA(p,q)*, *GARCH(p,q)*.

При выполнении первого задания были реализованы следующие шаги:

1. Вычислены выборочные автокорреляции до порядка *n*=10 включительно. Построена по найденным ранее автокорреляциям коррелограмма, по которой было оценено значение лага *p*=1 модели *AR(p*);
2. Проверены исторические данные на случайность, вычислив статистику Льюнга– Бокса. В результате проверки критерия, гипотеза о случайности исходных данных отвергается;
3. Оценены коэффициенты модели *AR*(*p*) с помощью формул Юла – Уокера. В результате решения системы были найдены оценки коэффициентов модели *AR(p)* при *p*=1;
4. Подобран оптимальный параметр *p*, проверяя при различных лагах критерий единичного корня Дики-Фулера. При *p*=1 отклоняется нулевая гипотеза о нестационарности данных;
5. При подпоре оптимального параметра *p* с помощью информационного критерия Акаике, не выполняется статистика Дарбина-Уотсона при *p*=1:10, следовательно построить модель *AR*(*p*) нельзя.

При выполнении второго задания были реализованы следующие пункты:

1. Также вычислены выборочные автоковариации до порядка *n*=10 включительно. Построена по найденным ранее автокорреляциям коррелограмма и оценено значение лага *p*=2 модели *ARMA*(*p*,1);
2. Произведен переход к вспомогательному ряду . Оценены коэффициенты модели *ARMA*(*p*,1);
3. Проверено, будет ли *ARMA(p,q)* стационарным, если первые *m* его автокорреляций остатков модели равны нулю. Для проверки гипотезы использовалась статистика Бокса – Пирса. При *p*=1 максимальное значение равных нулю первых автокорреляций ошибок центрированной модели *m*=3. А при *p*=2 гипотеза о равенстве нулю первых автокорреляций отклоняется;
4. При подпоре оптимального параметра *p* с помощью информационного критерия Акаике,не выполняется статистика Дарбина-Уотсона при *p*=1:9, следовательно построить модель *ARMA*(*p,1)* нельзя;
5. С помощью программного пакета Statistica также не получилось построить модель *ARMA(1,1)* для исходных данных и по дифференцированному с первым порядком ряду.

При выполнении третьего задания были реализованы следующие шаги:

1. Произведен переход к относительным приращениям исходных данных;
2. Вычислены выборочное математическое ожидание и смещенная оценка дисперсии для последних *k* = 5, 10, 15 значений временного ряда. Анализируя полученные результаты, можно сказать, что выборочные средние очень близки к нулю;
3. Вычислены отдельно две последовательности автокорреляций до порядка 5 включительно для рядов и при лаге *k* = 15;
4. Проверена значимость статистики Льюнга–Бокса для вычисленных ранее двух последовательностей автокорреляций. В результате проверки получено, что для рядов и статистика Льюнга-Бокса значима;
5. Построен методом *GARCH(1,1)*прогноз на 25 день торгов, результат: .

**Список использованной литературы**

1. Крицкий О.Л. Эконометрика: монография О.Л. Крицкий; Томский политехнический университет. – Томск, 2022. – 37 с.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов прогноз. М: Мир, 1974.
3. Прикладная статистика: Основы эконометрики: Учебник: В 2-х т. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001/ С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – 2001. – 656 с.

**Приложение А**

*main.m*

clc, clearvars, close all, format compact

data = [49.76, 50.06, 50.37, 50.49, 50.59, 50.44, 50.84, 50.82, 50.39, 50.92, 50.96, 50.74, 50.75, 51.39, 51.40, 51.06, 51.65, 52.23, 52.31, 51.70, 51.61, 51.62, 51.88, 51.51];

create\_plot(data);

% Первое задание

m = 10;

[cov, cor] = find\_characteristics(data, m);

Q\_statistics(cor, length(data));

coef = find\_params\_ARp\_model(data, cor, 1);

ADF\_test(data, cor);

% для p = 1 отклоняем гипотезу H0 статистики Дарбина-Уотсона

[AIC, DU] = AIC\_test\_ARp(data, 10, cor);

y\_pred\_ARp = predict\_ARp(coef, data, 25);

% Второе задание

q = 1;

m = 10;

[cov\_2, cor\_2] = find\_characteristics(data, m);

coef = find\_params\_ARMA\_model(data, cov\_2, 1, q);

for p = 1:9

for m = 1:9

if m-p-q > 0

BP\_statistics(data, cov\_2, m, p, q);

end

end

end

[AIC\_2, DU\_2] = AIC\_test\_ARMA\_model(data, 9, q, cov\_2);

y\_pred = create\_ARMA\_model(data, cov\_2, 9, q);

create\_ARMA\_plot(data, y\_pred);

y\_pred\_ARMA = predict\_ARMA(data, cov\_2, 2, q);

predict\_ARMA\_plot(data, y\_pred\_ARMA);

% Третье задание

new\_data = zeros(1, length(data)-1);

for i = 2:length(data)

new\_data(i-1) = (data(i) - data(i-1)) / data(i-1);

end

[E\_5, E\_10, E\_15] = E(new\_data);

[D\_5, D\_10, D\_15] = D(new\_data);

k = 15;

sigma = zeros(1, 8);

for i = 23:-1:16

sum\_in\_range = 0;

for j = 1:k

sum\_in\_range = sum\_in\_range + (new\_data(1, i-j) - (sum(new\_data(1, i-k:i-1)) / 15))^2;

end

sigma(1, i-k) = 1 / (k-1) \* sum\_in\_range;

end

u\_square = new\_data.^2;

u\_square\_sigma = new\_data(16:23).^2 ./ sigma;

[cov\_3, cor\_3] = find\_characteristics(u\_square, 5);

[cov\_4, cor\_4] = find\_characteristics(u\_square\_sigma, 5);

LB\_statistics(cor\_3, length(u\_square));

LB\_statistics(cor\_4, length(u\_square\_sigma));

y\_pred\_GARCH = predict\_GARCH(data, sigma, new\_data);

predict\_GARCH\_plot(data, y\_pred\_GARCH);

frcst = model\_GARCH(new\_data);

predict\_GARCH\_plot(data, y\_pred\_GARCH);

*ADF\_test.m*

function gamma = ADF\_test(y, cor)

for p = 1:10

coef = find\_params\_ARp\_model(y, cor, p);

a1 = coef(2);

X = zeros(length(y), length(p));

h = ARp\_model(coef, y);

X\_centr = [h - mean(h)];

c = inv(X\_centr \* transpose(X\_centr));

s = sqrt(c(1, 1) / (length(y) - 1));

gamma = (a1 - 1) / s;

if gamma < -1.95

fprintf('При p = %d, отклоняем нулевую гипотезу о нестационарности данных так как: %s < -1.95. \n', p, gamma);

else

fprintf('При p = %d, принимаем нулевую гипотезу о нестационарности данных так как: %s < -1.95. \n', p, gamma);

end

*AIC\_test\_ARMA\_model.m*

function [AIC, DU] = AIC\_test\_ARMA\_model(data, p, q, cov)

AIC = zeros(1, p);

DU = zeros(1, p);

T = length(data);

for p = p:-1:1

coef = find\_params\_ARMA\_model(data, cov, p, q);

AIC(p) = 2 \* (p+q) / T + log(sum(([data - mean(data)] - ARMA\_model(coef, data)).^2)/T);

DU(p) = DU\_test(data, ARMA\_model(coef, data));

end

end

*AIC\_test\_Arp.m*

function [AIC, DU] = AIC\_test\_ARp(data, p, cor)

AIC = zeros(1, p);

DU = zeros(1, p);

T = length(data);

for p = p:-1:1

coef = find\_params\_ARp\_model(data, cor, p);

AIC(p) = 2 \* p / T + log(sum((data - ARp\_model(coef, data)).^2)/T);

DU(p) = DU\_test(data, ARp\_model(coef, data));

end

end

*ARMA\_model.m*

function y\_pred = ARMA\_model(coef, data)

coef = coef(1:length(coef)-1);

W = [data - mean(data)];

y\_pred = zeros(1, length(data));

X = zeros(length(data), length(coef));

for i = 1:length(coef)

X(:,i) = [zeros(1, i) W(1:length(data)-i)];

end

y\_pred = transpose(X \* transpose(coef));

end

*ARp\_model.m*

function y\_pred = ARp\_model(coef, y)

coef = coef(1:length(coef));

X = zeros(length(y), length(coef)-1);

for i = 1:length(coef)-1

X(:,i) = [zeros(1, i), y(1:length(y)-i)];

end

one\_col = ones(length(y), 1);

X = [one\_col, X];

y\_pred = transpose(X \* transpose(coef));

end

*BP\_statistics.m*

function BP\_statistics(data, cov, m, p, q)

n = length(data);

coef = find\_params\_ARMA\_model(data, cov, p, q);

y\_pred = ARMA\_model(coef, data);

W = [data - mean(data)];

r = zeros(1, m);

for k = 1:m

sum = 0;

sum\_under = 0;

for i = k+1:n

sum = sum + (W(i) - y\_pred(i)) \* (W(i-k) - y\_pred(i-k));

end

for i = 1:n

sum\_under = sum\_under + (W(i) - y\_pred(i))^2;

end

r(k) = sum / sum\_under;

end

sum = 0;

for i = 1:m

sum = sum + r(i)^2;

end

gamma = n \* sum;

if gamma < chi2inv(0.95, m-p-q)

fprintf('При %d: принимаем гипотезу о равенстве нулю первых %g автокорреляций так как: %s < %f. \n', p, m, gamma, chi2inv(0.95, m-p-q));

else

fprintf('При %d: отклоняем гипотезу о равенстве нулю первых %g автокорреляций так как: %s > %f. \n', p, m, gamma, chi2inv(0.95, m-p-q));

end

end

*create\_ARMA\_model.m*

function y\_pred = create\_ARMA\_model(data, cov, p, q)

coef = find\_params\_ARMA\_model(data, cov, p, q);

y\_n = ARMA\_model(coef, data);

theta = coef(length(coef));

disp\_eps = var([data - mean(data)] - y\_n) / (1 + theta^2);

eps\_col = [zeros(1, 1) normrnd(0, disp\_eps, [1 23])];

W = [data - mean(data)];

y\_pred = zeros(1, length(data));

X = zeros(length(data), length(coef));

X(:, length(coef)) = (-1) \* eps\_col;

for i = 1:length(coef)-1

X(:,i) = [zeros(1, i) W(1:length(data)-i)];

end

y\_pred = transpose(X \* transpose(coef)) + mean(data);

end

*create\_ARMA\_plot.m*

function create\_ARMA\_plot(data, y\_pred)

t = 1:length(data);

figure('Color', 'w')

hold on

plot(t, data, Color='red')

plot(t, y\_pred, Color='blue')

hold off

grid on

grid minor

title('Модель ARMA(1,1)');

legend('Исходные данные', 'модель ARMA(1,1)');

xlabel('t')

ylabel('y')

end

*create\_plot.m*

function create\_plot(data)

figure('Color', 'w')

hold on

plot(data, Color='red')

hold off

grid on

grid minor

title('Канадский доллар');

xlabel('Номер дня');

ylabel('Цена, руб.');

*D.m*

function [D\_5, D\_10, D\_15] = D(data)

n = length(data);

D\_5 = var(data(n-4:n), 1);

D\_10 = var(data(n-9:n), 1);

D\_15 = var(data(n-14:n), 1);

end

*DU\_test.m*

function gamma = DU\_test(y, y\_pred)

e = y\_pred - y;

gamma = 0;

sum\_gamma = 0;

n = length(y);

for i = 2:n

gamma = gamma + (e(i) - e(i-1))^2;

sum\_gamma = sum\_gamma + e(i)^2;

end

gamma = gamma / (sum\_gamma + e(1)^2);

end

*E.m*

function [E\_5, E\_10, E\_15] = E(data)

E\_5 = mean(data(length(data)-4:length(data)));

E\_10 = mean(data(length(data)-9:length(data)));

E\_15 = mean(data(length(data)-14:length(data)));

end

*find\_characteristics.m*

function [cov, cor] = find\_characteristics(y, m)

n = length(y);

y\_mean = mean(y);

cov = zeros(1, m+1);

cor = zeros(1, m+1);

for i = 1:m+1

sum = 0;

for j = 1:n-(i-1)

sum = sum + (y(j) - y\_mean) \* (y(j+(i-1)) - y\_mean);

end

cov(i) = sum / n;

end

for i = 1:m+1

cor(i) = cov(i) / cov(1);

end

end

*find\_params\_ARMA\_model.m*

function coef = find\_params\_ARMA\_model(data, cov, p, q)

b = cov(q+2:q+p+1);

A = zeros(p);

for i = 1:p

for j = 1:p

if q+i-j-1 >= 0

A(i,j) = cov(i-j+2);

else

A(i,j) = cov(j-i+2);

end

end

end

coef\_1 = A \ transpose(b);

W = [data - mean(data)];

y = zeros(1, length(data));

X = zeros(length(data), length(coef\_1)+1);

X(:, 1) = W;

for i = 2:length(coef\_1)+1

X(:,i) = (-1) \* [zeros(1, i-1) W(1:length(data)-i+1)];

end

y = transpose(X \* [1; coef\_1]);

[cov\_2, cor\_2] = find\_characteristics(transpose(y), p);

coef\_2 = (sqrt(1 - 4 \* cor\_2(2)^2) - 1) / (2 \* cor\_2(2));

coef = [transpose(coef\_1) coef\_2];

end

*find\_params\_ARp\_model.m*

function coef = find\_params\_ARp\_model(data, cor, p)

coef = zeros(1, (p+1));

b = transpose(cor(2:(p+1)));

A=zeros(p);

for i = 1:p

for j = 1:p

if i >= j

A(i,j) = cor(i-j+1);

else

A(i,j) = cor(j-i+1);

end

end

end

coef(2:(p+1)) = transpose(A\b);

coef(1) = mean(data)\*(1 - sum(coef(2:length(coef))));

end

*LB\_statistics.m*

function LB\_statistics(r, T)

sum = 0;

for k = 1:length(r)-1

sum = sum + r(k+1)^2 / (T-k);

end

q = sum \* (T + 2) \* T;

chi = chi2inv(0.95, length(r)-1-1-1);

if q > chi

fprintf('Отклоняем гипотезу о случайности данных так как: %s > %d. \n', q, chi);

else

fprintf('Принимаем гипотезу о случайности данных так как: %s < %d. \n', q, chi);

end

end

*model\_GARCH.m*

function frcst = model\_GARCH(data)

model = garch('garchlags', 1, 'archlags', 1);

[estM1, H, logL, info] = estimate(model, transpose(data), 'Display', {'params'});

frcst = forecast(estM1, 1, transpose(data));

predict\_GARCH\_plot(data, frcst);

end

*predict\_ARMA.m*

function y\_pred\_25 = predict\_ARMA(data, cov, p, q)

coef = find\_params\_ARMA\_model(data, cov, p, q);

y\_n = ARMA\_model(coef, data);

theta = coef(length(coef));

W = [data - mean(data)];

disp\_eps = var(W - y\_n) / (1 + theta^2);

y\_pred\_25 = normrnd(0, disp\_eps) \* theta;

for i = length(coef)-1:-1:1

y\_pred\_25 = y\_pred\_25 + coef(i) \* W(i);

end

y\_pred\_25 = y\_pred\_25 + mean(data);

end

*predict\_ARMA\_plot.m*

function predict\_ARMA\_plot(data, y\_pred)

t = 1:length(data);

figure('Color', 'w')

hold on

plot(t, data, Color='red')

plot(25 , y\_pred, 'bo')

plot(25, 51.632, '\*')

hold off

grid on

grid minor

title('Предсказание модели');

legend('Исходные данные', 'Предсказанное значение ARMA(1,1) модели','Statistica');

xlabel('t')

ylabel('y')

end

*predict\_ARp.m*

function y\_pred = predict\_ARp(coef, data, t)

y\_pred = 0;

for i = 1:length(coef)-1

y\_pred = y\_pred + coef(i+1) \* data(t-i);

end

end

*predict\_GARCH.m*

function y\_pred = predict\_GARCH(data, sigma, u\_n)

model = garch('garchlags', 1, 'archlags', 1);

[estM1, H, logL, info] = estimate(model, transpose(u\_n), 'Display', {'params'});

sigma\_n = sum(sigma/length(sigma)) \* info.X(1) + u\_n(23)^2 \* info.X(3) + sigma(1) \* info.X(2);

new\_u\_n = sigma\_n \* normrnd(0, 1, 1);

y\_pred = new\_u\_n \* data(length(data)) + data(length(data));

end

*predict\_GARCH\_plot.m*

function predict\_GARCH\_plot(data, y\_pred)

t = 1:length(data);

figure('Color', 'w')

hold on

plot(t, data, Color='red')

plot(25, y\_pred, 'bo')

hold off

grid on

grid minor

title('Предсказание модели');

legend('Исходные данные', 'Предсказанное значение GARCH(1,1) модели');

xlabel('t')

ylabel('y')

end

*Q\_statistics.m*

function Q\_statistics(r, T)

sum = 0;

for k = 1:length(r)-1

sum = sum + r(k+1)^2 / (T-k);

end

q = sum \* (T + 2) \* T;

chi = chi2inv(0.95, length(r)-1);

if q > chi

fprintf('Отклоняем гипотезу о случайности данных так как: %s > %d. \n', q, chi);

else

fprintf('Принимаем гипотезу о случайности данных так как: %s < %d. \n', q, chi);

end

end