Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Томский политехнический Университет»



Инженерная школа ядерных технологий

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

**Лабораторная работа №5**

Формирование портфеля ценных бумаг

методом Марковица

по дисциплине:

**Теория случайных процессов**

Вариант 17

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Выполнил:** |  | | | | |
| Студент группы | 0В01 |  | Саматов Д.С. |
|  |  |  |
| **Проверил:** | Крицкий О.Л. | | | | |
| преподаватель |  |  |  |  |  | |
|  |  |  |  |  |  | |

Томск 2023 г.

# Задание:

1. Собрать исторические данные котировок ценных бумаг, входящих в индекс ММВБ-10 (база индекса <http://fs.moex.com/files/2910>, выбирайте соответствующий период времени). Данные доступны в открытом виде на ФИНАМ.РУ (<https://www.finam.ru/profile/moex-akcii/sberbank_sber-smal/export/> и по аналогии - другие).
2. Расcчитать доходности входящих в индекс акций за период *T* (см. табл. 1), построить оценку годовой матрицы ковариаций в этот период времени.
3. Для годовой матрицы ковариаций найти ее максимальное собственное число λ (численно оно равно не уменьшаемому систематическому, рыночному риску портфеля ваших активов). Переведя λ из долей в проценты, сравнить его с заданным пороговым уровнем волатильности σ портфеля (табл. 1). Если заданное σ портфеля меньше уровня систематического риска λ, то вам необходимо увеличить σ портфеля до уровня λ.
4. Ограничивая волатильность портфеля величиной σ (табл. 1), найти весовые коэффициенты портфеля, максимизируя его доходность и выбирая только положительные коэффициенты, если это возможно.
5. Расcчитать динамику стоимости построенного портфеля в первый месяц после даты формирования, нормировав его стоимость на дату формирования до единицы. Изобразить полученные значения стоимости порфтеля в виде графика.

Добавить в построенный портфель безрисковый актив (облигацию) со средней доходностью 9%. Пересчитать доли и найти ожидаемую доходность инвестиций.

Таблица 1

ВАРИАНТЫ РАСЧЕТА ЗАДАЧ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варианта | Период *T* | Волатильность σ, % |
| 17 | 01.01.2021-30.06.2021 | 40 |

**Теоретическое содержания:**

**Портфельное инвестирование**

Рассмотрим математическую модель, разработанную Марковцом для решения задачи определения наиболее оптимальной структуры инвестиционного портфеля ценных бумаг.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где – сумма капитала, – капитал, потраченный на покупку i-го актива

Сумма долей . В случае, если , то модель Марковица будет неклассической.

Пусть – стоимость i-ой ценной бумаги, которую мы вкладываем в портфель, – ценовые приращения для котировок i-ой ценной бумаги, – доля i-ой ценной бумаги,

Запишем формулы для безразмерного портфеля ценных бумаг (2) и стоимости портфеля (3).

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Введем обозначения:

.

Ожидаемая доходность портфеля: .

Дисперсия портфеля: .

В классической модели под мерой риска понимается матрица ковариации, риск портфеля обуславливается волатильностью. Если мы увеличиваем количество акций, то уменьшаем рыночный риск. Диверсификация (распределение капитала) уменьшает рыночный риск.

Формирование портфеля возможно при решении одной из трех задач оптимизации. Рассмотрим каждую из них:

1. Найти минимум по всем при следующих ограничениях: , где – заданный уровень доходности и
2. Найти максимум по всем при следующих ограничениях: ,
3. Оптимизация для смешанного портфеля с безрисковым активом. Найти максимум при условии , где – непринятие риска инвестором.

**Портфельное инвестирование с безрисковым активом**

Добавим в портфель с долями  *–* доли рисковых активов.

– доля безрискового актива;

*–* доходность;

Тогда доходность портфеля составит: – доходность портфеля, при условии .

Рассмотрим 3 задачу оптимизации и найдем максимум при условии . Пусть – задаваемая доходность. Задача имеет смысл только при , где – ожидаемая доходность. Пусть – избыточная доходность безрискового актива. Найдем .

Составим систему , где – ковариация между и , . Получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Рассмотрим тангенциальный портфель:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

(для случаев с отрицательными долями ). Такой портфель не зависит от уровня , и сумма всех долей портфеля равна единицы.

Найдем , для этого запишем ожидаемую доходность и . Необходимые параметры для портфеля : и . Из последнего соотношения находим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

**Ход работы:**

1. Данные котировок ценных бумаг возьмем из базы индекса за 1 квартал 2021 года, SecID и расшифровка представлены в табл. 2.

Таблица 2

SecID и расшифровка акций

|  |  |
| --- | --- |
| SecID | Расшифровка |
| SBER | Сбербанк |
| GAZP | Газпром |
| YNDX | Яндекс |
| LKOH | Лукойл |
| GMKN | Норильский Никель |
| TATN | Татнефть |
| SBERP | Сбербанк (привилегированный) |
| POLY | Полиметалл |
| PLZL | Полюс Золото |
| AFLT | Аэрофлот |

1. Перейдем к ценовым приращениям , для которых рассчитаем годовые доходности как среднее значение относительных приращений, умноженные на 365 (так как год не високосный). Результат расчета представлен в табл. 3.

Таблица 3

Годовые доходности

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| SBER | GMKN | GAZP | LKOH | YNDX | SBERP | TATN | PLZL | POLY | AFLT |
| 0,4589 | 0,1120 | 0,8951 | 0,9194 | 0,0446 | 0,4192 | 0,1753 | -0,3166 | -0,3776 | -0,1224 |

С помощью пакета «Анализ данных», встроенного в Excel, также рассчитана годовая матрица ковариаций, представленная в табл. 4. Стоит отметить, что после построения данной матрицы необходимо каждое ее значение умножить на количество торговых дней в году. В данном случае их было 253.

Таблица 4

Годовая матрица ковариации

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | SBER | GMKN | GAZP | LKOH | YNDX | SBERP | TATN | PLZL | POLY | AFLT |
| SBER | 0,1404 | 0,0180 | 0,0141 | 0,0142 | 0,0078 | 0,0256 | 0,0241 | 0,0021 | 0,0014 | 0,0055 |
| GMKN | 0,0180 | 0,1055 | 0,0229 | 0,0175 | 0,0218 | 0,0213 | 0,0257 | 0,0097 | 0,0213 | 0,0208 |
| GAZP | 0,0141 | 0,0229 | 0,0450 | 0,0308 | 0,0142 | 0,0195 | 0,0348 | 0,0117 | 0,0115 | 0,0141 |
| LKOH | 0,0142 | 0,0175 | 0,0308 | 0,0744 | 0,0157 | 0,0212 | 0,0460 | 0,0066 | 0,0093 | 0,0115 |
| YNDX | 0,0078 | 0,0218 | 0,0142 | 0,0157 | 0,0746 | 0,0084 | 0,0092 | 0,0105 | 0,0093 | 0,0114 |
| SBERP | 0,0256 | 0,0213 | 0,0195 | 0,0212 | 0,0084 | 0,0310 | 0,0234 | 0,0060 | 0,0073 | 0,0117 |
| TATN | 0,0241 | 0,0257 | 0,0348 | 0,0460 | 0,0092 | 0,0234 | 0,0801 | 0,0114 | 0,0113 | 0,0138 |
| PLZL | 0,0021 | 0,0097 | 0,0117 | 0,0066 | 0,0105 | 0,0060 | 0,0114 | 0,0515 | 0,0388 | 0,0098 |
| POLY | 0,0014 | 0,0213 | 0,0115 | 0,0093 | 0,0093 | 0,0073 | 0,0113 | 0,0388 | 0,0640 | 0,0108 |
| AFLT | 0,0055 | 0,0208 | 0,0141 | 0,0115 | 0,0114 | 0,0117 | 0,0138 | 0,0098 | 0,0108 | 0,0332 |

1. Для годовой матрицы ковариаций найдем ее максимальное собственное число , так как σ портфеля больше уровня систематического риска λ, то не нужно увеличивать σ до уровня . Код для нахождения представлен в Приложении 1.
2. С помощью пакета «Поиск решений», найдем весовые коэффициенты портфеля, решая вторую оптимизационную задачу (условия: , ). Результат оптимизации представлен в табл. 5.

Таблица 5

Весовые коэффициенты

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| SBER | GMKN | GAZP | LKOH | YNDX | SBERP | TATN | PLZL | POLY | AFLT |
| 0,00 | 0,00 | 0,31 | 0,69 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

Получаем, что в итоговый портфель будут входить только акции Газпрома и Лукойла.

Доходность портфеля в данном случае составляет 91%.

1. Динамика стоимости построенного портфеля в первый месяц после даты формирования рассчитывается по формуле 3. Нормировав его стоимость на дату формирования, изобразим полученные значения стоимости портфеля, рис. 1. Стоимость за рассматриваемый период уменьшилась.

Рисунок 1 – Динамика стоимости портфеля

1. Добавим в построенный портфель безрисковый актив (облигацию) со средней доходностью 9%. Вычислим избыточную доходность безрискового актива , табл. 6. Кроме этого пересчитаем доли акций по формуле 4, приняв , табл. 7. Код для расчетов представлен в Приложении 2.

Таблица 6

Избыточная доходность безрискового актива

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| SBER | GMKN | GAZP | LKOH | YNDX | SBERP | TATN | PLZL | POLY | AFLT |
| 0.3689 | 0.0221 | 0.8051 | 0.8293 | -0.0454 | 0.3292 | 0.0852 | -0.4065 | -0.4676 | -0.2123 |

Таблица 7

Доли для рисковых активов

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| SBER | GMKN | GAZP | LKOH | YNDX | SBERP | TATN | PLZL | POLY | AFLT |
| 1.4098 | -0.1452 | 27.3704 | 11.5712 | -3.5610 | 3.8124 | -14.8089 | -5.1271 | -5.9795 | -12.6897 |

Построим тангенциальный портфель по формуле 5. Результат построения портфеля представлен в табл. 8.

Таблица 8

Доли для рисковых активов тангенциального портфеля

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| SBER | GMKN | GAZP | LKOH | YNDX | SBERP | TATN | PLZL | POLY | AFLT |
| 0.7611 | -0.0783 | 14.7769 | 6.2471 | -1.9225 | 2.0582 | -7.9951 | -2.7680 | -3.2283 | -6.8510 |

Рассчитаем на его основе параметры портфелей. Результаты расчетов приведены в табл. 9.

Таблица 9

Параметры портфелей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Ожидаемая доходность тангенциального портфеля | 21.6 |
|  | Волатильность тангенциального портфеля | 3.41 |
|  | Ожидаемая доходность портфеля | 2.61 |

Таким образом, ожидаемая доходность портфеля с безрисковым активом будет равна 261%.

**Вывод:**

В ходе выполнения лабораторной работы был сформирован портфель ценных бумаг методом Марковица, доходность которого составила 91%. Также был сформирован портфель с безрисковым активом, доходность которого превышает предыдущий почти в 3 раз.

Такой результат скорее всего связан с тем, что мы берем на себя дополнительные риски, добавляя в портфель безрисковой актив.

**Приложение 1**

covMatrix = First[Import["E:\\Studies\\ТСП\\ЛБ№5\\Лист Microsoft Excel.xlsx"]]

λ = Eigenvalues[covMatrix]

Max[λ\*100]

**Приложение 2**

r = 0.09;

sigma\_x = 0.4;

tau = 0.5;

mu\_r = mu - r;

X = H^(-1) \* transpose(mu\_r) / (2 \* tau);

S = X / sum(X);

mu\_s = mu \* S;

sigma\_s = (transpose(S) \* H \* S)^0.5;

alpha\_0 = 1 - sigma\_x / sigma\_s;

mu\_x = alpha\_0 \* r + (1 - alpha\_0) \* mu\_s;